ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

PIERRE DUHEM

Sur les oscillations électriques

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 6 (1914), p. 177-300
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1914_3_6__177_0>

SUR LES OSCILLATIONS ÉLECTRIQUES

PAR PIERRE DUHEM

INTRODUCTION

L'étrange engouement qui favorise les illogiques doctrines de Maxwell a fait délaisser, d'une manière presque complète, la seule théorie électrodynamique qui fût construite d'une manière raisonnable, la théorie de Helmholtz; à ce qu'avait donné l'auteur de cette théorie, presque personne n'a rien ajouté; elle semble capable, cependant, de fournir un ample développement et d'éclairer une partie de la Physique, demeurée fort obscure jusqu'ici.

A poursuivre les conséquences de la théorie de Helmholtz, nous avons consacré divers écrits et, tout récemment, deux Mémoires intitulés : *Sur le diamagnétisme* (1) et *Le problème général de l'Électrodynamique pour un système de corps immobiles* (2). Le présent travail fera, pour ainsi dire, suite à ces deux-là; il aura pour objet l'étude des oscillations électriques.

Tous les systèmes employés par les physiciens dans la production et dans l'analyse des oscillations électriques comportent des corps conducteurs qui y jouent un rôle essentiel. Les lois auxquelles obéissent les oscillations électriques au sein de systèmes où ne figure aucun corps conducteur ne peuvent donc avoir qu'un intérêt purement théorique; mais cet intérêt est très grand. Plus simple que l'étude des oscillations électriques sur les corps conducteurs, l'étude des oscillations électriques au sein de masses diélectriques est très propre à éclairer la première, soit par les analogies qu'elle présente avec elle, soit par les différences qui l'en séparent. C'est pourquoi nous avons consacré toute la première partie de ce travail à dire comment

---

(1) *Sur le Diamagnétisme* (Journal de Mathématiques, 6e série, t. IX, 1913, p. 89).

(2) *Le problème général de l'Électrodynamique pour un système de corps immobiles* (Journal de Mathématiques, 6e série, t. X, 1914, p. 347). Les théorèmes énoncés et démontrés dans ce Mémoire doivent tous être restreints au cas où le système renferme un corps homogène unique; en effet, la condition aux limites (37) n'est point exacte; il y manque, comme dans les conditions (34) et (35), des termes qui dépendent des fonctions $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ de Helmholtz.

les oscillations électriques se comportaient au sein d'un système exclusivement formé de corps non conducteurs.

Nous avons examiné, d'abord, le cas le plus simple qui se puisse proposer, celui où le système se compose d'un seul corps homogène.

Sur un diélectrique homogène unique, il y a deux manières très naturelles de déterminer sans ambiguïté le champ électrique; l'une consiste à se donner, en tout point de la surface terminale et à chaque instant, les trois composantes du champ électrique; l'autre consiste à se donner les trois composantes du champ magnétique et la composante normale du champ électrique. Des deux problèmes auxquels on est ainsi conduit, le premier trouve son analogue dans un problème de Mécanique bien connu, celui qui consiste à déterminer les petits mouvements d'un corps élastique, isotrope, homogène, dont les divers éléments de masse ne sont soumis à l'action d'aucune force, et dont chaque point de la surface éprouve un déplacement connu.

Ces deux manières de déterminer, sur un corps diélectrique, le mouvement électrique compatible avec des conditions initiales connues correspondent à deux manières d'y entretenir un état vibratoire électrique, à deux manières d'en définir les vibrations électriques propres.

Définie de la première manière, une vibration électrique propre est celle que le corps peut éprouver quand, en chaque point de sa surface, on maintient le champ électrique constamment égal à zéro. Une telle vibration électrique propre suit les mêmes lois que les vibrations mécaniques infiniment petites d'un corps élastique, isotrope, homogène, dont la surface est maintenue immobile. Les périodes propres pour lesquelles ces dernières vibrations sont possibles ont été déterminées par Henri Poincaré dans ses *Leçons sur la Théorie de l'Élasticité;* l'analyse de l'illustre géomètre peut s'appliquer de toutes pièces à l'étude des vibrations électriques définies de la première façon.

D'une autre manière, on peut entendre par vibrations électriques propres celles dont le corps diélectrique considéré est susceptible lorsqu'en chaque point de sa surface on maintient constamment nulles la composante normale du champ électrique et les trois composantes du champ magnétique; ces nouvelles vibrations propres ne suivent pas du tout les mêmes lois que les premières.

Pour marquer les propriétés essentielles de ces nouvelles vibrations, rappelons qu'au sein d'un diélectrique exempt de conductibilité, deux vitesses de propagation doivent être distinguées; l'une, $\mathfrak{T}$, est la vitesse de propagation des champs transversaux; l'autre, $\mathfrak{L}$, est la vitesse de propagation des champs longitudinaux.

Cela posé, deux problèmes purement mécaniques peuvent être considérés.

Dans le premier de ces problèmes, un vase absolument rigide, de même forme que le corps diélectrique étudié, est rempli d'un fluide compressible homogène dans lequel la vitesse du son aurait pour valeur $\mathfrak{L}$. Dans un tel *vase absolument fermé,* pourraient se produire certaines vibrations sonores qui lui soient propres. Les périodes, en nombre illimité, de ces vibrations sont ce que nous appelons les *périodes longitudinales propres* de notre diélectrique.

Dans le second problème, nous considérons encore un fluide homogène et compressible de même figure que notre diélectrique, mais nous supposons que la vitesse du son y soit égale à $\mathfrak{T}$; de plus, au lieu de maintenir rigoureusement immobile la surface qui enclôt ce fluide, nous maintenons à la pression, en chaque point de cette surface, une valeur invariable. Nous obtenons ainsi ce qu'on pourrait appeler un *vase absolument ouvert*. Dans un tel vase, se produiraient des vibrations sonores propres dont les périodes, en nombre illimité, sont ce que nous nommons les *périodes transversales propres* de notre diélectrique.

Ces deux sortes de périodes propres, longitudinales et transversales, interviennent dans l'étude des vibrations électriques propres définies de la seconde façon. Cette étude conduit au résultat suivant :

Dans les conditions fixées par la seconde définition, toute vibration électrique propre au système a pour période une des périodes longitudinales; le champ électrique qui constitue cette vibration est toujours un champ longitudinal; il est rectiligne et a même phase en tous les points du corps diélectrique.

L'étude des vibrations électriques sur un corps diélectrique unique ne suffirait pas à l'examen de la moindre expérience. Si l'on veut se rapprocher des conditions expérimentales, on doit considérer un système formé de plusieurs corps diélectriques dont un au moins, qui enveloppe tous les autres, s'étend à l'infini. Des vibrations électriques peuvent être entretenues sur un tel système par les actions électriques vibratoires d'un excitateur qu'on suppose infiniment éloigné. Sur le système, certaines vibrations électriques se peuvent produire lors même que l'action de l'excitateur serait supprimée; ce sont les *vibrations propres* du système. Si l'excitateur exerce des actions vibratoires presque synchrones à une vibration propre du système, celui-ci devient le siège d'une vibration électrique extrêmement intense; il y a *résonnance électrique;* l'existence et les propriétés du phénomène de la résonnance électrique dépendent donc de l'existence et des propriétés des vibrations propres.

Or, ce que généralisent les propriétés des vibrations propres d'un système infiniment étendu et formé de plusieurs corps, ce ne sont pas les propriétés des vibrations propres qui, sur un corps unique, résultent de la première définition; ce sont les propriétés des vibrations propres définies de la seconde manière.

En effet, on peut, tout d'abord, en notre système complexe et illimité, considérer des *périodes longitudinales propres* qui soient la généralisation des périodes longitudinales propres à un corps unique. Cela fait, on peut énoncer les propositions suivantes :

Sur un système illimité, formé de plusieurs corps diélectriques dont aucun n'offre de conductibilité, toute vibration électrique propre a pour période une des périodes longitudinales qui sont propres au système; une vibration électrique propre est toujours constituée par un champ électrique longitudinal ; ce champ est rectiligne et sa phase est la même en tous les points du système.

Partant, pour qu'un excitateur produise une résonnance électrique dans un système dénué de toute conductibilité, il faut que l'influence oscillatoire exercée par cet excitateur soit sensiblement synchrone à l'une des périodes longitudinales propres au système oscillant.

Mais les expériences sur la résonnance électrique ne se font pas, en général, avec des systèmes dénués de conductibilité; c'est avec des corps conducteurs qu'on les exécute. Il convient donc de reprendre l'analyse que nous venons de résumer en supposant que quelques-uns, au moins, des corps contenus dans le système, soient conducteurs ; c'est l'objet de notre seconde partie.

L'étude des systèmes doués de conductibilité se peut mener suivant le même ordre que l'étude des systèmes dénués de conductibilité. On peut examiner, d'abord, les propriétés d'un corps homogène unique, puis celles d'un ensemble illimité contenant plusieurs corps homogènes. Lorsqu'on a seulement affaire à un corps homogène unique, on peut y déterminer le champ électrique en se donnant à chaque instant, en chaque point de la surface terminale, les trois composantes de ce champ ; on peut aussi, en chacun de ces points et à chaque instant, se donner la composante normale du champ électrique et les trois composantes du champ magnétique. Les diverses manières de définir les vibrations propres qui ont été données pour les systèmes dénués de toute conductibilité se peuvent étendre de la sorte aux systèmes contenant des corps conducteurs.

Or, l'étude de ces systèmes conduit, tout d'abord, à la proposition suivante :

Sur un corps conducteur ou sur un système contenant des corps conducteurs, aucune vibration électrique propre et, plus généralement aucun champ électrique propre, périodiquement variable, ne se peut produire. Là où la conductibilité n'est pas entièrement absente, le mouvement électrique tend toujours à s'évanouir.

Il semble, au premier abord, que cette conclusion soit incompatible avec les phénomènes de résonnance électrique dont Heinrich Hertz nous a enseigné à reconnaître l'existence et les propriétés. Mais cette incompatibilité n'est qu'apparente. Pour que les phénomènes de résonnance électrique soient explicables, il n'est pas nécessaire qu'un système contenant des corps conducteurs puisse être le siège de champs électriques propres rigoureusement périodiques, rigoureusement vibratoires ; il suffit qu'on y puisse observer des champs électriques propres presque périodiques, des mouvements électriques propres différant très peu de mouvements vibratoires.

Or, pour qu'un système contenant des corps conducteurs puisse être le siège de mouvements propres presque périodiques ou quasi-vibratoires, il faut, nous le prouvons par diverses démonstrations, que deux conditions soient remplies.

En premier lieu, la constante k introduite par Helmholtz dans l'expression de la loi élémentaire de l'induction doit avoir une très grande valeur.

En second lieu, la constante ε' dont dépend l'action électrostatique mutuelle de deux charges électriques doit avoir une très grande valeur par rapport à la constante $\frac{a^2}{2}$ des actions électrodynamiques.

Pour quiconque admet la théorie électrodynamique de Helmholtz, ces deux propositions doivent être regardées comme établies par la seule existence, expérimentalement constatée, des phénomènes de résonnance électrique.

Or, comme nous l'avons montré ailleurs, ces deux propositions entraînent cette conséquence : Au sein d'un milieu conducteur, un champ électrique longitudinal, bien qu'étant rigoureusement incapable de présenter des ondes persistantes, se comporte sensiblement comme un champ qui se propagerait par ondes; et la vitesse de cette quasi-propagation longitudinale a pour valeur $\mathfrak{L} = \frac{2\varepsilon'}{a^2 k}$, en sorte qu'elle est la même pour tous les corps conducteurs; en outre, elle est sensiblement égale à la vitesse de véritable propagation d'un flux longitudinal quelconque au sein d'un milieu diélectrique dénué de conductibilité.

Il est désormais possible d'étendre à un corps conducteur unique ou à un système illimité contenant des corps conducteurs, la notion de *quasi-périodes propres longitudinales*. Dans le cas où le corps est unique, ces quasi-périodes sont égales aux périodes longitudinales qui seraient propres à un corps diélectrique de même forme.

On peut alors formuler les propositions suivantes :

Sur un corps conducteur unique, ou bien sur un système illimité en tous sens, qui contient des corps conducteurs, toute quasi-vibration électrique propre a pour période une des quasi-périodes longitudinales propres au système.

Cette quasi-vibration électrique propre est toujours constituée par un champ électrique longitudinal. Mais, en général, ce champ n'est pas rectiligne et sa forme change d'un point à l'autre du système.

Pour qu'un excitateur détermine, dans un système contenant des corps conducteurs, le phénomène de la résonnance électrique, il faut, on le voit, que l'influence oscillante de l'excitateur soit sensiblement synchrone à l'une des quasi-périodes longitudinales propres au système.

Aprés avoir ainsi résumé à grands traits les conclusious de notre analyse, disons quelques mots de l'histoire de chacune de ces conclusions.

L'hypothèse qui consiste à donner une très grande valeur à la constante ε' met sous une forme acceptable une supposition sur les actions diélectriques qui, prise au pied de la lettre, serait inadmissible, et qui a été plus ou moins explicitement proposée par Faraday et par Mosotti [1].

---

(1) Pierre DUHEM, *Les théories électriques de J. Clerk Maxwell. Étude historique et critique*, 1re partie, chap. I, § 4 (*Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. XXV, 2e partie, Mémoires, pp. 1-90, 1901).

Helmholtz a montré (1) qu'une partie des doctrines proposées par Maxwell coïncidait avec la forme limite que prend sa propre doctrine lorsqu'on y fait croître ε' au delà de toute limite. C'est ainsi que, dans ces conditions, la théorie de la propagation des champs électriques transversaux au sein des diélectriques, construite selon les principes de Helmholtz, a pour forme limite la théorie électrodynamique de la lumière de Maxwell. On peut le reconnaître en simplifiant d'abord les équations de Helmholtz par l'hypothèse que ε' a une très grande valeur, et en faisant usage de ces équations simplifiées pour étudier la réflexion et la réfraction des vibrations transversales; c'est ainsi qu'a fait M. H.-A. Lorentz (2). On peut aussi le reconnaître en développant d'une manière générale, selon la doctrine de Helmholtz, les lois de la réflexion et de la réfraction des vibrations électriques, et en introduisant seulement dans les formules finales la supposition que ε' est très grand (3).

Jusqu'ici, donc, la supposition que ε' a une très grande valeur s'est présentée comme un postulat introduit, dans l'Électrodynamique de Helmholtz, par le désir de tirer de cette Électrodynamique une théorie électromagnétique de la lumière. Cette même supposition se présente maintenant comme une conséquence forcée de cet enseignement expérimental incontestable : Des phénomènes de résonnance électrique se peuvent observer dans des systèmes contenant des corps conducteurs. La possibilité de tirer, de l'Électrodynamique de Helmholtz, une théorie électromagnétique de la lumière, résulte à son tour de cette conséquence, et sans aucune hypothèse nouvelle.

Helmholtz n'a jamais rien dit sur la valeur de la constante k; il s'est contenté de remarquer qu'on retrouvait certaines suppositions de Maxwell si l'on donnait à k la valeur de zéro.

Nous avions jadis fait la remarque (4) que, dans les corps conducteurs habituellement employés, en raison de la valeur de leur résistance spécifique, les champs électriques longitudinaux se comportent sensiblement comme s'ils se propageaient par ondes avec la vitesse $\mathfrak{L} = \frac{2\varepsilon'}{a^2 k}$.

---

(1) H. HELMHOLTZ, *Ueber die Gesetze der inconstantem elektrischen Ströme in körperlich ausgedehnten Leitern* (*Verhandlungen der naturhistorisch-medicinischen Vereins zu Heidelberg*, 21 janvier 1870, p. 89. — *Wissenschaftliche Abhandlungen*, Bd. I, p. 543). — *Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende leitende Körper* (*Borchardt's Journal für reine und angewandte Mathematik*, Bd. LXXII, p. 127 et p. 129. — *Wissenschaftliche Abhandlungen*, Bd. I, p. 625 et 628). — Voir aussi : H. POINCARÉ, *Électricité et Optique; II. Les théories de Helmholtz et les expériences de Hertz*, p. VI et p. 203. Paris, 1891.

(2) H.-A. LORENTZ, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, Bd. XXII, p. 25, 1877.

(3) Pierre DUHEM, *Sur la théorie électrodynamique de Helmholtz et la théorie électromagnétique de la lumière* (Archives Néerlandaises, série 2, t. V, p. 227, 1901).

(4) Pierre DUHEM, *Sur l'interprétation théorique des expériences hertziennes* (L'Éclairage électrique, t. IV, p. 494, 1895).

D'autre part, nous avions regardé certaines expériences bien connues de M. Blondlot comme équivalentes à cette loi : La vitesse de quasi-propagation des flux longitudinaux dans les conducteurs est égale à la vitesse de la lumière dans le vide, partant au coefficient v qui sert à passer des unités électrostatiques aux unités électromagnétiques.

Cette loi exigeait que la constante k de Helmholtz fût égale au pouvoir inducteur spécifique $(1 + 4\pi\varepsilon' K'_0)$ du vide; partant, qu'elle fût, comme $\varepsilon' K_0$, un très grand nombre [1].

Cette dernière proposition : k est un très grand nombre, se trouve maintenant établie par la seule existence de la résonnance électrique dans un système contenant des conducteurs, et sans aucun recours aux mesures de M. Blondlot; celles-ci demeureraient, d'ailleurs, nécessaires pour démontrer que k est égal au pouvoir inducteur spécifique du vide. Nous reviendrons ultérieurement, dans un autre Mémoire, sur ces mesures de M. Blondlot et sur l'interprétation qu'il convient d'en donner; ce qui sera dit au présent Mémoire ne dépendra point de cette interprétation.

D'ailleurs, de ce que ε' et k ont de très grandes valeurs, il résulte que sur un corps conducteur, les champs longitudinaux se comportent sensiblement comme s'ils se propageaient par ondes avec la vitesse $\mathfrak{L} = \frac{2\varepsilon'}{a^2 k}$, et cela, quel que soit l'ordre de grandeur de la résistance spécifique de ce corps.

On voit ainsi comment plusieurs des suppositions essentielles qui avaient été introduites en Électrodynamique, par Helmholtz ou par nous-même, à l'aide de considérations diverses et, parfois, quelque peu incertaines, se peuvent toutes tirer maintenant de cette seule donnée de l'expérience : Des effets de résonnance électrique se manifestent sur des corps conducteurs.

Dès 1895, dans notre article *Sur l'interprétation théorique des expériences hertziennes*, nous formulions, à titre de principe essentiel, cette proposition :

« *Dans les expériences hertziennes, les corps conducteurs nous paraissent agir surtout par les flux longitudinaux qui les traversent.* »

La présente analyse nous permet d'être encore plus catégorique [2] : Qu'on veuille étudier les phénomènes de résonnance électrique sur un système dénué de conductibilité ou qu'on prétende les analyser sur un système contenant des conducteurs, les seules périodes propres qu'on ait à considérer sont des périodes longitudinales; les seules vibrations propres qui se puissent produire sont constituées par des champs longitudinaux. En toutes circonstances, la théorie de la résonnance électrique dépend exclusivement des propriétés des champs longitudinaux.

---

(1) Pierre Duhem, *Sur la théorie électrodynamique de Helmholtz, loc. cit.*

(2) Toutefois, dans un travail ultérieur, nous serons conduits à rendre cette conclusion moins catégorique en lui imposant certaines restrictions.

On voit donc combien on se fourvoierait si l'on persistait à chercher dans l'Électrodynamique de Maxwell l'explication des oscillations électriques. Cette Électrodynamique déclare que tout champ électrique est transversale; elle exclut donc précisément ces champs longitudinaux qui, seuls, rendent compte des phénomènes de résonnance électrique.

Peut-être s'étonnerait-on que l'Électrodynamique de Helmholtz eût, pour expliquer ces effets, un pouvoir refusé à l'Électrodynamique de Maxwell. Souvent, en effet, on dit que l'Électrodynamique de Helmholtz tend vers l'Électrodynamique de Maxwell lorsque la constante ε' croît au delà de toute limite; or, précisément, nous avons attribué à la constante ε' une valeur très grande. C'est que le propos en question n'est pas absolument exact; il lui faut substituer celui-ci : Lorsque la constante ε' croît au delà de toute limite, une partie, mais une partie seulement de l'Électrodynamique de Helmholtz, celle qui formule les lois des champs transversaux, tend vers l'Électrodynamique de Maxwell; aussi, les vibrations lumineuses étant transversales, les principes de Helmholtz donnent-ils alors une théorie électromagnétique de la lumière qui concorde avec celle de Maxwell. Mais si grande qu'on suppose la valeur de la constante ε', l'Électrodynamique de Helmholtz continue, du moins en général, de considérer des champs longitudinaux qui sont inconcevables suivant les idées de Maxwell; à côté des vibrations transversales de la lumière, elle admet des vibrations longitudinales soumises à des lois qu'elle formule. Pour que l'Électrodynamique de Helmholtz coïncidât pleinement avec celle de Maxwell, il faudrait qu'elle déclarât impossibles les flux longitudinaux; il faudrait pour cela, comme Helmholtz l'a répété à plusieurs reprises, qu'on ne se contentât pas de donner à ε' une très grande valeur, mais encore qu'on prît la constante k égale à zéro. Alors, en effet, comme l'Électrodynamique de Maxwell, l'Électrodynamique de Helmholtz deviendrait incapable de rendre compte des phénomènes de résonnance électrique, car ceux-ci requièrent une très grande valeur de la constante k.

PREMIÈRE PARTIE

Les corps dénués de conductibilité.

CHAPITRE PREMIER

Le système est formé d'un corps diélectrique unique.

§ 1. — *Notations.*

[**1**] Comme dans nos précédents Mémoires, nous désignerons

par ε la constante des actions magnétiques,

par ε' la constante des actions électrostatiques,

par $\frac{a^2}{2}$ la constante des actions électrodynamiques,

par k la constante de Helmholtz,

par K le coefficient de polarisation magnétique,

par K' le coefficient de polarisation diélectrique,

par $\mu = 1 + 4\pi\varepsilon K$ la perméabilité magnétique,

par $D' = 1 + 4\pi\varepsilon' K'$ le pouvoir inducteur spécifique.

La stabilité de l'équilibre électrique et magnétique sur le corps ou sur le système de corps étudié exige, comme nous l'avons vu dans nos précédents Mémoires, qu'on ait

$$(1) \qquad k \geqq 0, \qquad \mu \geqq 0, \qquad K' \geqq 0.$$

Non seulement nous supposerons que ces conditions soient vérifiées, mais même, à moins d'avertissement contraire, nous supposerons l'exactitude des inégalités

$$(2) \qquad k > 0, \qquad \mu > 0, \qquad K' > 0.$$

Ces inégalités nous permettent d'écrire

$$(3) \qquad \mathfrak{T}^2 = \frac{1}{2\pi a^2 \mu K'},$$

$$(4) \qquad \mathfrak{L}^2 = \frac{D'}{2\pi a^2 k K'},$$

$\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{L}$ désignant deux quantités réelles et finies.

Soit W la fonction potentielle électrostatique totale qui, dans le cas d'un système purement diélectrique, se réduit à la fonction potentielle V' de la polarisation diélectrique. Les trois quantités

$$(5)\qquad X = -\varepsilon' \frac{\partial W}{\partial x}, \quad Y = -\varepsilon' \frac{\partial W}{\partial y}, \quad Z = -\varepsilon' \frac{\partial W}{\partial z}$$

sont les composantes du champ électrostatique.

Soient $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ les trois fonctions de Helmholtz; les trois quantités

$$(6)\qquad \mathcal{X} = -\frac{a}{\sqrt{2}} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}, \quad \mathcal{Y} = -\frac{a}{\sqrt{2}} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}, \quad \mathcal{Z} = -\frac{a}{\sqrt{2}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$$

sont les composantes du champ électrodynamique et électromagnétique.

Les trois quantités

$$(7)\qquad \xi = X + \mathcal{X}, \quad \eta = Y + \mathcal{Y}, \quad \zeta = Z + \mathcal{Z}$$

seront alors les composantes du champ électrique total.

Nous poserons :

$$(8)\qquad l = \frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad m = \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z}, \quad n = \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

Alors, si nous désignons par L, M, N les composantes du champ magnétique, nous aurons :

$$(9)\qquad l = \frac{\mu a}{\varepsilon' \sqrt{2}} \frac{\partial L}{\partial t}, \quad m = \frac{\mu a}{\varepsilon' \sqrt{2}} \frac{\partial M}{\partial t}, \quad n = \frac{\mu a}{\varepsilon' \sqrt{2}} \frac{\partial N}{\partial t}.$$

Enfin, nous poserons :

$$(10)\qquad \theta = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}.$$

§ 2. — *Équations du champ électrique total. Deux cas où la solution est déterminée sans ambiguïté.*

[**2**] D'après les équations (171) de notre Mémoire *Sur le diamagnétisme,* les trois composantes du champ électrique total vérifient, en chaque point d'un corps diélectrique privé de conductibilité, trois équations dont voici la première :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{2\pi a^2 \mu K'} \Delta \xi + \frac{\mu D' - k}{2\pi a^2 \mu k K'} \frac{\partial \theta}{\partial x}.$$

Mais on a identiquement

$$\Delta \xi = \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial m}{\partial z} + \frac{\partial n}{\partial y}.$$

L'équation précédente devient donc, en vertu des égalités (3) et (4), la première des équations

$$(11)\quad \begin{cases} \mathfrak{T}^2\left(\dfrac{\partial n}{\partial y}-\dfrac{\partial m}{\partial z}\right)+\mathfrak{L}^2\dfrac{\partial \theta}{\partial x}-\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=0, \\ \mathfrak{T}^2\left(\dfrac{\partial l}{\partial z}-\dfrac{\partial n}{\partial x}\right)+\mathfrak{L}^2\dfrac{\partial \theta}{\partial y}-\dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2}=0. \\ \mathfrak{T}^2\left(\dfrac{\partial m}{\partial x}-\dfrac{\partial l}{\partial y}\right)+\mathfrak{L}^2\dfrac{\partial \theta}{\partial z}-\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}=0. \end{cases}$$

Les deux dernières s'établissent d'une manière analogue.

[**3**] Multiplions ces équations respectivement par $\dfrac{\partial\xi}{\partial t}d\varpi$, $\dfrac{\partial\eta}{\partial t}d\varpi$, $\dfrac{\partial\zeta}{\partial t}d\varpi$, $d\varpi$ étant un élément de volume du diélectrique homogène et unique qui constitue le système; ajoutons membre à membre les résultats obtenus, intégrons pour le volume entier du système et, à l'aide d'intégrations par parties, transformons certains termes; nous trouvons l'égalité

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int\left[\mathfrak{L}^2\theta^2+\mathfrak{T}^2(l^2+m^2+n^2)+\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial t}\right)^2\right]d\varpi \\ -\mathfrak{L}^2\displaystyle\int[\xi\cos(N,x)+\eta\cos(N,y)+\zeta\cos(N,z)]\,\theta\,d\Sigma \\ +\mathfrak{T}^2\displaystyle\int\Big\{[\eta\cos(N,z)-\zeta\cos(N,y)]\,l+[\zeta\cos(N,x)-\xi\cos(N,z)]\,m \\ \qquad\qquad +[\xi\cos(N,y)-\eta\cos(N,x)]\,n\Big\}\,d\Sigma=0. \end{cases}$$

Dans cette égalité, $d\Sigma$ est un élément quelconque de la surface Σ qui borne le système; N est la demi-normale à cet élément, dirigée vers l'intérieur du système.

Cette égalité (12) va nous être particulièrement utile dans certains cas où les intégrales, étendues à la surface Σ, qui y figurent, sont égales à zéro.

La première intégrale s'annule lorsqu'on a, en tout point de la surface Σ, soit

$$(13)\qquad \theta=0,$$

soit

$$(14)\qquad \xi\cos(N,x)+\eta\cos(N,y)+\zeta\cos(N,z)=0.$$

La seconde intégrale s'annule lorsqu'on a, en tout point de la surface Σ, soit

$$(15)\qquad l=0,\qquad m=0,\qquad n=0,$$

soit

$$(16)\qquad \begin{cases} \eta \cos(\mathrm{N}, z) - \zeta \cos(\mathrm{N}, y) = 0, \\ \zeta \cos(\mathrm{N}, x) - \xi \cos(\mathrm{N}, z) = 0, \\ \xi \cos(\mathrm{N}, y) - \eta \cos(\mathrm{N}, x) = 0. \end{cases}$$

L'égalité (13) n'exprime pas une condition physique simple. Il n'en est pas de même des égalités (14), (15) et (16).

L'égalité (14) exprime qu'en tout point de la surface Σ, la composante normale du champ électrique est maintenue constamment égale à zéro.

En vertu des égalités (9), les égalités (15) peuvent s'écrire :

$$(17)\qquad \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial t} = 0.$$

Elles expriment donc qu'en chaque point de la surface Σ, la grandeur et la direction du champ magnétique demeurent invariables.

Enfin les égalités (16) expriment qu'en tout point de la surface Σ, le champ électrique est maintenu constamment normal à cette surface.

Si nous voulons donc que les intégrales étendues à la surface Σ disparaissent du premier membre de l'égalité (12), nous pourrons considérer deux combinaisons particulièrement intéressantes, qui sont les suivantes :

Combinaison A. — *Nous supposons* qu'on réunisse entre elles les conditions (14) et (16), c'est-à-dire *que le champ électrique soit maintenu constamment nul en chaque point de la surface* Σ.

Combinaison B. — *Nous supposons* qu'on unisse la condition (14) aux conditions (15) ou (17), c'est-à-dire *qu'en tout point de la surface* Σ, *le champ électrique demeure constamment tangent à cette surface, et que le champ magnétique y garde une grandeur et une direction constantes.*

Qu'on admette l'une ou l'autre de ces combinaisons, l'égalité (12) devient :

$$(18)\qquad \frac{d}{dt}\int\left[\mathfrak{L}^2\theta^2 + \mathfrak{T}^2(l^2+m^2+n^2) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)^2\right] d\varpi = 0.$$

[**4**] Considérons, sur le même corps diélectrique, deux mouvements électriques distincts, dont l'un corresponde au champ (ξ', η', ζ'), l'autre au champ (ξ'', η'', ζ''); posons :

$$(19)\qquad \xi = \xi'' - \xi', \qquad \eta = \eta'' - \eta', \qquad \zeta = \zeta'' - \zeta'.$$

Les équations (11) doivent être vérifiées, d'une part, par les quantités ξ', η', ζ', d'autre part, par les quantités ξ'', η'', ζ''; elles sont donc vérifiées, ainsi que l'égalité (12), par ξ, η, ζ.

Supposons, en outre, qu'on se trouve en l'un des deux cas suivants :

CAS A. — *En chaque point de la surface Σ, au cours des deux mouvements considérés, la grandeur et la direction du champ électrique varient suivant la même loi.*

C'est dire qu'en tout point de la surface Σ, le champ électrique ξ, η, ζ demeure constamment nul.

CAS B. — *En chaque point de la surface Σ, au cours des deux mouvements considérés, la composante normale du champ électrique, la grandeur et la direction du champ magnétique varient suivant la même loi.*

C'est dire qu'en tout point de la surface Σ, le champ électrique (ξ, η, ζ) demeure constamment tangent à la surface; que le champ magnétique qui lui correspond demeure constamment nul.

Dans un cas comme dans l'autre, le champ (ξ, η, ζ) vérifie l'égalité (11); l'intégrale qui figure au premier membre de cette égalité garde donc une valeur indépendante du temps.

Supposons qu'à l'instant initial, les valeurs de $\xi', \eta', \zeta', \frac{\partial \xi'}{\partial t}, \frac{\partial \eta'}{\partial t}, \frac{\partial \zeta'}{\partial t}$ soient respectivement égales aux valeurs de $\xi'', \eta'', \zeta'', \frac{\partial \xi''}{\partial t}, \frac{\partial \eta''}{\partial t}, \frac{\partial \zeta''}{\partial t}$. On aura alors, à cet instant initial,

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} &\xi = 0, & &\eta = 0, & &\zeta = 0, \\ &\frac{\partial \xi}{\partial t} = 0, & &\frac{\partial \eta}{\partial t} = 0, & &\frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0. \end{aligned}\right.$$

La valeur initiale de l'intégrale qui figure au premier membre de l'égalité (18) sera zéro, en sorte que cette intégrale restera constamment nulle :

$$(21)\qquad \int \left[\mathfrak{L}^2 \theta^2 + \mathfrak{T}^2 (l^2 + m^2 + n^2) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)^2 \right] d\varpi = 0.$$

Cette égalité exige qu'on ait, en tout point du système et à tout instant,

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0.$$

Mais, en vertu des égalités (20), à l'instant initial, les quantités ξ, η, ζ sont nulles en tout point du système; on a donc, en tout point du système et à tout instant,

$$\xi = 0, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = 0$$

ou bien, en vertu des égalités (19),

$$\xi' = \xi'', \qquad \eta' = \eta'', \qquad \zeta' = \zeta''.$$

Les deux champs (ξ', η', ζ'), (ξ'', η'', ζ'') sont identiques. D'où la proposition suivante :

Sur un système formé d'un corps diélectrique homogène et unique, le mouvement électrique est déterminé sans ambiguïté si l'on connaît :

1° *En tout point du système, à l'instant initial, les trois composantes* ξ, η, ζ *du champ électrique total et leurs dérivées premières* $\frac{\partial \xi}{\partial t}, \frac{\partial \eta}{\partial t}, \frac{\partial \zeta}{\partial t}$ *par rapport au temps.*

2° *En tout point de la surface* Σ *qui borne le système, et à tout instant,*

soit (CAS A) *les trois composantes du champ électrique,*

soit (CAS B) *la composante normale du champ électrique et les trois composantes du champ magnétique.*

§ 3. — *Stabilité du mouvement électrique.*

[5] Avant d'aborder l'étude de la stabilité du mouvement électrique, nous allons faire une courte remarque.

Si, en tout point du corps diélectrique considéré, on a

$$\xi = 0, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = 0, \tag{22}$$

on a aussi

$$\left\{ \begin{array}{ccc} & \theta = 0, & \\ l = 0, & m = 0, & n = 0. \end{array} \right. \tag{23}$$

Réciproquement, supposons qu'en tout point du corps considéré, les égalités (23) soient vérifiées, et qu'en outre, l'égalité

$$\xi \cos(N, x) + \eta \cos(N, y) + \zeta \cos(N, z) = 0 \tag{14}$$

soit vérifiée en tout point de la surface Σ qui limite le corps. Il est aisé de voir que les égalités (22) sont vérifiées en tout point du corps.

En effet, en vertu des égalités (8), les trois dernières équations (23) requièrent l'existence d'une fonction f telle qu'en tout point du corps,

$$\xi = -\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \eta = -\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \zeta = -\frac{\partial f}{\partial z}. \tag{24}$$

En vertu de la première égalité (23), la fonction f vérifie, en tout point du corps, l'équation de Laplace

$$\Delta f = 0,$$

tandis qu'en vertu de l'égalité (14), elle vérifie, en tout point de la surface Σ, l'égalité

$$\frac{\partial f}{\partial N} = 0.$$

Il en résulte, on le sait, que la fonction f a même valeur en tous les points du corps. Dès lors, les égalités (24) se réduisent aux égalités (22).

De ce théorème, il ne faudrait pas conclure que, pour un système à la surface duquel l'égalité (14) est constamment vérifiée, il revienne au même d'imposer des limites supérieures aux valeurs absolues de ξ, η, ζ, ou bien d'en imposer aux valeurs absolues de θ, l, m, n; ni qu'il revient au même d'imposer une limite supérieure à la valeur de l'intérale

$$\int (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\, d\varpi,$$

ou bien d'en imposer aux valeurs des intégrales

$$\int \theta^2\, d\varpi, \qquad \int (l^2 + m^2 + n^2)\, d\varpi.$$

Cette remarque était nécessaire pour que fussent exactement comprises les définitions qui vont être données.

[6] Sur le même corps diélectrique, considérons deux mouvements électriques distincts, l'un qui corresponde au champ (ξ', η', ζ'), l'autre au champ (ξ'', η'', ζ''); définissons ξ, η, ζ par les égalités (19). Supposons que soit réalisé, sur la surface Σ qui limite le système, soit le CAS A, soit le CAS B.

Imaginons qu'aux valeurs absolues de certaines quantités dépendant des déterminations initiales de ξ, η, ζ, $\frac{\partial \xi}{\partial t}$, $\frac{\partial \eta}{\partial t}$, $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$, on puisse imposer des limites supérieures telles qu'on ait, quel que soit t, l'inégalité

$$\int (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\, d\varpi < \mathrm{H}, \tag{25}$$

où H désigne une quantité positive, quelconque d'ailleurs, donnée d'avance. Nous dirons que, pour la nature de perturbation initiale considérée, le mouvement électrique possède la *stabilité électrostatique intégrale proprement dite* ou *stabilité électrostatique de première espèce* (¹).

(¹) Les mots : *stabilité électrostatique, stabilité électrodynamique*, reprennent, dans le présent Mémoire, le sens qui leur a été donné au nº 33 de notre Mémoire *Sur le diamagnétisme* (Journal de Mathématiques, 6ᵉ série, t. IX, 1913, pp. 148 sqq). Dans notre Mémoire : *Le problème général de l'Électrodynamique pour un système de corps immobiles*, le sens de ces mots était tout autre; ils désignaient soit la stabilité de la fonction potentielle électrostatique, soit la stabilité des fonctions de Helmholtz; ou encore la stabilité du champ électrostatique et la stabilité du champ électrodynamique.

Si l'on a de même, quel que soit t, non plus l'inégalité (25), mais les deux inégalités

$$(26)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int \theta^2 \, d\varpi < \Theta, \\ \displaystyle\int (l^2 + m^2 + n^2)\, d\varpi < \Lambda, \end{cases}$$

où Θ et Λ sont deux quantités positives, quelconques d'ailleurs, données d'avance, on dit que le mouvement électrique possède la *stabilité électrostatique intégrale de seconde espèce.*

Si u', v', w' désignent les composantes de la densité de courant de déplacement, on a

$$(27)\qquad u' = \mathrm{K}' \frac{\partial \xi}{\partial t}, \qquad v' = \mathrm{K}' \frac{\partial \eta}{\partial t}, \qquad w' = \mathrm{K}' \frac{\partial \zeta}{\partial t}.$$

On dira alors que le mouvement électrique possède la *stabilité électrodynamique intégrale de première espèce* si l'on a, quel que soit t,

$$(28)\qquad \int \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)^2 \right] d\varpi < \mathrm{H}',$$

H' étant une quantité positive quelconque, donnée d'avance. Il possédera la *stabilité électrodynamique intégrale de seconde espèce* si l'on a, quel que soit t, les deux inégalités

$$(29)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int \left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)^2 d\varpi < \Theta', \\ \displaystyle\int \left[\left(\frac{\partial l}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial m}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)^2 \right] d\varpi < \Lambda', \end{cases}$$

Θ', Λ' étant deux quantités positives données d'avance.

