ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

É. GOURSAT

Recherches sur la théorie des caractéristiques

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 2e série, tome 8 (1906), p. 427-475
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1906_2_8__427_0>

RECHERCHES

SUR LA

THÉORIE DES CARACTÉRISTIQUES,

PAR M. É. GOURSAT.

Étant donnée une équation aux dérivées partielles ou un système d'équations aux dérivées partielles d'ordre quelconque, on sait que l'on appelle *multiplicité caractéristique* toute multiplicité d'éléments pour laquelle le problème de Cauchy, ou le problème analogue plus général relatif au système considéré d'équations aux dérivées partielles, se présente sous forme indéterminée. Sauf dans des cas exceptionnels, cette indétermination est réelle, c'est-à-dire qu'il y a effectivement une infinité d'intégrales admettant tous les éléments de la multiplicité caractéristique, *situés dans un domaine suffisamment petit,* et holomorphes dans ce domaine. Mais ce n'est là qu'un premier pas de fait dans cette théorie. Pour l'approfondir davantage, il serait nécessaire d'étudier les intégrales, non pas seulement dans un domaine restreint, mais dans le voisinage de la multiplicité caractéristique tout entière, par exemple rechercher les singularités mobiles qu'elles peuvent avoir sur cette multiplicité, étudier la nature de ces singularités, etc. Il y a là évidemment un champ de recherches très vaste, d'autant plus que la notion de caractéristique n'est encore qu'imparfaitement élucidée pour les systèmes les plus généraux d'équations aux dérivées partielles.

Je ne m'occupe dans ce Mémoire que des plus simples parmi les problèmes de cette nature, ceux qui sont relatifs aux équations du premier et du second ordre à deux variables indépendantes; mais la méthode peut s'étendre, avec plus ou moins de difficulté, à des questions beaucoup plus générales, comme je me propose de le montrer dans la suite ([1]).

([1]) Les résultats essentiels de ce Mémoire ont été résumés dans une Note présentée à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus,* 26 mars 1906).

I.

1. Nous rappellerons d'abord quelques définitions relatives aux courbes et aux surfaces analytiques.

Un point (x_0, y_0, z_0) d'une surface analytique S est un point ordinaire pour cette surface si, en désignant par x, y, z les coordonnées d'un point voisin, l'une des trois différences $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ est égale à la somme d'une série entière ordonnée suivant les puissances positives des deux autres différences, et convergente lorsque les modules de ces différences restent inférieurs à un nombre positif convenablement choisi. Si l'on suppose les coordonnées d'un point de la surface S (ou d'une portion de cette surface), exprimées au moyen de deux paramètres arbitraires u et v

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v),$$

les fonctions f, φ, ψ étant holomorphes dans le voisinage des valeurs u_0, v_0, qui correspondent au point (x_0, y_0, z_0), il suffit, pour que ce point soit un point ordinaire, que l'un au moins des trois jacobiens

$$\frac{\mathrm{D}(f, \varphi)}{\mathrm{D}(u, v)}, \quad \frac{\mathrm{D}(\varphi, \psi)}{\mathrm{D}(u, v)}, \quad \frac{\mathrm{D}(\psi, f)}{\mathrm{D}(u, v)},$$

soit différent de zéro pour $u = u_0$, $v = v_0$ (*Cours d'Analyse*, t. I, p. 460). Soit (x_0, y_0, z_0) un point d'une surface S. Imaginons que l'on effectue une transformation ponctuelle définie par les formules

$$(1) \qquad \mathrm{X} = \mathrm{F}_1(x, y, z), \qquad \mathrm{Y} = \mathrm{F}_2(x, y, z), \qquad \mathrm{Z} = \mathrm{F}_3(x, y, z),$$

F_1, F_2, F_3 étant des fonctions holomorphes dans le voisinage des valeurs x_0, y_0, z_0, et le déterminant fonctionnel

$$\Delta = \frac{\mathrm{D}(\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \mathrm{F}_3)}{\mathrm{D}(x, y, z)}$$

n'étant par nul pour $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$. Si le point (x, y, z) décrit la portion de la surface S voisine du point (x_0, y_0, z_0), le point de coordonnées $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ décrit une portion de surface analytique Σ voisine du point $(\mathrm{X}_0, \mathrm{Y}_0, \mathrm{Z}_0)$ qui correspond au point (x_0, y_0, z_0), et ces deux portions de surfaces S et Σ se correspondent point par point, car l'on peut inversement résoudre les équations (1) par rapport à x, y, z, dans le voisinage des valeurs X_0, Y_0, Z_0.

Si le point (x_0, y_0, z_0) de la surface S *est un point ordinaire pour cette surface, le point $(\mathrm{X}_0, \mathrm{Y}_0, \mathrm{Z}_0)$ est lui-même un point ordinaire pour la surface Σ.*

En effet, supposons les coordonnées x, y, z d'un point de S exprimées au moyen de deux paramètres u et v, les trois jacobiens

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}, \quad \frac{D(y,z)}{D(u,v)}, \quad \frac{D(z,x)}{D(u,v)}, \tag{2}$$

n'étant pas nuls à la fois pour les valeurs $u = u_0$, $v = v_0$, qui correspondent au point (x_0, y_0, z_0). Au moyen des formules (1), on peut exprimer aussi X, Y, Z par des fonctions holomorphes de u et de v, et il suffit de montrer que les trois jacobiens

$$\frac{D(X,Y)}{D(u,v)}, \quad \frac{D(Y,Z)}{D(u,v)}, \quad \frac{D(Z,X)}{D(u,v)}, \tag{3}$$

ne sont pas nuls à la fois pour $u = u_0$, $v = v_0$. Or on peut résoudre les trois équations (1) par rapport à x, y, z, et l'on a

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{D(x,y)}{D(X,Y)}\frac{D(X,Y)}{D(u,v)} + \frac{D(x,y)}{D(Y,Z)}\frac{D(Y,Z)}{D(u,v)} + \frac{D(x,y)}{D(Z,X)}\frac{D(Z,X)}{D(u,v)},$$

avec deux autres relations analogues. Si les trois déterminants (3) étaient nuls à la fois pour $u = u_0$, $v = v_0$, il en serait donc de même des trois déterminants (2), contrairement à l'hypothèse.

Nous dirons pour abréger que la transformation ponctuelle (1) est *réversible* dans le voisinage d'un point (x_0, y_0, z_0), lorsque le jacobien Δ n'est pas nul pour les coordonnées de ce point. La proposition précédente peut alors s'énoncer comme il suit :

Toute transformation ponctuelle réversible change un point ordinaire en un point ordinaire.

Rappelons encore la propriété suivante. Si, en un point ordinaire d'une surface, le plan tangent n'est pas parallèle à l'axe Oz, dans le voisinage de ce point, l'équation de la surface peut être mise sous la forme

$$z - z_0 = P(x - x_0, y - y_0),$$

le second membre désignant une série entière en $x - x_0$ et $y - y_0$. Il s'ensuit que lorsque, dans le voisinage d'un point (x_0, y_0, z_0), l'équation d'une surface est de la forme

$$z = \Phi(x,y),$$

la fonction $\Phi(x,y)$ n'étant pas holomorphe dans le domaine des valeurs x_0, y_0, des variables x et y, ce point est un point singulier pour la surface, à moins que le plan tangent en ce point ne soit parallèle à Oz. Lorsqu'il en est ainsi, les dérivées partielles

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

(ou au moins l'une d'elles) deviennent infinies pour $x = x_0, y = y_0$. Par conséquent, s'il arrive que la fonction $\Phi(x, y)$ et ses deux dérivées partielles du premier ordre conservent des valeurs finies pour $x = x_0, y = y_0$, tandis que l'une au moins des dérivées du second ordre ou d'ordre plus élevé devient infinie pour ces valeurs, on peut affirmer que le point correspondant est un point singulier de la surface.