[**7**] Posons

$$(30)\qquad \mathrm{J} = \int \left[\mathfrak{L}^2 \theta^2 + \mathfrak{T}^2 (l^2 + m^2 + n^2) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)^2 \right] d\varpi$$

et désignons par J_0 la valeur initiale de J, valeur qui ne peut être négative. L'égalité (18) pourra s'écrire :

$$(31)\qquad \mathrm{J} = \mathrm{J}_0.$$

Nous en pourrons conclure que les trois conditions suivantes sont constamment vérifiées :

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int \theta^2 d\varpi \leqq \frac{J_0}{\mathfrak{L}^2}, \\ &\int (l^2 + m^2 + n^2) d\varpi \leqq \frac{J_0}{\mathfrak{T}^2}, \\ &\int \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)^2 \right] d\varpi \leqq J_0. \end{aligned} \right.$$

Mais, quelles que soient les constantes positives Θ, Λ, Π', on peut toujours imposer aux valeurs absolues initiales de

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{ccc} & \theta, & \\ l, & m, & n, \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial t}, & \dfrac{\partial \eta}{\partial t}, & \dfrac{\partial \zeta}{\partial t} \end{array} \right.$$

des limites supérieures telles qu'on ait les trois inégalités

$$(34) \quad J_0 < \mathfrak{L}^2 \Theta, \qquad J_0 < \mathfrak{T}^2 \Lambda, \qquad J_0 < \Pi'.$$

On peut donc, aux valeurs absolues initiales des quantités (33), *imposer des limites supérieures telles que tout mouvement électrique sur le corps diélectrique considéré possède la stabilité électrostatique intégrale de seconde espèce et la stabilité électrodynamique intégrale de première espèce.*

[**8**] Si les conditions imposées au mouvement en tout point de la surface Σ sont celles qui constituent le CAS A, on peut limiter supérieurement la perturbation initiale de telle sorte que le mouvement possède la stabilité électrostatique intégrale de première espèce.

Nous prendrons pour point de départ un théorème bien connu de Clebsch.

Les quantités ξ, η, ζ, définies par les égalités (19), vérifiant les équations (11), on les peut toujours mettre sous la forme

$$(35) \quad \xi = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + p, \quad \eta = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} + q, \quad \zeta = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} + r,$$

où Φ est une intégrale de l'équation

$$(36) \quad \Delta \Phi - \frac{1}{\mathfrak{L}^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$$

et où p, q, r sont de la forme

$$p = \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}, \quad q = \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}, \quad r = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{37}$$

P, Q, R vérifiant les trois équations

$$\Delta P - \frac{1}{\mathfrak{T}^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta Q - \frac{1}{\mathfrak{T}^2}\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta R - \frac{1}{\mathfrak{T}^2}\frac{\partial^2 R}{\partial t^2} = 0 \tag{38}$$

et l'équation

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0. \tag{39}$$

Il y a, en général, une infinité de manières de choisir les quatre fonctions Φ, P, Q, R; supposons qu'on se soit arrêté à l'un de ces choix.

Les égalités (35), (37) et (10) donnent

$$\Delta\Phi = -\theta. \tag{40}$$

Les égalités (35), (36), (39) et (8) donnent

$$\Delta P = -l, \quad \Delta Q = -m, \quad \Delta R = -n. \tag{41}$$

[9] Posons, d'autre part,

$$U = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\xi}{r}\,d\varpi, \quad V = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\eta}{r}\,d\varpi, \quad W = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\zeta}{r}\,d\varpi, \tag{42}$$

r étant la distance de l'élément $d\varpi$ au point auquel se rapportent U, V, W, et chacune des intégrales s'étendant au volume entier du corps considéré; en tout point de ce corps, ces égalités (42) nous donneront :

$$\Delta U = \xi, \quad \Delta V = \eta, \quad \Delta W = \zeta. \tag{43}$$

Posons

$$\Phi_1 = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right), \tag{44}$$

$$P_1 = -\left(\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y}\right), \quad Q_1 = -\left(\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z}\right), \quad R_1 = -\left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}\right), \tag{45}$$

$$p_1 = \frac{\partial Q_1}{\partial z} - \frac{\partial R_1}{\partial y}, \quad q_1 = \frac{\partial R_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial z}, \quad r_1 = \frac{\partial P_1}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial x}. \tag{46}$$

Les égalités (43) nous donneront :

$$\xi = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + p_1, \qquad \eta = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + q_1, \qquad \zeta = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + r_1. \tag{47}$$

Les égalités (44), (46), (47) et (10) donnent

$$\Delta \Phi_1 = -\theta. \tag{48}$$

Les égalités (43), (45) et (8) donnent

$$\Delta P_1 = -l, \qquad \Delta Q_1 = -m, \qquad \Delta R_1 = -n. \tag{49}$$

Les égalités (45) et (46) donnent, d'ailleurs,

$$\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial y} + \frac{\partial R_1}{\partial z} = 0. \tag{50}$$

La comparaison des égalités (35) et (47) montre qu'on a, en tout point du système et à tout instant,

$$\left\{\begin{array}{l} -\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} + p = -\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x} + p_1, \qquad -\dfrac{\partial \Phi}{\partial y} + q = -\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y} + q_1, \\ \qquad\qquad -\dfrac{\partial \Phi}{\partial z} + r = -\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial z} + r_1. \end{array}\right. \tag{51}$$

Désignons par $(A)_0$ la valeur de la quantité A à l'instant initial ; posons

$$(\Phi_1)_0 = (\Phi)_0 + \varphi, \tag{52}$$

$$(P_1)_0 = (P)_0 + \mathfrak{P}, \qquad (Q_1)_0 = (Q)_0 + \mathfrak{Q}, \qquad (R_1)_0 = (R)_0 + \mathfrak{R}, \tag{53}$$

φ, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ étant quatre quantités indépendantes de t.

Les équations (40) et (48), vraies quel que soit t, sont vraies à l'instant initial ; il résulte alors de l'égalité (52) que

$$\Delta \varphi = 0. \tag{54}$$

Les équations (41) et (49) sont vraies quel que soit t ; elles le sont donc, en particulier, à l'instant initial ; les égalités (53) donnent alors

$$\Delta \mathfrak{P} = 0, \qquad \Delta \mathfrak{Q} = 0, \qquad \Delta \mathfrak{R} = 0. \tag{55}$$

Les égalités (39) et (50), vraies quel que soit t, sont vraies à l'instant initial ; alors, il résulte des égalités (53) que

$$\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial z} = 0. \tag{56}$$

Enfin, les égalités (51), vraies quel que soit t et, en particulier, à l'état initial, donnent, en vertu des égalités (52) et (53),

$$(57)\qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\dfrac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial z}-\dfrac{\partial\mathfrak{R}}{\partial y}=0, \\ -\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}+\dfrac{\partial\mathfrak{R}}{\partial x}-\dfrac{\partial\mathfrak{L}}{\partial z}=0, \\ -\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}+\dfrac{\partial\mathfrak{L}}{\partial y}-\dfrac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial x}=0. \end{cases}$$

Posons de même

$$(58)\qquad \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial t}\right)_0=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)_0+\varphi',$$

$$(59)\qquad \left(\frac{\partial P_1}{\partial t}\right)_0=\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)_0+\mathfrak{L}',\quad \left(\frac{\partial Q_1}{\partial t}\right)_0=\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)_0+\mathfrak{Q}',\quad \left(\frac{\partial R_1}{\partial t}\right)_0=\left(\frac{\partial R}{\partial t}\right)_0+\mathfrak{R}',$$

φ', $\mathfrak{L}'$, $\mathfrak{Q}'$, $\mathfrak{R}'$ étant quatre quantités indépendantes de t.

Les égalités (40) et (48) étant vraies quel que soit t, donnent, quel que soit t, et, en particulier, à l'instant initial,

$$\Delta\frac{\partial\Phi_1}{\partial t}=\Delta\frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

ou, en vertu de l'égalité (58),

$$(60)\qquad \Delta\varphi'=0.$$

Les égalités (41) et (49) donnent, quel que soit t,

$$\Delta\frac{\partial P_1}{\partial t}=\Delta\frac{\partial P}{\partial t},\qquad \Delta\frac{\partial Q_1}{\partial t}=\Delta\frac{\partial Q}{\partial t},\qquad \Delta\frac{\partial R_1}{\partial t}=\Delta\frac{\partial R}{\partial t}.$$

Appliquées à l'instant initial, et en tenant compte des égalités (59), ces égalités donnent

$$(61)\qquad \Delta\mathfrak{L}'=0,\qquad \Delta\mathfrak{Q}'=0,\qquad \Delta\mathfrak{R}'=0.$$

Les égalités (39) et (50), vraies quel que soit t, donnent, quel que soit t,

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial P_1}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial Q_1}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial R_1}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial R}{\partial t}.$$

Appliquée à l'instant initial, et en tenant compte des égalités (59), ces égalités donnent

$$(62)\qquad \frac{\partial\mathfrak{L}'}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{Q}'}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{R}'}{\partial y}=0.$$

Enfin, les égalités (51), vraies quel que soit t, donnent aussi, quel que soit t,

$$-\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x\partial t}+\frac{\partial p_1}{\partial t}=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial t}+\frac{\partial p}{\partial t},\qquad -\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial y\partial t}+\frac{\partial q_1}{\partial t}=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial t}+\frac{\partial q}{\partial t},$$
$$-\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial z\partial t}+\frac{\partial r_1}{\partial t}=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial t}+\frac{\partial r}{\partial t}.$$

Si l'on applique ces identités à l'instant initial, en tenant compte des égalités (37), (46), (58) et (59), on trouve les trois égalités

$$(63)\qquad \left\{\begin{aligned} &-\frac{\partial\varphi'}{\partial x}+\frac{\partial\mathcal{Q}'}{\partial z}-\frac{\partial\mathcal{R}'}{\partial y}=0,\\ &-\frac{\partial\varphi'}{\partial y}+\frac{\partial\mathcal{R}'}{\partial x}-\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial z}=0,\\ &-\frac{\partial\varphi'}{\partial z}+\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial y}-\frac{\partial\mathcal{Q}'}{\partial x}=0.\end{aligned}\right.$$

Posons maintenant :

$$(64)\qquad \Phi_2=\Phi+\varphi+\varphi' t,$$

$$(65)\qquad \left\{\begin{aligned} P_2&=P+\mathcal{L}+\mathcal{L}'t,\\ Q_2&=Q+\mathcal{Q}+\mathcal{Q}'t,\\ R_2&=R+\mathcal{R}+\mathcal{R}'t.\end{aligned}\right.$$

En vertu des égalités (57) et (63), les égalités (35) et (37) continuent de donner les mêmes valeurs de ξ, η, ζ si l'on y remplace Φ, P, Q, R par Φ_2, P_2, Q_2, R_2.

En vertu des égalités (54), (60) et (64), l'égalité (36) reste vérifiée si l'on y remplace Φ par Φ_2.

En vertu des égalités (55), (61) et (65), les égalités (38) demeurent vérifiées si l'on y remplace P, Q, R par P_2, Q_2, R_2.

Enfin, en vertu des égalités (56), (62) et (65), l'égalité (39) demeure vérifiée si l'on y remplace P, Q, R par P_2, Q_2, R_2.

Mais l'égalité (64) donne

$$(\Phi_2)_0=(\Phi)_0+\varphi,\qquad \left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial t}\right)_0=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)_0+\varphi'$$

ou bien, en vertu des égalités (52) et (58),

$$(\Phi_2)_0=(\Phi_1)_0,\qquad \left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial t}\right)_0=\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial t}\right)_0.$$

Les égalités (53), (59) et (65) donnent de même

$$(P_2)_0 = (P_1)_0, \qquad \left(\frac{\partial P_2}{\partial t}\right)_0 = \left(\frac{\partial P_1}{\partial t}\right)_0,$$

$$(Q_2)_0 = (Q_1)_0, \qquad \left(\frac{\partial Q_2}{\partial t}\right)_0 = \left(\frac{\partial Q_1}{\partial t}\right)_0,$$

$$(R_2)_0 = (R_1)_0, \qquad \left(\frac{\partial R_2}{\partial t}\right)_0 = \left(\frac{\partial R_1}{\partial t}\right)_0.$$

En supprimant l'indice $_2$ désormais inutile, nous voyons que nous pouvons continuer d'écrire les égalités (35) à (39), mais supposer, en outre, que les fonctions Φ, P, Q, R sont assujetties aux conditions initiales que voici :

$$(66) \quad \left\{ \begin{array}{c} (\Phi)_0 = (\Phi_1)_0, \\ (P)_0 = (P_1)_0, \qquad (Q)_0 = (Q_1)_0, \qquad (R)_0 = (R_1)_0, \\ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_0 = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t}\right)_0, \\ \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)_0 = \left(\frac{\partial P_1}{\partial t}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)_0 = \left(\frac{\partial Q_1}{\partial t}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial R}{\partial t}\right)_0 = \left(\frac{\partial R_1}{\partial t}\right)_0. \end{array} \right.$$

[**10**] Multiplions les deux membres de l'égalité (36) par $\frac{\partial \Phi}{\partial t} d\varpi$, intégrons pour le volume entier du système, et transformons un des termes à l'aide d'une intégration par parties ; nous trouvons l'égalité

$$(67) \quad \int \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial N} d\Sigma + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{\mathfrak{L}^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)^2 \right] d\varpi = 0.$$

Les égalités (37) donnent identiquement

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} = 0.$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par $\frac{\partial \Phi}{\partial t} d\varpi$, intégrons et transformons comme nous venons de le faire ; nous obtenons l'égalité

$$(68) \quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int \frac{\partial \Phi}{\partial t} [p \cos(N, x) + q \cos(N, y) + r \cos(N, z)] \, d\Sigma \\ \displaystyle + \int \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \, \partial t} p + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \, \partial t} q + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \, \partial t} r \right) d\varpi = 0. \end{array} \right.$$

Les égalités (37) et (39) donnent

$$\Delta P = -\left(\frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial y}\right), \quad \Delta Q = -\left(\frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial z}\right), \quad \Delta R = -\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\right).$$

Les équations (38) peuvent donc être mises sous la forme suivante :

$$(69)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial r}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial z}-\frac{1}{\mathfrak{T}^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}=0,\\ &\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\partial r}{\partial x}-\frac{1}{\mathfrak{T}^2}\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}=0,\\ &\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{1}{\mathfrak{T}^2}\frac{\partial^2 R}{\partial t^2}=0.\end{aligned}\right.$$

Multiplions respectivement ces équations par $\frac{\partial P}{\partial t}d\varpi$, $\frac{\partial Q}{\partial t}d\varpi$, $\frac{\partial R}{\partial t}d\varpi$, ajoutons membre à membre les résultats obtenus, puis intégrons pour le volume entier du système, en effectuant certaines intégrations par parties ; nous trouvons l'égalité

$$(70)\quad \left\{\begin{aligned} &\int\Big\{[r\cos(N,y)-q\cos(N,z)]\frac{\partial P}{\partial t}+[p\cos(N,z)-r\cos(N,x)]\frac{\partial Q}{\partial t}\\ &\qquad\qquad+[q\cos(N,x)-p\cos(N,y)]\frac{\partial R}{\partial t}\Big\}d\Sigma\\ &+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\Big\{p^2+q^2+r^2+\frac{1}{\mathfrak{T}^2}\Big[\Big(\frac{\partial P}{\partial t}\Big)^2+\Big(\frac{\partial Q}{\partial t}\Big)^2+\Big(\frac{\partial R}{\partial t}\Big)^2\Big]\Big\}d\varpi \quad =0.\end{aligned}\right.$$

Enfin, on a identiquement

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial x}=0.$$

Multiplions respectivement ces égalités par $\frac{\partial P}{\partial t}d\varpi$, $\frac{\partial Q}{\partial t}d\varpi$, $\frac{\partial R}{\partial t}d\varpi$; ajoutons membre à membre les résultats obtenus, puis intégrons pour tout le système, en intégrant par parties certains termes; nous trouvons, en tenant compte des égalités (37) :

$$(71)\quad \left\{\begin{aligned} &\int\Big\{\Big[\frac{\partial\Phi}{\partial z}\cos(N,y)-\frac{\partial\Phi}{\partial y}\cos(N,z)\Big]\frac{\partial P}{\partial t}+\Big[\frac{\partial\Phi}{\partial x}\cos(N,z)-\frac{\partial\Phi}{\partial z}\cos(N,x)\Big]\frac{\partial Q}{\partial t}\\ &\qquad\qquad+\Big[\frac{\partial\Phi}{\partial y}\cos(N,x)-\frac{\partial\Phi}{\partial x}\cos(N,y)\Big]\frac{\partial R}{\partial t}\Big\}d\Sigma\\ &+\int\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial r}{\partial t}\Big)d\varpi \qquad =0.\end{aligned}\right.$$

Ajoutons membre à membre les égalités (67) et (70); retranchons en membre à membre les égalités (68) et (71); en tenant compte des égalités (35), nous trouverons l'égalité

$$(72)\quad \left\{\begin{aligned} & -\int [\xi \cos(N,x) + \eta \cos(N,y) + \zeta \cos(N,z)] \frac{\partial \Phi}{\partial t}\, d\Sigma \\ & -\int \Big\{ [\eta \cos(N,z) - \zeta \cos(N,y)] \frac{\partial P}{\partial t} + [\zeta \cos(N,x) - \xi \cos(N,z)] \frac{\partial Q}{\partial t} \\ & \qquad\qquad + [\xi \cos(N,y) - \eta \cos(N,x)] \frac{\partial R}{\partial t} \Big\}\, d\Sigma \\ & + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int \left\{ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \frac{1}{\mathfrak{L}^2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{\mathfrak{T}^2}\left[\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial t}\right)^2\right]\right\} d\varpi = 0. \end{aligned}\right.$$

Cette égalité est vraie pour tout ensemble de trois fonctions ξ, η, ζ qui vérifient les conditions (35) à (39); appliquons-la, en particulier, aux fonctions ξ, η, ζ définies par les égalités (19) où, en chaque point de la surface Σ et à chaque instant, les quantités ξ'', η'', ζ'' sont respectivement identiques à ξ', η', ζ'. Alors, en chaque point de la surface Σ et à chaque instant,

$$(73)\qquad \xi = 0, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = 0.$$

Si donc on pose

$$(74)\qquad H = \int \left\{ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \frac{1}{\mathfrak{L}^2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{\mathfrak{T}^2}\left[\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial t}\right)^2\right]\right\} d\varpi,$$

l'égalité (72) deviendra

$$(75)\qquad H = H_0,$$

H_0 étant la valeur de H à l'instant initial.

[**11**] C'est cette valeur H_0 que nous nous proposons d'étudier.

En vertu de l'égalité (74) et des quatre dernières égalités (66), nous pouvons écrire

$$(76)\qquad H_0 = \int (\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2)\, d\varpi + K_0,$$

en posant

$$(77)\qquad K = \int \left\{ \frac{1}{\mathfrak{L}^2}\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{\mathfrak{T}^2}\left[\left(\frac{\partial P_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial R_1}{\partial t}\right)^2\right]\right\} d\varpi.$$

Soit (x', y', z') un point du système où U est donné par la première égalité (42) :

$$U(x', y', z') = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\xi}{r}\, d\varpi.$$

Dans cette égalité, r est la distance d'un point (x, y, z) de l'élément $d\varpi$ au point (x', y', z').

De cette égalité, nous tirons

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x'}\mathrm{U}(x',y',z') &= -\frac{1}{4\pi}\int \xi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'}\,d\varpi = \frac{1}{4\pi}\int \xi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\,d\varpi. \\ &= -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\xi}{r}\cos(\mathrm{N},x)\,d\Sigma - \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r}\frac{\partial \xi}{\partial x}\,d\varpi.\end{aligned}$$

Cette égalité et deux égalités analogues, jointes à l'égalité (44) et à l'égalité (10), donnent

$$\Phi_1 = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\theta}{r}\,d\varpi + \frac{1}{4\pi}\int [\xi\cos(\mathrm{N},x) + \eta\cos(\mathrm{N},y) + \zeta\cos(\mathrm{N},z)]\frac{1}{r}\,d\Sigma. \tag{78}$$

Par des démonstrations analogues, on établit les trois égalités

$$\left\{\begin{aligned}\mathrm{P}_1 &= \frac{1}{4\pi}\int \frac{l}{r}\,d\varpi + \frac{1}{4\pi}\int [\eta\cos(\mathrm{N},z) - \zeta\cos(\mathrm{N},y)]\frac{1}{r}\,d\Sigma, \\ \mathrm{Q}_1 &= \frac{1}{4\pi}\int \frac{m}{r}\,d\varpi + \frac{1}{4\pi}\int [\zeta\cos(\mathrm{N},x) - \xi\cos(\mathrm{N},z)]\frac{1}{r}\,d\Sigma, \\ \mathrm{R}_1 &= \frac{1}{4\pi}\int \frac{n}{r}\,d\varpi + \frac{1}{4\pi}\int [\xi\cos(\mathrm{N},y) - \eta\cos(\mathrm{N},x)]\frac{1}{r}\,d\Sigma.\end{aligned}\right. \tag{79}$$

Ces égalités sont générales; mais, dans le cas qui nous intéresse, les quantités ξ, η, ζ vérifient constamment les égalités (73) en chaque point de la surface Σ; les égalités (78) et (79) se réduisent donc à

$$\left\{\begin{aligned}&\Phi_1 = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\theta}{r}\,d\varpi, \\ &\mathrm{P}_1 = \frac{1}{4\pi}\int \frac{l}{r}\,d\varpi, \quad \mathrm{Q}_1 = \frac{1}{4\pi}\int \frac{m}{r}\,d\varpi, \quad \mathrm{R}_1 = \frac{1}{4\pi}\int \frac{n}{r}\,d\varpi.\end{aligned}\right. \tag{80}$$

Ces égalités (80) ont lieu quel que soit t, en sorte qu'on en tire

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r}\frac{\partial \theta}{\partial t}\,d\varpi, \\ &\frac{\partial \mathrm{P}_1}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r}\frac{\partial l}{\partial t}\,d\varpi, \quad \frac{\partial \mathrm{Q}_1}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r}\frac{\partial m}{\partial t}\,d\varpi, \quad \frac{\partial \mathrm{R}_1}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r}\frac{\partial n}{\partial t}\,d\varpi.\end{aligned}\right. \tag{81}$$

La quantité $\int \frac{1}{r}\,d\varpi$ est une quantité positive qui demeure finie dans tout le système; soit v la limite supérieure, essentiellement positive, des valeurs que prend cette quantité aux divers points du système. Soit θ' la limite supérieure des valeurs absolues de $\frac{\partial\theta}{\partial t}$, aux divers points du système, à un instant donné t. A ce même instant, la valeur absolue de $\frac{\partial\Phi_1}{\partial t}$ n'est, en aucun point du système, supérieure à $\frac{v\theta'}{4\pi}$. Cette remarque, et des remarques analogues faites au sujet de $\frac{\partial P_1}{\partial t}$, $\frac{\partial Q_1}{\partial t}$, $\frac{\partial R_1}{\partial t}$, montrent qu'à un instant donné t, on peut, aux valeurs absolues de

$$\frac{\partial\theta}{\partial t},\quad \frac{\partial l}{\partial t},\quad \frac{\partial m}{\partial t},\quad \frac{\partial n}{\partial t},$$

imposer des limites supérieures telles que les valeurs absolues de

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial t},\quad \frac{\partial P_1}{\partial t},\quad \frac{\partial Q_1}{\partial t},\quad \frac{\partial R_1}{\partial t}$$

soient, à ce même instant et dans tout le système, inférieures respectivement à telles quantités positives qu'on voudra.

Dès lors, si nous désignons par Π une quantité positive quelconque donnée d'avance, nous pourrons, à l'instant initial et dans tout le système, imposer aux valeurs absolues de

$$\frac{\partial\theta}{\partial t},\quad \frac{\partial l}{\partial t},\quad \frac{\partial m}{\partial t},\quad \frac{\partial n}{\partial t}$$

des limites supérieures telles que nous ayons sûrement

$$K_0 < \frac{\Pi}{2}. \tag{82}$$

Aux valeurs absolues initiales de ξ, η, ζ, nous pouvons aussi, dans tout le système, imposer des limites supérieures telles que nous ayons

$$\int (\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2)\, d\varpi < \frac{\Pi}{2}. \tag{83}$$

En réunissant l'égalité (76) aux inégalités (82) et (83), nous voyons qu'aux valeurs absolues initiales de

$$(84)\qquad \left\{\begin{array}{ccc} \xi, & \eta, & \zeta, \\ & \dfrac{\partial\theta}{\partial t}, & \\ \dfrac{\partial l}{\partial t}, & \dfrac{\partial m}{\partial t}, & \dfrac{\partial n}{\partial t}, \end{array}\right.$$

nous pouvons imposer des limites supérieures telles que nous ayons

$$H_0 < \text{II}.$$

Mais l'égalité (75) nous donnera alors, quel que soit t,

$$H < \text{II}$$

et l'égalité (74) nous donnera *a fortiori*

$$\int (\xi^2 + \eta^2 + \zeta_2)\, d\varpi < \text{II}. \tag{25}$$

On peut donc, dans tout le système et à l'instant initial, imposer aux valeurs absolues des quantités (84) *des limites supérieures telles que le mouvement possède la stabilité électrostatique intégrale de première espèce.*

Si nous réunissons ce que nous venons de démontrer avec ce qui a été démontré au n° [**6**], nous parvenons au résultat suivant :

Supposons qu'à tout instant et en tout point de la surface qui borne le corps diélectrique étudié, le champ électrique total soit donné en grandeur et en direction (CAS A). *Aux valeurs absolues initiales des quantités*

$$\left\{\begin{array}{ccc} \xi, & \eta, & \zeta \\ & \theta, & \\ l, & m, & n \end{array}\right. \tag{85}$$

et de leurs dérivées premières par rapport au temps, on peut imposer des limites supérieures telles qu'on ait constamment

$$\int (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\, d\varpi < \text{II}, \tag{25}$$

$$\int \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)^2\right] d\varpi < \text{II}', \tag{28}$$

II *et* II′ *étant deux quantités positives quelconques données d'avance.* En d'autres termes, *le système possède les deux stabilités intégrales de première espèce, la stabilité électrostatique et la stabilité électrodynamique.*

Cette démonstration comble une lacune de notre Mémoire *Sur le Diamagnétisme*. En effet, au n° 30 de ce Mémoire [1], nous avions énoncé cette vérité que l'équilibre de polarisation est stable sur un corps diélectrique lorsque les conditions (2) sont vérifiées, mais les conditions qui assuraient cette stabilité ne consistaient pas à main-

---

[1] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 6e série, t. IX, 1913, pp. 129-130.

tenir constantes la grandeur du champ électrique total en chaque point de la surface du diélectrique; cependant, c'est dans ces conditions que nous démontrions l'instabilité de l'équilibre lorsque quelqu'une des conditions (1) n'était pas vérifiée; la réciprocité des deux propositions n'était pas complète; elle l'est maintenant.

§ 4. — *Oscillations électriques au sein d'un corps diélectrique, quand on donne, à la surface de ce corps, la grandeur et la direction du champ magnétique et, en outre, la composante normale du champ électrique*

(Cas B)

[**12**] Nous dirons qu'un corps est le siège de *vibrations* ou d'*oscillations électriques simples* lorsqu'en chaque point, les trois composantes ξ, η, ζ du champ électrique total seront de la forme

$$(86)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi &= \xi_0 + \xi' \cos 2\pi\frac{t}{T} + \xi'' \sin 2\pi\frac{t}{T}, \\ \eta &= \eta_0 + \eta' \cos 2\pi\frac{t}{T} + \eta'' \sin 2\pi\frac{t}{T}, \\ \zeta &= \zeta_0 + \zeta' \cos 2\pi\frac{t}{T} + \zeta'' \sin 2\pi\frac{t}{T}, \end{aligned}\right.$$

les neuf quantités

$$\begin{matrix} \xi_0, & \xi', & \xi'', \\ \eta_0, & \eta', & \eta'', \\ \zeta_0, & \zeta', & \zeta'' \end{matrix}$$

étant neuf quantités indépendantes de t.

En vertu des égalités (10) et (86), si l'on pose

$$(87)\qquad \theta_0 = \frac{\partial\xi_0}{\partial x} + \frac{\partial\eta_0}{\partial y} + \frac{\partial\zeta_0}{\partial z}, \quad \theta' = \frac{\partial\xi'}{\partial x} + \frac{\partial\eta'}{\partial y} + \frac{\partial\zeta'}{\partial z}, \quad \theta'' = \frac{\partial\xi''}{\partial x} + \frac{\partial\eta''}{\partial y} + \frac{\partial\zeta''}{\partial z},$$

on aura

$$(88)\qquad \theta = \theta_0 + \theta' \cos 2\pi\frac{t}{T} + \theta'' \sin 2\pi\frac{t}{T}.$$

On aura de même les trois égalités

$$(89)\qquad l = l_0 + l' \cos 2\pi\frac{t}{T} + l'' \sin 2\pi\frac{t}{T}, \ldots\ldots,$$

en posant, selon les égalités (8) et (86),

$$(90)\qquad l_0 = \frac{\partial\eta_0}{\partial z} - \frac{\partial\zeta_0}{\partial y}, \quad l' = \frac{\partial\eta'}{\partial z} - \frac{\partial\zeta'}{\partial y}, \quad l'' = \frac{\partial\eta''}{\partial z} - \frac{\partial\zeta''}{\partial y}, \ldots\ldots$$

Désignons par $\mathcal{N}$, en un point de la surface Σ, la composante normale du champ électrique total :

$$\mathcal{N} = \xi \cos(N, x) + \eta \cos(N, y) + \zeta \cos(N, z). \tag{91}$$

En chaque point de la surface Σ, donnons-nous, pour $\mathcal{N}$, une expression de la forme

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_0 + \mathcal{N}' \cos 2\pi \frac{t}{T} + \mathcal{N}'' \sin 2\pi \frac{t}{T}, \tag{92}$$

$\mathcal{N}_0$, $\mathcal{N}'$, $\mathcal{N}''$ étant des quantités données, variables d'un point à l'autre de la surface Σ, mais indépendantes de t.

Donnons-nous également des expressions de même forme pour chacune des trois composantes L, M, N du champ magnétique; en vertu des égalités (9), cela reviendra à se donner pour l, m, n, en chaque point de la surface Σ, des expressions de la forme (89).

Supposons que ξ, η, ζ soient assujettis à prendre, dans tout le diélectrique, des expressions de la forme (86), et demandons-nous si, dans de telles conditions, ces quantités sont déterminées sans ambiguïté.

Si, dans de telles conditions, le champ électrique total était susceptible de plusieurs déterminations distinctes, deux de ces déterminations ne pourraient différer l'une l'une de l'autre que par un champ (ξ, η, ζ) dont les composantes seraient de la forme (86) et s'accorderaient, en tout point de la surface limite Σ et à tout instant, avec les égalités

$$\mathcal{N} = 0, \tag{93}$$

$$l = 0, \qquad m = 0, \qquad n = 0. \tag{94}$$

S'il existe un tel champ, il constitue une *oscillation électrique propre* du corps diélectrique considéré, placé dans les conditions indiquées.

Il s'agit pour nous de rechercher s'il existe de telles oscillations électriques propres et, lorsqu'il en existe, de déterminer quelle en est la nature.

Les travaux de M. H. Schwartz, de Henri Poincaré, de M. Stekloff, de M. Zaremba, d'autres géomètres, nous permettent de regarder comme démontrées, du moins sous certaines conditions extrêmement larges, les deux propositions suivantes :

1° Il existe une infinité de valeurs de T :

$$T = \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \ldots\ldots, \tag{95}$$

pour lesquelles on peut trouver une fonction F, non identiquement nulle, qui vérifie l'équation

$$\Delta F + \left(\frac{2\pi}{\mathfrak{L} T}\right)^2 F = 0 \tag{96}$$

en tout point du volume ϖ du système, et, en tout point de la surface Σ qui le borne, la condition

$$\frac{\partial F}{\partial N} = 0. \tag{97}$$

Si F est une solution de ce problème, toute autre solution, relative à la même valeur de T, est de la forme AF, où A est une constante arbitraire.

Aux quantités $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ nous donnerons le nom de *périodes longitudinales du système.*

2° Il existe une infinité de valeurs T :

$$T = \tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots\ldots \tag{98}$$

pour lesquelles on peut trouver une fonction f, non identiquement nulle, qui vérifie l'équation

$$\Delta f + \left(\frac{2\pi}{\mathfrak{T}T}\right)^2 f = 0 \tag{99}$$

en tout point du volume ϖ du système, et la condition

$$f = 0 \tag{100}$$

en tout point de la surface Σ qui borne ce système.

Si f est une solution de ce problème, toute autre solution, relative à la même valeur de T, est de la forme αf, où α est une constante arbitraire.

Aux quantités $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$ nous donnerons le nom de *périodes transversales du système.*

Cela posé, voyons si un ensemble de trois quantités ξ, η, ζ, de la forme (86), peut constituer une oscillation propre du système.

Soit T la période de la partie de ξ, η, ζ qui varie avec t.

Nous distinguerons trois cas :

[**13**] Premier cas. — *La période* T *n'est égale à aucune période, longitudinale ou transversale, du système.*

Les égalités (8) et (11) donnent aisément les trois égalités

$$\Delta l - \frac{1}{\mathfrak{T}^2}\frac{\partial^2 l}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta m - \frac{1}{\mathfrak{T}^2}\frac{\partial^2 m}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta n - \frac{1}{\mathfrak{T}^2}\frac{\partial^2 n}{\partial t^2} = 0 \tag{101}$$

qui doivent être vérifiées en tout point du système et à tout instant; en écrivant que la première est vérifiée à tout instant par une expression de la forme (89), nous trouvons qu'on doit avoir, en tout point du système,

$$(102) \qquad \Delta l_0 = 0, \qquad \Delta l' + \left(\frac{2\pi}{\mathfrak{T}T}\right)^2 l' = 0, \qquad \Delta l'' + \left(\frac{2\pi}{\mathfrak{T}T}\right)^2 l'' = 0.$$

D'autre part, pour qu'en chaque point de la surface Σ, une expression de la forme (89) vérifie, à tout instant, la première égalité (94), il faut qu'on ait, en tout point de cette surface,

$$(103) \qquad l_0 = 0, \qquad l' = 0, \qquad l'' = 0.$$

Comme, par hypothèse, T n'est pas une période transversale du système, les égalités (102) et (103) exigent qu'on ait, en tout point du système, les trois premières égalités

$$(104) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} l_0 = 0, & l' = 0, & l'' = 0, \\ m_0 = 0, & m' = 0, & m'' = 0, \\ n_0 = 0, & n' = 0, & n'' = 0. \end{array} \right.$$

Les six dernières se démontrent d'une manière analogue.

En vertu des égalités (90), les égalités (104) exigent l'existence de trois fonctions Φ_0, Φ', Φ'' telles qu'on ait

$$(105) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \xi_0 = -\dfrac{\partial \Phi_0}{\partial x}, \qquad \xi' = -\dfrac{\partial \Phi'}{\partial x}, \qquad \xi'' = -\dfrac{\partial \Phi''}{\partial x}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Les égalités (10) et (11) donnent, en tout point du système,

$$(106) \qquad \Delta \theta - \frac{1}{\mathfrak{L}^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0.$$

Cette égalité ne peut être, quel que soit t, vérifiée par une expression de θ de la forme (88), si l'on n'a, en tout point du système,

$$(107) \qquad \Delta \theta_0 = 0, \qquad \Delta \theta' + \left(\frac{2\pi}{\mathfrak{L}T}\right)^2 \theta' = 0, \qquad \Delta \theta'' + \left(\frac{2\pi}{\mathfrak{L}T}\right)^2 \theta'' = 0,$$

ou bien, en vertu des égalités (105),

$$(108) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial x} \Delta \Phi_0 = 0, \quad \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\Delta \Phi' + \left(\dfrac{2\pi}{\mathfrak{L}T}\right)^2 \Phi'\right] = 0, \quad \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\Delta \Phi'' + \left(\dfrac{2\pi}{\mathfrak{L}T}\right)^2 \Phi''\right] = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{array} \right.$$

ou bien enfin

$$(109) \qquad \Delta\Phi_0 = \varphi_0, \qquad \Delta\Phi' + \left(\frac{2\pi}{\mathfrak{L}T}\right)^2 \Phi' = \varphi', \qquad \Delta\Phi'' + \left(\frac{2\pi}{\mathfrak{L}T}\right)^2 \Phi'' = \varphi'',$$

φ_0, φ', φ'' étant trois constantes.

Mais en vertu des égalités (91), (92) et (105), l'égalité (93) ne peut être vérifiée à tout instant, en tout point de la surface Σ, si l'on n'a, en tout point de cette surface,

$$(110) \qquad \frac{\partial\Phi_0}{\partial N} = 0, \qquad \frac{\partial\Phi'}{\partial N} = 0, \qquad \frac{\partial\Phi''}{\partial N} = 0.$$

En multipliant les deux membres de la première égalité (109) par $d\varpi$ et en intégrant pour le volume entier du système, nous trouvons

$$\varpi\varphi_0 = \int \Delta\Phi_0 \, d\varpi = -\int \frac{\partial\Phi_0}{\partial N} d\Sigma$$

ou, en vertu de la première égalité (110),

$$(111) \qquad \varphi_0 = 0.$$

Nous voyons alors que Φ_0 doit, dans toute l'étendue du système, vérifier l'équation de Laplace

$$(112) \qquad \Delta\Phi_0 = 0,$$

tandis que sur la surface Σ, cette même quantité Φ_0 doit vérifier la première égalité (110); dès lors, dans toute l'étendue du système, Φ_0 se réduit à une simple constante.

Posons

$$(113) \qquad \Psi' = \Phi' - \left(\frac{\mathfrak{L}T}{2\pi}\right)^2 \varphi', \qquad \Psi'' = \Phi'' - \left(\frac{\mathfrak{L}T}{2\pi}\right)^2 \varphi''.$$

En vertu des deux dernières égalités (109), on aura, dans toute l'étendue du système,

$$(114) \qquad \Delta\Psi' + \left(\frac{2\pi}{\mathfrak{L}T}\right)^2 \Psi' = 0, \qquad \Delta\Psi'' + \left(\frac{2\pi}{\mathfrak{L}T}\right)^2 \Psi'' = 0,$$

tandis qu'en tout point de la surface Σ, en vertu des égalités (113) et des deux dernières égalités (110), on aura :

$$(115) \qquad \frac{\partial\Psi'}{\partial N} = 0, \qquad \frac{\partial\Psi''}{\partial N} = 0.$$

Comme T n'est pas une des périodes longitudinales du système, les égalités (114) et (115) exigent qu'on ait, dans tout le système,

$$\Psi' = 0, \qquad \Psi'' = 0$$

ou bien, en vertu des égalités (113),

(116) $$\Phi' = \left(\frac{\mathfrak{L}T}{2\pi}\right)^2 \varphi', \qquad \Phi'' = \left(\frac{\mathfrak{L}T}{2\pi}\right)^2 \varphi''.$$

Φ_0, Φ', Φ'' étant ainsi de simples constantes, les égalités (105) deviennent

$$\begin{array}{lll} \xi_0 = 0, & \xi' = 0, & \xi'' = 0, \\ \eta_0 = 0, & \eta' = 0, & \eta'' = 0, \\ \zeta_0 = 0, & \zeta' = 0, & \zeta'' = 0 \end{array}$$

ou, en vertu des égalités (86),

(117) $$\xi = 0, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = 0.$$

Le système ne peut admettre aucune vibration propre de période T *si cette période n'est ni période longitudinale, ni période transversale; une oscillation électrique de période* T *est déterminée sans ambiguïté lorsqu'on connaît, en chaque point de la surface qui borne le système, les trois composantes du champ magnétique et la composante normale du champ électrique.*

[**14**] SECOND CAS. — *La période* T *est période transversale, mais n'est pas période longitudinale du système.*

Nous devons avoir encore, en tout point du diélectrique, les égalités (102), et, en tout point de la surface Σ qui le borne, les égalités (103); en outre, en tout point du diélectrique et à tout instant, les égalités (8) donnent

$$\frac{\partial l}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\partial n}{\partial z} = 0.$$

Une telle égalité ne peut être vérifiée, à tout instant, par les expressions (89) de l, m, n que si l'on a, en tout point du diélectrique,

(118) $$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial l_0}{\partial x} + \frac{\partial m_0}{\partial y} + \frac{\partial n_0}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial l'}{\partial x} + \frac{\partial m'}{\partial y} + \frac{\partial n'}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial l''}{\partial x} + \frac{\partial m''}{\partial y} + \frac{\partial n''}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right.$$

La première égalité (102) et la première égalité (103) donnent encore, en tout point du diélectrique, la première des égalités

$$(119) \qquad l_0 = 0, \qquad m_0 = 0. \qquad n_0 = 0.$$

Les deux dernières se démontrent d'une manière analogue.

T étant égale à l'une des périodes transversales τ du système, les équations (99) et (100) admettent des intégrales non identiquement nulles; soit f une de ces intégrales; soient A', B', C' trois constantes; la seconde égalité (102) et la seconde égalité (103) nous donnent la première des égalités

$$(120) \qquad l' = A'f, \qquad m' = B'f, \qquad n' = C'f.$$

Nous nous proposons de démontrer que les trois constantes A', B', C' sont égales à zéro.

Supposons, en effet, qu'elles ne le soient pas.

En vertu des égalités (120), la seconde égalité (118) peut s'écrire :

$$(121) \qquad A'\frac{\partial f}{\partial x} + B'\frac{\partial f}{\partial y} + C'\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Elle exprime que la fonction $f(x, y, z)$ ne varie pas lorsque le point (x, y, z) décrit, au sein du diélectrique, une droite perpendiculaire au plan

$$(122) \qquad A'x + B'y + C'z = 0.$$

Il en est forcément de même des produits $A'f$, $B'f$, $C'f$ ou, selon les égalités (120), de l', m', n'. Or, par tout point du diélectrique, on peut mener un segment de droite, perpendiculaire au plan représenté par l'équation (122), et dont les deux points extrêmes soient sur la surface Σ qui borne le diélectrique. En ces deux points, la seconde égalité (103) et deux égalités analogues nous enseignent qu'on a $l' = 0$, $m' = 0$, $n' = 0$. On voit alors que ces égalités doivent être vérifiées en tout point du diélectrique, ce que voulions démontrer.

En joignant à cette démonstratration une seconde démonstration toute semblable, nous trouverons qu'on a, en tout point du diélectrique,

$$(123) \qquad \begin{cases} l' = 0, & m' = 0, & n' = 0, \\ l'' = 0, & m'' = 0, & n'' = 0. \end{cases}$$

Les égalités (119) et (123) sont les mêmes que les égalités (104); nous pouvons donc reprendre ici tous les raisonnements qui, au n° [**13**], ont suivi les égalités (104); ces raisonnements nous conduiront à la conclusion suivante :

Si T *est une période transversale du système, mais n'en est pas une période longitudinale, le système ne saurait admettre d'oscillation électrique propre dont* T *soit la période; une oscillation électrique de cette période est déterminée sans ambiguïté lorsqu'on donne, en tout point de la surface qui borne le diélectrique, les trois composantes du champ magnétique et la composante normale du champ électrique total.*

[**15**] Troisième cas. — *La période* T *est période longitudinale du système.*

Si la période T n'est pas une période transversale du système, nous pouvons répéter les raisonnements qui, au n° [**13**], nous ont donné les égalités (104); si T est une période transversale, nous pouvons répéter les raisonnements qui, au n° [**14**], nous ont fourni les égalités (119) et (123), identiques aux égalités (104). De ces égalités (104), nous pourrons encore, et de la même manière, déduire les égalités (109) auxquelles, de nouveau, les égalités (110) devront être jointes.

La première égalité (109) et la première égalité (110) nous donneront, comme précédemment, cette conséquence que Φ_0 est une simple constante.

Enfin, en définissant les fonctions Ψ', Ψ'' par les égalités (113), nous trouverons que ces fonctions doivent vérifier les égalités (114) et (115). Mais ici, comme T est une période longitudinale du système, il n'en résultera plus que les deux fonctions Ψ', Ψ'' sont égales à zéro. Si F est une intégrale non identiquement nulle des équations (96) et (97), et si A', A'' sont deux constantes, nous aurons

$$\Psi' = A'F, \qquad \Psi'' = A''F \tag{124}$$

ou bien, en vertu des égalités (113),

$$\Phi' = A'F + \left(\frac{\mathfrak{L}T}{2\pi}\right)^2 \varphi', \qquad \Phi'' = A''F + \left(\frac{\mathfrak{L}T}{2\pi}\right)^2 \varphi''. \tag{125}$$

Les égalités (86), (105) et (125) nous donneront alors

$$\left\{\begin{aligned} \eta &= -\frac{\partial F}{\partial x}\left(A'\cos 2\pi\frac{t}{T} + A''\sin 2\pi\frac{t}{T}\right), \\ \eta &= -\frac{\partial F}{\partial y}\left(A'\cos 2\pi\frac{t}{T} + A''\sin 2\pi\frac{t}{T}\right), \\ \zeta &= -\frac{\partial F}{\partial z}\left(A'\cos 2\pi\frac{t}{T} + A''\sin 2\pi\frac{t}{T}\right). \end{aligned}\right. \tag{126}$$

Ces égalités peuvent encore s'écrire un peu autrement; soient A, α deux constantes définies par les égalités

$$A\cos 2\pi\alpha = A', \qquad A\sin 2\pi\alpha = A''. \tag{127}$$

Les égalités (126) pourront s'écrire :

$$(128)\qquad \begin{cases} \xi = -A\dfrac{\partial F}{\partial x}\cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\alpha\right), \\ \eta = -A\dfrac{\partial F}{\partial y}\cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\alpha\right), \\ \zeta = -A\dfrac{\partial F}{\partial z}\cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\alpha\right). \end{cases}$$

Si la période T *est égale à une des périodes longitudinales* λ *du système, celui-ci peut être le siège d'une vibration électrique propre de période* T; *cette vibration est rectiligne, longitudinale, et elle a même phase en tous les points du système. Une vibration électrique de telle période n'est pas entièrement déterminée par la connaissance des valeurs prises, en chaque point de la surface terminale, par les trois composantes du champ magnétique et par la composante normale du champ électrique.*

§ 5. — *Oscillations électriques au sein d'un corps diélectrique, quand on donne, en chaque point de la surface du corps, les trois composantes du champ électrique.*

(Cas A)

[**16**] On suppose maintenant qu'on se donne, en chaque point de la surface Σ qui borne le diélectrique, les trois composantes du champ électrique, représentées par des expressions de la forme (86); on suppose qu'en tout point intérieur au diélectrique, les trois composantes du champ électrique soient représentées par des expressions de même forme; on se demande si ces conditions suffisent à déterminer sans ambiguïté ces trois composantes.

Si elles n'y suffisent pas, deux déterminations distinctes du champ diffèrent évidemment l'une de l'autre par l'addition d'un champ qui possède les propriétés suivantes :

1° En tout point du diélectrique, les trois composantes ξ, η, ζ de ce champ sont de la forme (86);

2° En tout point du diélectrique, ces trois composantes vérifient les égalités (11);

3° En tout point de la surface Σ qui borne le diélectrique, on a

$$(129)\qquad \xi = 0, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = 0.$$

Un tel champ constitue une *vibration électrique propre du diélectrique considéré, soumis aux conditions, aux limites qui viennent d'être définies.*

Les égalités (11) et (86) ne pourraient être vérifiées, à tout instant, en tout point du diélectrique, si l'on n'avait, en tout point du diélectrique, les neuf équations

$$(130)\qquad \mathfrak{T}^2\left(\frac{\partial n_0}{\partial y}-\frac{\partial m_0}{\partial z}\right)+\mathfrak{L}^2\frac{\partial\theta_0}{\partial x}=0,\ \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$(131)\qquad \begin{cases}\mathfrak{T}^2\left(\dfrac{\partial n'}{\partial y}-\dfrac{\partial m'}{\partial z}\right)+\mathfrak{L}^2\dfrac{\partial\theta'}{\partial x}+\dfrac{4\pi^2}{T^2}\xi'=0,\ \ldots\ldots,\\[2ex] \mathfrak{T}^2\left(\dfrac{\partial n''}{\partial y}-\dfrac{\partial m''}{\partial z}\right)+\mathfrak{L}^2\dfrac{\partial\theta''}{\partial x}+\dfrac{4\pi^2}{T^2}\xi''=0,\ \ldots\ldots\end{cases}$$

Les égalités (129) et (86) ne pourraient être vérifiées, à tout instant, en tout point de la surface Σ, si l'on n'avait, en tout point de cette surface,

$$(132)\qquad \zeta_0=0,\qquad \eta_0=0,\qquad \xi_0=0,$$

$$(133)\qquad \begin{cases}\xi'=0, & \eta'=0, & \zeta'=0,\\ \xi''=0, & \eta''=0, & \zeta''=0.\end{cases}$$

[**17**] Multiplions respectivement les trois égalités (130) par $\xi_0 d\varpi$, $\eta_0 d\varpi$, $\zeta_0 d\varpi$; ajoutons membre à membre les résultats obtenus; intégrons pour le volume entier du système, en intégrant par parties certains termes; nous trouvons l'égalité

$$(134)\qquad \begin{cases}\mathfrak{T}^2\displaystyle\int\Big\{[\eta_0\cos(N,z)-\zeta_0\cos(N,y)]\,l_0+[\zeta_0\cos(N,x)-\xi_0\cos(N,z)]m_0\\ \qquad\qquad +[\xi_0\cos(N,y)-\eta_0\cos(N,x)]n_0\Big\}d\Sigma\\ +\mathfrak{T}^2\displaystyle\int[\xi_0\cos(N,x)+\eta_0\cos(N,y)+\zeta_0\cos(N,z)]\,\theta_0\,d\Sigma\\ +\displaystyle\int[\mathfrak{T}^2(l_0^2+m_0^2+n_0^2)+\mathfrak{L}^2\theta_0^2]\,d\varpi \qquad =0\end{cases}$$

ou bien, en vertu des égalités (132),

$$(135)\qquad \int[\mathfrak{T}^2(l_0^2+m_0^2+n_0^2)+\mathfrak{L}^2\theta_0^2]\,d\varpi=0.$$

Cette égalité exige qu'on ait, en tout point du diélectrique,

$$(136)\qquad \begin{cases}\qquad\qquad \theta_0=0,\\ l_0=0,\qquad m_0=0,\qquad n_0=0.\end{cases}$$

En vertu de la démonstration donnée au n° [**5**], les équations (136), vérifiées en tout point du diélectrique, et les équations (132), vérifiées en tout point de la surface limite, exigent qu'on ait, en tout point du diélectrique,

$$(137)\qquad \xi_0=0,\qquad \eta_0=0,\qquad \zeta_0=0.$$

[**18**] Il existe une infinité de valeurs de T pour lesquelles les équations (131) et (133) admettent des intégrales différentes de zéro; cela peut être démontré ou, du moins, rendu vraisemblable à l'aide d'un raisonnement indiqué par H. Poincaré[1]; nous allons reprendre ce raisonnement avec quelques modifications.

En appliquant aux trois premières équations (131) et aux trois premières équations (133) une transformation analogue à celle qui, des équations (130) et (132), a tiré l'égalité (135), nous obtiendrons l'égalité

$$(138) \qquad \int \mathfrak{T}^2(l'^2 + m'^2 + n'^2) + \mathfrak{L}^2\theta'^2]\,d\varpi - \frac{4\pi^2}{T^2}\int (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)\,d\varpi = 0.$$

Prenons un ensemble de trois fonctions ξ', η', ζ' assujetties à vérifier, en tout point de surface Σ, les trois premières égalités (133), et à vérifier en outre la condition

$$(139) \qquad \int (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)\,d\varpi = 1.$$

Ces fonctions font prendre à la quantité

$$(140) \qquad J = \int [\mathfrak{T}^2(l'^2 + m'^2 + n'^2) + \mathfrak{L}^2\theta'^2]\,d\varpi$$

une valeur qui ne peut être négative, et qui ne peut non plus être nulle, en vertu de la démonstration donnée au commencement du n° [**5**].

Admettons : 1° *Que la limite inférieure* J_1 *de cette quantité* J *soit positive et non pas nulle;*

2° *Qu'il existe au moins une détermination* (ξ'_1, η'_1, ζ'_1) *de l'ensemble de fonctions* (ξ', η', ζ') *ponr lequel* J *atteigne la valeur* J_1.

Si nous admettons cette double hypothèse, *qui n'est nullement évidente*, le reste de la démonstration se poursuit sans objection ni difficulté.

Parmi toutes les fonctions ξ', η', ζ', assujetties à la condition (139) et, en tout point de la surface Σ, aux trois premières égalités (133), $\xi' = \xi'_1$, $\eta' = \eta'_1$, $\zeta' = \zeta'_1$ rendent J minimum. On doit donc avoir

$$(141) \qquad \int [\mathfrak{T}^2(l'_1\delta l' + m'_1\delta m'_1 + n'_1\delta n') + \mathfrak{L}^2\theta'_1\delta\theta']\,d\varpi = 0$$

pour tout système de valeurs de $\delta\xi'$, $\delta\eta'$, $\delta\zeta'$ qui vérifient la condition

$$(142) \qquad \int (\xi'_1\delta\xi' + \eta'_1\delta\eta' + \zeta'_1\delta\zeta')\,d\varpi = 0$$

---

[1] H. Poincaré, *Leçons sur la théorie de l'élasticité*, Paris, 1892, chap. V, 52 et 53, pp. 103 sqq.

et, en outre, en tout point de la surface Σ,

$$\delta\xi' = 0, \qquad \delta\eta' = 0, \qquad \delta\zeta' = 0. \tag{143}$$

Les égalités (87) et (90) donnent

$$\left\{\begin{array}{l} \delta\theta' = \dfrac{\partial\delta\xi'}{\partial x} + \dfrac{\partial\delta\eta'}{\partial y} + \dfrac{\partial\delta\zeta'}{\partial z}, \\ \delta l' = \dfrac{\partial\delta\eta'}{\partial z} - \dfrac{\partial\delta\zeta'}{\partial y}, \qquad \delta m' = \dfrac{\partial\delta\zeta'}{\partial x} - \dfrac{\partial\delta\xi'}{\partial z}, \qquad \delta n' = \dfrac{\partial\delta\xi'}{\partial y} - \dfrac{\partial\delta\eta'}{\partial x}. \end{array}\right. \tag{144}$$

Introduisons ces expressions (144) au premier membre de l'égalité (141); dans ce premier membre, effectuons certaines intégrations par parties en tenant compte des conditions (143); nous trouvons l'égalité

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int \Big\{ \left[\mathfrak{T}^2\left(\frac{\partial m'_1}{\partial z} - \frac{\partial n'_1}{\partial y}\right) + \mathfrak{L}^2\frac{\partial\theta'_1}{\partial x}\right]\delta\xi' \\ \quad + \left[\mathfrak{T}^2\left(\frac{\partial n'_1}{\partial x} - \frac{\partial l'_1}{\partial z}\right) + \mathfrak{L}^2\frac{\partial\theta'_1}{\partial y}\right]\delta\eta' \\ \quad + \left[\mathfrak{T}^2\left(\frac{\partial l'_1}{\partial y} - \frac{\partial m'_1}{\partial x}\right) + \mathfrak{L}^2\frac{\partial\theta'_1}{\partial z}\right]\delta\zeta' \Big\} d\varpi = 0. \end{array}\right. \tag{145}$$

Cette égalité doit avoir lieu pour tout système de valeurs de $\delta\xi'$, $\delta\eta'$, $\delta\zeta'$ qui vérifient les conditions (142) et (143).

Il faut et il suffit pour cela qu'il existe :

1° Une constante C_1;

2° Trois quantités α, β, γ variables d'une manière continue sur la surface Σ, telles que tout ensemble de valeurs de $\delta\xi'$, $\delta\eta'$, $\delta\zeta'$, variables d'une manière continue dans le diélectrique, vérifie l'égalité

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int \Big\{ \left[\mathfrak{T}^2\left(\frac{\partial m'_1}{\partial z} - \frac{\partial n'_1}{\partial y}\right) + \mathfrak{L}^2\frac{\partial\theta'_1}{\partial x} + C_1\xi'_1\right]\delta\xi' \\ \quad + \left[\mathfrak{T}^2\left(\frac{\partial n'_1}{\partial x} - \frac{\partial l'_1}{\partial z}\right) + \mathfrak{L}^2\frac{\partial\theta'_1}{\partial y} + C_1\eta'_1\right]\delta\eta' \\ \quad + \left[\mathfrak{T}^2\left(\frac{\partial l'_1}{\partial y} - \frac{\partial m'_1}{\partial x}\right) + \mathfrak{L}^2\frac{\partial\theta'_1}{\partial z} + C_1\zeta'_1\right]\delta\xi' \Big\} d\varpi \\ + \displaystyle\int (\alpha\,\delta\xi' + \beta\,\delta\eta' + \gamma\,\delta\zeta')\, d\Sigma \qquad\qquad = 0. \end{array}\right. \tag{146}$$

Nous en concluons qu'on doit avoir :

1° En tout point du diélectrique,

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{T}^2\left(\dfrac{\partial m'_1}{\partial z} - \dfrac{\partial n'_1}{\partial y}\right) + \mathfrak{L}^2\dfrac{\partial\theta'_1}{\partial x} + C_1\xi'_1 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right. \tag{147}$$

2° En tout point de la surface limite Σ,

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = 0. \tag{148}$$

Si, sur les égalités (147), nous effectuons l'opération qui, des trois premières égalités (131), a tiré l'égalité (138), nous obtenons l'égalité

$$\int [\mathfrak{T}^2(l'^2_1 + m'^2_1 + n'^2_1) + \mathfrak{L}^2\theta'^2_1]\, d\varpi - C_1 \int (\xi'^2_1 + \eta'^2_1 + \zeta'^2_1)\, d\varpi = 0 \tag{149}$$

ou bien, en vertu des égalités (139) et (140),

$$C_1 = J_1. \tag{150}$$

Comme J_1 est essentiellement positif, cette égalité (150) nous permet de poser

$$C_1 = \frac{4\pi^2}{T_1^2}. \tag{151}$$

Alors, les égalités (147) prennent la forme des trois premières égalités (131), où à T, ξ', η', ζ', on aurait substitué T_1, ξ'_1, η'_1, ζ'_1. On voit donc que si l'on donne à T la valeur T_1, les trois premières équations (131) et les trois premières équations (133) admettent une solution $\xi' = \xi'_1$, $\eta' = \eta'_1$, $\zeta' = \zeta'_1$ qui ne peut être identiquement nulle puisqu'on a, en vertu de la condition (139),

$$\int (\xi'^2_1 + \eta'^2_1 + \zeta'^2_1)\, d\varpi = 1. \tag{152}$$

Si, à la condition (139), nous avions substitué la condition

$$\int (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)\, d\varpi = A^2, \tag{153}$$

où A est une constante quelconque, nous eussions obtenu un nouveau système de trois fonctions ξ'_1, η'_1, ζ'_1 respectivement égales aux produits des précédentes par A.

Imaginons maintenant que les quantités ξ', η', ζ' soient soumises non seulement, en tout point de la surface Σ, aux trois premières conditions (133), non seulement à la condition (139), mais encore à la condition

$$\int (\xi_1\xi' + \eta_1\eta' + \zeta_1\zeta')\, d\varpi = 0. \tag{154}$$

La quantité J, définie par l'égalité (140), prendra une valeur assurément positive. Les valeurs prises par la quantité J dans ces conditions se trouvent au nombre des valeurs qu'elle prenait dans les conditions précédentes; la limite inférieure J_2 des valeurs prises par J dans ces conditions-là est donc au moins égale à la limite inférieure J_1 des valeurs prises par J dans ces conditions-ci.

Nous admettrons : 1° *Que* J_2 *est supérieur à* J_1 ; nous pourrons alors poser pour

$$J_2 = \frac{4\pi^2}{T_2^2} \tag{155}$$

et, en vertu des égalités (150) et (151), T_2 *sera assurément inférieur à* T_1.

2° *Qu'il existe un ensemble de déterminations* $\xi'_2, \eta'_2, \zeta'_2$, *des quantités* ξ', η', ζ', *assujetties aux conditions* (133), (139) *et* (154), *pour lesquelles* J *atteint sa limite inférieure* J_2.

Nous devrons avoir, alors, $\delta J = 0$, c'est-à-dire, en vertu d'un calcul semblable à celui qui a donné l'égalité (145),

$$\left\{\begin{aligned} \int \Big\{ & \left[\mathfrak{T}^2 \left(\frac{\partial m'_2}{\partial z} - \frac{\partial n'_2}{\partial y} \right) + \mathfrak{L}^2 \frac{\partial \theta'_2}{\partial x} \right] \delta\xi' \\ & + \left[\mathfrak{T}^2 \left(\frac{\partial n'_2}{\partial x} - \frac{\partial l'_2}{\partial z} \right) + \mathfrak{L}^2 \frac{\partial \theta'_2}{\partial y} \right] \delta\eta' \\ & + \left[\mathfrak{T}^2 \left(\frac{\partial l'_2}{\partial y} - \frac{\partial m'_2}{\partial x} \right) + \mathfrak{L}^2 \frac{\partial \theta'_2}{\partial z} \right] \delta\zeta' \Big\} d\varpi = 0 \end{aligned}\right. \tag{156}$$

pour tous les systèmes de valeurs de $\delta\xi', \delta\eta', \delta\zeta'$ qui vérifient les deux conditions

$$\int (\xi'_1 \delta\xi' + \eta'_1 \delta\eta' + \zeta'_1 \delta\zeta')\, d\varpi = 0, \tag{157}$$

$$\int (\xi'_2 \delta\xi' + \eta'_2 \delta\eta' + \zeta'_2 \delta\zeta')\, d\varpi = 0 \tag{158}$$

et, en outre, en tout point de la surface Σ,

$$\delta\xi' = 0, \qquad \delta\eta' = 0, \qquad \delta\zeta' = 0. \tag{143}$$

Le raisonnement qui fournit les équations (147) nous apprend ici l'existence de deux constantes, C_2, D_2, telles que

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{T}^2 \left(\dfrac{\partial m'_2}{\partial z} - \dfrac{\partial n'_2}{\partial y} \right) + \mathfrak{L}^2 \dfrac{\partial \theta'_2}{\partial x} + C_2 \xi'_2 + D_2 \xi'_1 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right. \tag{159}$$

Multiplions ces équations par $\xi'_1 d\varpi$, $\eta'_1 d\varpi$, $\zeta'_1 d\varpi$; ajoutons membre à membre les résultats obtenus, intégrons pour le volume entier du système; nous trouverons

$$(160)\quad \left\{\begin{aligned} &\int \left\{ \left[\mathfrak{T}^2 \left(\frac{\partial m'_2}{\partial z} - \frac{\partial n'_2}{\partial y} \right) + \mathfrak{L}^2 \frac{\partial \theta'_2}{\partial x} \right] \xi'_1 \right. \\ &\quad + \left[\mathfrak{T}^2 \left(\frac{\partial n'_2}{\partial x} - \frac{\partial l'_2}{\partial z} \right) + \mathfrak{L}^2 \frac{\partial \theta'_2}{\partial y} \right] \eta'_1 \\ &\quad \left. + \left[\mathfrak{T}^2 \left(\frac{\partial l'_2}{\partial y} - \frac{\partial m'_2}{\partial x} \right) + \mathfrak{L}^2 \frac{\partial \theta'_2}{\partial z} \right] \zeta'_1 \right\} d\varpi \\ &\quad + C_2 \int (\xi'_2 \xi'_1 + \eta'_2 \eta'_1 + \zeta'_2 \zeta'_1)\, d\varpi \\ &\quad + D_2 \int (\xi'^2_1 + \eta'^2_1 + \zeta'^2_1)\, d\varpi \qquad = 0. \end{aligned}\right.$$

Comme ξ'_1, η'_1, ζ'_1 vérifient, en tout point de la surface Σ, les trois premières égalités (133), une intégration par parties donne

$$(161)\quad \left\{\begin{aligned} &\int \left\{ \left[\mathfrak{T}^2 \left(\frac{\partial m'_2}{\partial z} - \frac{\partial n'_2}{\partial y} \right) + \mathfrak{L}^2 \frac{\partial \theta'_2}{\partial x} \right] \xi'_1 + \ldots\ldots\ldots \right\} d\varpi \\ &= \int \left\{ \left[\mathfrak{T}^2 \left(\frac{\partial m'_1}{\partial z} - \frac{\partial n'_1}{\partial y} \right) + \mathfrak{L}^2 \frac{\partial \theta'_1}{\partial x} \right] \xi'_2 + \ldots\ldots\ldots \right\} d\varpi. \end{aligned}\right.$$

ξ'_2, η'_2, ζ'_2 vérifiant, en tout point de la surface Σ, les trois premières égalités (133) et, en outre, la condition (154), on voit que l'égalité (145) doit être vérifiée par des valeurs de $\delta\xi'$, $\delta\eta'$, $\delta\zeta'$ respectivement proportionnelles à ξ'_2, η'_2, ζ'_2; c'est dire que le second membre de l'égalité (161) est égal à zéro, qu'il en est donc de même du premier membre, c'est-à-dire du premier terme figurant au premier membre de l'équation (160).

Si l'on observe alors que l'égalité (139) doit être vérifiée lorsqu'on y fait $\xi' = \xi'_2$, $\eta' = \eta'_2$, $\zeta' = \zeta'_2$; que $\xi' = \xi'_1$, $\eta' = \eta'_1$, $\zeta' = \zeta'_1$ vérifient la condition (139), on voit que l'équation (160) se réduit à

$$(162)\qquad D_2 = 0.$$

Introduisons cette valeur de D_2 dans les équations (159); multiplions-les respectivement par $\xi'_2 d\varpi$, $\eta'_2 d\varpi$, $\zeta'_2 d\varpi$, ajoutons membre à membre les résultats obtenus; effectuons enfin des transformations semblables à celles qui ont donné l'égalité (149); nous trouvons :

$$(163)\quad \int [\mathfrak{T}^2 (l'^2_2 + m'^2_2 + n'^2_2) + \mathfrak{L}^2 \theta'^2_2]\, d\varpi - C_2 \int (\xi'^2_2 + \eta'^2_2 + \zeta'^2_2)\, d\varpi = 0.$$

La condition (139) devant être vérifiée quand on y remplace ξ', η', ζ' par ξ'_2, η'_2, ζ'_2, cette égalité (163) se réduit à

$$C_2 = J_2$$

ou bien, en vertu de l'égalité (155), à

$$C_2 = \frac{4\pi^2}{T_2^2}. \tag{164}$$

Si, dans les équations (159), nous remplaçons C_2 et D_2 par leurs valeurs (164) et (162), nous voyons que ces équations sont ce que deviennent les trois premières équations (131) lorsqu'on y fait

$$T = T_2, \qquad \xi' = \xi'_2, \qquad \eta' = \eta'_2, \qquad \zeta' = \zeta'_2.$$

T_2 est donc une nouvelle période propre du système.

Une troisième période propre correspondrait au minimum des valeurs prises par J lorsque ξ', η', ζ' sont assujettis à s'annuler en tout point de la surface Σ et à vérifier, en outre, les trois conditions

$$\int (\xi'_1\xi' + \eta'_1\eta' + \zeta'_1\zeta')\, d\varpi = 0,$$

$$\int (\xi'_2\xi' + \eta'_2\eta' + \zeta'_2\zeta')\, d\varpi = 0,$$

$$\int (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)\, d\varpi = 1.$$

On continuerait ainsi indéfiniment.

[**19**] Si T n'est pas une période propre du système, les trois premières équations (131) doivent déterminer sans ambiguïté les valeurs prises par ξ', η', ζ' en tout point du système lorsque l'on connaît les valeurs prises par ces quantités en chacun des points de la surface Σ; les trois dernières équations (131) détermineraient de même ξ'', η'', ζ''.

Il est aisé d'imaginer comment ces fonctions se pourraient développer en séries de fonctions fondamentales.

I. — Cherchons trois fonctions f'_0, g'_0 h'_0 telles qu'on ait, en tout point de la surface Σ,

$$f'_0 = \xi', \qquad g'_0 = \eta', \qquad h'_0 = \zeta', \tag{165}$$

et, en tout point du volume occupé par le diélectrique,

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{L}^2 \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f'_0}{\partial x} + \dfrac{\partial g'_0}{\partial y} + \dfrac{\partial h'_0}{\partial z}\right) \\ + \mathfrak{T}^2\left[\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f'_0}{\partial y} - \dfrac{\partial g'_0}{\partial x}\right) - \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial h'_0}{\partial x} - \dfrac{\partial f'_0}{\partial z}\right)\right] = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{166}$$

Ces fonctions f'_0, g'_0, h'_0, si elles existent, sont déterminées sans ambiguïté ; en effet, si elles étaient susceptibles de deux déterminations distinctes, nous pourrions désigner la première de ces déterminations par f'_0, g'_0, h'_0, et la seconde par $f'_0 + \xi_0$, $g'_0 + \eta_0$, $h'_0 + \zeta_0$. Alors ξ_0, η_0, ζ_0 devraient vérifier les conditions (130) et (132) qui, nous l'avons vu au n° [**17**], entraînent

$$\xi_0 = 0, \qquad \eta_0 = 0, \qquad \zeta_0 = 0.$$

Admettons *que les fonctions f'_0, g'_0, h'_0 existent.*

II. — Cherchons trois fonctions f'_1, g'_1, h'_1 telles qu'on ait, en tout point de la surface Σ,

$$f'_1 = 0, \qquad g'_1 = 0, \qquad h'_1 = 0 \tag{167}$$

et, en tout point de l'espace occupé par le diélectrique,

$$\left\{\begin{aligned} &\mathfrak{L}^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f'_1}{\partial x} + \frac{\partial g'_1}{\partial y} + \frac{\partial h'_1}{\partial z}\right) \\ &+ \mathfrak{T}^2 \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f'_1}{\partial y} - \frac{\partial g'_1}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial h'_1}{\partial x} - \frac{\partial f'_1}{\partial z}\right)\right] = -f'_0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right. \tag{168}$$

On peut montrer, comme dans le cas précédent, que les fonctions f'_1, g'_1, h'_1 sont déterminées sans ambiguïté si elles existent.

Admettons *que les fonctions f'_1, g'_1, h'_1 existent.*

III. — Répétons ce qui vient d'être dit en remplaçant f'_0, g'_0, h'_0 par f'_1, g'_1, h'_1, et f'_1, g'_1, h'_1 par f'_2, g'_2, h'_2.

Continuons indéfiniment de la sorte.

Considérons les développements suivants :

$$\left\{\begin{aligned} \xi' &= f'_0 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 f'_1 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^4 f'_2 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^6 f'_3 + \ldots, \\ \eta' &= g'_0 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 g'_1 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^4 g'_2 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^6 g'_3 + \ldots, \\ \zeta' &= h'_0 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 h'_2 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^4 h'_2 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^6 h'_3 + \ldots. \end{aligned}\right. \tag{169}$$

Supposons *que ces développements soient, en tout point du diélectrique, absolument et uniformément convergents, ainsi que les développements qu'en déduisent une ou deux dérivations par rapport à x, à y ou à z.*

Alors, 1° En vertu des égalités (165), (167), ..., ξ', η', ζ' prendront, en tout point de la surface Σ, les valeurs données.

2° En vertu des égalités (166), (168), ..., ξ', η', ζ' vérifieront, en tout point du diélectrique, les trois premières équations (131).

Les développements (169) fourniront donc la solution du problème posé.

De cette solution, nous ne donnons ici qu'une sorte d'esquisse; pour transformer cette esquisse en une véritable solution, il faudrait donner la démonstration rigoureuse des propositions que nous nous sommes contenté d'admettre.

On remarquera que le problème étudié dans ce paragraphe a son correspondant dans la théorie de l'élasticité; tout ce que nous venons de dire demeure vrai si, par ξ, η, ζ, on n'entend plus les composantes du champ électrique total au sein d'un diélectrique homogène, mais les composantes du déplacement infiniment petit d'un corps isotrope soumis exclusivement à des pressions exercées aux divers points de sa surface.

CHAPITRE II

Le système est formé de plusieurs corps diélectriques.

§ 1. — *Formation des équations qui régissent les vibrations pendulaires engendrées par un excitateur.*

[20] Nous allons aborder maintenant l'étude d'un système que forment plusieurs corps diélectriques distincts, entièrement dénués de conductibilité.

Pour ne pas compliquer inutilement les écritures, nous réduirons à deux les diélectriques qui forment le système; nous les désignerons par 1 et 2; ϖ_1, ϖ_2 seront les régions de l'espace respectivement occupées par chacun d'eux; S_{12} sera la surface qui les sépare, Σ continuera de désigner la surface qui borne le système.

Hors du système étudié, se trouvera un autre système, *l'excitateur*, dont l'état électrique et magnétique sera supposé connu à chaque instant. En chaque point du système que nous étudions, et à chaque instant, l'excitateur produira un champ dont nous désignerons les composantes par ξ_0, η_0, ζ_0; ces composantes doivent être regardées comme connues.

Sous l'influence de l'excitateur et des conditions initiales, le système porte, à chaque instant et en chacun de ses points, une polarisation magnétique, une polarisation diélectrique et des courants de déplacement; à ces polarisations et à ces courants correspondent, en chaque point et à chaque instant, un champ électrique dont les composantes sont ξ, η, ζ. Les composantes du champ électrique total sont ainsi, en chaque point et à chaque instant,

$$\xi_0 + \xi, \qquad \eta_0 + \eta, \qquad \zeta_0 + \zeta.$$

Ces composantes du champ électrique total doivent, en tout point du système et à tout instant, vérifier les équations (11); si donc on pose

$$(170) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\mathfrak{T}^2 \left(\frac{\partial n_0}{\partial y} - \frac{\partial m_0}{\partial z} \right) + \mathfrak{L}^2 \frac{\partial \theta_0}{\partial x} - \frac{\partial^2 \xi_0}{\partial t^2} = -\alpha_0, \\ &\mathfrak{T}^2 \left(\frac{\partial l_0}{\partial z} - \frac{\partial n_0}{\partial x} \right) + \mathfrak{L}^2 \frac{\partial \theta_0}{\partial y} - \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial t^2} = -\beta_0, \\ &\mathfrak{T}^2 \left(\frac{\partial m_0}{\partial x} - \frac{\partial l_0}{\partial y} \right) + \mathfrak{L}^2 \frac{\partial \theta_0}{\partial z} - \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial t^2} = -\gamma_0, \end{aligned} \right.$$

égalités dans lesquelles l_0, m_0, n_0, θ_0 sont liés à ξ_0, η_0, ζ_0 par des égalités analogues aux égalités (8) et (10), et où, par conséquent, les quantités α_0, β_0, γ_0 sont regardées comme données, on devra avoir, en chaque point du système et à chaque instant,

$$(171)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathfrak{T}^2\left(\frac{\partial n}{\partial y}-\frac{\partial m}{\partial z}\right)+\mathfrak{L}^2\frac{\partial \theta}{\partial x}-\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}=\alpha_0,\\ &\mathfrak{T}^2\left(\frac{\partial l}{\partial z}-\frac{\partial n}{\partial x}\right)+\mathfrak{L}^2\frac{\partial \theta}{\partial y}-\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}=\beta_0,\\ &\mathfrak{T}^2\left(\frac{\partial m}{\partial x}-\frac{\partial l}{\partial y}\right)+\mathfrak{L}^2\frac{\partial \theta}{\partial z}-\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}=\gamma_0. \end{aligned}\right.$$

En chaque point de la surface S_{12} et à chaque instant, on doit avoir

$$(172)\qquad \begin{aligned} &D'_1[(\xi_0+\xi)\cos(n_1,x)+(\eta_0+\eta)\cos(n_1,y)+(\zeta_0+\zeta)\cos n_1,z)\\ &+D'_2[(\xi_0+\xi)\cos(n_2,x)+(\eta_0+\eta)\cos(n_2,y)+(\zeta_0+\zeta)\cos(n_2,z)]=0. \end{aligned}$$

Dans cette égalité, n_1 désigne la demi-normale dirigée vers l'intérieur du corps 1 et n_2 la demi-normale dirigée vers l'intérieur du corps 2. Au premier terme, ξ_0, η_0, ζ_0, ξ, η, ζ se rapportent à un point infiniment voisin du point que l'on considère sur la surface S_{12}, mais appartenant au corps 1; au second terme, les mêmes quantités ont trait à un point analogue, mais appartenant au corps 2.

La quantité

$$(173)\qquad \begin{aligned} &D'_1[\xi_0\cos(n_1,x)+\eta_0\cos(n_1,y)+\zeta_0\cos(n_1,z)]\\ &+D'_2[\xi_0\cos(n_2,x)+\eta_0\cos(n_2,y)+\zeta_0\cos(n_2,z)]=-s_0 \end{aligned}$$

est censée connue, à chaque instant, en chaque point de la surface S_{12}. L'égalité (172) peut s'écrire

$$(174)\qquad \begin{aligned} &D'_1[\xi\cos(n_1,x)+\eta\cos(n_1,y)+\zeta\cos(n_1,z)]\\ &+D'_2[\xi\cos(n_2,x)+\eta\cos(n_2,y)+\zeta\cos(n_2,z)]=s_0. \end{aligned}$$

En tout point de la surface Σ qui limite le système, nous supposerons qu'on donne, à tout instant, la valeur de la composante normale du champ électrique total

$$(\xi_0+\xi)\cos(N,x)+(\eta_0+\eta)\cos(N,y)+(\zeta_0+\zeta)\cos(N,z)$$

et les trois composantes du champ magnétique total, qui font connaître les valeurs des trois quantités

$$l_0+l,\qquad m_0+m,\qquad n_0+n.$$

Mais les quantités ξ_0, η_0, ζ_0, l_0, m_0, n_0 sont, par hypothèse, connues en tout point du système et à tout instant. Il revient donc au même de supposer qu'on a, en tout point de la surface Σ et à tout instant,

$$(175)\qquad \xi\cos(N,x)+\eta\cos(N,y)+\zeta\cos(N,z)=\rho,$$

$$(176)\qquad l=\mathcal{L},\qquad m=\mathcal{M},\qquad n=\mathcal{N},$$

ρ, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ étant des quantités données.