2. Une courbe analytique Γ est définie par un système de trois équations

$$(4) \qquad x = f(u), \qquad y = \varphi(u), \qquad z = \psi(u),$$

f, φ, ψ étant trois fonctions analytiques de la variable u. Pour les applications au domaine réel, nous supposerons que ces trois fonctions $f(u)$, $\varphi(u)$, $\psi(u)$ sont holomorphes et prennent des valeurs réelles lorsque la variable u décrit un segment (u_0, u_1) de l'axe réel, et qu'à un point d'un segment AB de Γ correspond une valeur de u et une seule dans cet intervalle (u_0, u_1). Ces trois fonctions sont alors holomorphes à l'intérieur d'un rectangle R du plan de la variable complexe u, limité par les perpendiculaires à l'axe réel menées par les points d'abscisses u_0 et u_1, et par deux parallèles à cet axe suffisamment voisines, menées de part et d'autre. Lorsque le segment AB ne présente pas de point singulier, on peut choisir le paramètre u de façon que les trois dérivées $f'(u)$, $\varphi'(u)$, $\psi'(u)$ ne s'annulent pas simultanément pour aucune valeur réelle de u comprise entre u_0 et u_1. Nous supposerons même que les deux dérivées $f'(u)$ et $\varphi'(u)$ ne s'annulent pas en même temps lorsque u varie de u_0 à u_1. On peut faire cette hypothèse sans restreindre la généralité. En effet, si l'on avait $f'(u_2) = \varphi'(u_2) = 0$, u_2 étant compris entre u_0 et u_1, la tangente au point correspondant de Γ serait parallèle à l'axe Oz. Or on peut toujours supposer que l'on a pris l'axe des z de façon qu'il ne soit pas une génératrice du cône formé par les parallèles menées de l'origine aux tangentes à l'arc AB de Γ. Les axes étant choisis de cette façon, l'expression

$$\delta = f'^2(u) + \varphi'^2(u)$$

ne s'annule pour aucune valeur réelle de u dans l'intervalle (u_0, u_1), et l'on peut évidemment prendre la hauteur du rectangle R assez petite pour que δ ne s'annule pas non plus dans ce rectangle.

Cela posé, soit S une surface analytique passant par la courbe Γ, et sur laquelle tous les points du segment AB de cette courbe sont des points ordinaires. Appliquons à cette surface la transformation ponctuelle définie par les formules

$$(5)\qquad \begin{cases} x = f(X) - Y\varphi'(X), \\ y = \varphi(X) + Yf'(X), \\ z = \psi(X) + Z; \end{cases}$$

on a dans ce cas

$$\frac{D(x,y,z)}{D(X,Y,Z)} = \begin{vmatrix} f'(X) - Y\varphi''(X) & -\varphi'(X) & 0 \\ \varphi'(X) + Yf''(X) & f'(X) & 0 \\ \psi'(X) & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= f'^2(X) + \varphi'^2(X) + Y[f''(X)\varphi'(X) - f'(X)\varphi''(X)].$$

Au segment AB de Γ correspond le segment CD de l'axe OX, compris entre les deux points $X = u_0$, $X = u_1$, et, d'après les hypothèses qui ont été faites, ces deux segments se correspondent point par point. Toute surface S passant par le segment AB de Γ se change donc en une surface Σ passant par le segment CD de l'axe OX. A un point de Γ qui est un point ordinaire de la surface S correspond un point du segment CD de OX qui est un point ordinaire de Σ, car le jacobien $\frac{D(x,y,z)}{D(X,Y,Z)}$ se réduit à $f'^2(X) + \varphi'^2(X)$ pour $Y = 0$, et ce jacobien est différent de zéro lorsque X varie de u_0 à u_1.

La transformation précédente remplace donc une courbe analytique quelconque Γ, ne présentant pas de point singulier, par un segment de ligne droite, et une surface analytique passant par Γ (et n'ayant sur Γ aucun point singulier) par une autre surface analytique passant par un segment de ligne droite et n'ayant sur ce segment aucun point singulier. Pour étudier, par la suite, les surfaces analytiques passant par une courbe analytique *donnée,* nous supposerons qu'on commence par effectuer cette transformation.

Si la surface S passant par la courbe Γ doit être une intégrale d'une équation aux dérivées partielles, la surface transformée Σ doit être aussi une intégrale d'une équation aux dérivées partielles que l'on déduira comme il suit de la première. Désignons par P et Q les dérivées partielles de Z par rapport à X et Y. De la relation

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

on tire, en remplaçant x, y, z par les expressions (5) et dZ par $P\,dX + Q\,dY$,

$$\psi'(X)\,dX + P\,dX + Q\,dY = p[f'(X)\,dX - Y\varphi''(X)\,dX - \varphi'(X)\,dY] + q[\varphi'(X)\,dX + Yf''(X)\,dX + f'(X)\,dY]$$

ou

$$(6)\qquad \begin{cases} P + \psi'(X) = p[f'(X) - Y\varphi''(X)] + q[\varphi'(X) + Yf''(X)], \\ Q = -p\varphi'(X) + qf'(X). \end{cases}$$

Si l'on connaît les valeurs de p et de q tout le long de Γ, on en déduira les valeurs de P et de Q tout le long du segment CD de l'axe OX en faisant $Y = 0$ dans les formules précédentes. Inversement, en résolvant les équations (6) par rapport à p et à q, toute équation aux dérivées partielles $F(x, y, z, p, q) = 0$ se change en une équation de même espèce $\Phi(X, Y, Z, P, Q) = 0$, et l'on opérerait de même pour une équation aux dérivées partielles du second ordre, etc.

3. Nous pouvons donc supposer qu'il s'agit d'étudier une surface passant par un segment de l'axe OX, compris entre les deux points d'abscisses x_0 et x_1, et n'ayant aucun point singulier tout le long de ce segment. La valeur de $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ est nulle pour tout point de ce segment; si le plan tangent à la surface est lui-même connu en chaque point du segment, la dérivée partielle $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ est une fonction connue de x dans l'intervalle (x_0, x_1). Cette fonction de x peut devenir infinie dans cet intervalle si le plan tangent en certains points se confond avec le plan $y = 0$ [1]. Mais, si la surface considérée n'a pas de points singuliers sur le segment CD, *la fonction $q(x)$ ne peut avoir que des pôles comme singularités dans l'intervalle* (x_0, x_1).

Supposons, en effet, qu'en un point $(a, 0, 0)$ de la surface le plan tangent soit le plan $y = 0$; la surface devant passer par l'axe des x, l'équation de la surface dans le voisinage de ce point peut donc s'écrire

$$y = z\,P(x-a, z),$$

$P(x-a, z)$ désignant une série entière en $x-a$ et z, qui ne renferme pas de terme constant. Le plan tangent a donc pour équation

$$Y - y = z\frac{\partial P}{\partial x}(X-x) + \left(P + z\frac{\partial P}{\partial z}\right)(Z-z);$$

pour un point de l'axe Oz, cette équation se réduit à

$$Y = P(x-a, 0)\,Z.$$

Si le plan tangent ne se confond pas avec le plan $y = 0$ tout le long du segment, la fonction $P(x-a, 0)$ n'est pas identiquement nulle et l'on a

$$q = \frac{1}{P(x-a, 0)},$$

---

[1] Dans le cas où q serait infini tout le long de CD, le plan tangent en chaque point serait le plan $y = 0$ et il suffirait de permuter y et z pour avoir $p = q = 0$ tout le long du segment.

de sorte que le point (a, o, o) est un pôle pour cette fonction. On peut remarquer que c'est un pôle *du premier ordre,* à moins que le point considéré ne soit un point parabolique.

La condition précédente étant remplie, la fonction $q(x)$, qui est supposée connue, est de la forme

$$q(x) = \frac{\pi(x)}{\psi(x)},$$

$\pi(x)$ et $\psi(x)$ étant deux fonctions holomorphes de x dans l'intervalle (x_0, x_1), qui ne s'annulent pas simultanément. Cela posé, faisons la transformation

$$(7) \qquad \left\{\begin{aligned} y &= Y\psi(x) - Z\pi(x), \\ z &= Y\pi(x) + Z\psi(x), \\ x &= x. \end{aligned}\right.$$

Cette transformation est réversible pour $Y = Z = o$, x étant compris entre x_0 et x_1, car le jacobien $\frac{D(x, y, z)}{D(X, Y, Z)}$ se réduit à $\pi^2(x) + \psi^2(x)$ pour $Y = Z = o$. Cela posé, si une surface passant par Ox admet le point (a, o, o) pour point ordinaire, le plan tangent en ce point ayant pour équation

$$z\psi(x) - y\pi(x) = o,$$

l'équation de la surface est, dans le voisinage de ce point,

$$z\psi(x) - y\pi(x) + \ldots = o,$$

les termes non écrits étant au moins du second degré en y et z. L'équation de la surface qu'on en déduit par la transformation (7) est donc de la forme

$$[Y\pi(x) + Z\psi(x)]\psi(x) - [Y\psi(x) - Z\pi(x)]\pi(x) + \ldots = o,$$

ou

$$Z(\psi^2 + \pi^2) + \ldots = o,$$

les termes non écrits étant au moins du second degré en Y et Z. De cette équation on déduira pour Z un développement suivant les puissances de Y commençant par un terme du second degré au moins. La transformation (7) remplace donc la surface primitive par une nouvelle surface tangente au plan $Z = o$ tout le long du segment (x_0, x_1) de l'axe des x, et pour laquelle tous les points de ce segment seront des points ordinaires.

Supposons encore cette transformation effectuée. Les fonctions $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ et $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ sont alors identiquement nulles tout le long du segment (x_0, x_1) de l'axe Ox. Il en est de même des dérivées du second ordre r et s et la dérivée $t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

doit être (n° 1) une fonction holomorphe de x dans l'intervalle (x_0, x_1) pour que tous les points du segment soient des points ordinaires de la surface. Si la valeur de cette dérivée est une fonction connue de x, $t = \varphi(x)$, en posant

$$z = \frac{y^2}{2}\varphi(x) + Z,$$

on sera ramené à étudier une nouvelle surface pour laquelle les dérivées du premier et du second ordre de z par rapport à x et à y sont nulles tout le long du segment.

4. Soit

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{8}$$

une équation aux dérivées partielles du premier ordre dont le premier membre est une fonction analytique des variables qui y figurent. Une caractéristique est, comme on le sait, une suite simplement infinie d'éléments (x, y, z, p, q), satisfaisant à l'équation (1) et aux relations différentielles

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = \frac{-dp}{X + pZ} = \frac{-dq}{Y + qZ}, \tag{9}$$

où

$$X = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial F}{\partial z}, \quad P = \frac{\partial F}{\partial p}, \quad Q = \frac{\partial F}{\partial q}.$$

Supposons que l'on ait déterminé une caractéristique; on démontre dans tous les Ouvrages classiques que tous les éléments de cette caractéristique suffisamment voisins d'un élément déterminé appartiennent à une infinité de surfaces intégrales, moyennant certaines conditions qui seront rappelées dans la suite de ce travail. Mais ce n'est là qu'un premier pas dans l'étude des intégrales passant par une caractéristique donnée. Nous nous proposons de compléter ce résultat en étudiant les surfaces intégrales, qui passent par une caractéristique, tout le long de cette caractéristique, en particulier de rechercher s'il peut y avoir sur la caractéristique des points singuliers de la surface, variables d'une intégrale à l'autre, et d'examiner la nature de ces points singuliers.

Pour préciser le problème, nous supposerons la caractéristique représentée par les cinq relations

$$x = f_1(u), \quad y = f_2(u), \quad z = f_3(u), \quad p = \varphi_1(u), \quad q = \varphi_2(u), \tag{10}$$

les trois fonctions f_1, f_2, f_3 étant holomorphes dans un domaine $\mathfrak{D}_u$ comprenant un segment de l'axe réel dans le plan de la variable complexe u et les trois dérivées $f_1'(u)$, $f_2'(u)$, $f_3'(u)$ ne s'annulant pas à la fois dans ce domaine. Les fonctions $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u)$ peuvent devenir infinies sur ce segment de l'axe réel, mais elles ne peuvent avoir que des discontinuités polaires si les points correspondants sont des points ordinaires d'une surface admettant tous les éléments de la caractéristique. On le démontre, comme plus haut (n° 3), dans le cas où la caractéristique se réduit à l'axe Ox. Les transformations qui ont été indiquées permettent de ramener le cas général au cas particulier où la caractéristique est représentée par les équations

$$y = z = p = q = 0. \tag{11}$$

Après ces transformations, le premier membre de la nouvelle équation aux dérivées partielles peut être développé en une série entière ordonnée suivant les puissances positives de y, z, p, q, dont les coefficients sont fonctions de x, et il ne doit y avoir dans ce développement aucun terme de la forme $f(x)y$ ou de la forme $f(x)q$ pour que la multiplicité (11) soit bien une multiplicité caractéristique. Soit

$$F = Ap + Bz + Cp^2 + \ldots = 0 \tag{12}$$

la nouvelle équation, les termes non écrits étant au moins du second degré en y, z, p, q. Les coefficients A, B, C, ... sont des fonctions de x qui doivent être holomorphes dans un certain domaine $\mathcal{D}_x$ contenant un segment (x_0, x_1) de l'axe réel; on peut supposer, évidemment, que $\mathcal{D}_x$ est simplement connexe et prendre, par exemple, pour $\mathcal{D}_x$ un rectangle formé de deux perpendiculaires à l'axe réel menées par les points d'abscisses x_0 et x_1 sur cet axe dans le plan de la variable complexe x et deux parallèles infiniment voisines à cet axe de part et d'autre du segment (x_0, x_1). Quelle que soit la forme de ce domaine, nous supposerons que la série (12) est convergente, quelle que soit la valeur de x dans $\mathcal{D}_x$, pourvu que les modules des variables y, z, p, q ne dépassent pas une certaine limite positive ρ. Toutes ces conditions s'expliquent d'elles-mêmes, étant donné le problème que l'on se propose. Nous ferons une hypothèse de plus et nous supposerons que le coefficient A de p ne s'annule pas le long du segment (x_0, x_1), ni par suite dans le domaine $\mathcal{D}_x$, si ce domaine est suffisamment petit. Cette dernière hypothèse a une signification importante. Nous dirons qu'un élément (x, y, z, p, q), dont les coordonnées satisfont à la relation $F = 0$ est un *élément singulier* pour cette équation si les coordonnées de cet élément satisfont aussi aux relations

$$P = 0, \qquad Q = 0, \qquad X + pZ = 0, \qquad Y + qZ = 0;$$

les équations différentielles qui déterminent la multiplicité caractéristique passant par un élément se présentent sous forme indéterminée lorsque l'élément initial est un élément singulier. Pour tous les éléments de la caractéristique (11) de l'équation (12), on a bien

$$Q = 0, \qquad X + pZ = 0, \qquad Y + qZ = 0;$$

pour que l'on eût aussi $P = 0$ pour un de ces éléments, il faudrait que A fût nul pour l'abscisse de ce point. L'hypothèse faite en dernier lieu peut donc s'énoncer ainsi : *on suppose que la portion de caractéristique considérée ne contient aucun élément singulier.*