En général, lorsqu'on voudra traiter un problème de résonnance électrique, on supposera que l'excitateur, qui doit toujours être extérieur à la surface Σ, est rejeté à l'infini; on admettra, en outre, que cette surface Σ est aussi, tout entière, rejetée à l'infini, de telle façon que le système soit illimité; enfin on admettra que sur cette surface Σ, c'est-à-dire à l'infini, les composantes du champ électrique et du champ magnétique se réduisent aux composantes des deux champs créés par l'excitateur; ce sera supposer qu'en un point qui s'éloigne à l'infini dans une direction quelconque, les six quantités

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad l, \quad m, \quad n$$

tendent vers zéro quel que soit t.

Mais, pour éviter tout manque de rigueur dans nos démonstrations, il vaudra mieux n'y pas introduire ces suppositions; nous les ferons en supposant que la surface Σ se trouve tout entière à distance finie; si on la veut ensuite rejeter à l'infini, on verra sans peine ce qui en résultera pour les propositions diverses que nous aurons établies.

[**21**] Supposons maintenant que l'état électrique et magnétique de l'excitateur varie périodiquement, que T en soit la période, et que toutes les quantités qui le caractérisent varient suivant une loi pendulaire. Les quantités ξ_0, η_0, ζ_0 seront alors de la forme

$$(177)\qquad \begin{cases} \xi_0 = \xi'_0 \cos 2\pi \dfrac{t}{T} + \xi''_0 \sin 2\pi \dfrac{t}{T}, \\[2ex] \eta_0 = \eta'_0 \cos 2\pi \dfrac{t}{T} + \eta''_0 \sin 2\pi \dfrac{t}{T}, \\[2ex] \zeta_0 = \zeta'_0 \cos 2\pi \dfrac{t}{T} + \zeta''_0 \sin 2\pi \dfrac{t}{T}. \end{cases}$$

Il en résultera que les quantités θ_0, l_0, m_0, n_0 seront aussi de même forme; partant, en vertu des égalités (170), on aura

$$(178)\qquad \begin{cases} \alpha_0 = \alpha'_0 \cos 2\pi \dfrac{t}{T} + \alpha''_0 \sin 2\pi \dfrac{t}{T}, \\[2ex] \beta_0 = \beta'_0 \cos 2\pi \dfrac{t}{T} + \beta''_0 \sin 2\pi \dfrac{t}{T}, \\[2ex] \gamma_0 = \gamma'_0 \cos 2\pi \dfrac{t}{T} + \gamma''_0 \sin 2\pi \dfrac{t}{T}. \end{cases}$$

De même, en vertu de l'égalité (173), on aura

$$(179)\qquad s_0 = s'_0 \cos 2\pi \frac{t}{T} + s''_0 \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Admettons, en outre, que les quatre quantités ρ, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ soient des quantités pendulaires de période T :

$$\rho = \rho' \cos 2\pi \frac{t}{T} + \rho'' \sin 2\pi \frac{t}{T}, \tag{180}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}' \cos 2\pi \frac{t}{T} + \mathcal{L}'' \sin 2\pi \frac{t}{T}, \\ \mathcal{M} &= \mathcal{M}' \cos 2\pi \frac{t}{T} + \mathcal{M}'' \sin 2\pi \frac{t}{T}, \\ \mathcal{N} &= \mathcal{N}' \cos 2\pi \frac{t}{T} + \mathcal{N}'' \sin 2\pi \frac{t}{T}. \end{aligned} \right. \tag{181}$$

Demandons-nous si, dans ces conditions, le champ électrique induit (ξ, η, ζ) pourra être un champ pendulaire de période T ou, en d'autres termes, si l'on pourra avoir

$$\left\{ \begin{aligned} \xi &= \xi' \cos 2\pi \frac{t}{T} + \xi'' \sin 2\pi \frac{t}{T}, \\ \eta &= \eta' \cos 2\pi \frac{t}{T} + \eta'' \sin 2\pi \frac{t}{T}, \\ \zeta &= \zeta' \cos 2\pi \frac{t}{T} + \zeta'' \sin 2\pi \frac{t}{T}, \end{aligned} \right. \tag{182}$$

les six quantités ξ', η', ζ', ξ'', η'', ζ'' étant six fonctions des seules variables x, y, z.

En vertu des égalités (171), nous devrons avoir, en tout point, soit du corps 1, soit du corps 2,

$$\left\{ \begin{aligned} &\mathfrak{T}^2 \left(\frac{\partial n'}{\partial y} - \frac{\partial m'}{\partial z} \right) + \mathfrak{L}^2 \frac{\partial \theta'}{\partial x} + \frac{4\pi^2}{T^2} \xi' = \alpha'_0, \\ &\mathfrak{T}^2 \left(\frac{\partial l'}{\partial z} - \frac{\partial n'}{\partial x} \right) + \mathfrak{L}^2 \frac{\partial \theta'}{\partial y} + \frac{4\pi^2}{T^2} \eta' = \beta'_0, \\ &\mathfrak{T}^2 \left(\frac{\partial m'}{\partial x} - \frac{\partial l'}{\partial y} \right) + \mathfrak{L}^2 \frac{\partial \theta'}{\partial z} + \frac{4\pi^2}{T^2} \zeta' = \gamma'_0, \end{aligned} \right. \tag{183}$$

l', m', n', θ' étant liés à ξ', η', ζ' par des égalités analogues aux égalités (8) et (10).

En vertu de l'égalité (174), on devra avoir, en chaque point de la surface S_{12},

$$\begin{aligned} &D'_1[\xi' \cos(n_1, x) + \eta' \cos(n_1, y) + \zeta' \cos(n_1, z)] \\ &+ D'_2[\xi' \cos(n_2, x) + \eta' \cos(n_2, y) + \zeta' \cos(n_2, z)] = s'_0. \end{aligned} \tag{184}$$

Enfin, en vertu des égalités (175) et (176), on devra avoir, en tout point de la surface Σ,

$$\xi' \cos(N, x) + \eta' \cos(N, y) + \zeta' \cos(N, z) = \rho', \tag{185}$$

$$l' = \mathcal{L}', \qquad m' = \mathcal{M}', \qquad n' = \mathcal{N}'. \tag{186}$$

Les trois quantités ξ'', η'', ζ'' doivent vérifier des égalités analogues aux égalités (183) à (186).

§ 2. — *Vibrations pendulaires propres du système.*

[**22**] Les données suffisent-elles à déterminer sans ambiguïté le champ électrique pendulaire induit sur le système?

Appelons (183 *bis*), (184 *bis*), (185 *bis*) et (186 *bis*) ce que deviennent les équations (183) à (186) quand on y remplace les seconds membres par zéro.

Nous obtiendrons sans peine la proposition suivante :

Si des données identiques pouvaient correspondre à deux champs pendulaires distincts de même période T, ces deux champs différeraient l'un de l'autre par un troisième champ pendulaire de même période T, que donneraient, par conséquent, des égalités de la forme (182), où (ξ', η', ζ') serait une solution des équations (183 *bis*) à (186 *bis*), et où (ξ'', η'', ζ'') serait une autre solution des mêmes équations.

Un tel champ constituerait une *vibration électrique pendulaire propre au système.*

[**23**] Par extension de ce qui a été démontré, au § 4 du Chapitre précédent, pour un diélectrique unique, NOUS ADMETTRONS *que, dans les conditions indiquées, un système formé de plusieurs diélectriques ne saurait admettre aucune vibration pendulaire propre qui ne soit constituée par un champ longitudinal* (1).

Si donc les formules (182) représentent une vibration pendulaire propre, il devra exister deux fonctions Φ' et Φ'' des seules variables (x, y, z) telles qu'on ait

$$(187)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi' &= -\frac{\partial \Phi'}{\partial x}, & \eta' &= -\frac{\partial \Phi'}{\partial y}, & \zeta' &= -\frac{\partial \Phi'}{\partial z},\\ \xi'' &= -\frac{\partial \Phi''}{\partial x}, & \eta'' &= -\frac{\partial \Phi''}{\partial y}, & \zeta'' &= -\frac{\partial \Phi''}{\partial z}.\end{aligned}\right.$$

La quantité Φ' doit vérifier l'équation de la dilatation relative aux équations (183 *bis*), c'est-à-dire qu'en chaque point du diélectrique 1, on doit avoir

$$(188)\qquad \mathfrak{L}_1^2\,\Delta\Phi' + \frac{4\pi^2}{T^2}\Phi' = 0,$$

et qu'en tout point du diélectrique 2, on doit avoir

$$(188\ bis)\qquad \mathfrak{L}_2^2\,\Delta\Phi' + \frac{4\pi^2}{T^2}\Phi' = 0.$$

(1) Dans un travail ultérieur, nous montrerons que cette supposition, parfaitement admissible tant qu'on porte exclusivement son attention sur les équations du champ total, cesse de l'être quand on considère les deux champs, électrostatique et électrodynamique, capables de l'engendrer. La théorie exposée au présent chapitre, inadmissible au point de vue de la Physique, ne garde qu'un intérêt purement mathématique.

En tout point de la surface S_{12}, l'égalité (184 *bis*) devient, en vertu des égalités (187),

(189) $$D'_1 \frac{\partial \Phi'}{\partial n_1} + D'_2 \frac{\partial \Phi'}{\partial n_2} = 0.$$

En tout point de la surface Σ qui limite le système, l'égalité (185 *bis*) devient

(190) $$\frac{\partial \Phi'}{\partial N} = 0.$$

Quant aux égalités

(186 *bis*) $$l' = 0, \qquad m' = 0, \qquad n' = 0,$$

elles sont vérifiées d'elles-mêmes en tout point du système et, partant, en tout point de la surface Σ.

La fonction Φ'' doit vérifier les mêmes égalités (188), (188 *bis*), (189) et (190) que la fonction Φ'.

§ 3. — *Périodes longitudinales propres au système.*

[**24**] Si l'on se donne arbitrairement la valeur de T, on ne pourra pas, en général, trouver de fonctions Φ', Φ'' qui vérifient les précédentes conditions. Pour que de telles fonctions existent, il faudra donner à T une valeur prise dans un ensemble particulier; aux valeurs qui constituent cet ensemble, nous donnerons le nom de *périodes longitudinales propres au système*.

En d'autres termes, T sera une période longitudinale propre au système si l'on peut trouver une fonction $F(x, y, z)$ qui vérifie les conditions suivantes :

1° En chaque point soit du diélectrique (1), soit du diélectrique (2), F doit vérifier l'une ou l'autre des équations

(191) $$\mathfrak{L}_1^2 \Delta F + \frac{4\pi^2}{T^2} F = 0, \qquad \mathfrak{L}_2^2 \Delta F + \frac{4\pi^2}{T^2} F = 0,$$

que l'égalité (4) permet d'écrire

(192) $$D'_1 \Delta F + \frac{4\pi^2}{T^2} 2\pi a^2 k K'_1 F = 0, \qquad D'_2 \Delta F + \frac{4\pi^2}{T^2} 2\pi a^2 k K'_2 F = 0.$$

2° En tout point de la surface S_{12}, F doit vérifier l'égalité

(193) $$D'_1 \frac{\partial F}{\partial n_1} + D'_2 \frac{\partial F}{\partial n_2} = 0.$$

3° En tout point de la surface Σ, F doit vérifier l'égalité

(194) $$\frac{\partial F}{\partial N} = 0.$$

L'existence d'une telle période longitudinale peut s'établir à l'aide d'un raisonnement analogue à celui que nous avons développé au n° [**18**].

Considérons toutes les fonctions F, continues dans l'ensemble du volume $\varpi_1+\varpi_2$, et qui vérifient les deux conditions

$$2\pi a^2 k\left(\mathrm{K}'_1\int \mathrm{F}^2 d\varpi_1+\mathrm{K}'_2\int \mathrm{F}^2 d\varpi_2\right)=1, \tag{195}$$

$$\mathrm{K}'_1\int \mathrm{F}\, d\varpi_1+\mathrm{K}'_2\int \mathrm{F}\, d\varpi_2=0. \tag{196}$$

Considérons ensuite la valeur que chacune de ces fonctions fait prendre à la quantité

$$\begin{aligned}\mathrm{J}= &\ \mathrm{D}'_1\int\left[\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}\right)^2\right]d\varpi_1\\ &+\mathrm{D}'_2\int\left[\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}\right)^2\right]d\varpi_2.\end{aligned} \tag{197}$$

Cette valeur ne peut être négative; elle ne peut non plus être nulle; pour qu'elle fût nulle, en effet, il faudrait qu'on eût, dans tout le volume $\varpi_1+\varpi_2$,

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}=0$$

ou que la fonction F, qui est continue dans tout ce volume, y eût partout la même valeur; mais alors la condition (196) exigerait que ce fût la valeur zéro, ce qui est incompatible avec la condition (195).

Admettons : 1° *Que la limite inférieure* J_1 *de* J, *qui ne peut être néjative, soit un nombre positif;*

2° *Qu'il existe une détermination* F_1 *de* F *qui fasse prendre à* J *la valeur* J_1.

Selon l'expression (203) de J_1, nous devrons avoir

$$\begin{aligned}&\mathrm{D}'_1\int\left(\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial x}\frac{\partial\delta \mathrm{F}}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{F}_2}{\partial y}\frac{\partial\delta \mathrm{F}}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial z}\frac{\partial\delta \mathrm{F}}{\partial z}\right)d\varpi_1\\ &+\mathrm{D}'_2\int\left(\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial x}\frac{\partial\delta \mathrm{F}}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial y}\frac{\partial\delta \mathrm{F}}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial z}\frac{\partial\delta \mathrm{F}}{\partial z}\right)d\varpi_2=0\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}&\int \mathrm{D}'\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial \mathrm{N}}\delta \mathrm{F}\, d\Sigma+\int\left(\mathrm{D}'_1\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial n_1}+\mathrm{D}'_2\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial n_2}\right)\delta \mathrm{F}\, d\mathrm{S}_{12}\\ &+\int \mathrm{D}'_1\Delta \mathrm{F}_1\,\delta \mathrm{F}\, d\varpi_1+\int \mathrm{D}'_2\Delta \mathrm{F}_1\,\delta \mathrm{F}\, d\varpi_2=0.\end{aligned} \tag{198}$$

Cette égalité ne doit pas avoir lieu quelle que soit la fonction continue δF; à cause des conditions (195) et (196), elle doit avoir lieu seulement pour les fonctions δF qui vérifient les deux conditions

$$K'_1 \int F_1 \delta F \, d\varpi_1 + K'_2 \int F_1 \delta F \, d\varpi_2 = 0, \tag{199}$$

$$K'_1 \int \delta F \, d\varpi_1 + K'_2 \int \delta F \, d\varpi_2 = 0. \tag{200}$$

Il doit donc exister deux constantes C et D telles qu'en multipliant l'égalité (199) par C et l'égalité (200) par D, les égalités résultantes, ajoutées membre à membre à l'égalité (198), fournissent une égalité vérifiée quelle que soit l'expression continue de δF. Cette égalité, c'est la suivante :

$$\begin{aligned} &\int D' \frac{\partial F_1}{\partial N} \delta F \, d\Sigma + \int \left(D'_1 \frac{\partial F_1}{\partial n_1} + D'_2 \frac{\partial F_1}{\partial n_2} \right) \delta F \, dS_{12} \\ &+ \int (D'_1 \Delta F_1 + C K'_1 F_1 + D K'_1) \delta F_1 \, d\varpi_1 \\ &+ \int (D'_2 \Delta F_1 + C K'_2 F_1 + D K'_2) \delta F \, d\varpi_2 = 0. \end{aligned} \tag{201}$$

Par des raisonnements de forme connue, on en conclut qu'on doit avoir :

1° En tout point du volume ϖ_1,

$$D'_1 \Delta F_1 + C K'_1 F_1 + D K'_1 = 0; \tag{202}$$

2° En tout point du volume ϖ_2,

$$D'_2 \Delta F_1 + C K'_2 F_2 + D K'_2 = 0; \tag{203}$$

3° En tout point de la surface S_{12},

$$D'_1 \frac{\partial F_1}{\partial n_1} + D'_2 \frac{\partial F_1}{\partial n_2} = 0; \tag{204}$$

4° En tout point de la surface Σ,

$$\frac{\partial F_1}{\partial N} = 0. \tag{205}$$

Multiplions respectivement l'égalité (202) par $d\varpi_1$ et intégrons pour le volume ϖ_1; nous trouvons

$$D'_1 \int \Delta F_1 \, d\varpi_1 + C K'_1 \int F_1 \, d\varpi_1 + D K'_1 \varpi_1 = 0,$$

ou bien, en observant que l'égalité (205) est vérifiée en tout point de la partie de la surface Σ à laquelle confine le volume ϖ_1,

$$-D'_1 \int \frac{\partial F_1}{\partial n_1} dS_{12} + CK'_1 \int F_1 d\varpi_1 + DK'_1 \varpi_1 = 0.$$

L'égalité (203) nous donne de même

$$-D'_2 \int \frac{\partial F_1}{\partial n_2} dS_{12} + CK'_2 \int F_1 d\varpi_2 + DK'_2 \varpi_2 = 0.$$

Ajoutons membre à membre ces deux égalités, en tenant compte de la condition (204) et en observant que F_1 est assujetti à vérifier la condition (196); nous trouvons

$$D(K'_1 \varpi_1 + K'_2 \varpi_2) = 0$$

ou

$$D = 0. \tag{206}$$

Multiplions maintenant l'égalité (202) par $F_1 d\varpi_1$; intégrons le résultat pour tout le volume ϖ_1; à l'aide d'une intégration par parties, transformons le premier terme en tenant compte de la condition (205); tenons également compte de l'égalité (206); nous trouvons

$$D'_1 \int \frac{\partial F_1}{\partial n_1} F_1 dS_{12} + D'_1 \int \left[\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)^2 \right] d\varpi_1 - CK'_1 \int F_1^2 d\varpi_1 = 0.$$

L'égalité (203) nous donne de même

$$D'_2 \int \frac{\partial F_1}{\partial n_2} F_1 dS_{12} + D'_2 \int \left[\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)^2 \right] d\varpi_2 - CK'_2 \int F_1^2 d\varpi_1 = 0.$$

Ajoutons membre à membre ces deux égalités, en observant :

1° Que l'égalité (204) est vérifiée en tout point de la surface S_{12};

2° Que la fonction F_1 vérifie la condition (195).

Si nous désignons par J_1 ce que devient la quantité J, définie par l'égalité (197), lorsqu'on y remplace F par F_1, nous trouvons

$$C = 2\pi a^2 k J_1. \tag{207}$$

La quantité J_1 est essentiellement positive; posons

$$J_1 = \frac{4\pi^2}{\lambda_1^2}. \tag{208}$$

Alors, en vertu des égalités (206), (207), (208), les égalités (202) et (203) deviendront

$$(209) \qquad D'_1 \Delta F_1 + \frac{4\pi^2}{\lambda_1^2} 2\pi a^2 k K'_1 F_1 = 0, \qquad D'_2 \Delta F_1 + \frac{4\pi^2}{\lambda_1^2} 2\pi a^2 k K'_2 F_1 = 0.$$

Si l'on compare les égalités (209), (204) et (205) aux égalités (192), (193) et (194), on voit que $T = \lambda_1$ est une période longitudinale du système.

Pour en trouver une seconde, nous chercherions le minimum de la quantité J, définie par l'égalité (197), en assujettissant F non seulement aux conditions (195) et (196), mais encore à la condition

$$(210) \qquad K'_1 \int F_1 F \, d\varpi_1 + K'_2 \int F_1 F \, d\varpi_2 = 0.$$

En continuant de la sorte, nous serions conduits aux propositions suivantes, DONT LA DÉMONSTRATION RIGOUREUSE RESTERAIT A TROUVER :

Il existe, pour le système considéré, une infinité de périodes longitudinales $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$. *Lorsque* T *est égal à une de ces périodes, les équations* (192), (193) *et* (194) *peuvent être vérifiées par une fonction* F *qui ne soit pas identiquement nulle. Pour une même période longitudinale, ces équations ne peuvent être vérifiées par deux fonctions* F *distinctes l'une de l'autre, à moins que l'une d'elles ne soit le produit de l'autre par une constante.*

§ 4. — *Forme des vibrations longitudinales propres au système.*

[25] Supposons maintenant que T soit égal à une des périodes longitudinales propres au système. Soit $F(x, y, z)$ une quelconque des fonctions qui vérifient les conditions (191) à (194). Si nous désignons par K′ et K″ deux constantes, nous aurons assurément

$$(211) \qquad \Phi' = K' F, \qquad \Phi'' = K'' F.$$

Les égalités (182) et (187) nous donneront alors

$$(212) \qquad \left\{ \begin{aligned} \xi &= -\frac{\partial F}{\partial x}\left(K' \cos 2\pi \frac{t}{T} + K'' \sin 2\pi \frac{t}{T}\right), \\ \eta &= -\frac{\partial F}{\partial y}\left(K' \cos 2\pi \frac{t}{T} + K'' \sin 2\pi \frac{t}{T}\right), \\ \zeta &= -\frac{\partial F}{\partial z}\left(K' \cos 2\pi \frac{t}{T} + K'' \sin 2\pi \frac{t}{T}\right). \end{aligned} \right.$$

Telle sera la forme générale d'une vibration électrique propre au système étudié.

Au lieu des deux constantes K′ et K″, introduisons deux nouvelles constantes, A et φ, définies par les égalités

$$K' = A \cos 2\pi\varphi, \qquad K'' = A \sin 2\pi\varphi. \tag{213}$$

Les égalités (212) pourront s'écrire

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= -A\frac{\partial F}{\partial x}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\varphi\right), \\ \eta &= -A\frac{\partial F}{\partial y}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\varphi\right), \\ \zeta &= -A\frac{\partial F}{\partial z}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\varphi\right). \end{aligned}\right. \tag{214}$$

D'où la conclusion suivante :

Si T *est une période longitudinale propre au système, une vibration électrique pendulaire de période* T *n'est pas entièrement déterminée par les conditions énumérées au* § 1. *On peut toujours, à cette vibration, adjoindre une vibration propre, longitudinale, rectiligne, ayant même phase en tout point du système. La valeur* φ *de cette phase peut être choisie arbitrairement, et l'amplitude de la vibration propre peut être multipliée par une constante arbitraire* A.

§ 5. — *Développement en série de fonctions fondamentales qui représente une vibration électrique longitudinale sur le système étudié. Résonnance électrique.*

[**26**] Si T n'est pas une des périodes longitudinales propres au système, les con ditions indiquées au n° [**21**] déterminent sans ambiguïté la vibration électrique pendulaire que l'excitateur détermine sur le système.

Supposons, en particulier, que le champ électrique de l'excitateur soit, en chaque point du système, un champ longitudinal; en d'autres termes, supposons qu'il existe deux fonctions Φ'_0, Φ''_0 des seules variables x, y, z, telles qu'on ait

$$\left\{\begin{aligned} \xi'_0 &= -\frac{\partial \Phi'_0}{\partial x}, & \eta'_0 &= -\frac{\partial \Phi'_0}{\partial y}, & \zeta'_0 &= -\frac{\partial \Phi'_0}{\partial z}, \\ \xi''_0 &= -\frac{\partial \Phi''_0}{\partial x}, & \eta''_0 &= -\frac{\partial \Phi''_0}{\partial y}, & \zeta''_0 &= -\frac{\partial \Phi''_0}{\partial z}. \end{aligned}\right. \tag{215}$$

Supposons, en outre, que les trois quantités $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ soient égales à zéro.

NOUS ADMETTRONS *que, dans ce cas, la vibration pendulaire excitée sur le système est longitudinale* (¹), c'est-à-dire qu'elle est représentée par l'ensemble des égalités (182) et (187).

(¹) Il convient de répéter ici ce qui a été dit dans la note du n° [**23**].

Chacune des deux quantités $(\Phi'_0 + \Phi')$, $(\Phi''_0 + \Phi'')$ doit vérifier l'équation de la dilatation relative aux égalités (183 *bis*). Si donc nous posons

$$(216) \qquad \mathfrak{L}_1^2 \Delta\Phi'_0 + \frac{4\pi^2}{T^2}\Phi'_0 = -p'_1, \qquad \mathfrak{L}_2^2 \Delta\Phi'_0 + \frac{4\pi^2}{T^2}\Phi'_0 = -p'_2,$$

la fonction Φ' doit, en chaque point soit du corps 1, soit du corps 2, vérifier l'une ou l'autre des deux équations

$$(217) \qquad \mathfrak{L}_1^2 \Delta\Phi' + \frac{4\pi^2}{T^2}\Phi' = p'_1, \qquad \mathfrak{L}_2^2 \Delta\Phi' + \frac{4\pi^2}{T^2}\Phi' = p'_2.$$

Les égalités (173), (179) et (215) donnent, en chaque point de la surface S_{12},

$$(218) \qquad \begin{cases} D'_1 \dfrac{\partial\Phi'_0}{\partial n_1} + D'_2 \dfrac{\partial\Phi'_0}{\partial n_2} = s'_0. \\ D'_1 \dfrac{\partial\Phi''_0}{\partial n_1} + D'_2 \dfrac{\partial\Phi''_0}{\partial n_2} = s''_0. \end{cases}$$

Les égalités (184) et (187) exigent qu'on ait, en tout point de la surface S_{12},

$$(219) \qquad D'_1 \frac{\partial\Phi'}{\partial n_1} + D'_2 \frac{\partial\Phi'}{\partial n_2} = -s'_0.$$

Enfin les égalités (187) et (175) montrent qu'on doit avoir, en tout point de la surface Σ,

$$(220) \qquad \frac{\partial\Phi'}{\partial N} = -\rho'.$$

La fonction Φ'' doit, de son côté, vérifier des conditions analogues aux conditions (217), (219) et (220).

Ainsi sera déterminée la vibration pendulaire longitudinale que, dans les conditions indiquées, l'excitateur engendre, par hypothèse, au sein du système.

[27] Nous allons indiquer comment on pourrait *représenter la fonction Φ' par un développement en série de fonctions fondamentales.*

Supposons qu'on connaisse la valeur Ψ' que la fonction Φ' doit prendre en un certain point bien déterminé M du système :

$$(221) \qquad \Phi'(M) = \Psi'.$$

Si le système s'étend à l'infini, une telle valeur sera connue, car on doit avoir à l'infini $\Psi' = 0$.

Nous opérerons alors de la manière suivante :

I. — Nous formerons une fonction $\sigma'_0(x, y, z)$ vérifiant les conditions qui vont être énumérées :

Au point M, on a

$$\sigma'_0(\mathrm{M}) = \Psi'. \tag{222}$$

En chaque point du diélectrique 1, on a

$$\Delta\sigma'_0 = \frac{p'_1}{\mathfrak{K}_1^2}. \tag{223}$$

En chaque point du diélectrique 2, on a

$$\Delta\sigma'_0 = \frac{p'_2}{\mathfrak{K}_2^2}. \tag{223 bis}$$

En chaque point de la surface S_{12}, on a

$$\mathrm{D}'_1 \frac{\partial\sigma'_0}{\partial n_1} + \mathrm{D}'_2 \frac{\partial\sigma'_0}{\partial n_2} = -s'_0. \tag{224}$$

En chaque point de la surface Σ, on a

$$\frac{\partial\sigma'_0}{\partial \mathrm{N}} = -\rho'. \tag{225}$$

Il ne peut exister plusieurs déterminations distinctes de la fonction σ'_0 assujettie à vérifier les conditions (222) à (225).

Supposons, en effet, qu'il en existe deux, σ'_0, τ'_0, et posons

$$\theta'_0 = \tau'_0 - \sigma'_0. \tag{226}$$

La fonction θ'_0 vérifiera les conditions suivantes :

Au point M, on aura

$$\theta'_0(\mathrm{M}) = 0. \tag{227}$$

En tout point soit du diélectrique 1, soit du diélectrique 2, on aura

$$\Delta\theta'_0 = 0. \tag{228}$$

En tout point de la surface S_{12}, on aura

$$\mathrm{D}'_1 \frac{\partial\theta'_0}{\partial n_1} + \mathrm{D}'_2 \frac{\partial\theta'_0}{\partial n_2} = 0. \tag{229}$$

En tout point de la surface Σ, on aura

(230) $$\frac{\partial \theta'_0}{\partial N} = 0.$$

L'égalité (228) permet d'écrire

(231) $$\int_1 D'_1 \theta'_0 \, \Delta\theta'_0 \, d\varpi_1 + \int_2 D'_2 \theta'_0 \, \Delta\theta'_0 \, d\varpi_2 = 0.$$

Les conditions (229) et (230) permettent de remplacer cette égalité (231) par la suivante :

(232) $$\int D'_1 \left[\left(\frac{\partial \theta'_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta'_0}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta'_0}{\partial z} \right)^2 \right] d\varpi_1 + \int D'_2 \left[\left(\frac{\partial \theta'_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta'_0}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta'_0}{\partial z} \right)^2 \right] d\varpi_2 = 0.$$

Les deux pouvoirs inducteurs spécifiques D'_1, D'_2 étant positifs, cette égalité (232) exige qu'on ait, en tout point soit du corps 1, soit du corps 2,

$$\frac{\partial \theta'_0}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \theta'_0}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \theta'_0}{\partial z} = 0.$$

θ'_0 a donc même valeur en tout point du système. En vertu de l'égalité (227), cette valeur ne peut être autre que zéro. L'égalité (226) nous montre alors que τ'_0 ne diffère pas de σ'_0.

Existe-t-il effectivement une fonction σ'_0 qui vérifie les égalités (222) à (225)?

Dans le cas où le système ne renferme que deux diélectriques, 1 et 2, où le diélectrique 2 est borné par une surface limitée et convexe S_{12}, où le diélectrique 1 s'étend à l'infini, enfin où le rapport $\frac{D'_2}{D'_1}$ est compris entre certaines limites, l'existence de la fonction σ'_0 a été établie par M. Carl Neumann; dans ce cas, d'ailleurs, la détermination de cette fonction dépend d'une équation fonctionnelle de Fredholm.

Nous admettrons *d'une manière générale l'existence de la fonction* σ'_0.

II. — Nous formerons une fonction σ'_1 qui sera assujettie aux conditions suivantes :

Au point M, on aura

(233) $$\sigma'_1(M) = 0.$$

En tout point du diélectrique 1, on aura

(234) $$\Delta\sigma'_1 = -\frac{\sigma'_0}{\mathfrak{L}_1^2}.$$

En tout point du diélectrique 2, on aura

$$(234\ bis)\qquad \Delta\sigma'_1 = -\frac{\sigma'_0}{\mathfrak{L}_2^2}.$$

En tout point de la surface S_{12}, on aura

$$(235)\qquad D'_1\frac{\partial\sigma'_1}{\partial n_1} + D'_2\frac{\partial\sigma'_1}{\partial n_2} = 0.$$

Enfin, en tout point de la surface Σ, on aura

$$(236)\qquad \frac{\partial\sigma'_1}{\partial N} = 0.$$

La détermination de la fonction σ'_1 fait l'objet d'un problème tout semblable à celui qui détermine la fonction σ'_0. Cette détermination ne comporte aucune ambiguïté.

III. — Nous considérerons de même une fonction σ'_2 qui se déduira de la fonction σ'_1 comme celle-ci se déduit de la fonction σ'_0, et nous poursuivrons indéfiniment le même procédé de construction de *fonctions fondamentales*.

Cela fait, ADMETTONS *que la série*

$$(237)\qquad \Phi' = \sigma'_0 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\sigma'_1 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^4\sigma'_2 + \ldots\ldots$$

soit absolument et uniformément convergente, ainsi que les séries obtenues en prenant une ou deux fois, par rapport à x, y ou z, les dérivées de ses termes. Il est aisé de voir que *la fonction Φ', représentée par le développement* (237) *vérifiera les conditions* (217), (219), (220) *et* (221).

La fonction Φ'' sera donnée par un développement semblable.

$$(237\ bis)\qquad \Phi'' = \sigma''_0 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\sigma''_1 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^4\sigma''_2 + \ldots\ldots$$

Par analogie avec ce qui a été démontré dans les circonstances où les développements en séries de fonctions fondamentales ont été rigoureusement justifiés, nous ADMETTRONS la proposition suivante :

Lorsque T *tend vers une période longitudinale du système, les fonctions Φ', Φ'', données par les développements* (237), (237 *bis*), *croissent, en général, au delà de toute limite.*

Il suffira alors de reprendre les considérations qui constituent, en Acoustique, la théorie de la résonnance, pour parvenir à cette conséquence :

Si, sur un système formé d'un nombre quelconque de corps privés de conductibilité, un excitateur exerce une action périodique simple, il engendrera, en général, dans le système, des vibrations électriques simples de même période que cette action; dans le cas particulier où cette période coïncidera avec une des périodes longitudinales du système, et dans ce cas seulement, il y aura résonnance électrique.

SECONDE PARTIE

Les corps doués de conductibilité.

CHAPITRE PREMIER

Le système est formé d'un corps conducteur unique.

§ 1. — *Équations vérifiées par les composantes du champ électrique total.*

[**28**] Après avoir étudié les propriétés des oscillations électriques sur un corps ou sur un système de corps dénués de toute conductibilité, nous allons aborder l'étude plus compliquée d'un corps ou d'un système de corps doués de conductibilité.

Lorsque nous aurons affaire à un corps conducteur, nous en désignerons par ρ la *résistance spécifique* que les électriciens appellent aujourd'hui *résistivité*. En général, en même temps que le corps sera supposé conducteur, on le regardera comme capable de polarisation diélectrique; pour représenter les diverses grandeurs relatives à cette polarisation, nous garderons les notations qui ont été fixées au n° [**1**].

Au présent chapitre, nous supposerons que le système se réduise à un corps homogène unique.

Nous avons donné autrefois [1] les équations vérifiées, dans ce cas, en tout point du corps considéré, par les trois composantes du champ électrique total; avec les notations dont nous faisons maintenant usage, la première de ces équations se peut écrire

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\xi + \frac{\mu D' - k}{k}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial t} + \frac{4\pi\mu\varepsilon'}{k\rho}\frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{2\pi\mu a^2}{\rho}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} - 2\pi\mu a^2 K'\frac{\partial^3\xi}{\partial t^3} = 0. \tag{238}$$

Mais en vertu des égalités (8) et (10), nous avons identiquement

$$\Delta\xi = \frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{\partial m}{\partial z} + \frac{\partial n}{\partial y}.$$

---

(1) P. Duhem, *Sur la propagation des actions électrodynamiques,* équations (155) (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, t. X, B, 1896).

Si donc nous posons

$$(239) \qquad \mathfrak{X} = \frac{\xi}{\rho} + K' \frac{\partial \xi}{\partial t}, \qquad \mathfrak{Y} = \frac{\eta}{\rho} + K' \frac{\partial \eta}{\partial t}, \qquad \mathfrak{Z} = \frac{\zeta}{\rho} + K' \frac{\partial \zeta}{\partial t},$$

$$(240) \qquad \Theta = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z},$$

l'égalité (238) deviendra la première des égalités

$$(241) \qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\mu}{k}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial m}{\partial z} - \frac{\partial n}{\partial y}\right) + \frac{4\pi\varepsilon'\mu}{k}\frac{\partial \Theta}{\partial x} - 2\pi a^2 \mu \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2} = 0,\\
&\frac{\mu}{k}\frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial n}{\partial x} - \frac{\partial l}{\partial z}\right) + \frac{4\pi\varepsilon'\mu}{k}\frac{\partial \Theta}{\partial y} - 2\pi a^2 \mu \frac{\partial^2 \mathfrak{Y}}{\partial t^2} = 0,\\
&\frac{\mu}{k}\frac{\partial^2 \theta}{\partial z \partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial l}{\partial y} - \frac{\partial m}{\partial x}\right) + \frac{4\pi\varepsilon'\mu}{k}\frac{\partial \Theta}{\partial z} - 2\pi a^2 \mu \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2} = 0.
\end{aligned}\right.$$

Les deux autres s'établissent d'une manière analogue.

§ 2. — *Deux cas où le mouvement électrique est déterminé sans ambiguïté.*

[**29**] De ces trois équations, nous allons tirer une égalité qui nous permettra d'établir certaines propositions.

Multiplions respectivement les équations (241) par $\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} d\varpi$, $\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} d\varpi$, $\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} d\varpi$; ajoutons membre à membre les résultats obtenus; intégrons pour le volume entier du système en transformant certains termes à l'aide d'une intégration par parties; nous obtenons l'égalité suivante :

$$(242) \qquad \left\{\begin{aligned}
&\int \Bigg\{\left[\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}\cos(N, z) - \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}\cos(N, y)\right]\frac{\partial l}{\partial t} + \left[\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}\cos(N, x) - \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}\cos(N, z)\right]\frac{\partial m}{\partial t}\\
&\qquad\qquad + \left[\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}\cos(N, y) - \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}\cos(N, x)\right]\frac{\partial n}{\partial t}\Bigg\} d\Sigma\\
&+ \frac{\mu}{k}\int\left[\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}\cos(N, x) + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}\cos(N, y) + \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}\cos(N, z)\right]\left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + 4\pi\varepsilon'\Theta\right) d\Sigma\\
&+ \int\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y}\right)\frac{\partial l}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial z}\right)\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial x}\right)\frac{\partial n}{\partial t}\right] d\varpi\\
&+ \frac{\mu}{k}\int\left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + 4\pi\varepsilon'\Theta\right)\frac{\partial \Theta}{\partial t} d\varpi\\
&+ 2\pi a^2 \mu \int\left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}\frac{\partial^2 \mathfrak{Y}}{\partial t^2} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}\frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2}\right) d\varpi = 0.
\end{aligned}\right.$$

Supposons qu'en tout point de la surface Σ et à tout instant, on donne :

ou bien (CAS A) les trois composantes ξ, η, ζ du champ électrique;
ou bien (CAS B) la composante normale

$$\xi \cos(\mathrm{N}, x) + \eta \cos(\mathrm{N}, y) + \zeta \cos(\mathrm{N}, z)$$

du champ électrique et les trois composantes L, M, N du champ magnétique, ce qui, en vertu des égalités (9), revient à se donner les trois quantités l, m, n.