Cela étant, en divisant par A tous les coefficients de la série (12), on peut supposer le coefficient de p réduit à l'unité; les autres hypothèses relatives au domaine de convergence étant conservées. En résolvant alors l'équation (12) par rapport à p, on en déduit un développement en série entière ordonnée suivant les puissances de y, z, q, dont les coefficients sont des fonctions holomorphes de x dans le domaine $\mathcal{D}_x$ et qui est convergente, quelle que soit la valeur attribuée à x dans ce domaine, pourvu que les modules des variables y, z, q restent inférieurs à un nombre positif r (1). D'après la forme de l'équation (12), cette série ne doit renfermer ni terme en y, ni terme en q; il est donc de la forme

$$(13) \quad \begin{aligned} p &= \Phi(x, y, z, q) \\ &= \varphi_{010} z + \varphi_{020} z^2 + \varphi_{110} zy + \varphi_{011} zq + \varphi_{200} y^2 + \varphi_{101} yq + \varphi_{002} q^2 + \ldots, \end{aligned}$$

les termes non écrits étant au moins du troisième degré en y, z, q et les fonctions φ_{ikl} étant des fonctions holomorphes de x dans le domaine $\mathcal{D}_x$.

Remarquons que tout changement de variable de la forme $x = \psi(x')$ ne change pas la forme de l'équation (13). Pour la démonstration des théorèmes de convergence, on peut donc supposer que l'on a effectué tout d'abord sur cette variable une transformation conforme convenable, de façon que le domaine $\mathcal{D}_x$ soit un cercle ayant pour centre le point $x = 0$. La fonction $\Phi(x, y, z, q)$ est alors une fonction holomorphe des variables x, y, z, q, pourvu que l'on ait

$$|x| \leqq a, \qquad |y| \leqq r, \qquad |z| \leqq r, \qquad |q| \leqq r,$$

a et r étant deux nombres positifs.

5. De même, si l'on veut étudier les surfaces intégrales d'une équation aux dérivées partielles du second ordre $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$, admettant tous les éléments d'une caractéristique déterminée du second ordre, on commencera par effectuer une transformation ponctuelle (*voir* n° 3), de façon que cette caracté-

(1) Pour la démonstration de ce point, *voir* mon Mémoire : *Sur les intégrales infiniment voisines des équations aux dérivées partielles* (*Annales de l'École Normale supérieure,* 1906, p. 429 et suivantes).

ristique soit représentée par les équations

$$y = z = p = q = r = s = t = 0. \tag{14}$$

L'équation aux dérivées partielles, étant ordonnée suivant les puissances de y, z, p, q, r, s, t, est de la forme

$$F = Ar + Bs + Ct + Dp + Eq + Gy + Hz + \ldots \tag{15}$$

les termes non écrits étant au moins du second degré en y, z, p, q, r, s, t et les coefficients A, B, C, ... étant des fonctions de x holomorphes dans un certain domaine $\mathfrak{D}_x$ simplement connexe, renfermant un segment de l'axe réel. Pour que les relations (14) représentent un caractéristique de l'équation (15), il faut d'abord que l'on ait [1]

$$T = \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

pour tous les éléments de cette caractéristique, c'est-à-dire que le coefficient C doit être nul. Il faut de plus que l'on ait $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ pour tous les éléments de la caractéristique, ou que le coefficient G soit nul. Ces conditions sont suffisantes pour que les équations (14) représentent une multiplicité caractéristique du second ordre de l'équation (15), mais nous ferons encore une hypothèse de plus. En général, tout élément du second ordre (x, y, z, p, q, r, s, t), dont les coordonnées satisfont à la relation $F=0$, détermine dans l'élément du premier ordre (x, y, z, p, q) qu'il contient deux directions caractéristiques, données par l'équation du second ordre

$$R\,dy^2 - S\,dx\,dy + T\,dx^2 = 0, \tag{16}$$

où

$$R = \frac{\partial F}{\partial r}, \qquad S = \frac{\partial F}{\partial s}, \qquad T = \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Nous dirons qu'un élément est *exceptionnel* si les deux racines de l'équation (16) sont égales, c'est-à-dire si l'on a, pour les coordonnées de cet élément, la relation [2]

$$S^2 - 4RT = 0. \tag{17}$$

Cela posé, nous admettrons que *la caractéristique considérée ne renferme*

---

(1) *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes* (t. I, Chap. IV).

(2) Ce qui comprend le cas où l'on aurait à la fois $R = S = T = 0$.

aucun élément exceptionnel, ce qui exclut le cas où l'équation (15) aurait ses deux systèmes de caractéristiques confondus. Comme T est nul pour tous les éléments de la caractéristique (14), il faudra que S soit différent de zéro pour tous ces éléments, ou que le coefficient B de s ne s'annule en aucun point du segment de l'axe réel intérieur à $\mathcal{D}_x$, ni par suite en aucun point de ce domaine, pourvu qu'il soit suffisamment voisin de l'axe réel. En résolvant alors l'équation (15) par rapport à s, on en déduira un développement en série entière ordonnée suivant les puissances de y, z, p, q, r, t,

$$(18) \qquad s = \alpha z + \beta p + \gamma q + \delta r + \ldots,$$

les termes non écrits étant au moins du second degré en y, z, p, q, t, et les coefficients étant des fonctions holomorphes de la variable x dans $\mathcal{D}_x$. La série qui est au second membre de l'équation (18) représente une fonction holomorphe des variables x, y, z, p, q, r, t lorsque la variable x décrit le domaine $\mathcal{D}_x$, pourvu que les modules des autres variables y, z, p, q, r, t restent plus petits qu'un nombre positif. Pour les questions de convergence, on peut encore, comme on l'a remarqué plus haut, supposer que le domaine $\mathcal{D}_x$ est un cercle ayant pour centre l'origine.

Nous allons maintenant étudier successivement le problème ainsi simplifié pour une équation aux dérivées partielles du premier ordre et pour une équation du second ordre.

II.

6. Soit

$$(19) \qquad \begin{aligned} p &= F(x, y, z, q) \\ &= \varphi_{010} z + \varphi_{200} y^2 + \varphi_{110} yz + \varphi_{020} z^2 + \varphi_{101} yq + \varphi_{011} zq + \varphi_{002} q^2 + \ldots \end{aligned}$$

une équation aux dérivées partielles du premier ordre admettant la multiplicité caractéristique

$$(20) \qquad y = z = p = q = 0.$$

Les fonctions φ_{ikl} sont des fonctions de la variable x, holomorphes dans un domaine simplement connexe $\mathcal{D}_x$, comprenant un segment (x_0, x_1) de l'axe réel, et la série $F(x, y, z, q)$ est convergente, quelle que soit la valeur de x dans ce domaine, pourvu que l'on ait

$$|y| \leqq \rho, \qquad |z| \leqq \rho, \qquad |q| \leqq \rho,$$

ρ étant un nombre positif.