Imaginons qu'à ces mêmes données puissent correspondre deux mouvements électriques distincts correspondant l'un au champ (ξ', η', ζ'), l'autre au champ (ξ'', ζ'', η''). Posons

$$(243) \qquad \xi = \xi'' - \xi', \qquad \eta = \eta'' - \eta', \qquad \zeta = \zeta'' - \zeta'.$$

Ces quantités ξ, η, ζ vérifient encore les équations (241) et, partant, l'égalité (242). Mais, en tout point de la surface Σ et à tout instant, on a :

Dans le CAS A,

$$\xi = 0, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = 0$$

et, par conséquent, en vertu des égalités (239),

$$(244) \qquad \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} = 0.$$

Dans le CAS B,

$$l = 0, \qquad m = 0, \qquad n = 0,$$

$$\xi \cos(\mathrm{N}, x) + \eta \cos(\mathrm{N}, y) + \zeta \cos(\mathrm{N}, z) = 0$$

ou bien

$$(245) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial l}{\partial t} = 0, \qquad \dfrac{\partial m}{\partial t} = 0, \qquad \dfrac{\partial n}{\partial t} = 0, \\ \dfrac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} \cos(\mathrm{N}, x) + \dfrac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} \cos(\mathrm{N}, y) + \dfrac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} \cos(\mathrm{N}, z) = 0. \end{array} \right.$$

Or, si l'on a, en tout point de la surface Σ et à tout instant, soit les égalités (244), soit les égalités (245), les intégrales relatives à cette surface disparaissent de l'égalité (242); en tenant compte des égalités (239) et (240), on ramène alors cette égalité (241) à la suivante

$$(246) \qquad \frac{d\mathrm{J}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \int \left[\frac{\mu}{k} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial l}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial m}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial t} \right)^2 \right] d\varpi,$$

J désignant la quantité suivante :

$$(247)\quad \begin{aligned} J = \frac{1}{2}\int \Big\{ & \frac{\mu K'}{k}\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2 + K'\left[\left(\frac{\partial l}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial m}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)^2\right] \\ & + \frac{\mu}{k}\Theta^2 + \frac{\mu a^2}{2\varepsilon'}\left[\left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}\right)^2\right]\Big\} d\varpi. \end{aligned}$$

Imaginons maintenant qu'à l'instant initial, les trois composantes du champ électrique total aient été données, ainsi que leurs dérivées du premier et du second ordre par rapport à t; imaginons, en outre, que ces données soient les mêmes pour les deux mouvements considérés; on a alors, à l'instant initial,

$$(248)\quad \left\{ \begin{array}{lll} \xi = 0, & \eta = 0, & \zeta = 0, \\ \dfrac{\partial\xi}{\partial t} = 0, & \dfrac{\partial\eta}{\partial t} = 0, & \dfrac{\partial\zeta}{\partial t} = 0, \\ \dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = 0, & \dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = 0, & \dfrac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = 0, \end{array} \right.$$

en sorte que la valeur initiale de J est nulle.

D'après son expression (247), J ne peut jamais être négatif; d'autre part, d'après l'égalité (246), J ne peut jamais être fonction croissante de t. J restera donc constamment égal à zéro et il en sera de même de sa dérivée par rapport à t, donnée par l'égalité (246). On aura donc, quel que soit t,

$$(249)\quad \int \left[\frac{\mu}{k}\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial l}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial m}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)^2\right] d\varpi = 0.$$

En d'autres termes, on aura, en tout point du système et à tout instant,

$$(250)\quad \left\{ \begin{array}{lll} & \dfrac{\partial\theta}{\partial t} = 0, & \\ \dfrac{\partial l}{\partial t} = 0, & \dfrac{\partial m}{\partial t} = 0, & \dfrac{\partial n}{\partial t} = 0. \end{array} \right.$$

Mais, dans le CAS A aussi bien que dans le CAS B, on a, en tout point de la surface Σ et à tout instant,

$$(251)\quad \frac{\partial\xi}{\partial t}\cos(N, x) + \frac{\partial\eta}{\partial t}\cos(N, y) + \frac{\partial\zeta}{\partial t}\cos(N, z) = 0.$$

Dès lors, par une démonstration semblable à celle qui a été donnée au début du n° [**5**], nous prouverons qu'on a, en tout point du système et à tout instant,

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial\eta}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial\zeta}{\partial t} = 0.$$

Comme d'ailleurs, à l'instant initial, les trois premières égalités (248) sont vérifiées en tout point du système, nous aurons, en tout point du système et à tout instant,

$$\xi = 0, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = 0 \tag{252}$$

ou bien, en vertu des égalités (243),

$$\xi' = \xi'', \qquad \eta' = \eta'', \qquad \zeta' = \zeta''. \tag{253}$$

Dans le CAS A *aussi bien que dans le* CAS B, *le mouvement électrique est déterminé sans ambiguïté par les équations* (241), *pourvu qu'on se donne, à l'instant initial et en chaque point du système, les trois composantes du champ électrique total et leurs dérivées premières et secondes par rapport au temps.*

§ 3. — *Stabilité électrodynamique du mouvemement électrique sur un corps conducteur.*

[**30**] Le mouvement possède-t-il, au moins dans le CAS A, la stabilité électrodynamique de première espèce? C'est une question à laquelle nous n'avons pu trouver de réponse entièrement générale. Nous n'y pourrons répondre qu'en admettant l'HYPOTHÈSE DE FARADAY ET DE MOSSOTTI; cette hypothèse consiste en ceci : *La constante* ε' *des actions électrodynamiques est un si grand nombre qu'on peut, pour tout diélectrique, remplacer le pouvoir inducteur spécifique* $D' = 1 + 4\pi\varepsilon' K'$ *par le produit* $4\pi\varepsilon' K'$.

Le théorème de Clebsch, convenablement généralisé [1], permet, à toute intégrale (ξ, η, ζ) du système (238), de donner, et d'une infinité de manières, la forme suivante :

$$\xi = -\frac{\partial \Phi'}{\partial x} + p', \qquad \eta = -\frac{\partial \Phi'}{\partial y} + q', \qquad \zeta = -\frac{\partial \Phi'}{\partial z} + r', \tag{254}$$

$$p' = \frac{\partial Q'}{\partial z} - \frac{\partial R'}{\partial y}, \qquad q' = \frac{\partial R'}{\partial x} - \frac{\partial P'}{\partial z}, \qquad r' = \frac{\partial P'}{\partial y} - \frac{\partial Q'}{\partial z}. \tag{255}$$

Φ' est une intégrale de l'*équation des dilatations* qui correspond au système (238); c'est-à-dire que Φ' vérifie l'équation

$$D' \frac{\partial}{\partial t} \Delta\Phi' + \frac{4\pi\varepsilon'}{\rho} \Delta\Phi' - \frac{2\pi a^2 k}{\rho} \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial t^2} - 2\pi a^2 k K' \frac{\partial^3 \Phi'}{\partial t^3} = 0. \tag{256}$$

---

(1) Pierre DUHEM, *Sur la généralisation d'un théorème de Clebsch* (Journal de Mathématiques, 5e série, t. VI, 1900, pp. 215 sqq.).

P', Q', R' sont trois intégrales de l'*équation des rotations* relatives au même système; c'est-à-dire qu'on a

$$(257)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\Delta P' - \dfrac{2\pi a^2\mu}{\rho}\dfrac{\partial^2 P'}{\partial t^2} - 2\pi a^2\mu K'\dfrac{\partial^3 P'}{\partial t^3} = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\Delta Q' - \dfrac{2\pi a^2\mu}{\rho}\dfrac{\partial^2 Q'}{\partial t^2} - 2\pi \alpha^2\mu K'\dfrac{\partial^3 Q'}{\partial t^3} = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\Delta R' - \dfrac{2\pi a^2\mu}{\rho}\dfrac{\partial^2 R'}{\partial t^2} - 2\pi a^2\mu K'\dfrac{\partial^3 R'}{\partial t^3} = 0. \end{cases}$$

On a, en outre,

$$(258)\quad \frac{\partial P'}{\partial x} + \frac{\partial Q'}{\partial y} + \frac{\partial R'}{\partial z} = 0.$$

Parmi les déterminations en nombre infini dont est susceptible l'ensemble des quatre fonctions Φ', P', Q', R', supposons qu'on en ait choisie une.

Les égalités (257) équivalent aux égalités

$$(259)\quad \begin{cases} \Delta P' - \dfrac{2\pi a^2\mu}{\rho}\dfrac{\partial P'}{\partial t} - 2\pi a^2\mu K'\dfrac{\partial^2 P'}{\partial t^2} = f, \\ \Delta Q' - \dfrac{2\pi a^2\mu}{\rho}\dfrac{\partial Q'}{\partial t} - 2\pi a^2\mu K'\dfrac{\partial^2 Q'}{\partial t^2} = g, \\ \Delta R' - \dfrac{2\pi a^2\mu}{\rho}\dfrac{\partial R'}{\partial t} - 2\pi a^2\mu K'\dfrac{\partial^2 R'}{\partial t^2} = h, \end{cases}$$

f, g, h étant trois quantités indépendantes de t. D'ailleurs, les égalités (258) et (259) nous apprennent qu'on a

$$(260)\quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0.$$

Si W désigne la fonction potentielle électrostatique totale et $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ les fonctions de Helmholtz, on a

$$\xi = -\varepsilon'\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{a}{\sqrt{2}}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}, \qquad \eta = -\varepsilon'\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{a}{\sqrt{2}}\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}, \qquad \zeta = -\varepsilon'\frac{\partial W}{\partial z} - \frac{a}{\sqrt{2}}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t},$$

en sorte que les quantités l, m, n, définies par les égalités (8), ont pour expressions

$$(261)\quad \begin{cases} l = -\dfrac{a}{\sqrt{2}}\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial \mathcal{G}}{\partial z} - \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}\right), \qquad m = -\dfrac{a}{\sqrt{2}}\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} - \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}\right), \\ n = -\dfrac{a}{\sqrt{2}}\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} - \dfrac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}\right). \end{cases}$$

D'autre part, on a[1]

$$(262)\quad \left\{\begin{array}{l} \Delta\mathcal{F} - \dfrac{2\pi a^2\mu}{\rho}\dfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial t} - 2\pi a^2\mu K'\dfrac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial t^2} = \dfrac{2\sqrt{2}\,\pi a\varepsilon'\mu}{\rho}\dfrac{\partial W}{\partial x} + \dfrac{a(\mu D' - k)}{\sqrt{2}}\dfrac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial t} \\ \text{et deux équations analogues.} \end{array}\right.$$

Des équations (261) et (262), nous tirons les équations

$$(263)\quad \left\{\begin{array}{l} \Delta l - \dfrac{2\pi a^2\mu}{\rho}\dfrac{\partial l}{\partial t} - 2\pi a^2\mu K'\dfrac{\partial^2 l}{\partial t^2} = 0, \\ \Delta m - \dfrac{2\pi a^2\mu}{\rho}\dfrac{\partial m}{\partial t} - 2\pi a^2\mu K'\dfrac{\partial^2 m}{\partial t^2} = 0, \\ \Delta n - \dfrac{2\pi a^2\mu}{\rho}\dfrac{\partial n}{\partial t} - 2\pi a^2\mu K'\dfrac{\partial^2 n}{\partial t^2} = 0. \end{array}\right.$$

Mais les égalités (8) et (254) donnent

$$(264)\quad l = \frac{\partial q'}{\partial z} - \frac{\partial r'}{\partial y}, \qquad m = \frac{\partial r'}{\partial x} - \frac{\partial p'}{\partial z}, \qquad n = \frac{\partial p'}{\partial y} - \frac{\partial q'}{\partial x}.$$

Les égalités (263) peuvent donc s'écrire

$$(265)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial z}\left[\Delta q' - \dfrac{2\pi a^2\mu}{\rho}\dfrac{\partial q'}{\partial t} - 2\pi a^2\mu K'\dfrac{\partial^2 q'}{\partial t^2}\right] \\ - \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\Delta r' - \dfrac{2\pi a^2\mu}{\rho}\dfrac{\partial r'}{\partial t} - 2\pi a^2\mu K'\dfrac{\partial^2 r'}{\partial t^2}\right] = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

ou bien

$$(266)\quad \left\{\begin{array}{l} \Delta p' - \dfrac{2\pi a^2\mu}{\rho}\dfrac{\partial p'}{\partial t} - 2\pi a^2\mu K'\dfrac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}, \\ \Delta q' - \dfrac{2\pi a^2\mu}{\rho}\dfrac{\partial q'}{\partial t} - 2\pi a^2\mu K'\dfrac{\partial^2 q'}{\partial t^2} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}, \\ \Delta r' - \dfrac{2\pi a^2\mu}{\rho}\dfrac{\partial r'}{\partial t} - 2\pi a^2\mu K'\dfrac{\partial^2 r'}{\partial t^2} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}, \end{array}\right.$$

φ étant une certaine fonction de x, y, z, t.

En vertu de leur définition, donnée par les égalités (255), les fonctions p', q', r' vérifient l'égalité

$$(267)\quad \frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{\partial q'}{\partial y} + \frac{\partial r'}{\partial z} = 0,$$

---

[1] *Le problème général de l'Électrodynamique pour un système de corps immobiles*, équations (75) et (76) (Journal de Mathématiques, 6e série, t. X, 1914, p. 383).

en sorte que les égalités (266) nous donnent

$$\Delta\varphi = 0. \tag{268}$$

Mais les égalités (255) et (257) nous donnent aisément trois équations dont la première est

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta p' - \frac{2\pi a^2 \mu}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial t} - 2\pi a^2 \mu K' \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}\right) = 0.$$

Comparée à la première équation (266), cette équation nous donne la première des égalités

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial t} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y\, \partial t} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z\, \partial t} = 0.$$

Les deux autres s'établissent d'une manière analogue. Ces égalités, à leur tour, donnent à φ la forme suivante :

$$\varphi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) + \chi(t). \tag{269}$$

En vertu de cette égalité (269), l'égalité (268) devient

$$\Delta\psi = 0, \tag{270}$$

tandis que les équations (266) deviennent

$$\left\{\begin{aligned}
&\Delta p' - \frac{2\pi a^2 \mu}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial t} - 2\pi a^2 \mu K' \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = \frac{\partial \psi}{\partial x},\\
&\Delta q' - \frac{2\pi a^2 \mu}{\rho}\frac{\partial q'}{\partial t} - 2\pi a^2 \mu K' \frac{\partial^2 q'}{\partial t^2} = \frac{\partial \psi}{\partial y},\\
&\Delta r' - \frac{2\pi a^2 \mu}{\rho}\frac{\partial r'}{\partial t} - 2\pi a^2 \mu K' \frac{\partial^2 r'}{\partial t^2} = \frac{\partial \psi}{\partial z}.
\end{aligned}\right. \tag{271}$$

D'autre part, les égalités (255) et (259) donnent

$$\left\{\begin{aligned}
&\Delta p' - \frac{2\pi a^2 \mu}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial t} - 2\pi a^2 \mu K' \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial y},\\
&\Delta q' - \frac{2\pi a^2 \mu}{\rho}\frac{\partial q'}{\partial t} - 2\pi a^2 \mu K' \frac{\partial^2 q'}{\partial t^2} = \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z},\\
&\Delta r' - \frac{2\pi a^2 \mu}{\rho}\frac{\partial r'}{\partial t} - 2\pi a^2 \mu K' \frac{\partial^2 r'}{\partial t^2} = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}.
\end{aligned}\right. \tag{272}$$

La comparaison des égalités (271) et (272) donne

$$(273)\qquad \left\{\begin{aligned} &-\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial z}-\frac{\partial h}{\partial y}=0,\\ &-\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial z}=0,\\ &-\frac{\partial\psi}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial x}=0. \end{aligned}\right.$$

Enfin, les égalités (255) et (9) donnent sans peine

$$\Delta P'=-l,\qquad \Delta Q'=-m,\qquad \Delta r'=-n.$$

Les égalités (263) peuvent donc s'écrire

$$\Delta\left(\Delta P'-\frac{2\pi a^2\mu}{\rho}\frac{\partial P'}{\partial t}-2\pi a^2\mu K'\frac{\partial^2 P'}{\partial t^2}\right)=0,$$

$$\Delta\left(\Delta Q'-\frac{2\pi a^2\mu}{\rho}\frac{\partial Q'}{\partial t}-2\pi a^2\mu K'\frac{\partial^2 Q'}{\partial t^2}\right)=0,$$

$$\Delta\left(\Delta R'-\frac{2\pi a^2\mu}{\rho}\frac{\partial R'}{\partial t}-2\pi a^2\mu K'\frac{\partial^2 R'}{\partial t^2}\right)=0$$

ou bien, en vertu des égalités (259),

$$(274)\qquad \Delta f=0,\qquad \Delta g=0,\qquad \Delta h=0.$$

Cela posé, considérons les fonctions

$$(275)\qquad \left\{\begin{aligned} \Phi&=\Phi'-\frac{\rho}{2\pi a^2\mu}\psi(t-t_0),\\ P&=P'-\frac{\rho}{2\pi a^2\mu}f(t-t_0),\\ Q&=Q'-\frac{\rho}{2\pi a^2\mu}g(t-t_0),\\ R&=R'-\frac{\rho}{2\pi a^2\mu}h(t-t_0). \end{aligned}\right.$$

En vertu des équations (254), (255) et (273), nous aurons

$$(276)\qquad \xi=-\frac{\partial\Phi}{\partial x}+p,\qquad \eta=-\frac{\partial\Phi}{\partial y}+q,\qquad \zeta=-\frac{\partial\Phi}{\partial z}+r,$$

$$(277)\qquad p=\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y},\qquad q=\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z},\qquad r=\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

En vertu des équations (256) et (270), nous aurons

$$(278)\qquad D'\frac{\partial}{\partial t}\Delta\Phi+\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}\Delta\Phi-\frac{2\pi a^2 k}{\rho}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}-2\pi a^2 k K'\frac{\partial^3\Phi}{\partial t^3}=0.$$

En vertu des équations (259) et (274), nous aurons

$$
(279)\quad \begin{cases}
\Delta P - \dfrac{2\pi a^2\mu}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial t} - 2\pi a^2\mu K'\dfrac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0, \\
\Delta Q - \dfrac{2\pi a^2\mu}{\rho}\dfrac{\partial Q}{\partial t} - 2\pi a^2\mu K'\dfrac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = 0, \\
\Delta R - \dfrac{2\pi a^2\mu}{\rho}\dfrac{\partial R}{\partial t} - 2\pi a^2\mu K'\dfrac{\partial^2 R}{\partial t^2} = 0.
\end{cases}
$$

Enfin, en vertu des égalités (258) et (260), nous aurons

$$
(280)\quad \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0.
$$

[**31**] Imaginons qu'un champ quelconque ait été mis sous la forme que définissent les égalités (276) à (280); pour ce champ, une égalité sera vérifiée, que nous allons établir.

I. — Multiplions l'égalité (278) par

$$
\left(D'\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + \frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}\frac{\partial^3\Phi}{\partial t^3}\right) d\varpi;
$$

intégrons pour le volume entier du système; transformons certains termes à l'aide d'une intégration par parties, en nous souvenant, d'ailleurs, que $D' = 1 + 4\pi\varepsilon' K'$. Nous obtenons l'égalité suivante :

$$
(281)\quad \begin{cases}
\displaystyle\int \Bigg[\left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + D'\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial t}\right)\cos(N,x) \\
\qquad + \left(\dfrac{4\pi\varepsilon'}{\rho}\dfrac{\partial\Phi}{\partial y} + D'\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial t}\right)\cos(N,y) \\
\qquad + \left(\dfrac{4\pi\varepsilon'}{\rho}\dfrac{\partial\Phi}{\partial z} + D'\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial t}\right)\cos(N,z)\Bigg]\left(\dfrac{4\pi\varepsilon'}{\rho}\dfrac{\partial\Phi}{\partial t} + D'\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\right) d\Sigma \\
+ \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int \Bigg[\left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + D'\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + D'\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial t}\right)^2 \\
\qquad + \left(\dfrac{4\pi\varepsilon'}{\rho}\dfrac{\partial\Phi}{\partial z} + D'\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial t}\right)^2\Bigg] d\varpi \\
+ \pi a^2 k\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int \left[4\pi\varepsilon'\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial t} + K'\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\right)^2 + K'\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\right)^2\right] d\varpi \\
+ \dfrac{2\pi a^2 k D'}{\rho}\displaystyle\int \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\right)^2 d\varpi \qquad\qquad = 0.
\end{cases}
$$

II. — Les égalités (277) donnent identiquement

$$\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial y}+\frac{\partial r}{\partial z}=0.$$

On en tire

$$\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial y}+\frac{\partial r}{\partial z}\right)+\mathrm{D}'\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial t}+\frac{\partial^2 q}{\partial y\,\partial t}+\frac{\partial^2 r}{\partial z\,\partial t}\right)=0.$$

Multiplions cette égalité par

$$\left(\mathrm{D}'\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)d\varpi,$$

intégrons et transformons l'intégrale comme dans le cas précédent; nous trouvons l'égalité

$$(282)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int\Bigg[\left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}p+\mathrm{D}'\frac{\partial p}{\partial t}\right)\cos(\mathrm{N},x)\\
&\quad+\left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}q+\mathrm{D}'\frac{\partial q}{\partial t}\right)\cos(\mathrm{N},y)\\
&\quad+\left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}r+\mathrm{D}'\frac{\partial r}{\partial t}\right)\cos(\mathrm{N},z)\Bigg]\left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\mathrm{D}'\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\right)d\Sigma\\
+&\int\Bigg[\left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}p+\mathrm{D}'\frac{\partial p}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\mathrm{D}'\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial t}\right)\\
&\quad+\left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}q+\mathrm{D}'\frac{\partial q}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\mathrm{D}'\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial t}\right)\\
&\quad+\left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}r+\mathrm{D}'\frac{\partial r}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\mathrm{D}'\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial t}\right)\Bigg]d\varpi\qquad=0.
\end{aligned}\right.$$

III. — On a identiquement

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial z}=0,\qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial y}=0.$$

Multiplions respectivement ces égalités par

$$\left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial t}+\mathrm{D}'\frac{\partial^2\mathrm{P}}{\partial t^2}\right)d\varpi,\qquad \left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}\frac{\partial\mathrm{Q}}{\partial t}+\mathrm{D}'\frac{\partial^2\mathrm{Q}}{\partial t^2}\right)d\varpi,\qquad \left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial t}+\mathrm{D}'\frac{\partial^2\mathrm{R}}{\partial t^2}\right)d\varpi.$$

Ajoutons membre à membre les résultats obtenus, intégrons pour le volume entier du système, et transformons l'intégrale en tenant compte des égalités (277); nous trouvons l'égalité

$$(283)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int\Bigg\{\left[\left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial y}+D'\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial t}\right)\cos(N,z)-\left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial z}+D'\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial t}\right)\cos(N,y)\right]\\
&\qquad\qquad\qquad\times\left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}\frac{\partial P}{\partial t}+D'\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}\right)\\
&\quad+\left[\left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial z}+D'\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial t}\right)\cos(N,x)-\left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial x}+D'\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial t}\right)\cos(N,z)\right]\\
&\qquad\qquad\qquad\times\left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}\frac{\partial Q}{\partial t}+D'\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}\right)\\
&\quad+\left[\left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial x}+D'\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial t}\right)\cos(N,y)-\left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial y}+D'\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial t}\right)\cos(N,x)\right]\\
&\qquad\qquad\qquad\times\left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}\frac{\partial R}{\partial t}+D'\frac{\partial^2 R}{\partial t^2}\right)\Bigg\}\,d\Sigma\\
&\quad+\int\Bigg[\left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial x}+D'\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}p+D'\frac{\partial p}{\partial t}\right)\\
&\qquad+\left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial y}+D'\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}q+D'\frac{\partial q}{\partial t}\right)\\
&\qquad+\left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial z}+D'\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}r+D'\frac{\partial r}{\partial t}\right)\Bigg]\,d\varpi=0.
\end{aligned}\right.$$

IV. — Les égalités (277) donnent

$$\Delta P=-\left(\frac{\partial q}{\partial z}-\frac{\partial r}{\partial y}\right),\qquad \Delta Q=-\left(\frac{\partial r}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial z}\right),\qquad \Delta R=-\left(\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial x}\right).$$

Les équations (279) peuvent donc s'écrire

$$(284)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial r}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial z}-\frac{2\pi a^2\mu}{\rho}\frac{\partial P}{\partial t}-2\pi a^2\mu K'\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}=0,\\
&\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\partial r}{\partial x}-\frac{2\pi a^2\mu}{\rho}\frac{\partial Q}{\partial t}-2\pi a^2\mu K'\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}=0,\\
&\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{2\pi a^2\mu}{\rho}\frac{\partial R}{\partial t}-2\pi a^2\mu K'\frac{\partial^2 R}{\partial t^2}=0.
\end{aligned}\right.$$

De la première de ces équations nous déduisons aisément l'équation suivante :

$$(285)\qquad \begin{gathered}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}r + D'\frac{\partial r}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}q + D'\frac{\partial q}{\partial t}\right)\\ - \frac{2\pi a^2\mu}{\rho}\left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}\frac{\partial P}{\partial t} + D'\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}\right) - 2\pi a^2\mu K'\left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + D'\frac{\partial^3 P}{\partial t^3}\right) = 0,\end{gathered}$$

à laquelle on doit joindre deux autres égalités analogues respectivement tirées des deux dernières égalités (284).

Multiplions l'égalité (285) par

$$\left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}\frac{\partial P}{\partial t} + D'\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}\right) d\varpi.$$

Membre à membre, ajoutons, à l'égalité obtenue, deux autres égalités analogues, et intégrons pour le volume entier du système; après les transformations habituelles, nous trouverons l'égalité suivante :

$$(286)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\int\Bigg\{\left[\left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}r + D'\frac{\partial r}{\partial t}\right)\cos(N,y) - \left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}q + D'\frac{\partial q}{\partial t}\right)\cos(N,z)\right]\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \times\left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}\frac{\partial P}{\partial t} + D'\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}\right)\\
&\quad + \left[\left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}p + D'\frac{\partial p}{\partial t}\right)\cos(N,z) - \left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}r + D'\frac{\partial r}{\partial t}\right)\cos(N,x)\right]\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \times\left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}\frac{\partial Q}{\partial t} + D'\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}\right)\\
&\quad + \left[\left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}q + D'\frac{\partial q}{\partial t}\right)\cos(N,x) - \left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}p + D'\frac{\partial p}{\partial t}\right)\cos(N,y)\right]\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \times\left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}\frac{\partial R}{\partial t} + D'\frac{\partial^2 R}{\partial t^2}\right)\Bigg\} d\Sigma\\
&+ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\left[\left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}p + D'\frac{\partial p}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}q + D'\frac{\partial q}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}r + D'\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2\right] d\varpi\\
&+ \pi a^2\mu K'\frac{d}{dt}\int\left[\left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}P + D'\frac{\partial P}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}Q + D'\frac{\partial Q}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}R + D'\frac{\partial R}{\partial t}\right)^2\right] d\varpi\\
&+ \frac{2\pi a^2\mu}{\rho}\int\left[\left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}P + D'\frac{\partial P}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}Q + D'\frac{\partial Q}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}R + D'\frac{\partial R}{\partial t}\right)^2\right] d\varpi = 0.
\end{aligned}\right.$$

Ajoutons membre à membre les égalités (281), (282), (283) et (286), après avoir changé le signe des égalités (282) et (283); en tenant compte des égalités (277), nous trouverons l'égalité

$$
(287)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{dJ}{dt} = & \int \left[\left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho} \xi + D' \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) \cos(N, x) \right. \\
& + \left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho} \eta + D' \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \cos(N, y) \\
& \left. + \left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho} \zeta + D' \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right) \cos(N, z) \right] \left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + D' \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) d\Sigma \\
& + \int \left\{ \left[\left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho} \eta + D' \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \cos(N, z) - \left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho} \zeta + D' \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right) \cos(N, y) \right] \right. \\
& \qquad\qquad \times \left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t} + D' \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \right) \\
& \quad + \left[\left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho} \zeta + D' \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right) \cos(N, x) - \left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho} \xi + D' \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) \cos(N, z) \right] \\
& \qquad\qquad \times \left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho} \frac{\partial Q}{\partial t} + D' \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} \right) \\
& \quad + \left[\left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho} \xi + D' \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) \cos(N, y) - \left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho} \eta + D' \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \cos(N, x) \right] \\
& \qquad\qquad \left. \times \left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho} \frac{\partial R}{\partial l} + D' \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} \right) \right\} d\Sigma \\
& - \frac{2\pi a^2 k}{\rho} \int \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right)^2 d\varpi \\
& - \frac{2\pi a^2 \mu}{\rho} \int \left[\left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t} + D' \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \right)^2 + \left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho} \frac{\partial Q}{\partial t} + D' \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} \right)^2 + \left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho} \frac{\partial R}{\partial t} + D' \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} \right)^2 \right] d\varpi,
\end{aligned}
\right.
$$

égalité dans laquelle

$$
(288)\quad \left\{
\begin{aligned}
J = & \frac{1}{2} \int \left[\left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho} \xi + D' \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho} \eta + D' \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho} \zeta + D' \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)^2 \right] d\varpi \\
& + \pi a^2 k \int \left[4\pi\varepsilon' \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + K' \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right)^2 + K' \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right)^2 \right] d\varpi \\
& + \pi a^2 \mu K' \int \left[\left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t} + D' \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \right)^2 + \left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho} \frac{\partial Q}{\partial t} + D' \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} \right)^2 + \left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho} \frac{\partial R}{\partial t} + D' \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} \right)^2 \right] d\varpi.
\end{aligned}
\right.
$$

[32] Sur un même corps, à la fois conducteur et diélectrique, concevons deux mouvements électriques successifs; le premier correspond au champ (ξ', η', ζ'), le second au champ (ξ'', η'', ζ''). Ces deux mouvements correspondent à des conditions initiales différentes; mais en chaque point de la surface Σ, chacune des trois composantes du champ électrique varie suivant la même loi.

Soit (ξ, η, ζ) le champ, déterminé par ces égalités (243), qu'il faudrait composer avec le champ (ξ', η', ζ') pour obtenir le champ (ξ'', η'', ζ''). En tout point de la surface Σ et à tout instant, les trois composantes de ce champ (ξ, η, ζ) sont égales à zéro.

Comme chacun des deux champs (ξ', η', ζ), (ξ'', η'', ζ''), le champ (ξ, η, ζ) vérifie les équations (238), en sorte qu'on lui peut appliquer l'égalité (287); mais comme chacune des trois quantités ξ, η, ζ est constamment nulle en tout point de la surface Σ, cette égale se simplifie; on y peut effacer les intégrales étendues à la surface Σ; elle se réduit à

$$(289)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dJ}{dt} = -\frac{2\pi a^2 k}{\rho}\int\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\right)^2 d\varpi \\ &-\frac{2\pi a^2\mu}{\rho}\int\left[\left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}\frac{\partial P}{\partial t} + D'\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}\right)^2 + \left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}\frac{\partial Q}{\partial t} + D'\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}\right)^2 + \left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}\frac{\partial R}{\partial t} + D'\frac{\partial^2 R}{\partial t^2}\right)^2\right] d\varpi. \end{aligned}\right.$$

Le second membre de cette égalité ne peut être que négatif ou nul; si donc nous désignons par J_0 la valeur initiale de J, nous en concluons

$$J \leqq J_0$$

et *a fortiori*, en vertu de l'expression (288) de J,

$$(290)\quad \int\left[\left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}\xi + D'\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}\eta + D'\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}\zeta + D'\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right)^2\right] d\varpi \leqq 2J_0.$$

Cette condition n'offre pas, en général, de signification physique simple; mais elle en présente une dans le cas où l'on admet l'hypothèse de Faraday et de Mossotti; dans ce cas, en effet, on peut, à D', substituer $4\pi\varepsilon' K'$, en sorte que la condition précédente devient

$$(291)\quad \int\left[\left(\frac{\xi}{\rho} + K'\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{\rho} + K'\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{\rho} + K'\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right)^2\right] d\varpi \leqq \frac{J_0}{8\pi^2\varepsilon'^2}.$$

Or, en chaque point du corps, la densité du courant de conduction a pour composantes

$$u = \frac{\xi}{\rho}, \qquad v = \frac{\eta}{\rho}, \qquad w = \frac{\zeta}{\rho},$$

tandis que la densité du courant de déplacement a pour composantes

$$u' = K'\frac{\partial\xi}{\partial t}, \qquad v' = K'\frac{\partial\eta}{\partial t}, \qquad w' = K'\frac{\partial\zeta}{\partial t}.$$

La condition (291) devient donc

$$\int [(u+u')^2+(v+v')^2+(w+w')^2]\, d\varpi \leqq \frac{J_0}{8\pi^2\varepsilon'^2}. \tag{292}$$

La stabilité électrodynamique intégrale du système en résultera certainement s'il est possible, aux données initiales, d'imposer des limites supérieures telles que $\frac{J_0}{8\pi^2\varepsilon'^2}$ soit inférieure à une quantité positive, quelconque d'ailleurs, donnée d'avance.

[**33**] Pour examiner ce dernier point, cherchons ce que devient l'expression (288) de J quand, en vertu de l'hypothèse de Faraday et de Mossotti, on y suppose ε' extrêmement grand. Nous ne savons rien de la valeur de k; il se pourrait donc que k fût, comme ε', une quantité extrêmement grande; nous serons même amenés sous peu à faire cette supposition; nous ne devons donc pas supposer *a priori* que k soit négligeable devant ε'.

Nous devrons donc écrire :

$$\left\{\begin{aligned}\frac{J}{8\pi^2\varepsilon'^2} = & \int\left[\left(\frac{\xi}{\rho}+K'\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\eta}{\rho}+K'\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\zeta}{\rho}+K'\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right)^2\right]d\varpi\\ & + \frac{k}{2\pi\varepsilon'}\int\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial t}+K'\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\right)d\varpi\\ & + 2\pi a^2\mu K'\int\left[\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial t}+K'\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}\right)^2+\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial Q}{\partial t}+K'\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}\right)^2+\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial R}{\partial t}+K'\frac{\partial^2 R}{\partial t^2}\right)^2\right]d\varpi.\end{aligned}\right. \tag{293}$$

Mais la première égalité (289) donne

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial t}+K'\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}=\frac{1}{2\pi a^2\mu}\Delta P.$$

D'autre part, les égalités (9), (276), (277) et (280) donnent

$$\Delta P = -\, l.$$

Par là et par deux autres considérations analogues, l'égalité (293) devient

$$\left\{\begin{aligned}\frac{J}{8\pi^2\varepsilon'^2} = & \int\left[\left(\frac{\xi}{\rho}+K'\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\eta}{\rho}+K'\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\zeta}{\rho}+K'\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right)^2\right]d\varpi\\ & + \frac{K'}{2\pi a^2\mu}\int(l^2+m^2+n^2)\,d\varpi\\ & + \frac{k}{2\pi\varepsilon'}\int\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial t}+K'\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\right)d\varpi.\end{aligned}\right. \tag{294}$$

On peut évidemment, aux valeurs absolues initiales de

$$
(295)\qquad \left\{\begin{array}{lll}
\xi, & \eta, & \zeta, \\
\dfrac{\partial \xi}{\partial t}, & \dfrac{\partial \eta}{\partial t}, & \dfrac{\partial \zeta}{\partial t}, \\
l, & m, & n,
\end{array}\right.
$$

imposer des limites supérieures telles qu'au second membre de l'égalité (294), les deux premiers termes soient inférieurs à telles grandeurs positives qu'il aura plu de choisir. Dès lors, le dernier terme doit seul retenir notre attention.

Les égalités (276) et (277) donnent

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + K'\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \xi}{\partial t} + K'\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \\
+ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial Q}{\partial t} + K'\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial R}{\partial t} + K'\frac{\partial^2 R}{\partial t^2}\right)
\end{aligned}
$$

ou bien, en vertu des égalités (279),

$$
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + K'\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \xi}{\partial t} + K'\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial z}\Delta Q - \frac{\partial}{\partial y}\Delta R.
$$

Mais les égalités (9), (276), (277) et (280) donnent

$$
\Delta Q = -m, \qquad \Delta R = -n.
$$

Nous obtenons donc la première des égalités

$$
(296)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + K'\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}\right) &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial \xi}{\partial t} + K'\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial m}{\partial z} - \frac{\partial n}{\partial y}\right), \\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + K'\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}\right) &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial \eta}{\partial t} + K'\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial n}{\partial x} - \frac{\partial l}{\partial z}\right), \\
\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + K'\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}\right) &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial \zeta}{\partial t} + K'\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial l}{\partial y} - \frac{\partial m}{\partial x}\right).
\end{aligned}\right.
$$

Les deux autres s'établissent d'une manière analogue.

Ces égalités (296) nous montrent qu'aux valeurs absolues initiales des quantités

$$
(297)\qquad \begin{array}{llllll}
\dfrac{\partial \xi}{\partial t}, & \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, & \dfrac{\partial \eta}{\partial t}, & \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, & \dfrac{\partial \zeta}{\partial t}, & \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}, \\
\dfrac{\partial l}{\partial y}, & \dfrac{\partial l}{\partial z}, & \dfrac{\partial m}{\partial y}, & \dfrac{\partial m}{\partial z}, & \dfrac{\partial n}{\partial y}, & \dfrac{\partial n}{\partial z},
\end{array}
$$

on peut imposer des limites supérieures telles que les valeurs absolues initiales des trois quantités

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + K'\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + K'\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + K'\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}\right)$$

soient, en tout point du système, inférieures à une quantité positive quelconque a donnée d'avance.

Soit M un point du système, arbitrairement choisi; soient $\Phi'(M)$, $\Phi''(M)$, les valeurs qu'à l'instant initial, $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$ prennent au point M; soit δ la plus grande distance entre le point M et un autre point du système. A l'instant initial, nous aurons, en tout point du système, l'inégalité

$$\left|\frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + K'\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho}\Phi'(M) - K''\Phi''(M)\right| < a\delta. \tag{298}$$

Posons

$$C = \frac{1}{\rho}\Phi'(M) + K''\Phi''(M). \tag{299}$$

Cherchons une fonction $\chi(t)$ qui vérifie l'équation

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\chi(t)}{dt} + K'\frac{d^2\chi(t)}{dt^2} = -C. \tag{300}$$

L'intégrale générale de cette équation est

$$\chi(t) = -Ct + C'e^{-\frac{1}{\rho K'}t} + C'', \tag{301}$$

C' et C'' étant deux constantes arbitraires.