Il existe une infinité d'intégrales de l'équation (19) admettant tous les éléments de la caractéristique (20); l'une quelconque est complètement déterminée si l'on se donne la fonction $f(y)$ à laquelle elle se réduit pour une valeur particulière $x=a$, comprise entre x_0 et x_1. Pour que cette intégrale admette l'élément particulier $(a, 0, 0, 0, 0)$, il faut et il suffit que la fonction $f(y)$ et sa dérivée $f'(y)$ soient nulles pour $y=0$. Supposons donc que $f(y)$ soit une fonction holomorphe de la variable y dans le domaine de l'origine, s'annulant ainsi que sa dérivée pour $y=0$. Pour étudier l'intégrale qui se réduit à $f(y)$ pour $x=a$, dans le voisinage de l'axe des x, il est naturel d'ordonner le développement de cette intégrale suivant les puissances de y, et nous savons *a priori* que ce développement doit être de la forme

$$(21)\qquad z=\psi_2(x)\,y^2+\psi_3(x)\,y^3+\ldots+\psi_n(x)\,y^n+\ldots$$

puisque l'intégrale, renfermant l'élément $x=y=z=0$, $p=q=0$, doit admettre tous les éléments de la multiplicité caractéristique (20). Les coefficients $\psi_2, \psi_3, \ldots \psi_n, \ldots$ sont des fonctions de x dont on connaît les valeurs pour $x=a$, car le développement de la fonction $f(y)$ doit être identique à

$$f(y)=\psi_2(a)y^2+\ldots+\psi_n(a)y^n+\ldots$$

De la formule (21) on déduit

$$\begin{aligned} p&=\psi_2'(x)y^2+\psi_3'(x)y^3+\ldots+\psi_n'(x)y^n+\ldots,\\ q&=2\psi_2(x)y+3\psi_3(x)y^2+\ldots+n\,\psi_n(x)y^{n-1}+\ldots;\end{aligned}$$

en remplaçant z, p, q par leurs développements dans les deux membres de l'équation (19), et en égalant les coefficients des mêmes puissances de y, on obtient une suite indéfinie d'équations différentielles, qui, jointes aux conditions initiales, permettent de déterminer de proche en proche les fonctions $\psi_2, \psi_3, \ldots \psi_n, \ldots$.

En égalant les coefficients de y^2, on obtient d'abord une *équation différentielle de Riccati,* ne renfermant que la fonction inconnue $\psi_2(x)$,

$$(22)\qquad \frac{d\psi_2}{dx}=\varphi_{200}+[\varphi_{010}+2\varphi_{101}]\,\psi_2(x)+4\varphi_{002}[\psi_2(x)]^2.$$

Cette équation détermine complètement la fonction $\psi_2(x)$, puisqu'on connaît la valeur initiale $\psi_2(a)$; d'après les propriétés connues de l'équation de Riccati, $\psi_2(x)$, qui est certainement holomorphe dans le voisinage de la valeur $x=a$, ne peut avoir que des discontinuités polaires dans le domaine $\mathfrak{D}_x$, et ces pôles sont variables avec la valeur initiale $\psi_2(a)$.

D'une façon générale, le coefficient de y^n dans le second membre de l'équation (19) après la substitution ne peut dépendre que des coefficients φ_{ikl} et des fonctions $\psi_2, \psi_3, \ldots, \psi_n$. En effet, dans les termes qui renferment z, la fonction ψ_{n+1}

par exemple est toujours associée à une puissance de y d'exposant au moins égal à $n+1$. D'autre part, dans le développement d'une puissance de q, de q^k par exemple ($k>1$), on a

$$q^k = [2\psi_2(x)y + \ldots + n\psi_n y^{n-1} + \ldots]^k,$$

et le seul terme en y^n renfermant ψ_n ne peut être que le terme $4n\psi_2\psi_n$, lorsque $k=2$. Le seul terme en y^n dépendant de ψ_n est donc

$$\varphi_{010}\psi_n + n\varphi_{101}\psi_n + 4n\varphi_{002}\psi_2\psi_n,$$

somme de trois termes provenant respectivement des termes en z, yq et q^2 dans l'équation (19). En égalant les coefficients de y^n, on arrive donc à une équation de la forme

$$\frac{d\psi_n}{dx} = (\varphi_{010} + n\varphi_{101} + 4n\varphi_{002}\psi_2)\psi_n + \mathrm{P}(\psi_2, \psi_3, \ldots, \psi_{n-1}), \tag{23}$$

$\mathrm{P}(\psi_2, \psi_3, \ldots, \psi_{n-1})$ désignant un polynome à coefficients entiers par rapport aux fonctions $\psi_2, \psi_3, \ldots, \psi_{n-1}$, et aux coefficients φ_{ikl} jusqu'à ceux d'un certain rang.

Cette équation (23) est *linéaire* par rapport à la fonction inconnue ψ_n ($n>2$). Supposons que le premier coefficient $\psi_2(x)$ soit holomorphe dans un domaine *simplement connexe* $\mathcal{D}'_x$ intérieur à $\mathcal{D}_x$. En faisant successivement $n=3, 4, 5, \ldots$, on voit que tous les coefficients suivants, $\psi_3, \psi_4, \ldots$, qui sont déterminés par des équations linéaires à coefficients holomorphes, sont eux-mêmes des fonctions holomorphes dans le domaine $\mathcal{D}'_x$.

7. On obtient donc ainsi une série (21), satisfaisant *formellement* à l'équation (19), dont tous les coefficients sont des fonctions holomorphes dans $\mathcal{D}'_x$, et qui se réduit à $f(y)$ quand on remplace x par a. Cette série coïncide forcément avec la série entière $\mathrm{P}(x-a, y)$ qui représente l'intégrale holomorphe se réduisant à $f(y)$ pour $x=a$, quand on ordonne cette série par rapport aux puissances croissantes de y. Nous sommes donc assurés de la convergence de la série (21) pour les valeurs de y et de $x-a$ dont le module est suffisamment petit. Pour compléter ce résultat, nous nous proposons d'étudier la convergence de cette série lorsque $|y|$ seul est très petit, la variable x restant dans le domaine $\mathcal{D}'_x$, où tous les coefficients ψ_i sont holomorphes ; ce qui revient évidemment à considérer l'intégrale dans le voisinage de la caractéristique. Le résultat fondamental qui va être démontré est le suivant :

Soit $\mathcal{D}'_x$ un domaine simplement connexe tel que la fonction $\psi_2(x)$, qui prend la valeur $\frac{f''(0)}{1.2}$ pour $x=a$, soit holomorphe dans ce domaine et sur la *courbe qui le limite; à ce domaine* $\mathcal{D}'_x$ *on peut associer un nombre positif* η, *tel que l'intégrale de l'équation* (19), *qui se réduit à* $f(y)$ *pour* $x=a$, *soit une fonction holomorphe des variables* x *et* y, *lorsque la variable* x *décrit le domaine* $\mathcal{D}'_x$, *et la variable* y *le cercle de rayon* η, *décrit du point* $y=0$ *comme centre.*

Il résulte de ce théorème que la série (21) est nécessairement convergente lorsque les variables x et y restent respectivement dans les domaines précédents. Ainsi qu'on l'a déjà fait observer (n° 4), on peut supposer que le domaine $\mathcal{D}'_x$ est à l'intérieur d'un cercle de rayon 1 décrit du point $x=0$ pour centre. Car on peut toujours, sans changer la forme de l'équation (19), effectuer une transformation conforme de façon qu'un domaine renfermant $\mathcal{D}'_x$ vienne s'appliquer sur un cercle, le point $x=a$ intérieur à $\mathcal{D}'_x$ correspondant au centre du cercle. Nous admettrons par conséquent, pour simplifier la démonstration qui va suivre, que le second membre de l'équation (19) est une fonction holomorphe des variables x, y, z, q, pour tous les systèmes de valeurs de ces variables qui satisfont aux conditions

$$|x|\leqq 1, \qquad |y|\leqq\rho, \qquad |z|\leqq\rho, \qquad |q|\leqq\rho,$$

ρ étant un nombre positif, et en outre que l'intégrale de l'équation (22) qui prend la valeur $\dfrac{f''(0)}{1.2}$ pour $x=0$ est elle-même une fonction holomorphe de x, pourvu que l'on ait $|x|\leqq 1$. On peut toujours satisfaire à cette dernière condition, si l'on fait correspondre au cercle de rayon 1 un domaine $\mathcal{D}''_x$ renfermant $\mathcal{D}'_x$, mais assez voisin pour que $\psi_2(x)$ soit également holomorphe dans $\mathcal{D}''_x$. Nous pouvons même supposer que la fonction $f(x)$ est nulle, car il suffit de poser $z=f(y)+u$, en désignant par u une nouvelle inconnue, pour être ramené à ce cas, et ce changement d'inconnue ne modifie pas les autres hypothèses.

Les intégrales des équations (22) et (23), qui sont nulles pour $x=0$, sont donc toutes holomorphes, pourvu que $|x|$ ne dépasse pas l'unité. Nous pouvons, sans diminuer la généralité, supposer $\psi_2=\psi_3=0$, car si l'on pose

$$z=y^2\psi_2(x)+y^3\psi_3(x)+Z,$$

le développement de Z commencera par un terme en y^4 ou de degré supérieur. Toutes ces transformations étant effectuées, l'équation (22) doit admettre l'intégrale particulière $\psi_2=0$, ce qui exige que l'on ait $\varphi_{200}(x)=0$; l'équation (19) est donc de la forme

$$(24)\quad p=F_1(x,y,z,q)=\varphi_{010}z+\varphi_{110}yz+\varphi_{020}z^2+\varphi_{101}yq+\varphi_{011}zq+\varphi_{002}q^2+\ldots,$$

et il n'y aura pas non plus de terme en y^3 dans le second membre, puisque l'équation (24) doit admettre une intégrale dont le développement suivant les puissances de y commence par un terme en y^4 ou de degré supérieur. Le second membre de l'équation (24) étant une fonction holomorphe des variables x, y, z, q, pour les valeurs de ces variables satisfaisant aux conditions

$$|x| \leqq 1, \qquad |y| \leqq \rho, \qquad |z| \leqq \rho, \qquad |q| \leqq \rho,$$

le théorème qu'il s'agit de démontrer peut alors s'énoncer ainsi :

A tout nombre positif $\theta < 1$ on peut associer un autre nombre positif η tel que l'intégrale de l'équation (24), qui se réduit à zéro pour $x = 0$, soit une fonction holomorphe des variables x et y lorsque l'on a à la fois

$$|x| \leqq \theta, \qquad |y| \leqq \eta.$$

Ce théorème étant supposé établi, il suffira de prendre pour θ un nombre inférieur à l'unité, mais assez voisin de 1 pour que le domaine $\mathfrak{D}'_x$ soit tout entier à l'intérieur du cercle de rayon θ décrit du point $x = 0$ pour centre, et l'on en déduira la proposition que l'on a en vue.

Nous pouvons encore, pour simplifier la démonstration, faire disparaître les termes en z et en yq dans l'équation (24). Posons, en effet,

$$z = u\, e^{\int_0^x \varphi_{010}\, dx},$$

u étant la nouvelle fonction inconnue; il vient

$$p = \frac{\partial u}{\partial x} e^{\int_0^x \varphi_{010}\, dx} + u\, \varphi_{010}\, e^{\int_0^x \varphi_{010}\, dx},$$

$$q = \frac{\partial u}{\partial y} e^{\int_0^x \varphi_{010}\, dx}.$$

En substituant ces valeurs de z, p, q dans les deux membres de l'équation (24), et divisant par $e^{\int_0^x \varphi_{010}\, dx}$, on voit qu'il n'y aura pas de terme de premier degré en u dans la nouvelle équation.

Nous pouvons donc supposer, en conservant les mêmes notations, que l'on a $\varphi_{010} = 0$ dans l'équation (24).

Faisons encore le changement de variables indépendantes

$$x = x', \qquad y = y' e^{-\int_0^x \varphi_{101}\, dx};$$

de la relation $dz = p\,dx + q\,dy$ on tire

$$dz = p\,dx' + q\,e^{-\int_0^x \varphi_{101}\,dx}(dy' - \varphi_{101}y'\,dx'),$$

et, par suite,

$$\frac{\partial z}{\partial x'} = p - q\,y'\varphi_{101}\,e^{-\int_0^x \varphi_{101}\,dx}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y'} = q\,e^{-\int_0^x \varphi_{101}\,dx}.$$

Inversement, on a

$$q = \frac{\partial z}{\partial y'}\,e^{\int_0^x \varphi_{101}\,dx}, \qquad p = \frac{\partial z}{\partial x'} + \varphi_{101}y'\frac{\partial z}{\partial y'}.$$

Après la substitution, le second membre ne renfermera pas de terme en $y'\dfrac{\partial z}{\partial y'}$. Nous pouvons donc prendre l'équation (24) sous la forme réduite

$$(25) \qquad p = \varphi_{020}z^2 + \varphi_{110}yz + \varphi_{011}zq + \varphi_{002}q^2 + \ldots.$$

Il est visible que le second membre de la nouvelle équation ne renfermera pas non plus de terme en y^3 et que l'on peut conserver les autres hypothèses relativement à la convergence de ce second membre, c'est-à-dire supposer que ce second membre est une fonction holomorphe des variables x, y, z, q, lorsque l'on a

$$|x| \leqq 1, \qquad |y| \leqq \rho, \qquad |z| \leqq \rho, \qquad |q| \leqq \rho,$$

le nombre positif ρ n'étant pas forcément le même que plus haut.

8. Si l'on développe suivant les puissances de y l'intégrale de l'équation (25) qui est nulle pour $x = 0$, le développement, nous l'avons déjà observé, commence par un terme en y^4 ou de degré supérieur. Posons

$$z = y^2 Z, \qquad P = \frac{\partial Z}{\partial x}, \qquad Q = \frac{\partial Z}{\partial y};$$

on a

$$p = y^2 P, \qquad q = y^2 Q + 2yZ = y(u + 2Z) \qquad \text{où} \qquad u = yQ,$$

et l'équation (25) devient

$$y^2 P = \varphi_{020}y^4 Z^2 + \varphi_{110}y^3 Z + \varphi_{011}y^3 Z(u + 2Z) + \varphi_{002}y^2(u + 2Z)^2 + \ldots.$$

Comme il n'y a pas de terme en y^3 dans le second membre, après la suppression du facteur commun y^2, tous les termes du second membre seront au moins du second degré en y, Z et $u = yQ$. Remplaçons les grandes lettres Z et Q par de petites lettres z et q, nous arrivons finalement à une nouvelle équation auxiliaire

$$p = \Phi(x; y, z, yq), \tag{26}$$

où tous les termes du second membre sont au moins du second degré en y, z, yq, ce second membre étant une fonction holomorphe de x, y, z, q lorsque $|x|$ ne dépasse pas l'unité pourvu que les modules des variables y, z, q restent inférieurs à un nombre positif convenable.

Cette fonction $\Phi(x; y, z, yq)$ peut être ordonnée suivant les puissances entières de x, y, z, yq. Soit

$$\mathfrak{M}(x; y, z, yq)$$

une fonction majorante pour Φ. Il est clair que la série entière en x et y qui représente l'intégrale de l'équation (26) se réduisant à zéro pour $x = 0$ est certainement convergente dans le même domaine que la série entière en x et y qui représente l'intégrale de l'équation auxiliaire

$$p = \mathfrak{M}(x; y, z, yq) \tag{27}$$

qui s'annule pour $x = 0$.