Considérons la fonction

$$\Phi_1 = \Phi + \chi(t). \tag{302}$$

Il est clair que les égalités (276) demeurent exactes si l'on y remplace Φ par Φ_1; il en est de même de l'égalité (278), car l'égalité (279) donne

$$\frac{1}{\rho}\frac{d^2\chi(t)}{dt^2} + K'\frac{d^3\chi(t)}{dt^3} = 0.$$

Mais au point M et à l'instant initial, $\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial t} + K'\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\right)$ prend la valeur

$$\left[\frac{1}{\rho}\,\Phi'(M) + K'\Phi''(M)\right],$$

tandis que $\left[\frac{1}{\rho}\frac{d\chi(t)}{dt} + K'\frac{d^2\chi(t)}{dt^2}\right]$ y garde la valeur $-C$; on voit alors, par l'égalité (299), que

$$(303) \qquad \frac{1}{\rho}\,\Phi_1'(M) + K'\Phi_1''(M) = 0.$$

Nous pouvons donc supposer qu'on reprenne tout ce qui a été dit à partir du n° [**31**], mais en substituant la fonction Φ_1 à la fonction Φ; nous pourrons, d'ailleurs, effacer ensuite l'indice 1 qui affecte la fonction Φ_1. C'est dire que nous pourrons écrire toutes les égalités et inégalités de (276) à (298), mais en y joignant l'égalité

$$(303\,bis) \qquad \frac{1}{\rho}\,\Phi'(M) + K'\Phi''(M) = 0,$$

moyennant laquelle l'inégalité (298), vérifiée à l'instant initial en tout point du système, deviendra

$$(304) \qquad \left|\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial t} + K'\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\right| < a\delta.$$

On en conclura qu'à l'instant initial, on a l'inégalité

$$(305) \qquad \int\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial t} + K'\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\right)^2 d\varpi < a^2\delta^2\varpi,$$

ϖ étant le volume du système. On peut toujours choisir la quantité a assez petite pour que le second membre soit plus petit que toute quantité positive donnée d'avance.

En réunissant les résultats que rappellent les deux tableaux (295) et (297), on arrive au résultat suivant :

*Si l'on admet l'*HYPOTHÈSE DE FARADAY ET DE MOSSOTTI, *on peut, dans tout le système, aux valeurs absolues initiales des trois composantes ξ, η, ζ du champ électrique et de leurs dérivées premières et secondes par rapport à t, x, y, z, imposer des limites supérieures telles que*

$$\int\left[(u+u')^2 + (v+v')^2 + (w+w')^2\right] d\varpi$$

demeure inférieur à une grandeur positive quelconque donnée d'avance.

En d'autres termes, moyennant cette hypothèse, si les trois composantes du champ électrique sont données, à chaque instant, en tout point de la surface qui limite le système (CAS A), *tout mouvement électrique possède la stabilité électrodynamique intégrale.*

§ 4. — *De quelles oscillations électriques propres, quasi-périodiques, un corps conducteur est-il susceptible?*

[**34**] Imaginons qu'en chaque point de la surface d'un corps conducteur et à chaque instant, on se donne :

ou bien (CAS A) les trois composantes du champ électrique;

ou bien (CAS B) les trois composantes du champ magnétique et la composante normale du champ électrique.

Imaginons, en second lieu, que ces données soient des fonctions périodiques de t, ayant une même période T.

Imaginons enfin qu'on soit assuré, au sujet des trois composantes du champ électrique à l'intérieur du corps conducteur, que ce sont, en chaque point, trois fonctions périodiques de t ayant pour période T.

Ces renseignements suffisent-ils à déterminer sans ambiguïté ces trois composantes?

Supposons qu'elles soient susceptibles de deux déterminations distinctes, (ξ', η', ζ') et (ξ'', η'', ζ''). Soit (ξ, η, ζ) le champ qui composé avec le champ (ξ', η', ζ') donnerait le champ (ξ'', η'', ζ'') :

$$\xi = \xi'' - \xi', \qquad \eta = \eta'' - \eta', \qquad \zeta = \zeta'' - \zeta'.$$

Les trois composantes du champ (ξ, η, ζ) seraient, en chaque point du conducteur, trois fonctions périodiques de t, ayant pour période T. En outre, en chaque point de la surface Σ et à chaque instant,

ou bien (CAS A) les trois composantes du champ électrique seraient égales à zéro;

ou bien (CAS B) les trois composantes du champ magnétique et la composante normale du champ électrique seraient égales à zéro.

Dans ces conditions, le champ (ξ, η, ζ) constituerait une *oscillation périodique propre* de notre corps conducteur; cette oscillation se rapporterait, d'ailleurs, soit au CAS A, soit au CAS B.

Une telle oscillation est-elle possible?

Dans le CAS A aussi bien que dans le CAS B, on lui pourrait appliquer l'égalité (246). D'ailleurs, la quantité J, définie par l'égalité (247), serait une fonction périodique de t. D'après l'égalité (246), cette quantité J ne peut jamais être fonction croissante de t. Mais une fonction périodique de t ne peut, pour certaines valeurs de t, être fonction décroissante de t, à moins d'être, pour d'autres valeurs de t, fonction croissante de cette variable. J ne pourrait donc jamais être, à l'égard de sa variable t, ni fonction croissante ni fonction décroissante; cela exigerait que J fût constant, que sa dérivée par rapport à t fût nulle, c'est-à-dire, en vertu de l'égalité (246), que

$$\int\left[\frac{\mu}{k}\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial l}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial m}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)^2\right]d\varpi=0. \tag{249}$$

Cette égalité entraîne, en tout point du conducteur,

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=0,$$
$$\frac{\partial l}{\partial t}=0,\qquad \frac{\partial m}{\partial t}=0,\qquad \frac{\partial n}{\partial t}=0.$$

Mais, dans le CAS A comme dans le CAS B, on a à chaque instant, en tout point de la surface qui borne le système,

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}\cos(\mathrm{N},x)+\frac{\partial\eta}{\partial t}\cos(\mathrm{N},y)+\frac{\partial\zeta}{\partial t}\cos(\mathrm{N},z)=0.$$

La démonstration donnée au début du n° [**5**] prouve alors qu'on a, en tout point du système et à tout instant,

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}=0,\qquad \frac{\partial\eta}{\partial t}=0,\qquad \frac{\partial\zeta}{\partial t}=0. \tag{306}$$

Dans le CAS A *aussi bien que dans le* CAS B, *un corps conducteur ne peut admettre aucune oscillation propre, rigoureusement périodique, qui ne se réduise à un champ constant.*

[**35**] Mais au lieu de rechercher, sur le corps considéré, une oscillation rigoureusement périodique, on pourrait se contenter d'y découvrir une *oscillation propre quasi-périodique*. La quantité J ne serait plus assujettie à demeurer rigoureusement constante; on l'astreindrait seulement à décroître avec une extrême lenteur. L'égalité (249) n'aurait plus besoin d'être vérifiée exactement, mais seulement d'une manière approchée.

Pour que cela eût lieu sans que les quatre quantités $\frac{\partial\theta}{\partial t}$, $\frac{\partial l}{\partial t}$, $\frac{\partial m}{\partial t}$, $\frac{\partial n}{\partial t}$ fussent, en général, très petites, il faudrait, en premier lieu, que la constante k de Helmholtz eût une très grande valeur, et, en second lieu, qu'on eût, exactement ou approximativement, en tout point du système,

$$\frac{\partial l}{\partial t}=0,\qquad \frac{\partial m}{\partial t}=0,\qquad \frac{\partial n}{\partial t}=0. \tag{307}$$

En vertu des égalités (8), ces égalités (307) peuvent s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \eta}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \zeta}{\partial t}=0, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \xi}{\partial t}=0, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial t}=0.$$

Elles exigent que ξ, η, ζ soient de la forme

$$(308)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi &= \xi_0 - \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \\ \eta &= \eta_0 - \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \\ \zeta &= \zeta_0 - \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \end{aligned}\right.$$

où ξ_0, η_0, ζ_0 sont trois quantités indépendantes de t. D'où la proposition suivante :

Ni dans le CAS A, *ni dans le* CAS B, *un corps conducteur ne saurait présenter une oscillation électrique propre, quasi-périodique, à moins que la constante k de Helmholtz n'eût une très grande valeur.*

Si une telle oscillation propre, quasi-périodique, est possible, elle résulte nécessairement de la superposition d'un champ électrique constant et d'un champ quasi-périodique purement longitudinal.

§ 5. — *Des mouvements électriques longitudinaux dont un corps conducteur est susceptible quand la constante k de Helmholtz a une très grande valeur.*

[**36**] Voyons s'il se peut produire, sur le corps considéré, un champ électrique qui vérifie les égalités

$$(307)\qquad \frac{\partial l}{\partial t}=0, \qquad \frac{\partial m}{\partial t}=0, \qquad \frac{\partial n}{\partial t}=0.$$

Pour qu'un tel champ soit possible, il faut évidemment que les égalités (307) soient vérifiées, à tout instant, en tout point de la surface Σ qui borne le système; que les égalités (307) et les égalités

$$(309)\qquad \frac{\partial^2 l}{\partial t^2}=0, \qquad \frac{\partial^2 m}{\partial t^2}=0, \qquad \frac{\partial^2 n}{\partial t^2}=0,$$

soient, à l'instant initial, vérifiées en tout point du système.

Nous nous proposons de démontrer que, réciproquement, *si les conditions* (307) *sont vérifiées, à tout instant, en tout point de la surface* Σ *qui borne le corps; si, à l'instant initial, les conditions* (307) *et* (309) *sont vérifiées en tout point du corps, les équations* (307) *sont, à tout instant, vérifiées en tout point du corps.*

En effet, les équations (238) et les égalités (8) donnent trois équations dont la première est

$$(310) \qquad \Delta \frac{\partial l}{\partial t} - \frac{2\pi\mu a^2}{\rho} \frac{\partial^2 l}{\partial t^2} - 2\pi\mu a^2 K' \frac{\partial^3 l}{\partial t^3} = 0.$$

Multiplions cette égalité par $\frac{\partial^2 l}{\partial t^2} d\varpi$ et intégrons pour le volume entier du corps. Nous trouvons

$$(311) \qquad \frac{dj}{dt} = -\frac{2\pi\mu a^2}{\rho} \int \left(\frac{\partial^2 l}{\partial t^2}\right)^2 d\varpi - \int \frac{\partial^2 l}{\partial t^2} \frac{\partial}{\partial N} \frac{\partial l}{\partial t} d\Sigma,$$

égalité où

$$(312) \qquad j = \frac{1}{2} \int \left[\left(\frac{\partial^2 l}{\partial x\, \partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 l}{\partial y\, \partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 l}{\partial z\, \partial t}\right)^2 + 2\pi\mu a^2 K' \left(\frac{\partial^2 l}{\partial t^2}\right)^2 \right] d\varpi.$$

Si, en chaque point de la surface Σ, la première égalité (307) est vérifiée quel que soit t, il en est de même de l'égalité

$$\frac{\partial^2 l}{\partial t^2} = 0,$$

en sorte que l'égalité (311) se réduit à

$$(313) \qquad \frac{dj}{dt} = -\frac{2\pi\mu a^2}{\rho} \int \left(\frac{\partial^2 l}{\partial t^2}\right)^2 d\varpi.$$

Cette égalité nous apprend que j ne peut jamais être fonction croissante de t.

D'autre part, en vertu de son expression (312), j ne peut jamais devenir négatif; comme, à l'instant initial, les égalités (307) et (309) sont vérifiées en tout point du système, la valeur initiale de j est nulle; j ne pourrait changer de valeur qu'en étant, tout d'abord, fonction croissante de t, ce que nous savons n'être pas possible; j demeure donc constamment égal à zéro.

Pour cela, il faut, en particulier, qu'on ait, en tout point du système et à tout instant,

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial l}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial l}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial l}{\partial t} = 0.$$

Comme la première égalité (307) est vérifiée, à tout instant, en tout point de la surface Σ, on voit qu'elle est, à tout instant, vérifiée en tout point du système. On ferait, pour chacune des deux autres égalités (307), une démonstration analogue.

[**37**] Imaginons donc un champ qui, en tout point du corps et à tout instant, vérifie les égalités (307) ou, ce qui revient au même, les équations (308), où ξ_0, η_0, ζ_0 sont des quantités indépendantes de t.

Reportons ces valeurs de ξ, η, ζ dans l'équation (238); nous trouvons l'équation

$$(314)\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu D'}{k}\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial t}+\frac{4\pi\mu\varepsilon'}{k\rho}\Delta\Psi-\frac{2\pi\mu a^2}{\rho}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}-2\pi\mu a^2 K'\frac{\partial^3\Psi}{\partial t^3}-\frac{4\pi\mu\varepsilon'}{k\rho}\theta_0\right)=0,$$

dans laquelle

$$(315)\qquad \theta_0=\frac{\partial\xi_0}{\partial x}+\frac{\partial\eta_0}{\partial y}+\frac{\partial\zeta_0}{\partial z}.$$

Simplifions cette égalité en introduisant l'hypothèse que k est une quantité extrêmement grande.

Nous avons

$$\frac{\mu D'}{k}=\frac{\mu}{k}+\frac{4\pi\varepsilon'\mu K'}{k}.$$

Pour aucun corps, la perméabilité magnétique μ n'est très grande, en sorte que le terme $\frac{\mu}{k}$ est assurément très petit; mais nous n'en pouvons dire autant du terme $\frac{4\pi\varepsilon'\mu K'}{k}$, car il pourrait se faire que $\varepsilon' K'$ fût très grand; c'est précisément ce qui a lieu dans l'hypothèse de Faraday et de Mossotti que nous entendons bien ne pas exclure de notre analyse; le terme $\frac{\mu}{k}\frac{\partial}{\partial t}\Delta\Psi$ est donc le seul que nous ayons, pour le moment, le droit d'effacer dans l'équation (314); en sorte que *si la constante d'Helmholtz a une très grande valeur*, l'équation (314) peut être remplacée par celle-ci :

$$(316)\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\varepsilon'}{k}\Delta\left(\frac{\Psi}{\rho}+K'\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)-\frac{a^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\Psi}{\rho}+K'\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)-\frac{\varepsilon'}{k}\frac{\theta_0}{\rho}\right]=0.$$

Cette équation (316) et deux équations analogues, qui s'obtiendraient de la même manière, équivalent à la seule équation

$$(317)\qquad \frac{\varepsilon'}{k}\Delta\left(\frac{\Psi}{\rho}+K'\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)-\frac{a^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\Psi}{\rho}+K'\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)-\frac{\varepsilon'}{k}\frac{\theta_0}{\rho}=f(t),$$

où $f(t)$ est une certaine fonction de la seule variable t.

Soit $F(t)$ une fonction de t ayant $f(t)$ pour dérivée seconde :

$$(318)\qquad \frac{d^2F(t)}{dt^2}=f(t),$$

et soit $\psi(t)$ une intégrale de l'équation

$$\frac{\psi(t)}{\rho} + K' \frac{d\psi(t)}{dt} = -\frac{2F(t)}{a^2}. \tag{319}$$

Posons

$$\Psi_1 = \Psi + \psi(t). \tag{320}$$

Il est clair qu'aux égalités (308), on pourra substituer les égalités

$$\xi = \xi_0 - \frac{\partial \Psi_1}{\partial x}, \qquad \eta = \eta_0 - \frac{\partial \Psi_1}{\partial y}, \qquad \zeta = \zeta_0 - \frac{\partial \Psi_1}{\partial z}, \tag{321}$$

la fonction Ψ_1 vérifiant, en vertu des égalités (317) à (320), l'équation

$$\frac{\varepsilon'}{k}\Delta\left(\frac{\Psi_1}{\rho} + K'\frac{\partial \Psi_1}{\partial t}\right) - \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\Psi_1}{\rho} + K'\frac{\partial \Psi_1}{\partial t}\right) - \frac{\varepsilon'}{k}\frac{\theta_0}{\rho} = 0. \tag{322}$$

Considérons maintenant une fonction φ, indépendante du temps, et vérifiant, en tout point du système, l'équation

$$\Delta\varphi = -\theta_0. \tag{323}$$

Posons

$$\Phi = \Psi_1 + \varphi. \tag{324}$$

L'équation (322) deviendra

$$\frac{\varepsilon'}{k}\Delta\left(\frac{\Phi}{\rho} + K'\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) - \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\Phi}{\rho} + K'\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) = 0. \tag{325}$$

Si l'on pose

$$\xi_1 = \xi_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad \eta_1 = \eta_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad \zeta_1 = \zeta_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \tag{326}$$

les équations (321) et (324) donneront

$$\xi = \xi_1 - \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad \eta = \eta_1 - \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \qquad \zeta = \zeta_1 - \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \tag{327}$$

tandis que les égalités (315), (323) et (326) donneront

$$\theta_1 = \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial \eta_1}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial z} = 0. \tag{328}$$

D'où la conclusion suivante :

Si la constante k de Helmholtz a une très grande valeur, tout champ qui résulte de la superposition d'un champ indépendant du temps et d'un champ longitudinal peut toujours être obtenu par la superposition des deux champs suivants :

1° *Un champ transversal* (ξ_1, η_1, ζ_1) *indépendant du temps;*

2° *Un champ longitudinal* $\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial x}, -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, -\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)$ *dépendant d'une fonction* Φ *qui vérifie l'équation* (325).

[**38**] Nous allons maintenant établir cette nouvelle proposition :

Un champ de la forme qui vient d'être indiquée est déterminé sans ambiguïté si l'on se donne :

1° *En tout point du système, à l'instant initial, les valeurs des composantes du champ électrique et de leurs dérivées premières et secondes par rapport à t;*

2° *En tout point de la surface qui limite le système, à tout instant, la valeur de la composante normale du champ électrique.*

Supposons, en effet, que ces conditions n'entraînent pas, pour le champ, une détermination exempte d'ambiguïté; qu'elles soient compatibles avec deux champs électriques distincts, le champ (ξ', η', ζ') et le champ (ξ'', η'', ζ''). Soit (ξ, η, ζ) le champ qui, composé avec le champ (ξ', η', ζ'), donnerait le champ (ξ'', η'', ζ''). Ce champ (ξ, η, ζ) serait encore de la forme étudiée au n° [**37**]; mais en outre, en tout point du corps, on aurait, à l'instant initial,

$$(329)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \xi = 0, & \eta = 0, & \zeta = 0, \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial t} = 0, & \dfrac{\partial \eta}{\partial t} = 0, & \dfrac{\partial \zeta}{\partial t} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0, & \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0, & \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = 0, \end{array}\right.$$

et de plus, à tout instant, en tout point de la surface Σ qui borne le corps,

$$(330)\qquad \xi \cos(N, x) + \eta \cos(N, y) + \zeta \cos(N, z) = 0.$$

Les égalités (325) et (328) permettent d'écrire

$$(331)\qquad \frac{\varepsilon'}{k}\left[\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial \eta_1}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial z} - \Delta\Phi\right) - K'\Delta\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right] + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\Phi}{\rho} + K'\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) = 0.$$

Multiplions cette égalité (331) par

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\Phi}{\rho} + K'\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) d\varpi$$

et intégrons pour le volume entier du système. Nous trouvons

$$(332)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\varepsilon'}{k}\int\left\{\left[\frac{1}{\rho}\left(\xi_1 - \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) - K'\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial t}\right]\cos(N, x)\right.\\
&\qquad + \left[\frac{1}{\rho}\left(\eta_1 - \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) - K'\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y\,\partial t}\right]\cos(N, y)\\
&\qquad + \left.\left[\frac{1}{\rho}\left(\zeta_1 - \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) - K'\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z\,\partial t}\right]\cos(N, z)\right\}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\Phi}{\rho} + K'\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) d\Sigma\\
&+\frac{\varepsilon'}{k}\int\left\{\left[\frac{1}{\rho}\left(\xi_1 - \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) - K'\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial t}\right]\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial t}\left(\frac{\Phi}{\rho} + K'\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)\right.\\
&\qquad + \left[\frac{1}{\rho}\left(\eta_1 - \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) - K'\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y\,\partial t}\right]\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial t}\left(\frac{\Phi}{\rho} + K'\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)\\
&\qquad + \left.\left[\frac{1}{\rho}\left(\zeta_1 - \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) - K'\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z\,\partial t}\right]\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial t}\left(\frac{\Phi}{\rho} + K'\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)\right\} d\varpi\\
&-\frac{a^2}{4}\frac{d}{dt}\int\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\Phi}{\rho} + K'\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)\right]^2 \qquad\qquad = 0.
\end{aligned}\right.$$

Dans l'intégrale étendue à la surface Σ, le facteur entre $\{\ \}$ peut s'écrire, en vertu des égalités (327),

$$\frac{1}{\rho}\left[\xi\cos(N, x) + \eta\cos(N, y) + \zeta\cos(N, z)\right] + K'\left[\frac{\partial \xi}{\partial t}\cos(N, x) + \frac{\partial \eta}{\partial t}\cos(N, y) + \frac{\partial \zeta}{\partial t}\cos(N, z)\right].$$

Il est égal à zéro, parce qu'en chaque point de la surface Σ, l'égalité (330) est sans cesse vérifiée.

Si l'on use également des égalités (327) pour modifier le second terme de l'égalité (332), celle-ci devient

$$(333)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int\left\{\frac{\varepsilon'}{k}\left[\left(\frac{\xi}{\rho} + K'\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{\rho} + K'\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{\rho} + K'\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)^2\right]\right.\\
&\qquad\qquad + \left.\frac{a^2}{2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\Phi}{\rho} + K'\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)\right]^2\right\} d\varpi = 0.
\end{aligned}\right.$$

Comme les égalités (329) sont vérifiées, à l'instant initial, en tout point du système, on voit que l'égalité (333) peut s'écrire :

$$(334)\quad \left\{\begin{aligned} &\int \left\{ \frac{\varepsilon'}{k} \left[\left(\frac{\xi}{\rho} + \mathrm{K}' \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\eta}{\rho} + \mathrm{K}' \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\zeta}{\rho} + \mathrm{K}' \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)^2 \right] \right. \\ &\qquad\qquad\qquad \left. + \frac{a^2}{2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\Phi}{\rho} + \mathrm{K}' \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \right]^2 \right\} d\varpi \\ &= \frac{a^2}{2} \int \left[\frac{\partial}{\partial t} \frac{\Phi}{\rho} + \mathrm{K}' \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right]_0^2 d\varpi, \end{aligned}\right.$$

l'indice zéro désignant une valeur prise à l'instant initial.

A l'instant initial, on a en tout point du système, en vertu des égalités (329),

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0,$$

c'est-à-dire, en vertu des égalités (327),

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0.$$

Ces égalités étant vérifiées en tout point du système, on en conclut les nouvelles égalités

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0,$$

ou bien l'égalité

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathrm{K}' \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) = 0.$$

En ajoutant cette égalité à deux autres égalités analogues qu'on obtient de même façon, on démontre qu'à l'instant initial, on a, en tout point du système,

$$(335)\qquad \Delta \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathrm{K}' \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) = 0.$$

D'autre part, l'égalité (330) étant à tout instant vérifiée, en tout point de la surface Σ, on en conclut aisément qu'en chaque point de cette surface, on a, à tout instant et donc, en particulier, à l'instant initial,

$$(336)\qquad \frac{\partial}{\partial \mathrm{N}} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathrm{K}' \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) = 0.$$

Les égalités (335) et (336) nous donnent, d'après un théorème connu,

$$(337)\qquad \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\Phi}{\rho} + \mathrm{K}' \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \right]_0 = \mathrm{C},$$

C ayant la même valeur en tout point du système.

Soit $\chi(t)$ une intégrale de l'équation

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\chi(t)}{dt} + K'\frac{d^2(\chi t)}{dt^2} = -C. \tag{300}$$

Posons

$$\Phi_1 = \Phi + \chi(t). \tag{338}$$

Les équations (325) et (327) demeureront vérifiées si nous remplaçons la fonction Φ par la fonction Φ_1, en sorte que nous pourrons encore écrire l'égalité (334), en y remplaçant Φ par Φ_1. Mais les égalités (338), (337) et (300) nous donneront

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\Phi_1}{\rho} + K'\frac{\partial \Phi_1}{\partial t}\right)\right]_0 = 0, \tag{339}$$

en sorte que l'égalité (334) deviendra

$$\left\{\begin{aligned}\int \Bigg\{ \frac{\varepsilon'}{k}\Bigg[&\left(\frac{\xi}{\rho} + K'\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{\rho} + K'\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{\rho} + K'\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)^2 \\ &+ \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + K'\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2}\right)^2\Bigg\} d\varpi = 0.\end{aligned}\right. \tag{340}$$

Cette égalité exige qu'on ait, en tout point du système et à tout instant,

$$\frac{\xi}{\rho} + K'\frac{\partial \xi}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\eta}{\rho} + K'\frac{\partial \eta}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\zeta}{\rho} + K'\frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0,$$

ou bien

$$\xi = \xi_0 e^{-\frac{t}{\rho K'}}, \qquad \eta = \eta_0 e^{-\frac{t}{\rho K'}}, \qquad \zeta = \zeta_0 e^{-\frac{t}{\rho K'}}. \tag{341}$$

ξ_0, η_0, ζ_0 étant les valeurs initiales de ξ, η, ζ. En vertu des égalités (329), ces égalités (341) exigent qu'on ait, en tout point du système et à tout instant,

$$\xi = 0, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = 0,$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

[**39**] Réunissons maintenant tout ce qui a été établi aux nos [**36**], [**37**] et [**38**]; nous obtenons la proposition suivante :

1° *A tout instant, en tout point de la surface qui borne le système, on connaît la composante normale du champ électrique; on sait, en outre, qu'en ce point, les quan-*

tités l, m, n ont des valeurs indépendantes du temps, qu'on n'a pas besoin de connaître; cette dernière condition sera vérifiée, en particulier, si, en chaque point de cette surface, le champ magnétique demeure invariable en grandeur et en direction; dans ce cas, en effet, en un tel point, l, m, n seront sans cesse égaux à zéro.

2° A l'instant initial, en tout point du système, on se donne les valeurs des neuf quantités

$$\xi,\quad \eta,\quad \zeta,\quad \frac{\partial \xi}{\partial t},\quad \frac{\partial \eta}{\partial t},\quad \frac{\partial \zeta}{\partial t},\quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},\quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2},\quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2},$$

les six dernières étant, d'ailleurs, de la forme suivante :

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x},\qquad \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y},\qquad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial \psi}{\partial x},\qquad \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -\frac{\partial \psi}{\partial y},\qquad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -\frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

Si la constante k de Helmholtz a une très grande valeur, *le champ électrique est déterminé sans aucune ambiguïté en tout point du système et à tout instant. Il résulte de la superposition d'un champ transversal indépendant du temps, et d'un champ longitudinal*

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial x},\qquad -\frac{\partial \Phi}{\partial y},\qquad -\frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

dont la fonction Φ vérifie l'équation

$$\frac{\varepsilon'}{k}\Delta\left(\frac{\Phi}{\rho} + K'\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) - \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\Phi}{\rho} + K'\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) = 0. \tag{325}$$

§ 6. — *Relation entre l'hypothèse faite sur la constante de Helmholtz et l'hypothèse de Faraday et de Mossotti. Vitesse de quasi-propagation d'un champ longitudinal dans un corps conducteur. Comparaison entre cette vitesse et la vitesse de propagation d'un champ longitudinal dans un diélectrique.*

[**40**] Les résultats qui viennent d'être énoncés n'impliquent aucune hypothèse sur la valeur de la constante ε' des actions électrostatiques.

Supposons, d'abord, que le rapport de cette constante ε' à la constante $\frac{a^2}{2}$ des actions électrostatiques n'ait pas, comme la constante k de Helmholtz, une très grande valeur; le rapport $\frac{2\varepsilon'}{a^2 k}$ sera alors très petit; l'égalité (325) se réduira sensiblement à

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\Phi}{\rho} + K'\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) = 0. \tag{342}$$

Cette équation s'intègre comme l'équation (300); elle donne

$$\Phi = \Psi e^{-\frac{t}{\rho K'}} + \Psi' t + \Psi'', \tag{343}$$

Ψ, Ψ', Ψ'' étant trois fonctions de x, y, z qui ne dépendent pas de t. Les égalités (327) nous donnent alors

$$\xi = \xi_1 - \frac{\partial \Psi''}{\partial x} - t\frac{\partial \Psi'}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} e^{-\frac{t}{\rho K'}}, \ \ldots\ldots\ldots\ldots \tag{344}$$

Un champ dont les composantes sont de cette forme ne saurait varier avec le temps suivant une loi périodique.

Mais, d'autre part, un champ périodique propre au système vérifierait nécessairement, nous l'avons vu, les équations (325) et (327).

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

*Pour qu'un corps conducteur puisse être le siège d'une oscillation quasi-périodique propre, il ne suffit pas que la constante k de Helmholtz ait une très grande valeur; il faut encore que le rapport de la constante ε' des actions électrostatiques à la constante $\frac{a^2}{2}$ des actions électrodynamiques ait une très grande valeur, ce qui constitue l'*HYPOTHÈSE DE FARADAY ET DE MOSSOTTI.

Or les phénomènes de résonnance électrique nous donneront la preuve qu'un système de plusieurs corps, dont certains sont doués de conductibilité, est capable d'oscillations propres, périodiques ou quasi-périodiques; la possibilité de ces oscillations propres sera subordonnée aux mêmes conditions que la possibilité d'oscillations propres sur un conducteur unique; nous serons donc contraints d'admettre à la fois ces deux suppositions :

La constante k de Helmholtz est un nombre très grand.

Le rapport de la constante ε' des actions électrostatiques à la constante $\frac{a^2}{2}$ des actions électrodynamiques est un nombre très grand.

Suivons les conséquences de ces deux suppositions.

Posons

$$\mathfrak{L}^2 = \frac{2\varepsilon'}{a^2 k}. \tag{345}$$

$\mathfrak{L}$ sera une constante dont la valeur sera la même pour tous les corps doués de conductibilité.

Posons

$$\Omega = \frac{\Phi}{\rho} + K' \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \tag{346}$$

L'équation (325) prendra la forme bien connue qu'on nomme *équation du son :*

$$\mathfrak{L}^2 \Delta\Omega - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} = 0. \tag{347}$$

Si la fonction Ω présente une onde, cette onde se propagera dans le milieu conducteur avec la vitesse $\mathfrak{L}$.

A cette proposition, on peut donner une forme dont le sens physique soit plus évident.

Le conducteur considéré est le siège d'un courant de conduction et d'un courant de déplacement.

La densité du courant de conduction a pour composantes

$$u = \frac{\xi}{\rho}, \qquad v = \frac{\eta}{\rho}, \qquad w = \frac{\zeta}{\rho}.$$

La densité du courant de déplacement a pour composantes

$$u' = K'\xi, \qquad v' = K'\eta, \qquad w' = K'\zeta.$$

La densité du courant total a pour composantes $(u + u')$, $(v + v')$, $(w + w')$.

Si l'on tient compte alors des égalités (327) et (346), on arrive au résultat suivant :

Dans les conditions énoncées au n° [**39**], *le milieu conducteur est le siège d'un courant total qui se compose :*

1° *D'un courant de conduction transversal, indépendant du temps, dont la densité a pour composantes*

$$u_1 = \frac{\xi_1}{\rho}, \qquad v_1 = \frac{\eta_1}{\rho}, \qquad w_1 = \frac{\zeta_1}{\rho}. \tag{348}$$

2° *D'un courant de conduction et de déplacement longitudinal, variable en général avec le temps, dont la densité a pour composantes*

$$U = -\frac{\partial\Omega}{\partial x}, \qquad V = -\frac{\partial\Omega}{\partial y}, \qquad W = -\frac{\partial\Omega}{\partial z}. \tag{349}$$

Si ce dernier courant présente une onde, cette onde se propage avec une vitesse $\mathfrak{L}$, la même pour tous les milieux conducteurs.

Il faut bien observer que cette proposition est un théorème approché, qu'on obtient seulement en attribuant de très grandes valeurs aux constantes $\frac{2\varepsilon'}{a^2}$ et k; en toute rigueur, les composantes du champ électrique dépendent des équations (238); ces équations ont même forme que celles dont dépendent les petits mouvements d'un milieu isotrope affecté de viscosité; or ces équations sont de celles qui n'admettent aucune onde persistante, si ce n'est une onde qui sépare sans cesse les mêmes parties du milieu [1]; la vitesse de propagation de cette onde est nulle, et il n'y a pas à considérer, dans le milieu, de vitesse de propagation autre que celle-là.

Pour cette raison, nous dirons que $\mathfrak{L}$ est la *vitesse de quasi-propagation des courants longitudinaux dans un milieu conducteur.*

Dans un milieu diélectrique dénué de conductibilité, il y a vraiment propagation des courants longitudinaux. La vitesse de propagation $\mathfrak{L}$ est donnée par la formule

$$(4) \qquad \mathfrak{L}^2 = \frac{D'}{2\pi a^2 k K'}.$$

D' est égal à $(1 + 4\pi\varepsilon' K')$. *Si l'on admet l'hypothèse de Faraday et de Mossotti,* D' se réduit sensiblement à $4\pi\varepsilon' K'$, et l'égalité précédente devient identique à l'égalité (345), en sorte que *la vitesse de propagation véritable des courants longitudinaux devient sensiblement la même dans tous les milieux diélectriques dénués de conductibilité; elle est sensiblement égale à la vitesse de quasi-propagation des courants longitudinaux dans les milieux conducteurs.*

§ 7. — *Des vibrations électriques simples qui sont propres à un corps conducteur.*

[**41**] Les conséquences auxquelles nous sommes parvenu en étudiant, d'une manière générale, les oscillations quasi-périodiques qu'un corps conducteur peut posséder en propre, nous les allons retrouver en étudiant, sur un tel corps, les vibrations électriques simples.

Supposons que les trois composantes du champ électrique aient la forme suivante :

$$(350) \qquad \left\{ \begin{aligned} \xi &= \xi' \cos 2\pi \frac{t}{T} + \xi'' \sin 2\pi \frac{t}{T}, \\ \eta &= \eta' \cos 2\pi \frac{t}{T} + \eta'' \sin 2\pi \frac{t}{T}, \\ \zeta &= \zeta' \cos 2\pi \frac{t}{T} + \zeta'' \sin 2\pi \frac{t}{T}. \end{aligned} \right.$$

---

[1] Pierre Duhem, *Recherches sur l'Élasticité*, seconde partie, chap. II (Annales de l'École Normale supérieure, 3e série, t. XXI, 1904).

Posons

$$(351)\quad\left\{\begin{aligned}
&\theta' = \frac{\partial \xi'}{\partial x} + \frac{\partial \eta'}{\partial y} + \frac{\partial \zeta'}{\partial z},\\
&l' = \frac{\partial \eta'}{\partial z} - \frac{\partial \zeta'}{\partial y},\qquad m' = \frac{\partial \zeta'}{\partial x} - \frac{\partial \xi'}{\partial z},\qquad n' = \frac{\partial \xi'}{\partial y} - \frac{\partial \eta'}{\partial x},\\
&\theta'' = \frac{\partial \xi''}{\partial x} + \frac{\partial \eta''}{\partial y} + \frac{\partial \zeta''}{\partial z},\\
&l'' = \frac{\partial \eta''}{\partial z} - \frac{\partial \zeta''}{\partial y},\qquad m'' = \frac{\partial \zeta''}{\partial x} - \frac{\partial \xi''}{\partial z},\qquad n'' = \frac{\partial \xi''}{\partial y} - \frac{\partial \eta''}{\partial x}.
\end{aligned}\right.$$

Reportons les expressions (350) de ξ, η, ζ dans l'équation (238) qui doit être vérifiée quel que soit t; égalons séparement à zéro le coefficient de $\cos 2\pi\frac{t}{T}$ et le coefficient de $\sin 2\pi\frac{t}{T}$; nous trouvons les deux équations

$$(352)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{4\pi\mu\varepsilon'}{k}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\theta'}{\partial x} + \frac{2\pi}{T}K'\frac{\partial\theta''}{\partial x}\right) + \frac{2\pi}{T}\frac{\mu}{k}\frac{\partial\theta''}{\partial x} - \frac{2\pi}{T}\left(\frac{\partial m''}{\partial z} - \frac{\partial n''}{\partial y}\right)\\
&\qquad\qquad + 2\pi\mu a^2\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\left(\frac{\xi'}{\rho} + \frac{2\pi}{T}K'\xi''\right) = 0,\\
&\frac{4\pi\mu\varepsilon'}{k}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\theta''}{\partial x} - \frac{2\pi}{T}K'\frac{\partial\theta'}{\partial x}\right) - \frac{2\pi}{T}\frac{\mu}{k}\frac{\partial\theta'}{\partial x} + \frac{2\pi}{T}\left(\frac{\partial m'}{\partial z} - \frac{\partial n'}{\partial y}\right)\\
&\qquad\qquad + 2\pi\mu a^2\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\left(\frac{\xi''}{\rho} - \frac{2\pi}{T}K'\xi'\right) = 0.
\end{aligned}\right.$$

A ces deux équations, il en faut, bien entendu, joindre quatre autres qui s'en déduisent par des permutations convenables.

De ces équations (352), multiplions la première par

$$\frac{\xi''}{\rho} - \frac{2\pi}{T}K'\xi',$$

la seconde par

$$-\frac{\xi'}{\rho} - \frac{2\pi}{T}K'\xi''$$

et ajoutons membre à membre les résultats obtenus; nous trouvons l'égalité

$$\begin{aligned}
&\frac{4\pi\mu\varepsilon'}{k}\left[\left(\frac{\xi''}{\rho} - \frac{2\pi}{T}K'\xi'\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\theta'}{\rho} + \frac{2\pi}{T}K'\theta''\right) - \left(\frac{\xi'}{\rho} + \frac{2\pi}{T}K'\xi''\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\theta''}{\rho} - \frac{2\pi}{T}K'\xi'\right)\right]\\
&+ \frac{4\pi^2}{T^2}\frac{\mu K'}{k}\left(\xi''\frac{\partial\theta'}{\partial x} - \xi'\frac{\partial\theta''}{\partial x}\right) + \frac{4\pi^2}{T^2}K'\left[\left(\frac{\partial m''}{\partial z} - \frac{\partial n''}{\partial y}\right)\xi' - \left(\frac{\partial m'}{\partial z} - \frac{\partial n'}{\partial y}\right)\xi''\right]\\
&+ \frac{2\pi}{T}\frac{\mu}{k\rho}\left(\xi'\frac{\partial\theta'}{\partial x} + \xi''\frac{\partial\theta''}{\partial x}\right) - \frac{2\pi}{T}\frac{1}{\rho}\left[\left(\frac{\partial m'}{\partial z} - \frac{\partial n'}{\partial y}\right)\xi' + \left(\frac{\partial m''}{\partial z} - \frac{\partial n''}{\partial y}\right)\xi''\right] = 0.
\end{aligned}$$

Ajoutons membre à membre cette égalité avec deux égalités analogues qu'on en déduit par permutation, multiplions par $d\varpi$, et intégrons pour le volume entier du corps en transformant certains termes à l'aide d'intégrations par parties. Nous parvenons au résultat que voici :

$$
(353)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{4\pi\mu\varepsilon'}{k}\int\left[\left(\frac{\theta''}{\rho}-\frac{2\pi}{T}K'\theta'\right)\left(\frac{\mathfrak{N}'}{\rho}+\frac{2\pi}{T}K'\mathfrak{N}''\right)-\left(\frac{\theta'}{\rho}+\frac{2\pi}{T}K'\theta''\right)\left(\frac{\mathfrak{N}''}{\rho}-\frac{2\pi}{T}K'\mathfrak{N}'\right)\right]d\Sigma\\
&+\frac{4\pi^2}{T^2}\frac{\mu K'}{k}\int\left(\theta''\mathfrak{N}'-\theta\,\mathfrak{N}''\right)d\Sigma\\
&-\frac{2\pi}{T}\frac{\mu}{k\rho}\int\left(\theta'\mathfrak{N}'+\theta''\mathfrak{N}''\right)d\Sigma\\
&+\frac{4\pi^2}{T^2}K'\int\left[\left(\mathfrak{R}'l''-\mathfrak{R}''l'\right)+\left(\mathfrak{S}'m''-\mathfrak{S}''m'\right)+\left(\mathfrak{T}'n''-\mathfrak{T}''n'\right)\right]d\Sigma\\
&-\frac{2\pi}{T}\frac{1}{\rho}\int\left(\mathfrak{R}'l'+\mathfrak{R}''l''+\mathfrak{S}'m'+\mathfrak{S}''m''+\mathfrak{T}'n'+\mathfrak{T}''n''\right)d\Sigma\\
&-\frac{2\pi}{T}\frac{1}{\rho}\int\left[\frac{\mu}{k}(\theta'^2+\theta''^2)+l'^2+l''^2+m'^2+m''^2+n'^2+n''^2\right]d\varpi \qquad =0,
\end{aligned}
\right.
$$

égalité dans laquelle on a posé

$$
(354)\quad \left\{
\begin{aligned}
\mathfrak{N}' &= \xi'\cos(N,x)+\eta'\cos(N,y)+\zeta'\cos(N,z),\\
\mathfrak{R}' &= \eta'\cos(N,z)-\zeta'\cos(N,y),\\
\mathfrak{S}' &= \zeta'\cos(N,x)-\xi'\cos(N,z),\\
\mathfrak{T}' &= \xi'\cos(N,y)-\eta'\cos(N,x),
\end{aligned}
\right.
$$

et dans laquelle $\mathfrak{N}''$, $\mathfrak{R}''$, $\mathfrak{S}''$, $\mathfrak{T}''$ ont des significations analogues.