La série entière qui représente le développement de Φ admet toujours pour fonction majorante une expression de la forme

$$\frac{M(y + z + yq)^2}{(1 - x)[1 - \alpha(y + z + yq)]},$$

M et α étant deux nombres positifs, puisque tous les termes de ce développement sont au moins du second degré en y, z, yq. L'expression

$$\frac{M\left(\frac{y}{1-x} + z + yq\right)^2}{(1 - x)\left[1 - \alpha\left(\frac{y}{1-x} + z + yq\right)\right]}$$

sera *a fortiori* majorante pour Φ, et nous pouvons prendre pour équation auxiliaire l'équation

$$p = \frac{M\left(\frac{y}{1-x} + z + yq\right)^2}{(1 - x)\left[1 - \alpha\left(\frac{y}{1-x} + z + yq\right)\right]}. \tag{27'}$$

Il suit de là, d'après un raisonnement bien connu, que la série entière, qui représente l'intégrale de l'équation (26) se réduisant à zéro pour $x = 0$, est certainement convergente dans le même domaine que toute série entière, à coefficients *réels et positifs,* satisfaisant à l'équation auxiliaire (27)'.

Cherchons une intégrale de $(27)'$ qui soit de la forme

$$z = \varphi\left(\frac{y}{1-x}\right) = \varphi(u);$$

on aura, pour une intégrale de cette espèce,

$$p = \varphi'(u)\frac{y}{(1-x)^2}, \qquad q = \frac{\varphi'(u)}{1-x},$$

et l'équation $(27)'$ devient, en multipliant les deux membres par $1-x$,

$$u\,\varphi'(u) = \frac{\mathrm{M}[u+\varphi(u)+u\,\varphi'(u)]^2}{1-\alpha[u+\varphi(u)+u\,\varphi'(u)]}.$$

On déduit de cette équation un développement de $u\,\varphi'(u)$ suivant les puissances de u et de $\varphi(u)$, commençant par des termes du second degré, et dont tous les coefficients sont réels et positifs. On peut le vérifier en résolvant l'équation ou le déduire de la théorie générale des fonctions implicites. Soit

$$(28) \qquad u\,\varphi'(u) = \mathrm{A}\,u^2 + \mathrm{B}\,\varphi^2(u) + \ldots$$

cette racine. Cette équation admet une intégrale holomorphe nulle pour $u=0$, qui est représentée par un développement en série entière dont tous les coefficients sont réels et positifs

$$(29) \qquad \varphi(u) = \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \ldots,$$

et qui est convergente pourvu que l'on ait $|u| \leqq r$, en désignant par r un nombre positif convenable.

Remplaçons dans cette série u par $\dfrac{y}{1-x}$, nous en déduisons une série entière en x et y, $\mathrm{S}(x, y)$, dont tous les coefficients sont encore des nombres réels et positifs, et qui représente une fonction holomorphe des variables x et y pourvu que l'on ait

$$\left|\frac{y}{1-x}\right| \leqq r.$$

Supposons $|x| \leqq \theta < 1$; alors $|1-x| \geqq 1-\theta$, et l'inégalité $|y| \leqq r\,|1-x|$ sera certainement vérifiée si l'on a $|y| \leqq r(1-\theta)$. La série entière $\mathrm{S}(x, y)$ sera donc convergente pourvu que l'on ait à la fois

$$|x| \leqq \theta < 1, \qquad |y| \leqq r(1-\theta),$$

et il en sera de même *a fortiori* de la série entière qui représente l'intégrale de l'équation (26) se réduisant à zéro pour $x = 0$. On en conclut, en remontant de proche en proche, le théorème énoncé plus haut (n° 7).

9. La démonstration précédente de la convergence suppose que les coefficients φ_{ikl} du second membre de l'équation (19) sont des fonctions *analytiques* de la variable x. Mais il est à remarquer que cette hypothèse n'est nullement nécessaire pour qu'on puisse déterminer de proche en proche les coefficients $\psi_2, \psi_3, \ldots$ de la série (20); il suffit que les fonctions φ_{ikl} soient des fonctions continues de la variable *réelle* x dans un certain intervalle. Supposons, pour fixer les idées, que ces fonctions φ_{ikl} soient continues dans l'intervalle (x_0, x_1) et que la série (19) soit convergente pour toute valeur de x dans cet intervalle, pourvu que les modules des variables y, z, q ne dépassent pas un nombre positif ρ. Soit a une valeur de x dans cet intervalle et $f(y)$ une fonction analytique de y, holomorphe dans le voisinage de la valeur $y = 0$, nulle ainsi que sa dérivée première pour $y = 0$. On peut déterminer, tout comme plus haut, une série entière

$$z = \psi_2(x)y^2 + \psi_3(x)y^3 + \ldots + \psi_n(x)y^n + \ldots,$$

satisfaisant formellement à l'équation (19), et se réduisant à $f(y)$ pour $x = a$. Le premier coefficient $\psi_2(x)$ est encore déterminé par l'équation de Riccati (22), dont les coefficients sont des fonctions continues de la variable réelle x dans l'intervalle (x_0, x_1). L'intégrale de cette équation, qui prend la valeur initiale donnée pour $x = a$, est certainement continue dans le voisinage de la valeur a. Si elle est continue dans un intervalle (x'_0, x'_1), où $x_0 \leqq x'_0 < x'_1 \leqq x_1$, tous les coefficients suivants $\psi_3, \psi_4, \ldots$ sont déterminés de proche en proche par des *équations linéaires*, dont les coefficients sont continus dans le même intervalle (x'_0, x'_1); tous ces coefficients sont donc eux-mêmes des fonctions continues de x dans l'intervalle (x'_0, x'_1).

Pour démontrer la convergence de la série ainsi obtenue, supposons $a = 0$, ce qui revient à un simple changement de notation, et supposons le coefficient $\psi_2(x)$ continu, ainsi que toutes les fonctions φ_{ikl}, dans l'intervalle $(0, X)$, où $X > 0$. Par une suite de transformations toutes pareilles à celles qui ont été employées plus haut, et qui ne supposent pas les fonctions analytiques, on est ramené à démontrer qu'une équation de la forme (26)

$$p = \Phi(x; y, z, yq), \tag{26'}$$

où le second membre est une série entière en y, z, yq, commençant par des termes du second degré au moins, dont tous les coefficients sont des fonctions continues de x dans l'intervalle $(0, X)$, admet une intégrale se réduisant à zéro identiquement pour $x = 0$. Il faut, en outre, montrer que cette intégrale est représentée par une série entière en y, dont tous les coefficients sont des fonctions continues de x dans l'intervalle (o, X), et qui est convergente pour toute valeur de x dans cet intervalle pourvu que la valeur absolue de y reste inférieure à un nombre positif assez petit.

Si l'on cherche encore pour cette intégrale un développement de la forme

$$z = \pi_2(x)y^2 + \pi_3(x)y^3 + \ldots,$$

tous les coefficients successifs $\pi_2, \pi_3, \ldots$ (à partir du premier π_2) sont déterminés par des équations différentielles linéaires du premier ordre de la forme

$$\frac{d\pi_n(x)}{dx} = \mathrm{A}\,\pi_n(x) + \mathrm{B}, \tag{30}$$

A et B étant des polynomes à coefficients entiers et positifs ne dépendant que de $\pi_2, \ldots, \pi_{n-1}$ et de quelques-uns des coefficients de la série Φ. Ces fonctions Π_n se déduisent donc de proche en proche des coefficients de Φ par *des quadratures seulement,* et rien n'exige, par conséquent, que ces coefficients soient analytiques.