[**42**] Imaginons maintenant qu'en chaque point de la surface Σ, on connaisse : ou bien (CAS A), les six quantités

$$\xi',\quad \eta',\quad \zeta',\qquad \xi'',\quad \eta'',\quad \zeta'';$$

ou bien (CAS B), les huit quantités

$$
\begin{matrix}
 & & \mathfrak{N}', & & \mathfrak{N}'', & & \\
l', & m', & n', & & l'', & m'', & n''.
\end{matrix}
$$

Demandons-nous si, dans ces conditions, la vibration électrique est entièrement déterminée sur le corps conducteur.

Supposons que cette détermination ne soit pas exempte d'ambiguïté et que deux vibrations simples, de même période T, soient également compatibles avec les conditions données ; la seconde s'obtiendra en composant avec la première une troisième vibration simple, de même période T, dont les composantes seront données par des égalités telles que (350); mais, pour cette troisième vibration, on aura, en tout point de la surface Σ,

ou bien (CAS A)

$$\xi' = 0, \quad \eta' = 0, \quad \zeta' = 0, \qquad \xi'' = 0, \quad \eta'' = 0, \quad \zeta'' = 0; \tag{355}$$

ou bien (CAS B)

$$\mathfrak{N}' = 0, \qquad \mathfrak{N}'' = 0, \tag{356}$$

$$l' = 0, \quad m' = 0, \quad n' = 0, \qquad l'' = 0, \quad m'' = 0, \quad n'' = 0. \tag{357}$$

Pour le système, cette dernière vibration sera une *vibration électrique propre* relative soit au CAS A, soit au CAS B. Il s'agit d'examiner si une telle vibration peut exister, qui ne soit pas identiquement nulle.

Pour une telle vibration propre, l'égalité (353) serait encore exacte; mais au premier membre de cette égalité, toutes les intégrales étendues à la surface Σ disparaîtraient, soit en vertu des conditions (356) et (357). Cette égalité (353) se réduirait donc à la suivante :

$$\int \left[\frac{\mu}{k} (\theta'^2 + \theta''^2) + l'^2 + l''^2 + m'^2 + m''^2 + n'^2 + n''^2 \right] d\varpi = 0. \tag{358}$$

Elle exigerait qu'on eût, en tout point du système, les égalités

$$\left\{ \begin{array}{llllll} & \theta' = 0, & & & \theta'' = 0, & \\ l' = 0, & m' = 0, & n' = 0, & l'' = 0, & m'' = 0, & n'' = 0. \end{array} \right. \tag{359}$$

Mais, dans le CAS A aussi bien que dans le CAS B, les égalités (356) sont verifiées en tout point de la surface Σ, car elles résultent des égalités (355); dès lors, en vertu du raisonnement exposé au début du n° [**5**], les égalités (359) entraînent celles-ci :

$$\xi' = 0, \quad \eta' = 0, \quad \zeta' = 0; \qquad \xi'' = 0, \quad \eta'' = 0, \quad \zeta'' = 0. \tag{360}$$

Ni dans le CAS A, *ni dans le* CAS B, *un corps conducteur ne saurait être le siège d'une vibration électrique simple qui lui soit propre; dans chacun de ces deux cas, les données relatives à la surface du corps déterminent sans ambiguïté la vibration électrique à l'intérieur de ce corps.*

[**43**] L'égalité (358) n'est pas susceptible d'une vérification rigoureuse différente de celle que nous venons d'indiquer, mais elle est susceptible d'être vérifiée d'une manière approchée par une vibration qui ne serait pas identiquement nulle; il faut

pour cela, en premier lieu, que k soit extrêmement grand; en second lieu, qu'on ait, en tout point du système,

$$(361)\qquad l'=0,\quad m'=0,\quad n'=0,\qquad l''=0,\quad m''=0,\quad n''=0.$$

Ces conditions équivalent à la suivante : Il existe deux fonctions ψ', ψ'', telles que

$$(362)\qquad \begin{cases} \xi'=-\dfrac{\partial\psi'}{\partial x}, & \eta'=-\dfrac{\partial\psi'}{\partial y}, & \zeta'=-\dfrac{\partial\psi'}{\partial z}, \\ \xi''=-\dfrac{\partial\psi''}{\partial x}, & \eta''=-\dfrac{\partial\psi''}{\partial y}, & \zeta''=-\dfrac{\partial\psi''}{\partial z}. \end{cases}$$

Ainsi donc *pour qu'un corps conducteur placé soit dans le* CAS A *soit dans le* CAS B *puisse être le siège d'un mouvement électrique peu différent d'une vibration électrique propre, il faut, en premier lieu, que la constante k de Helmholtz ait une très grande valeur et, en second lieu, que la vibration électrique soit longitudinale.*

Ces deux suppositions simplifient grandement les égalités (352) qui se réduisent à

$$(363)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\varepsilon'}{k}\Delta\left(\dfrac{1}{\rho}\psi'+\dfrac{2\pi}{T}K'\psi''\right)+\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2\dfrac{a^2}{2}\left(\dfrac{1}{\rho}\psi'+\dfrac{2\pi}{T}K'\psi''\right)\right]=0, \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\varepsilon'}{k}\Delta\left(\dfrac{1}{\rho}\psi''-\dfrac{2\pi}{T}K'\psi'\right)+\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2\dfrac{a^2}{2}\left(\dfrac{1}{\rho}\psi''-\dfrac{2\pi}{T}K'\psi'\right)\right]=0. \end{cases}$$

Ces deux égalités et les quatre égalités qu'on en déduit en remplaçant $\dfrac{\partial}{\partial x}$ par $\dfrac{\partial}{\partial y}$ ou par $\dfrac{\partial}{\partial z}$ équivalent à

$$(364)\qquad \begin{cases} \dfrac{\varepsilon'}{k}\Delta\left(\dfrac{1}{\rho}\psi'+\dfrac{2\pi}{T}K'\psi''\right)+\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2\dfrac{a^2}{2}\left(\dfrac{1}{\rho}\psi'+\dfrac{2\pi}{T}K'\psi''\right)=\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2\dfrac{a^2}{2}f'(t), \\ \dfrac{\varepsilon'}{k}\Delta\left(\dfrac{1}{\rho}\psi''-\dfrac{2\pi}{T}K'\psi'\right)+\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2\dfrac{a^2}{2}\left(\dfrac{1}{\rho}\psi''-\dfrac{2\pi}{T}K'\psi'\right)=\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2\dfrac{a^2}{2}f''(t). \end{cases}$$

Déterminons deux nouvelles fonctions de t, $\chi'(t)$, $\chi''(t)$, par les équations

$$(365)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\chi'(t)+\dfrac{2\pi}{T}K'\chi''(t)=-f'(t), \\ \dfrac{1}{\rho}\chi''(t)-\dfrac{2\pi}{T}K'\chi'(t)=-f''(t), \end{cases}$$

ou

$$(366)\qquad \begin{cases} \left[\dfrac{1}{\rho^2}+\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2K'^2\right]\chi'(t)=\dfrac{2\pi}{T}K'f''(t)-\dfrac{1}{\rho}f'(t), \\ \left[\dfrac{1}{\rho^2}+\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2K'^2\right]\chi''(t)=-\dfrac{2\pi}{T}K'f'(t)-\dfrac{1}{\rho}f''(t). \end{cases}$$

Posons ensuite

$$(367)\qquad \Psi' = \psi' + \chi'(t), \qquad \Psi'' = \psi'' + \chi''(t).$$

Les égalités (362) pourront aussi bien s'écrire

$$(368)\qquad \begin{cases} \xi' = -\dfrac{\partial \Psi'}{\partial x}, & \eta' = -\dfrac{\partial \Psi'}{\partial y}, & \zeta' = -\dfrac{\partial \Psi'}{\partial z}, \\ \xi'' = -\dfrac{\partial \Psi''}{\partial x}, & \eta'' = -\dfrac{\partial \Psi''}{\partial y}, & \zeta'' = -\dfrac{\partial \Psi''}{\partial z}, \end{cases}$$

tandis qu'en vertu des égalités (365) et (367), les égalités (364) deviendront

$$\frac{1}{\rho}\left[\frac{\varepsilon'}{k}\Delta\Psi' + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{a^2}{2}\Psi'\right] + \frac{2\pi}{T}K'\left[\frac{\varepsilon'}{k}\Delta\Psi'' + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{a^2}{2}\Psi''\right] = 0,$$

$$\frac{1}{\rho}\left[\frac{\varepsilon'}{k}\Delta\Psi'' + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{a^2}{2}\Psi''\right] - \frac{2\pi}{T}K'\left[\frac{\varepsilon'}{k}\Delta\Psi' + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{a^2}{2}\Psi'\right] = 0$$

ou bien

$$(369)\qquad \begin{cases} \dfrac{\varepsilon'}{k}\Delta\Psi' + \left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 \dfrac{a^2}{2}\Psi' = 0, \\ \dfrac{\varepsilon'}{k}\Delta\Psi'' + \left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 \dfrac{a^2}{2}\Psi'' = 0. \end{cases}$$

Jusqu'ici, dans ce paragraphe, aucune hypothèse n'a été faite sur la valeur de la constante $\frac{2\varepsilon'}{a^2}$. Si cette valeur n'était pas très grande, alors que k est un très grand nombre, les égalités (369) se réduiraient à

$$\Psi' = 0, \qquad \Psi'' = 0,$$

en sorte que le système ne saurait être le siège d'une vibration sensiblement propre. D'où cette conclusion :

Pour qu'un corps conducteur puisse être le siège d'une vibration électrique sensiblement propre correspondant soit au CAS A, *soit au* CAS B, *il faut qu'on attribue une très grande valeur non seulement à la constante k de Helmholtz, mais encore au rapport de la constante ε' des actions électrostatiques à la constante $\frac{a^2}{2}$ des actions électrodynamiques, ce qui constitue l'*HYPOTHÈSE DE FARADAY ET DE MOSSOTTI.

Reprenons maintenant, pour définir $\mathfrak{L}^2$, l'égaliié (345), et nous donnerons aux égalités (369) la forme

$$(370)\qquad \mathfrak{L}^2\Delta\Psi' + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\Psi' = 0, \qquad \mathfrak{L}^2\Delta\Psi'' + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\Psi'' = 0.$$

La vibration sensiblement propre étant longitudinale, les équations (361) sont vérifiées en tout point du système; les égalités (357) le sont donc en tout point de la surface Σ. D'ailleurs, les égalités (356) sont vraies aussi bien dans le CAS A que dans le CAS B. Si donc les vibrations sensiblement propres que le système peut présenter appartenaient au CAS A, il faudrait qu'elles appartinssent en même temps au CAS B. Ainsi *les vibrations sensiblement propres que nous considérons en ce moment sont certainement relatives au* CAS B.

En vertu des égalités (368), les égalités (356) peuvent s'écrire

$$\frac{\partial \Psi'}{\partial N} = 0, \qquad \frac{\partial \Psi''}{\partial N} = 0. \tag{371}$$

S'il existe deux fonctions Ψ', Ψ'', *non identiquement nulles, qui vérifient les équations* (370) *en tout point intérieur à un corps conducteur, et les équations* (371) *en tout point de la surface qui borne ce conducteur, les égalités* (350) *et* (368) *définissent une vibration électrique simple sensiblement propre à ce corps conducteur.*

La détermination de ces vibrations simples est ainsi ramenée à l'un des problèmes les plus célèbres et les plus étudiés de l'Analyse.

Nous savons donc qu'*il existe un nombre illimité de périodes pour lesquelles un corps conducteur est susceptible de vibrations électriques sensiblement propres.*

Au n° [**40**], nous avons observé que l'hypothèse de Faraday et de Mossotti, que nous sommes tenus d'admettre, rendait sensiblement égales entre elles la vitesse de propagation des courants longitudinaux dans un diélectrique privé de conductibilité et la vitesse de quasi-propagation des courants longitudinaux dans un corps conducteur. Dès lors, si nous nous reportons aux définitions données au n° [**12**], nous pouvons formuler la proposition suivante :

Les périodes des vibrations électriques sensiblement propres qui se peuvent produire sur un corps conducteur sont égales aux périodes longitudinales d'un corps diélectrique, privé de toute conductibilité, qui aurait même forme que ce conducteur.

CHAPITRE II

Le système est formé de plusieurs corps doués de conductibilité.

§ 1. — *Condition vérifiée à la surface de contact de deux corps conducteurs distincts.*

[**42**] Nous allons maintenant, en partie par voie d'hypothèse, traiter de la résonnance électrique dans un système formé de plusieurs corps distincts, parmi lesquels se trouvent des conducteurs.

Pour ne pas compliquer inutilement les formules, nous supposerons, comme au n° [**20**], que le système soit formé seulement de deux corps 1 et 2, dont ϖ_1 et ϖ_2 seront les volumes et S_{12} la surface de contact. Σ désignera encore la surface qui contient tout le système.

Soient, en un point de la surface S_{12}, n_1, n_2 les deux directions de la demi-normale, l'une vers l'intérieur du corps 1, l'autre vers l'intérieur du corps 2; au même point, désignons par E la densité superficielle véritable de l'électricité; si Υ désigne la fonction potentielle électrostatique des charges vraiment répandues sur le système, nous devons avoir, en tout point de la surface S_{12},

$$\frac{\partial \Upsilon}{\partial n_1} + \frac{\partial \Upsilon}{\partial n_2} = -4\pi E. \tag{372}$$

D'autre part, si u, v, w sont, en un point du système, les composantes de la densité du courant de déplacement, on a

$$\left\{ \begin{aligned} & u_1 \cos(n_1, x) + v_1 \cos(n_1, y) + w_1 \cos(n_1, z) \\ & + u_2 \cos(n_2, x) + v_2 \cos(n_2, y) + w_2 \cos(n_2, z) = -\frac{\partial E}{\partial t}. \end{aligned} \right. \tag{373}$$

Si A′, B′, C′ désignent, en un point du système, les composantes de la polarisation diélectrique, et si V′ est la fonction potentielle électrostatique de cette polarisation, on doit avoir, en tout point de la surface S_{12},

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial V'}{\partial n_1} + \frac{\partial V'}{\partial n_2} = 4\pi\, [& A'_1 \cos(n_1, x) + B'_1 \cos(n_1, y) + C'_1 \cos(n_1, z) \\ & + A'_2 \cos(n_3, x) + B'_2 \cos(n_2, y) + C'_2 \cos(n_2, z)]. \end{aligned} \right. \tag{374}$$

Désignons par W la fonction potentielle électrostatique totale :

$$W = \Upsilon + V'. \tag{375}$$

Les égalités (372) à (375) nous montreront qu'on doit avoir, en tout point de la surface S_{12} et à tout instant :

$$(376)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial n_1}\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial n_2}\frac{\partial W}{\partial t}\\ &=4\pi\left[\left(u_1+\frac{\partial A'_1}{\partial t}\right)\cos(n_1,x)+\left(v_1+\frac{\partial B'_1}{\partial t}\right)\cos(n_1,y)+\left(w_1+\frac{\partial C'_1}{\partial t}\right)\cos(n_1,z)\right.\\ &\quad\left.+\left(u_2+\frac{\partial A'_2}{\partial t}\right)\cos(n_2,x)+\left(v_2+\frac{\partial B'_2}{\partial t}\right)\cos(n_2,y)+\left(w_2+\frac{\partial C'_2}{\partial t}\right)\cos(n_3,z)\right].\end{aligned}\right.$$

Cette condition (376) peut encore s'écrire autrement.

Observons, en effet,

1° Qu'en tout point du système, les trois composantes ξ, η, ζ du champ électrique total sont données par les égalités

$$(377)\quad \xi=-\varepsilon'\frac{\partial W}{\partial x}-\frac{a}{\sqrt{2}}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t},\qquad \eta=-\varepsilon'\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{a}{\sqrt{2}}\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t},\qquad \zeta=-\varepsilon'\frac{\partial W}{\partial z}-\frac{a}{\sqrt{2}}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t};$$

2° Que les fonctions $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ ne subissent aucune discontinuité en traversant la surface S_{12}, et qu'il en est de même de leurs dérivées de tous ordres par rapport à t, et nous trouverons sans peine que les égalités (376) et (377) nous donnent celle-ci :

$$(378)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial t}+4\pi\varepsilon' u_1+4\pi\varepsilon'\frac{\partial A'_1}{\partial t}\right)\cos(n_1,x)+\left(\frac{\partial \xi_2}{\partial t}+4\pi\varepsilon' u_2+4\pi\varepsilon'\frac{\partial A'_2}{\partial t}\right)\cos(n_2,x)\\ &+\left(\frac{\partial \eta_1}{\partial t}+4\pi\varepsilon' v_1+4\pi\varepsilon'\frac{\partial B'_1}{\partial t}\right)\cos(n_1,y)+\left(\frac{\partial \eta_2}{\partial t}+4\pi\varepsilon' v_2+4\pi\varepsilon'\frac{\partial B'_2}{\partial t}\right)\cos(n_2,y)\\ &+\left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial t}+4\pi\varepsilon' w_1+4\pi\varepsilon'\frac{\partial C_1}{\partial t}\right)\cos(n_1,z)+\left(\frac{\partial \zeta_2}{\partial t}+4\pi\varepsilon' w_2+4\pi\varepsilon'\frac{\partial C_2}{\partial t}\right)\cos(n_2,z)=0.\end{aligned}\right.$$

Mais on a, en tout point du système et à tout instant,

$$(379)\qquad \rho u=\xi,\qquad \rho v=\eta,\qquad \rho w=\zeta,$$

$$(380)\qquad A'=K'\xi,\qquad B'=K'\eta,\qquad C'=K'\zeta.$$

Si l'on continue à désigner par

$$(381)\qquad D'=1+4\pi\varepsilon' K'$$

le pouvoir inducteur spécifique,

on aura, en vertu de ces égalités (378) à (381),

$$(382)\quad \left\{\begin{aligned}&\left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho_1}\xi_1 + D'_1\frac{\partial\xi_1}{\partial t}\right)\cos(n_1, x) + \left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho_2}\xi_2 + D'_2\frac{\partial\xi_2}{\partial t}\right)\\ &+\left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho_1}\eta_1 + D'_1\frac{\partial\eta_1}{\partial t}\right)\cos(n_1, y) + \left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho_2}\eta_2 + D'_2\frac{\partial\eta_2}{\partial t}\right)\\ &+\left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho_1}\zeta_1 + D'_1\frac{\partial\zeta_1}{\partial t}\right)\cos(n_1, z) + \left(\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho_2}\zeta_2 + D'_2\frac{\partial\zeta_2}{\partial t}\right) = 0.\end{aligned}\right.$$

Supposons, en particulier, que le champ électrique soit longitudinal; on a alors, en tout point du système,

$$(383)\qquad \xi = -\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \qquad \eta = -\frac{\partial\Phi}{\partial y}, \qquad \zeta = -\frac{\partial\Phi}{\partial z},$$

Φ étant une fonction continue dans tout le système, et l'égalité (382) devient

$$(384)\qquad \frac{4\pi\varepsilon'}{\rho_1}\frac{\partial\Phi}{\partial n_1} + D'_1\frac{\partial}{\partial n_1}\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{4\pi\varepsilon'}{\rho_2}\frac{\partial\Phi}{\partial n_2} + D'_2\frac{\partial}{\partial n_2}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0.$$

Supposons, en outre, que le champ soit non seulement longitudinal, mais pendulaire. On aura alors

$$(385)\qquad \Phi = \Phi'\cos 2\pi\frac{t}{T} + \Phi''\sin 2\pi\frac{t}{T},$$

Φ' et Φ'' étant des fonctions des seules variables x, y, z.

Le premier membre de l'égalité (384) devient alors une forme linéaire en $\cos 2\pi\frac{t}{T}$ et $\sin 2\pi\frac{t}{T}$; pour que l'égalité soit vérifiée quel que soit t, il faut et il suffit que le coefficient du cosinus et le coefficient du sinus soient égaux à zéro; on doit donc avoir, en tout point de la surface S_{12}, les deux conditions

$$(386)\quad \left\{\begin{aligned}&4\pi\varepsilon'\left(\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial\Phi'}{\partial n_1} + \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial\Phi'}{\partial n_2}\right) + \frac{2\pi}{T}\left(D'_1\frac{\partial\Phi''}{\partial n_1} + D'_2\frac{\partial\Phi''}{\partial n_2}\right) = 0,\\ &4\pi\varepsilon'\left(\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial\Phi''}{\partial n_1} + \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial\Phi''}{\partial n_2}\right) - \frac{2\pi}{T}\left(D'_1\frac{\partial\Phi'}{\partial n_1} + D'_2\frac{\partial\Phi'}{\partial n_2}\right) = 0.\end{aligned}\right.$$

§ 2. — *Oscillations électriques périodiques propres à un système qui contient des corps conducteurs.*

[43] Nous généraliserons par voie d'hypothèse ce qui a été établi au Chapitre Ier pour un système formé d'un corps conducteur unique, et NOUS ADMETTRONS *l'exactitude des propositions suivantes :*

Un système formé de plusieurs corps homogènes parmi lesquels se rencontrent *des corps conducteurs n'admet jamais d'oscillation électrique périodique qui lui soit propre.*

Pour qu'il admette APPROXIMATIVEMENT *une telle oscillation, il faut :*

1° *Qu'elle consiste en un champ purement longitudinal* (1);

2° *Que la constante k de Helmholtz soit un nombre extrêmement grand.*

Admettons, tout d'abord, que le champ soit purement longitudinal, c'est-à-dire qu'on ait

$$\xi = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad \eta = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \qquad \zeta = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}. \tag{383}$$

En tout point de chacun des corps homogènes qui appartiennent au système, la fonction Φ doit vérifier l'*équation de la dilatation* relative aux équations (238); cette équation est la suivante :

$$D' \frac{\partial}{\partial t} \Delta \Phi + \frac{4\pi\varepsilon'}{\rho} \Delta \Phi - \frac{2\pi a^2 k}{\rho} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - 2\pi a^2 k K' \frac{\partial^3 \Phi}{\partial t^3} = 0. \tag{387}$$

En tout point de la surface S_{12}, Φ vérifie la condition (384).

Enfin, comme il s'agit d'une oscillation propre, la composante normale du champ électrique doit être nulle en tout point de la surface Σ qui borne le système, en sorte qu'on doit avoir, en tout point de cette surface et à tout instant,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial N} = 0. \tag{388}$$

[**44**] Ces équations vont nous permettre de démontrer certaines propositions incluses dans l'hypothèse que nous venons de formuler.

Soit dans le cas où le système est formé d'un corps homogène unique, à la fois conducteur et diélectrique,

Soit dans le cas où les corps homogènes dont l'ensemble forme le système sont tous dénués de pouvoir diélectrique,

Nous allons démontrer qu'aucune oscillation électrique purement longitudinale ne saurait être propre à ce système.

---

(1) Depuis la rédaction du présent Mémoire, nous avons démontré (a) que le champ ne pouvait, en général, être purement longitudinal si le système était formé de plusieurs conducteurs dénués de pouvoir diélectrique, et M. Louis Roy a étendu (b) cette démonstration au cas où ces conducteurs ont un pouvoir diélectrique. Ce qui va suivre ne peut donc plus être regardé que comme un exercice de mathématiques sans portée physique directe; nous l'avons gardé, cependant, parce que les méthodes ici employées se peuvent généraliser et devenir applicables au problème véritable des oscillations électriques.

(a) P. Duhem, *Sur l'Électrodynamique des milieux conducteurs* (Comptes rendus, t. CLXII, p. 341).

(b) Louis Roy, *Sur l'Électrodynamique des milieux absorbants* (Comptes rendus, t. CLXII, p. 469).

Supposons d'abord *que le système soit formé d'un seul conducteur homogène qui peut être, en outre, doué de pouvoir diélectrique.*

Multiplions l'équation (387) par $\frac{1}{k}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial t} + K'\frac{\partial^2\Phi}{\partial t}\right)$. Si nous nous souvenons de l'expression (381) de D', nous voyons que le résultat obtenu peut s'écrire

$$\pi a^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial t} + K'\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\right) - \frac{4\pi\varepsilon'}{k}\Delta\left(\frac{\Phi}{\rho} + K'\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial t} + K'\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\right)$$
$$- \frac{1}{k\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\Delta\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{K'}{k}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\Delta\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0.$$

Multiplions cette égalité par $d\varpi$, intégrons-la pour le volume entier du système, puis transformons-la par la formule de Green en tenant compte de la condition (388); nous parviendrons aisément à l'égalité suivante :

$$(389) \qquad \frac{dJ}{dt} = -\frac{1}{k\rho}\int\left[\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial t}\right)^2\right]d\varpi,$$

J désignant la quantité que voici :

$$(390)\quad \left\{\begin{aligned} J = {} & \pi a^2\int\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial t} + K'\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\right)^2 d\varpi \\ & + \frac{2\pi\varepsilon'}{k}\int\left[\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + K'\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + K'\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial t}\right)^2\right. \\ & \qquad\qquad \left. + \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial z} + K'\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial t}\right)^2\right]d\varpi \\ & + \frac{K'}{2k}\int\left[\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial t}\right)^2\right]d\varpi. \end{aligned}\right.$$

Pour que le système pût admettre une oscillation longitudinale périodique propre, il faudrait que Φ pût être une fonction périodique de t. La quantité J serait alors également une fonction périodique de t.

Mais, en vertu de l'égalité (389), dont le second membre ne peut jamais être positif, J ne saurait être, à aucun moment, fonction croissante de t; d'autre part, si une fonction périodique est, parfois, fonction décroissante de t, il faut que, parfois aussi, elle soit fonction croissante; si donc Φ était une fonction périodique de t, J qui ne saurait être ni fonction croissante ni fonction décroissante de la seule variable t dont elle dépende, se devrait réduire à une constante.

Dès lors $\frac{dJ}{dt}$ devrait être nul, en sorte que l'égalité (389) deviendrait

$$(391) \qquad \frac{1}{k\rho}\int\left[\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial t}\right)^2\right]d\varpi = 0.$$

Pour que cette égalité (391) fût vérifiée, il faudrait qu'on eût, en tout point du système, les trois égalités

$$(392) \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \, \partial t} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \, \partial t} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \, \partial t} = 0,$$

égalités en vertu desquelles Φ devrait être de la forme

$$(393) \qquad \Phi = \psi(x, y, z) + \chi(t).$$

Dans les équations (383), reportons cette expression (393) de Φ; elles nous donneront

$$\xi = -\frac{\partial \psi(x, y, z)}{\partial x}, \qquad \eta = -\frac{\partial \psi(x, y, z)}{\partial y}, \qquad \zeta = -\frac{\partial \psi(x, y, z)}{\partial z}.$$

La seule oscillation longitudinale périodique qui puisse être propre au système est constituée par un champ indépendant du temps; un tel champ doit vérifier les conditions d'équilibre du système; il est clair qu'il faut, pour cela, que ce champ soit nul.

[**45**] Supposons, maintenant, que le système puisse comprendre plusieurs corps homogènes, deux par exemple, mais que chacun de ces corps soit privé de pouvoir diélectrique, en sorte qu'on ait pour chacun d'eux

$$(394) \qquad K' = 0.$$

En vertu de l'égalité (381), on aura aussi pour chacun d'eux,

$$(395) \qquad D' = 1.$$

En un point de l'un des corps du système, du corps 1, par exemple, l'égalité (387) devient, en vertu des égalités (394) et (395),

$$(396) \qquad \frac{\partial}{\partial t} \Delta\Phi + \frac{4\pi\varepsilon'}{\rho_1} \Delta\Phi - \frac{2\pi a^2 k}{\rho_1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0.$$

En vertu de l'égalité (395), la condition (384) devient

$$(397) \qquad \frac{4\pi\varepsilon'}{\rho_1} \frac{\partial \Phi}{\partial n_1} + \frac{\partial}{\partial n_1} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{4\pi\varepsilon'}{\rho_2} \frac{\partial \Phi}{\partial n_2} + \frac{\partial}{\partial n_2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0.$$

Multiplions l'égalité (396) par $\frac{1}{k} \frac{\partial \Phi}{\partial t} d\varpi_1$, intégrons pour le volume entier du corps 1, opérons de même pour les autres corps du système, et ajoutons membre à membre tous les résultats obtenus; nous obtenons l'égalité

$$(398)\quad \left\{ \begin{aligned} &\pi a^2 \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\rho_1}\int_1 \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)^2 d\varpi_1 + \frac{1}{\rho_2}\int_2 \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)^2 d\varpi_2\right] \\ &- \frac{1}{k}\left[\int_1 \frac{\partial\Phi}{\partial t}\Delta\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{4\pi\varepsilon'}{\rho_1}\Phi\right) d\varpi_1 + \int_2 \frac{\partial\Phi}{\partial t}\Delta\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{4\pi\varepsilon'}{\rho_2}\Phi\right) d\varpi_2\right] = 0. \end{aligned} \right.$$

Au premier membre de cette égalité (398), transformons le second terme par la formule de Green, en tenant compte des égalités (388) et (397); nous parvenons sans peine au résultat suivant :

$$(399)\qquad \frac{dJ}{dt} = -\frac{1}{2k}\int\left[\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial t}\right)^2\right] d\varpi.$$

Au second membre de cette égalité (399), l'intégration s'étend au volume entier du système; quant à la quantité J qui figure au premier membre, son expression est la suivante :

$$(400)\quad \left\{ \begin{aligned} J = {} & \frac{\pi}{\rho_1}\int_1 \left\{a^2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)^2 + \frac{2\varepsilon'}{k}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right]\right\} d\varpi_1 \\ & + \frac{\pi}{\rho_2}\int_2 \left\{a^2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)^2 + \frac{2\varepsilon'}{k}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right]\right\} d\varpi_2. \end{aligned} \right.$$

La démonstration s'achève alors comme celle du numéro précédent. Pour que Φ pût être fonction périodique de T, il faudrait qu'on eût l'égalité

$$(401)\qquad \frac{1}{k}\int\left[\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial t}\right)^2\right] d\varpi = 0$$

qui redonnerait les égalités (392) et les conséquences qui s'en déduisent.

[46] Ni l'égalité (391), ni l'égalité (401) ne saurait être rigoureusement vérifiée si les égalités (392) ne l'étaient pas. Mais sans que les égalités (392) fussent vérifiées, l'égalité (391) et l'égalité (401) pourraient être vérifiées d'une manière approchée; il suffirait pour cela que la constante k de Helmholtz eût une valeur extrêmement grande. L'existence d'oscillations longitudinales quasi-périodiques propres à un système n'apparaît plus comme impossible si l'on fait, sur la valeur de k, cette supposition que nous allons suivre désormais.

La constante k de Helmholtz est donc, par hypothèse, un nombre extrêmement grand. Si le rapport $\frac{\varepsilon'}{a^2}$ n'était pas, lui aussi, un nombre extrêmement grand, l'équation (387) se réduirait sensiblement à l'équation

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\Phi}{\rho} + K'\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) = 0. \tag{402}$$

L'intégrale générale de cette équation est

$$\Phi = -\omega t + \omega' e^{-\frac{1}{\rho K'}t} + \omega'', \tag{403}$$

ω, ω', ω'' étant trois quantités indépendantes de t.

Une telle quantité ne peut être fonction périodique de t si l'on n'a pas

$$\omega = 0, \qquad \omega' = 0, \qquad \Phi = \omega''.$$

En d'autres termes, pour qu'elle soit fonction périodique de t, il faut qu'elle soit indépendante de t.

Ainsi, *pour qu'un système contenant des corps conducteurs homogènes puisse admettre* APPROXIMATIVEMENT *des oscillations électriques propres, il ne suffit pas que la constante k de Helmholtz ait une très grande valeur; il faut encore que le rapport $\frac{\varepsilon'}{a^2}$ soit très grand, ce qui est l'hypothèse de Faraday et de Mossotti.*

L'égalité (381) nous montre alors que D' pourra être sensiblement remplacé par $4\pi\varepsilon' K'$, en sorte que l'équation (387), qui est exacte, se pourra remplacer par l'équation approchée

$$\frac{2\varepsilon'}{a^2 k}\Delta\left(\frac{\Phi}{\rho} + K'\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\Phi}{\rho} + K'\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) = 0, \tag{404}$$

ou bien, en se souvenant de l'égalité

$$\mathfrak{L}^2 = \frac{2\varepsilon'}{a^2 k}, \tag{345}$$

par l'équation approchée

$$\mathfrak{L}^2\Delta\left(\frac{\Phi}{\rho} + K'\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\Phi}{\rho} + K'\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) = 0. \tag{405}$$

En même temps, en tout point de la surface S_{12}, la condition (384), qui est exacte, pourra être remplacée par l'équation approchée

$$\frac{\partial}{\partial n_1}\left(\frac{\Phi}{\rho_1} + K'_1\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial n_2}\left(\frac{\Phi}{\rho_2} + K'_2\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) = 0. \tag{406}$$

Quant à la condition (388), elle devra être conservée sans modification.

Toute oscillation électrique quasi-périodique propre au système doit donc vérifier les égalités (383), (405), (406) et (388).

§ 3. — *Vibrations électriques pendulaires propres à un système qui contient des corps conducteurs.*

[**47**] Reprenons une analyse semblable en supposant d'emblée que le champ longitudinal soit un champ pendulaire simple de période T; la fonction Φ est alors de la forme (385). Si nous substituons cette expression de Φ dans l'équation (387), le premier membre de cette équation devient une forme linéaire en $\cos 2\pi \frac{t}{T}$ et $\sin 2\pi \frac{t}{T}$. Pour que cette forme soit égale à zéro quel que soit t, il faut que les deux coefficients du sinus et du cosinus soient séparément nuls, ce qui nous donne les deux conditions

$$(407)\qquad \begin{cases} \dfrac{2\varepsilon'}{a^2 k\rho}\Delta\Phi' + \dfrac{2\pi}{T}\dfrac{D'}{2\pi a^2 k}\Delta\Phi'' + \left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 \dfrac{\Phi'}{\rho} + \left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^3 K'\Phi'' = 0, \\[2ex] \dfrac{2\varepsilon'}{a^2 k\rho}\Delta\Phi'' - \dfrac{2\pi}{T}\dfrac{D'}{2\pi a^2 k}\Delta\Phi' + \left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 \dfrac{\Phi''}{\rho} - \left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^3 K'\Phi' = 0. \end{cases}$$

En tout point de la surface S_{12}, les égalités (386) doivent être vérifiées.

Enfin, en tout point de la surface Σ, l'égalité (388) exige qu'on ait les deux conditions

$$(408)\qquad \frac{\partial\Phi'}{\partial N} = 0, \qquad \frac{\partial\Phi''}{\partial N} = 0.$$

De l'hypothèse que nous avons énoncée au n° [**42**], il résulte que ces conditions (394), (386) et (395) ne doivent admettre, en toute rigueur, d'autre solution que

$$(409)\qquad \Phi' = \text{const.}, \qquad \Phi'' = \text{const.}$$

Nous allons justifier, du moins dans deux cas particuliers, qu'il en est bien ainsi.

[**48**] *Supposons, en premier lieu,* comme au Chapitre Ier, *que le système soit formé d'un corps unique, à la fois conducteur et diélectrique.*

Multiplions la première équation (407) par $\left(\frac{\Phi''}{\rho} - \frac{2\pi}{T}K'\Phi'\right)$, la seconde par $-\left(\frac{\Phi'}{\rho} + \frac{2\pi}{T}K'\Phi''\right)$, et ajoutons membre à membre les résultats obtenus en observant que, selon l'égalité (381), $D' = 1 + 4\pi\varepsilon' K'$. Nous obtenons l'égalité

$$\begin{aligned} \frac{1}{k}\Bigg\{ & \frac{1}{a^2\rho T}(\Phi'\Delta\Phi' + \Phi''\Delta\Phi'') - \frac{2\pi K'}{a^2 T^2}(\Phi'\Delta\Phi'' - \Phi''\Delta\Phi') \\ & + \frac{2\varepsilon'}{a^2}\left[\left(\frac{\Phi''}{\rho} - \frac{2\pi}{T}K'\Phi'\right)\Delta\left(\frac{\Phi'}{\rho} + \frac{2\pi}{T}K'\Phi''\right) - \left(\frac{\Phi'}{\rho} + \frac{2\pi}{T}K'\Phi''\right)\Delta\left(\frac{\Phi''}{\rho} - \frac{2\pi}{T}K'\Phi'\right)\right]\Bigg\} = 0. \end{aligned}$$

Multiplions cette égalité par $d\varpi$ et intégrons pour le volume entier du système, après application de la formule de Green, et en tenant compte des conditions (408), nous trouverons l'égalité

$$(410) \quad \frac{1}{a^2 k \rho T} \int \left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial z}\right)^2 \right] d\varpi = 0.$$

Cette égalité exige qu'on ait, en tout point du corps considéré,

$$(411) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \Phi'}{\partial x} = 0, & \dfrac{\partial \Phi'}{\partial y} = 0, & \dfrac{\partial \Phi'}{\partial z} = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial \Phi''}{\partial x} = 0, & \dfrac{\partial \Phi''}{\partial y} = 0, & \dfrac{\partial \Phi''}{\partial z} = 0, \end{cases}$$

ce qui équivaut aux égalités (409).

[**49**] *Supposons*, en second lieu, *que le système contienne un nombre quelconque de corps homogènes*, *mais que chacun de ces corps soit privé de pouvoir diélectrique.*

En tout point d'un tel système, on a

$$(394) \qquad K' = 0.$$

$$(395) \qquad D' = 1.$$

Moyennant ces égalités, les égalités (407) deviennent

$$(412) \quad \begin{cases} \dfrac{2\varepsilon'}{a^2 k \rho} \Delta \Phi' + \dfrac{2\pi}{T} \dfrac{1}{2\pi a^2 k} \Delta \Phi'' + \left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 \dfrac{\Phi'}{\rho} = 0, \\[2mm] \dfrac{2\varepsilon'}{a^2 k \rho} \Delta \Phi'' - \dfrac{2\pi}{T} \dfrac{1}{2\pi a^2 k} \Delta \Phi' + \left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 \dfrac{\Phi''}{\rho} = 0. \end{cases}$$

En même temps, les conditions (386) deviennent

$$(413) \quad \begin{cases} 2\varepsilon' \left(\dfrac{1}{\rho_1} \dfrac{\partial \Phi'}{\partial n_1} + \dfrac{1}{\rho_2} \dfrac{\partial \Phi'}{\partial n_2} \right) + \dfrac{1}{T} \left(\dfrac{\partial \Phi''}{\partial n_1} + \dfrac{\partial \Phi''}{\partial n_2} \right) = 0, \\[2mm] 2\varepsilon' \left(\dfrac{1}{\rho_1} \dfrac{\partial \Phi''}{\partial n_1} + \dfrac{1}{\rho_2} \dfrac{\partial \Phi''}{\partial n_2} \right) - \dfrac{1}{T} \left(\dfrac{\partial \Phi'}{\partial n_1} + \dfrac{\partial \Phi'}{\partial n_2} \right) = 0. \end{cases}$$

Quant aux conditions (408), elles demeurent inchangées.

Multiplions la première égalité (412) par Φ'', la seconde par $-\Phi'$ et ajoutons membre à membre les résultats obtenus. Nous trouvons l'égalité

$$\frac{2\varepsilon'}{a^2 k \rho} (\Phi'' \Delta \Phi' - \Phi' \Delta \Phi'') + \frac{2\pi}{T} \frac{1}{2\pi a^2 k} (\Phi' \Delta \Phi' + \Phi'' \Delta \Phi'') = 0.$$

Multiplions cette égalité par $d\varpi$ et intégrons pour le volume entier du système ; nous trouvons une égalité qui peut s'écrire :

$$(414)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{a^2k}\Bigg\{&\int_1\left[\left(\frac{2\varepsilon'}{\rho_1}\Delta\Phi'+\frac{1}{T}\Delta\Phi''\right)\Phi''-\left(\frac{2\varepsilon'}{\rho_1}\Delta\Phi''-\frac{1}{T}\Delta\Phi'\right)\Phi'\right]d\varpi_1 \\ &+\int_2\left[\left(\frac{2\varepsilon'}{\rho_2}\Delta\Phi'+\frac{1}{T}\Delta\Phi''\right)\Phi''-\left(\frac{2\varepsilon'}{\rho_2}\Delta\Phi''-\frac{1}{T}\Delta\Phi'\right)\Phi'\right]d\varpi_2\Bigg\}=0. \end{aligned}\right.$$

Par la formule de Green, transformons cette égalité (414), en tenant compte des conditions (408) et (413) ; nous trouverons l'égalité

$$(415)\quad \frac{1}{a^2kT}\int\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial z}\right)^2\right]d\varpi=0,$$

où l'intégration s'étend au volume entier du système.

De cette égalité (415), on déduit encore, comme nous l'avions annoncé, les égalités (411) et (409).

Le premier des deux cas que nous venons de traiter ne nous apporte rien qui ne se puisse déduire des démonstrations exposées au Chapitre Ier ; au contraire, le second cas nous apporte un résultat nouveau, qui justifie en partie l'hypothèse formulée au n° [**43**].

[**50**] Les égalités (410) et (415) ne peuvent être vérifiées rigoureusement que si les égalités (411) sont vérifiées en tout point du système ; mais, sans que les égalités (411) soient vérifiées, les égalités (410) et (415) seront vérifiées approximativement si la constante k de Helmholtz est un nombre extrêmement grand ; c'est donc seulement dans ce cas que le système pourra présenter, dans les deux circonstances particulières que nous venons d'examiner, des vibrations longitudinales pendulaires qui lui soient sensiblement propres ; l'hypothèse formulée au n° [**43**] nous affirme, d'ailleurs, qu'on en peut dire autant en général.

Introduisons donc, dans les équations (407), l'hypothèse que k est un très grand nombre. Si l'on ne supposait pas, en même temps, que le rapport $\frac{\varepsilon'}{a^2}$ est un très grand nombre, les équations (407) deviendraient sensiblement

$$\frac{\Phi'}{\rho}+\frac{2\pi K'}{T}\Phi''=0,$$
$$\frac{\Phi''}{\rho}-\frac{2\pi K'}{T}\Phi'=0,$$

en sorte qu'on aurait

$$\Phi'=0,\qquad \Phi''=0.$$

Le système ne comporterait donc aucune vibration longitudinale pendulaire qui lui soit sensiblement propre; pour qu'il soit susceptible d'une telle vibration, il faut non seulement que k soit un très grand nombre, mais encore que le rapport $\frac{\varepsilon'}{a^2}$ ait une très grande valeur.

Moyennant ces deux suppositions et l'égalité (345), les équations (407) deviennent, en tout point du corps 1,

$$\frac{1}{\rho_1}\left(\mathfrak{L}^2\Delta\Phi' + \frac{4\pi^2}{T^2}\Phi'\right) + K'_1\left(\mathfrak{L}^2\Delta\Phi'' + \frac{4\pi^2}{T^2}\Phi''\right) = 0,$$

$$K'_1\left(\mathfrak{L}^2\Delta\Phi' + \frac{4\pi^2}{T^2}\Phi'\right) - \frac{1}{\rho_1}\left(\mathfrak{L}^2\Delta\Phi'' + \frac{4\pi^2}{T^2}\Phi''\right) = 0.$$

Ces conditions équivalent aux suivantes :

$$(416) \qquad \mathfrak{L}^2\Delta\Phi' + \frac{4\pi^2}{T^2}\Phi' = 0, \qquad \mathfrak{L}^2\Delta\Phi'' + \frac{4\pi^2}{T^2}\Phi'' = 0.$$

On a de même, en tout point du corps 2,

$$(416\ bis) \qquad \mathfrak{L}^2\Delta\Phi' + \frac{4\pi^2}{T^2}\Phi' = 0, \qquad \mathfrak{L}^2\Delta\Phi'' + \frac{4\pi^2}{T^2}\Phi'' = 0.$$

Les conditions (386), vérifiées en tout point de la surface S_{12}, se réduisent approximativement aux suivantes :

$$(417) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial\Phi'}{\partial n_1} + \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial\Phi'}{\partial n_2} + \frac{2\pi}{T}\left(K'_1\frac{\partial\Phi''}{\partial n_1} + K'_2\frac{\partial\Phi''}{\partial n_2}\right) = 0,\\ &\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial\Phi''}{\partial n_1} + \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial\Phi''}{\partial n_2} - \frac{2\pi}{T}\left(K'_1\frac{\partial\Phi'}{\partial n_1} + K'_2\frac{\partial\Phi'}{\partial n_2}\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

Quant aux équations (408), elles demeurent inchangées.

Si, pour une certaine valeur de T, *on peut trouver des fonctions* Φ', Φ'', *différentes de simples constantes, qui vérifient les conditions* (416), (416 *bis*), (417) *et* (408), *nous dirons que* T *est une quasi-période propre au système.*

Dans le cas où le système se réduit à un seul corps homogène, le problème des quasi-vibrations simples qui lui sont propres se ramène au problème, aujourd'hui fort bien étudié, dont nous avons dit un mot au n° [**12**].

Lorsque le système se compose de plusieurs corps conducteurs, le problème auquel nous avons affaire est, à l'égard du problème simple dont nous venons de parler, une généralisation inabordée jusqu'ici, et dont l'analyse paraît fort difficile.

En ce cas, touchant l'existence des périodes propres, il ne nous paraît pas qu'on puisse exposer des considérations semblables à celles qui ont été indiquées aux nos [**18**] et [**24**].

Nous nous contenterons donc d'ADMETTRE, sans aucun essai de démonstration, *l'existence d'une infinité de périodes quasi-propres au système étudié.*

[**51**] Considérons une vibration pendulaire quasi-propre au système.

En vertu des égalités (383) et (385), les trois composantes de cette vibration sont représentées par les égalités

$$(418)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi &= -\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\cos 2\pi\frac{t}{T} + \frac{\partial \Phi''}{\partial x}\sin 2\pi\frac{t}{T}\right),\\ \eta &= -\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\cos 2\pi\frac{t}{T} + \frac{\partial \Phi''}{\partial y}\sin 2\pi\frac{t}{T}\right),\\ \zeta &= -\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial z}\cos 2\pi\frac{t}{T} + \frac{\partial \Phi''}{\partial z}\sin 2\pi\frac{t}{T}\right). \end{aligned}\right.$$

Pourrait-il arriver qu'une semblable vibration fût rectiligne en tout point du système?

Pour qu'il en fût ainsi, il faudrait qu'on eût, en tout point du système,

$$(419)\qquad \frac{\partial \Phi''}{\partial x} = f\frac{\partial \Phi'}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \Phi''}{\partial y} = f\frac{\partial \Phi'}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \Phi''}{\partial z} = f\frac{\partial \Phi'}{\partial z},$$

f étant une certaine fonction de x, y, z.

Mais pour que de telles égalités eussent lieu, il faudrait, en vertu d'un théorème connu, que

$$(420)\qquad f = F(\Phi'),$$

la fonction F étant continue, sauf peut-être pour certaines valeurs exceptionnelles de Φ'.

Supposons que le système contienne plus d'un corps homogène; nous pourrons alors considérer la surface de séparation S_{12} de deux tels corps.

En un point M de cette surface, nous aurons, en vertu des égalités (419) et (420),

$$(421)\qquad \frac{\partial \Phi''}{\partial n_1} = F(\Phi')\frac{\partial \Phi'}{\partial n_1}, \qquad \frac{\partial \Phi''}{\partial n_2} = F(\Phi')\frac{\partial \Phi'}{\partial n_2},$$

et la valeur de $F(\Phi')$ sera la même dans ces deux égalités, à moins que la valeur de Φ' au point M ne soit une de celles pour lesquelles la fonction $F(\Phi')$ est discontinue, ce qui ne saurait avoir lieu, sur la surface S_{12} qu'en des points exceptionnels.

En tout point de la surface S_{12} autre que ces points exceptionnels, les égalités (417) et (421) donnent les deux égalités

$$(422)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left[\frac{1}{\rho_1}+\frac{2\pi}{T}K'_1F(\Phi')\right]\frac{\partial\Phi'}{\partial n_1}+\left[\frac{1}{\rho_2}+\frac{2\pi}{T}K'_2F(\Phi')\right]\frac{\partial\Phi'}{\partial n_2}=0,\\ &\left[\frac{1}{\rho_1}F(\Phi')-\frac{2\pi}{T}K'_1\right]\frac{\partial\Phi'}{\partial n_1}+\left[\frac{1}{\rho_2}F(\Phi')-\frac{2\pi}{T}K'_2\right]\frac{\partial\Phi'}{\partial n_2}=0.\end{aligned}\right.$$

$\frac{\partial\Phi'}{\partial n_1}$, $\frac{\partial\Phi'}{\partial n_2}$ ne doivent pas être nuls en tout point de la surface S_{12}; il faut donc, en général, que le déterminant des équations (422), linéaires et homogènes en $\frac{\partial\Phi'}{\partial n_1}$, $\frac{\partial\Phi'}{\partial n_2}$, soit égal à zéro :

$$(423)\qquad \frac{2\pi}{T}\left(\frac{K'_1}{\rho_1}-\frac{K'_2}{\rho_2}\right)\left\{1+[F(\Phi')]^2\right\}=0.$$

Cette égalité (423) ne saurait être vérifiée, à moins qu'on ait

$$(424)\qquad \frac{K'_1}{\rho_1}=\frac{K'_2}{\rho_2}.$$

Si donc on excepte les deux cas suivants :

1° *Le système se compose d'un corps homogène unique,*

2° *Le rapport* $\frac{K'}{\rho}$ *a même valeur pour tous les corps du système,*

Une vibration pendulaire quasi-propre au système ne saurait être rectiligne en tout point.

[**52**] Posons, en chaque point,

$$(425)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\Phi'}{\partial x}=-A\cos 2\pi\lambda, &&\frac{\partial\Phi'}{\partial y}=-B\cos 2\pi\mu, &&\frac{\partial\Phi'}{\partial z}=-C\cos 2\pi\nu,\\ &\frac{\partial\Phi''}{\partial x}=-A\sin 2\pi\lambda, &&\frac{\partial\Phi''}{\partial y}=-B\sin 2\pi\mu, &&\frac{\partial\Phi''}{\partial z}=-C\sin 2\pi\nu,\end{aligned}\right.$$

A, B, C, λ, μ, ν étant six fonctions de x, y, z.

Les égalités (418) pourront s'écrire

$$(426)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi&=A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\lambda\right),\\ \eta&=B\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\mu\right),\\ \zeta&=C\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\nu\right).\end{aligned}\right.$$

Pourrait-il se faire que chacune des trois phases λ, μ, ν fût indépendante de x, y z?

Pour qu'il en fût ainsi, il serait nécessaire et suffisant, comme les égalités (425) le montrent sans peine, qu'on eût

$$\frac{\partial \Phi''}{\partial x} = l \frac{\partial \Phi'}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Phi''}{\partial y} = m \frac{\partial \Phi'}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Phi''}{\partial z} = n \frac{\partial \Phi'}{\partial z}, \tag{427}$$

l, m, n étant trois constantes.

Mais la seconde égalité (427), différentiée par rapport à z, donne

$$\frac{\partial^2 \Phi''}{\partial z\, \partial y} = m \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial z\, \partial y},$$

tandis que la troisième égalité (427), différentiée par rapport à y, donne

$$\frac{\partial^2 \Phi''}{\partial y\, \partial z} = n \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial y\, \partial z}.$$

Il faudrait donc que m fût égal à n. Une démonstration semblable prouverait que ces deux quantités sont égales à l.

Si l'on désignait alors par f la valeur commune des trois quantités l, m, n, on retrouverait les égalités (419), où f serait maintenant une simple constante.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Sauf dans les deux cas exceptionnels qui ont été signalés au théorème précédent, il n'est pas possible que chacune des trois composantes d'une vibration pendulaire quasi-propre au système ait même phase en tout point de ce système.

§ 4. — *Vibrations électriques pendulaires qu'un excitateur engendre sur un système contenant des corps conducteurs.*

[**53**] Après avoir étudié les vibrations longitudinales pendulaires qui sont quasi-propres au système, nous allons étudier celles qu'un excitateur y pourrait engendrer. D'aussi près que possible, nous suivrons les notations adoptées au n° [**20**].

Nous supposerons qu'en chaque point du système, le champ (ξ_0, η_0, ζ_0) de l'excitateur soit un champ longitudinal pendulaire de période T; nous aurons donc

$$\xi_0 = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial x}, \quad \eta_0 = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial y}, \quad \zeta_0 = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial z}, \tag{428}$$

avec

$$\Phi_0 = \Phi'_0 \cos 2\pi \frac{t}{T} + \Phi''_0 \sin 2\pi \frac{t}{T}. \tag{429}$$

En chaque point de la surface Σ qui borne le système, nous supposerons que la composante normale du champ électrique total a, à chaque instant, une valeur donnée, et que c'est une grandeur pendulaire de période de T; comme on en peut déjà dire autant de la composante, normale à la surface Σ, du champ électrique de l'excitateur, il est certain qu'on en peut aussi dire autant du champ électrique (ξ, η, ζ) excité sur le système; nous devrons donc avoir, en tout point de la surface Σ et à tout instant,

$$(430) \qquad \xi \cos(N, x) + \eta \cos(N, y) + \zeta \cos(N, z) = \rho' \cos 2\pi \frac{t}{T} + \rho'' \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

ρ' et ρ'' ayant des valeurs données en chaque point de la surface Σ.

Enfin, nous supposerons qu'en chaque point de la surface Σ, les trois composantes du champ magnétique total soient maintenues constamment égales à zéro. Les trois composantes du champ magnétique de l'excitateur sont déjà égales à zéro en tout point du système et à tout instant, parce que le champ électrique de l'excitateur est purement longitudinal; nous pouvons donc remplacer la supposition précédente par celle-ci : Le champ magnétique excité sur le système est maintenu constamment égal à zéro en tout point de la surface Σ.

Dans les conditions qui viennent d'être définies, NOUS ADMETTRONS *que le champ électrique excité sur le système est un champ purement longitudinal, pendulaire et de période* T. Nous aurons donc

$$(431) \qquad \xi = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad \eta = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \qquad \zeta = -\frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

avec

$$(432) \qquad \Phi = \Phi' \cos 2\pi \frac{t}{T} + \Phi'' \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Φ', Φ'' sont deux fonctions de x, y, z. Nous allons former les conditions auxquelles elles sont soumises.

Nous supposerons d'emblée que la constante k de Helmholtz et que le rapport $\frac{\varepsilon'}{a^2}$ *aient de très grandes valeurs.*

Dès lors, les égalités (416) devront être vérifiées en tout point du corps 1 et les égalités (416 *bis*) en tout point du corps 2, après qu'on y aura remplacé Φ', Φ'' par les deux sommes $(\Phi' + \Phi'_0)$, $(\Phi'' + \Phi''_0)$. Si donc nous posons, en tout point du système,

$$(432) \qquad \mathfrak{L}^2 \Delta \Phi'_0 + \frac{4\pi^2}{T^2} \Phi'_0 = -S', \qquad \mathfrak{L}_1^2 \Delta \Phi''_0 + \frac{4\pi^2}{T^2} \Phi''_0 = -S'',$$

S', S'' auront des valeurs connues en chaque point du système, et Φ', Φ'' devront, en tout point du système, vérifier les équations

$$(433) \qquad \mathfrak{L}^2 \Delta \Phi' + \frac{4\pi^2}{T^2} \Phi' = S', \qquad \mathfrak{L}^2 \Delta \Phi'' + \frac{4\pi^2}{T^2} \Phi'' = S''.$$

En tout point de la surface S_{12} qui sépare le corps 1 du corps 2, les deux conditions (417) devront être vérifiées après qu'on y aura remplacé Φ', Φ'' par les sommes $(\Phi'_0 + \Phi')$, $(\Phi''_0 + \Phi'')$. Posons donc

$$(434)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial \Phi'_0}{\partial n_1} + \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial \Phi'_0}{\partial n_2} + \frac{2\pi}{T}\left(K'_1\frac{\partial \Phi''_0}{\partial n_1} + K'_2\frac{\partial \Phi''_0}{\partial n_2}\right) = -u,\\ &\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial \Phi''_0}{\partial n_1} + \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial \Phi''_0}{\partial n_2} - \frac{2\pi}{T}\left(K'_1\frac{\partial \Phi'_0}{\partial n_1} + K'_2\frac{\partial \Phi'_0}{\partial n_2}\right) = -v.\end{aligned}\right.$$

Les deux quantités u, v, auront, en chaque point de la surface S_{12}, des valeurs données, et nous devrons avoir, en chacun de ces points,

$$(435)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial \Phi'}{\partial n_1} + \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial \Phi'}{\partial n_2} + \frac{2\pi}{T}\left(K'_1\frac{\partial \Phi''}{\partial n_1} + K'_2\frac{\partial \Phi''}{\partial n_2}\right) = u,\\ &\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial \Phi''}{\partial n_1} + \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial \Phi''}{\partial n_2} - \frac{2\pi}{T}\left(K'_1\frac{\partial \Phi'}{\partial n_1} + K'_2\frac{\partial \Phi'}{\partial n_2}\right) = v.\end{aligned}\right.$$

Enfin, en tout point de la surface Σ qui borne le système, les égalités (430), (431), (432) donneront les conditions

$$(436)\qquad \frac{\partial \Phi'}{\partial N} = -\rho', \qquad \frac{\partial \Phi''}{\partial N} = -\rho''.$$

Les conditions (433), (433 *bis*), (435) et (436) sont les seules que les deux fonctions Φ', Φ'' soient assujetties à vérifier.

[**54**] Peut-il y avoir ambiguïté dans la détermination des fonctions qui vérifient ces conditions? Imaginons qu'elles puissent être vérifiées d'une part par les deux fonctions Ψ', Ψ'', et, d'autre part, par les deux fonctions X', X''; posons :

$$\Phi' = \Psi' - X', \qquad \Phi'' = \Psi'' - X''.$$

Il est visible que ces deux fonctions Φ', Φ'' vérifieront les conditions (416), (416 *bis*), (417) et (408), et donc qu'elles définiront une vibration pendulaire propre au système.

Il ne peut donc y avoir ambiguïté dans la détermination des deux fonctions Φ, Φ'' qui vérifient les conditions (433), (435) et (436), à moins que T ne soit une période propre au système.

Si T est une période propre au système, et si l'on possède une première détermination du champ excité sur le système, toute autre détermination s'obtient en composant avec la première une vibration longitudinale, pendulaire, de période T, propre au système.

§ 5. — *Développements en séries de fonctions fondamentales qui permettraient de résoudre le problème des vibrations électriques sur un système de corps conducteurs.*

[**55**] Dans le cas où T n'est pas une période propre au système, les deux fonctions Φ', Φ'' sont déterminées sans ambiguïté par les conditions (433), (433 *bis*), (435) et (436); pour obtenir ces fonctions, il semble possible d'employer, avec des modifications convenables, la méthode des fonctions fondamentales.

Supposons qu'en un certain point M du système, on connaisse les valeurs Ψ', Ψ'' respectivement prises par les deux fonctions Φ', Φ'' :

$$\Phi'(M) = \Psi', \qquad \Phi''(M) = \Psi''. \tag{437}$$

Il en sera sûrement ainsi dans le cas où le système s'étendra à l'infini, car, à l'infini, Φ' et Φ'' devront s'annuler.

I. — Déterminons deux fonctions W'_0, W''_0 par les conditions suivantes :

Au point M, on a

$$W'_0 = \Psi', \qquad W''_0 = \Psi''. \tag{438}$$

Continues dans tout le système, ces fonctions vérifient, en tout point, les équations

$$\Delta W'_0 = \frac{S'}{\mathfrak{A}^2}, \qquad \Delta W''_0 = \frac{S''}{\mathfrak{A}^2}. \tag{439}$$

En tout point de la surface S_{12} qui sépare l'un de l'autre deux corps du système, elles vérifient les conditions

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial n_1}\left(\frac{W'_0}{\rho_1} + \frac{2\pi}{T} K'_1 W''_0\right) + \frac{\partial}{\partial n_2}\left(\frac{W'_0}{\rho_2} + \frac{2\pi}{T} K'_2 W''_0\right) = \frac{u}{4\pi\varepsilon'}, \\ &\frac{\partial}{\partial n_1}\left(\frac{W''_0}{\rho} - \frac{2\pi}{T} K'_1 W'_0\right) + \frac{\partial}{\partial n_2}\left(\frac{W''_0}{\rho_2} - \frac{2\pi}{T} K'_2 W'_0\right) = \frac{v}{4\pi\varepsilon'}. \end{aligned}\right. \tag{440}$$

Enfin, en tout point de la surface Σ qui borne le système, ces deux fonctions vérifient les conditions

$$\frac{\partial W'_0}{\partial N} = -\rho', \qquad \frac{\partial W''_0}{\partial N} = -\rho''. \tag{441}$$

On voit aisément que chacune de ces deux fonctions est déterminée sans ambiguïté.

Imaginons, en effet, que le problème comporte deux solutions distinctes; retranchons chacune des deux fonctions qui composent la première solution de la fonction correspondante contenue dans la seconde solution; désignons maintenant par W'_0, W''_0 les différences ainsi obtenues; ces différences vérifient les conditions qu'on obtient en remplaçant les seconds membres par zéro dans les conditions (438), (439), (439 *bis*), (440) et (441); sans écrire ces conditions, numérotons-les (438'), (439'), (439' *bis*), (440') et (441').

Multiplions la première des deux équations (494') par $\frac{W'_0}{\rho} d\varpi$ et intégrons, pour le volume entier du système, le résultat obtenu; nous trouvons, par une transformation connue, l'égalité

$$(442) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int \frac{W'_0}{\rho} \frac{\partial W'_0}{\partial N} d\Sigma + \int W'_0 \left(\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial W'_0}{\partial n_1} + \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial W'_0}{\partial n_2} \right) dS_{12} \\ &\qquad + \int \frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{\partial W'_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W'_0}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W'_0}{\partial z} \right)^2 \right] d\varpi. \end{aligned} \right.$$

Multiplions de même la seconde des équations (439') par $K'W'_0 d\varpi$, et opérons comme dans le cas précédent. Nous trouvons l'égalité

$$(443) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int K'W'_0 \frac{\partial W''_0}{\partial N} d\Sigma + \int W'_0 \left(K'_1 \frac{\partial W''_0}{\partial n_1} + K'_2 \frac{\partial W''_0}{\partial n_2} \right) dS_{12} \\ &\qquad + \int K' \left(\frac{\partial W'_0}{\partial x} \frac{\partial W''_0}{\partial x} + \frac{\partial W'_0}{\partial y} \frac{\partial W''_0}{\partial y} + \frac{\partial W'_0}{\partial z} \frac{\partial W''_0}{\partial z} \right) d\varpi. \end{aligned} \right.$$

Ajoutons membre à membre les deux égalités (442) et (443) après avoir multiplié la seconde par $\frac{2\pi}{T}$; tenons compte des égalités (440') et (441'); nous trouvons l'égalité suivante :

$$(444) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int \frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{\partial W'_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W'_0}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W'_0}{\partial z} \right)^2 \right] d\varpi \\ &\qquad + \frac{2\pi}{T} \int K' \left(\frac{\partial W'_0}{\partial x} \frac{\partial W''_0}{\partial x} + \frac{\partial W'_0}{\partial y} \frac{\partial W''_0}{\partial y} + \frac{\partial W'_0}{\partial z} \frac{\partial W''_0}{\partial z} \right) d\varpi = 0. \end{aligned} \right.$$

Recommençons les mêmes opérations, mais en multipliant la première équation (439') par $-K'W''_0 d\varpi$ et la seconde par $\frac{W'_0}{\rho} d\varpi$, nous obtiendrons l'égalité

$$(445) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int \frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{\partial W''_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W''_0}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W''_0}{\partial z} \right)^2 \right] d\varpi \\ &\qquad - \frac{2\pi}{T} \int K' \left(\frac{\partial W'_0}{\partial x} \frac{\partial W''_0}{\partial x} + \frac{\partial W'_0}{\partial y} \frac{\partial W''_0}{\partial y} + \frac{\partial W'_0}{\partial z} \frac{\partial W''_0}{\partial z} \right) d\varpi = 0. \end{aligned} \right.$$

En ajoutant membre à membre ces deux égalités (444) et (445), nous trouvons l'égalité

$$(446)\qquad \int \frac{1}{\rho}\left[\left(\frac{\partial W'_0}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W'_0}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial W'_0}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial W''_0}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W''_0}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial W''_0}{\partial z}\right)^2\right]d\varpi=0.$$

Cette égalité (446) exige qu'on ait, en tout point du système,

$$(447)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial W'_0}{\partial x}=0, & \dfrac{\partial W'_0}{\partial y}=0, & \dfrac{\partial W'_0}{\partial z}=0, \\ \dfrac{\partial W''_0}{\partial x}=0, & \dfrac{\partial W''_0}{\partial y}=0, & \dfrac{\partial W''_0}{\partial z}=0, \end{array}\right.$$

Ces égalités (447) exigent que chacune des deux fonctions W'_0, W''_0 ait même valeur dans tout le système; d'après les égalités (438'), cette valeur ne peut être autre que zéro, ce qui établit la proposition énoncée.

Lorsque le système est formé d'un seul corps, l'existence des deux fonctions W'_0, W''_0 est assurée par des démonstrations connues. Dans le cas où le système contient plusieurs corps, rien d'analogue à ces démonstrations n'a encore été ébauché. *Nous admettrons* cette existence.

II. — Les fonctions W'_0, W''_0 étant supposées déterminées, on déterminera deux nouvelles fonctions W'_1, W''_1 par les conditions suivantes :

Continues dans tout le système, elles vérifient, en chaque point de ce système, les équations

$$(448)\qquad \Delta W'_1=-\frac{4\pi^2}{T^2}W'_0, \qquad \Delta W''_1=-\frac{4\pi^2}{T^2}W''_0.$$

En chaque point de la surface S_{12}, elles vérifient les conditions

$$(449)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial n_1}\left(\dfrac{W'_1}{\rho_1}+\dfrac{2\pi}{T}K'_1W''_1\right)+\dfrac{\partial}{\partial n_2}\left(\dfrac{W'_1}{\rho_2}+\dfrac{2\pi}{T}K'_2W''_1\right)=0, \\ \dfrac{\partial}{\partial n_1}\left(\dfrac{W''_1}{\rho_1}-\dfrac{2\pi}{T}K'_1W'_1\right)+\dfrac{\partial}{\partial n_2}\left(\dfrac{W''_1}{\rho_2}-\dfrac{2\pi}{T}K'_2W'_1\right)=0. \end{array}\right.$$

En tout point de la surface Σ, elles vérifieront les conditions

$$(450)\qquad \frac{\partial W'_1}{\partial N}=0, \qquad \frac{\partial W''_1}{\partial N}=0.$$

Enfin, au point M, on aura

$$(451)\qquad W'_1(M)=0, \qquad W''_1(M)=0.$$

Que chacune des deux fonctions W'_1, W''_1 soit déterminée sans aucune ambiguïté, on le démontrera comme on l'a démontré pour les fonctions W'_0, W''_0; que ces deux fonctions existent, on l'admettra comme on l'a supposé pour les fonctions W'_0, W''_0.

III. — Les fonctions W'_2, W''_2 se formeront au moyen des fonctions W'_1, W''_1, comme celles-ci ont été formées au moyen des fonctions W'_0, W''_0.

On continuera de la sorte indéfiniment, puis on considérera les deux séries

$$(452) \quad \begin{cases} \Phi' = W'_0 + \dfrac{1}{\mathfrak{L}^2} W'_1 + \dfrac{1}{\mathfrak{L}^4} W'_2 + \ldots\ldots \\ \Phi'' = W''_0 + \dfrac{1}{\mathfrak{L}^2} W''_1 + \dfrac{1}{\mathfrak{L}^4} W''_2 + \ldots\ldots \end{cases}$$

SUPPOSONS *que ces deux séries soient absolument et uniformément convergentes, et qu'il en soit de même des séries obtenues en différentiant une ou deux fois les termes de celles-là par rapport à x, y ou z. On voit aisément que les fonctions Φ', Φ'' définies par ces séries seront solutions des conditions* (433), (433 *bis*), (435) *et* (436).

[**56**] Par extension de ce qu'on sait être vrai dans le cas où le système se compose d'un corps unique, NOUS ADMETTRONS *qu'il existe pour $\mathfrak{L}$ une infinité de valeurs critiques*

$$(453) \qquad \mathfrak{L}_1, \quad \mathfrak{L}_2, \quad \mathfrak{L}_3, \quad \ldots\ldots$$

telles que l'un au moins des développements (452) *cesse d'être convergent; nous admettrons que, $\mathfrak{L}$ tendant vers une de ces valeurs critiques, le développement qui va cesser d'être convergent représente une quantité qui croît au delà de toute limite.*

La période T *serait alors, pour le système étudié, une quasi-période propre si la vitesse de propagation des champs longitudinaux avait l'une des valeurs critiques* (453).

Cette conclusion semble fort peu intéressante, car la véritable valeur $\mathfrak{L}$ de la vitesse de propagation des champs longitudinaux ne coïncidera, en général, avec aucune des valeurs critiques (453). Mais de cette conclusion, nous en pouvons déduire une autre qui ait un sens physique.

Étant donnés un système S formés de plusieurs corps conducteurs et une période T de vibration électrique propre à ce système, supposons qu'on ait déterminé les valeurs (141) que devrait prendre la vitesse de propagation des champs longitudinaux pour que T devienne une quasi-période propre à ce système. Soit $\mathfrak{L}_1$ une de ces valeurs critiques. D'après les égalités (416) et (416 *bis*), il existe deux fonctions Φ', Φ'' qui vérifient, en tout point du système, les équations

$$(454) \qquad \mathfrak{L}_1^2 \Delta\Phi' + \frac{4\pi^2}{T^2}\Phi' = 0, \qquad \mathfrak{L}_1^2 \Delta\Phi'' + \frac{4\pi^2}{T^2}\Phi'' = 0.$$

En chaque point de la surface S_{12}, ces fonctions vérifient les conditions (417); elles vérifient les conditions (408) en chaque point de la surface Σ.

En multipliant par un même nombre σ_1 toutes les dimensions du système S, formons un système S_1 semblable au système S. En chaque point du système S_1, attribuons aux deux fonctions Φ', Φ'' des valeurs égales à celles qu'elles prennent au point homologue du système S; on voit sans peine qu'au premier de ces deux points, les dérivées partielles du premier ordre de Φ' et de Φ'' seront σ_1 fois plus petites, et les dérivées du second ordre σ_1^2 fois plus petites qu'au second de ces deux points.

De là se tirent deux conclusions :

1° Les fonctions Φ', Φ'', qui, dans le système S, vérifiaient les conditions (417) et (408), les vérifient encore dans le système S_1.

2° Lorsqu'on passe d'un point quelconque du système S au point homologue du système S_1, les valeurs de $\Delta\Phi'$, $\Delta\Phi''$ sont divisées par σ_1^2. Si donc on veut que les équations (454), vérifiées en tout point du système S, le soient encore en tout point du système S_1, il faudra remplacer la valeur de $\mathfrak{L}_1$ par une valeur σ_1 fois plus grande.

Dès lors, on peut construire le système S_1 de telle sorte que la période donnée T, associée à la véritable valeur $\mathfrak{L}$ de la vitesse de propagation des champs longitudinaux, soit, pour ce système S_1, quasi-période propre; il suffit de déterminer le rapport de similitude σ_1 par la condition $\sigma_1\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}$ ou

$$\sigma_1 = \frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{L}_1}. \tag{455}$$

D'où la proposition suivante :

Étant donnée une certaine période T *et un certain système formé de corps conducteurs, il existe une infinité de systèmes semblables à celui-là qui admettent la période* T *pour quasi-période de vibrations électriques propres.*

Supposons qu'au lieu de donner exactement à σ_1 la valeur (455), on donne seulement à ce rapport de similitude une valeur σ'_1 très voisine de celle-là; au système S_1 et à la période T correspondra alors une vitesse de propagation critique $\mathfrak{L}' = \sigma'_1\mathfrak{L}_1$ qui sera très voisine de $\mathfrak{L}$. Dès lors, l'une au moins des deux fonctions Φ', Φ'' données par les développements (452) sera, en général, extrêmement grande. Un excitateur, en exerçant sur le système S_1 une action vibratoire longitudinale et pendulaire de période T, y engendrera un champ électrique longitudinal vibrant suivant la même loi, et d'amplitude extrêmement grande.

D'où la conclusion suivante :

Quand, sur un système de corps conducteurs, on fait agir un excitateur engendrant un champ électrique vibratoire, purement longitudinal, pendulaire, dont la période est très voisine d'une quasi-période propre au système, celui-ci devient en général le siège *d'une vibration électrique longitudinale, pendulaire, de même période que le champ engendré par l'excitateur, et d'amplitude extrêmement grande.*

Il y a résonnance électrique.

Les propositions invoquées par la précédente théorie de la résonnance électrique sont bien loin d'être toutes démontrées; beaucoup d'entre elles ont été seulement justifiées dans des cas particuliers, puis étendus par voie d'hypothèse; le mathématicien trouvera donc ici l'énoncé d'un grand nombre de théorèmes, probablement vrais, dont la démonstration aurait un grand intérêt pour la Physique.

REMARQUE FINALE

Tandis que s'imprimait le présent Mémoire, nous avons poursuivi des recherches qui nous ont conduit à rejeter bon nombre des conclusions formulées ici. Ces conclusions, en effet, reposaient en grande partie sur l'hypothèse suivante : *Dans un système formé de plusieurs corps, les vibrations électriques propres ou quasi-propres sont des vibrations longitudinales.*

Sans être vérité démontrée, cette hypothèse, cependant, était supposition parfaitement admissible, du moment qu'on s'en tenait aux points de départ admis dans le présent Mémoire. Étendant, en effet, à la théorie de Helmholtz la méthode que H. Hertz avait recommandée dans l'étude de la théorie de Maxwell, nous prenions uniquement en considération les équations qui régissent les composantes du champ électrique total et les composantes du champ magnétique. A supposer, dès lors, que le champ électrique total est partout longitudinal, il ne semblait pas qu'il y eût impossibilité.

Mais un champ électrique total n'est pas une grandeur quelconque; il est la résultante d'un champ électrostatique et d'un champ électrodynamique. Une expression proposée pour le champ électrique total ne doit donc pas simplement vérifier les équations qui régissent les composantes de ce champ; il faut encore qu'elle puisse résulter d'une expression acceptable du champ électrostatique et d'une expression acceptable du champ électrodynamique. Or, c'est ce qui n'aurait pas lieu, du moins en général, si l'on supposait, au sein d'un système formé de plusieurs corps, que le champ fût longitudinal.

La découverte de cette vérité nous a contraint de rejeter bon nombre des solutions proposées dans le présent Mémoire et de reprendre sur nouveaux frais plusieurs des problèmes qui s'y trouvaient traités.

Nous croyons, cependant, que le travail accompli dans ce Mémoire ne doit pas être regardé comme peine perdue.

Tout d'abord, un certain nombre de résultats énoncés, soit pour un diélectrique unique, soit pour un corps conducteur unique, ne dépendent aucunement de cette hypothèse : Le champ électrique est longitudinal. De tels résultats gardent donc toute leur valeur. Ainsi en est-il de tous ceux qui sont démontrés au Chapitre I de la Première Partie, et aussi de tous ceux que renferment, au Chapitre I de la Seconde Partie, les nos **[28]**, **[29]**, **[30]**, **[31]**, **[32]** et **[33]**. Les cas de stabilité qui ont été établis dans ces chapitres ne souffrent aucunement de la modification qu'il nous faut maintenant apporter à nos recherches.

En second lieu, nous sommes conduit, au cas où le système comprend plusieurs corps de natures différentes, à des problèmes beaucoup plus compliqués que ceux dont il est ici question ; mais ce que nous pourrons dire de ces nouveaux problèmes s'obtient en étendant les méthodes qui ont été indiquées dans le présent Mémoire.

Ainsi la théorie de la résonnance électrique donnée par ce Mémoire est dénuée de portée physique; elle n'est qu'un exercice de Mathématiques; mais elle nous paraît mériter ce nom d'exercice, en ce qu'elle prépare la théorie plus compliquée des effets qu'observe vraiment le physicien.