Imaginons que l'on intègre l'équation linéaire (30) par la méthode des approximations successives; on en conclut immédiatement que, si l'on remplace les fonctions A et B par des fonctions positives dans l'intervalle (o, X) et supérieures à leurs valeurs absolues, l'intégrale de la nouvelle équation qui a une valeur positive pour $x = 0$ sera positive dans tout l'intervalle (o, X) et supérieure à la valeur absolue de l'intégrale de l'équation (30) qui est nulle pour $x = 0$. Par conséquent, si l'on remplace chaque coefficient de Φ par une fonction de x positive dans l'intervalle (o, X) et supérieure à sa valeur absolue, on obtient une nouvelle équation auxiliaire

$$p = \mathfrak{M}(x; y, q, yq); \tag{27'}$$

et si l'on développe, suivant les puissances de y, l'intégrale de cette équation qui, pour $x = 0$, se réduit à une série entière en y dont tous les coefficients sont réels et positifs, tous les coefficients de ce développement seront des fonctions de x positives dans l'intervalle (o, X), et supérieures en valeur absolue aux coefficients correspondants de la série provenant de l'équation (26)'.

Or, soit M une limite supérieure du module de la fonction $\Phi(x; y, z, yq)$ lorsque, la variable x restant dans l'intervalle (o, X), les modules des variables y, z, yq ne dépassent pas un nombre positif ρ. On peut prendre pour $\mathfrak{M}(x; y, z, yq)$ l'expression

$$\frac{\mathrm{M}(y+z+yq)^2}{1-\alpha(y+z+yq)},$$

α étant un nombre positif, et par conséquent aussi l'expression

$$\frac{M(ye^x+z+yq)^2}{1-\alpha(ye^x+z+yq)}.$$

Or, si l'on considère l'équation auxiliaire

$$(27)' \qquad p=\frac{M(ye^x+z+yq)^2}{1-\alpha(ye^x+z+yq)},$$

et que l'on cherche une intégrale de cette équation de la forme

$$z=\varphi(ye^x)=\varphi(u),$$

on a

$$p=u\varphi'(u), \qquad q=\varphi'(u)e^x,$$

et l'on est conduit à la même équation que tout à l'heure

$$u\varphi'(u)=\frac{M[u+\varphi(u)+u\varphi'(u)^2]}{1-\alpha[u+\varphi(u)+u\varphi'(u)]};$$

on en conclut que l'équation $(27)'$ admet une intégrale particulière représentée par une série entière de la forme

$$Z=\alpha_2(ye^x)^2+\alpha_3(ye^x)^3+\ldots,$$

dont tous les coefficients sont des nombres réels et positifs, et qui est convergente pourvu que l'on ait

$$|ye^x|<r,$$

r désignant un nombre positif. Cette série sera donc convergente pour toute valeur de x dans l'intervalle $(0, X)$ pourvu que l'on ait

$$|y|<\frac{r}{e^X};$$

il en sera donc de même de la série qui représente le développement suivant les puissances de y de l'intégrale de l'équation $(26)'$ qui est nulle pour $x=0$.

10. Le théorème précédent a des conséquences importantes pour l'étude des singularités mobiles des surfaces intégrales sur une caractéristique donnée. Bornons-nous, pour fixer les idées, au domaine réel, et supposons que les coefficients φ_{ikl} de l'équation (19) soient des fonctions holomorphes (ou tout au moins continues) de la variable réelle x dans un intervalle (x_0, x_1), où $x_0<x_1$. Soit a une valeur de x dans cet intervalle et $f(y)$ une fonction *analytique* de y,

holomorphe dans le domaine de l'origine, et nulle ainsi que sa dérivée pour $y = 0$.

Nous avons vu que, pour déterminer l'intégrale de l'équation (19), qui se réduit à $f(y)$ pour $x = a$, on est tout d'abord conduit à rechercher l'intégrale de l'équation de Riccati

$$\frac{d\psi_2}{dx} = \varphi_{200} + (\varphi_{010} + 2\varphi_{101})\psi_2(x) + 4\varphi_{002}[\psi_2(x)]^2, \tag{22}$$

qui prend la valeur $\frac{f''(0)}{2}$ pour $x = a$. Si cette intégrale est continue dans un intervalle (x'_0, x'_1)

$$x_0 \leqq x'_0 < a < x'_1 \leqq x_1,$$

y compris les limites, il en est de même de tous les coefficients suivants $\psi_3, \psi_4, \ldots$ et la série qui représente l'intégrale cherchée est convergente dans tout cet intervalle pourvu que $|y|$ soit inférieur à un nombre positif convenable. La surface intégrale cherchée ne présente donc aucun point singulier sur la caractéristique dans tout l'intervalle (x'_0, x'_1).

Cela posé, soit AB un segment de caractéristique compris entre les deux points d'abscisses a et b $(x_0 \leqq a < b \leqq x_1)$. Pour qu'il existe une surface intégrale tangente au plan des xy tout le long du segment AB, et n'ayant aucun point singulier sur ce segment, il faut et il suffit, d'après cela, que *l'équation de Riccati* (22) *admette une intégrale continue dans l'intervalle* (a, b). C'est, comme on le voit, une condition tout à fait analogue à la condition de Jacobi pour la variation seconde d'une intégrale simple; nous montrerons du reste un peu plus loin que la condition de Jacobi n'est au fond qu'un cas particulier de la précédente.

III.

11. Si la fonction $\psi_2(x)$ devient infinie pour une valeur $x = b$ de l'intervalle (x_0, x_1), ce point est un point singulier de la surface intégrale (n° 1). Nous étudierons d'abord la surface dans le voisinage de ce point au moyen de la transformation de contact d'Ampère. Supposons que la fonction $\psi_2(x)$ admette l'origine comme pôle, et prenons un nombre h assez petit pour que cette fonction $\psi_2(x)$ n'ait ni pôles ni zéros dans l'intervalle $(-h, h)$, en dehors du pôle $z = 0$. La surface intégrale (S) que l'on veut étudier dans le voisinage de l'origine est coupée par un plan $x = a$ (a étant compris dans cet intervalle), suivant une courbe analytique, dont la projection sur le plan des yz a pour équation

$$z = y^2\psi_2(a) + y^3\psi_3(a) + \ldots, \tag{31}$$

le coefficient $\psi_2(a)$ n'étant pas nul, et la série (31) étant convergente dans le voisinage de $y=0$.

Cela posé, appliquons à cette surface (S) la transformation de contact d'Ampère définie par les formules

$$(32) \qquad x=X, \quad y=-Q, \quad z=Z-QY, \quad p=P, \quad q=Y,$$

d'où l'on tire inversement

$$X=x, \quad Y=q, \quad Z=z-qy, \quad P=p, \quad Q=-y.$$

Lorsque le point (x, y, z) décrit la surface (S), le point de coordonnées (X, Y, Z) décrit une surface (Σ), et les coefficients angulaires du plan tangent à cette nouvelle surface sont précisément P et Q. La coordonnée Z, considérée comme fonction de X et de Y, satisfait à une équation aux dérivées partielles du premier ordre qui se déduit de l'équation (19) au moyen des formules (32). Cette nouvelle équation s'écrit, en conservant les lettres x et p au lieu de X et de P,

$$\begin{aligned} p = {} & \varphi_{010}(Z-QY)+\varphi_{200}Q^2+\varphi_{110}Q(QY-Z) \\ & +\varphi_{020}(Z-QY)^2-\varphi_{101}YQ+\varphi_{011}(Z-QY)Y+\varphi_{002}Y^2+\ldots, \end{aligned}$$

ou, en n'écrivant que les termes du premier et du second degré, en Y, Z, Q,

$$(33) \qquad \begin{aligned} p = {} & \varphi_{010}Z+\varphi_{002}Y^2+\varphi_{011}YZ \\ & +\varphi_{020}Z^2-(\varphi_{010}+\varphi_{101})YQ-\varphi_{110}ZQ+\varphi_{200}Q^2+\ldots. \end{aligned}$$

La nouvelle équation (33) est de même forme que l'équation (19) et, par conséquent, la surface (Σ) doit admettre aussi tous les éléments de la multiplicité caractéristique

$$Y=Z=P=Q=0.$$

D'autre part, pour $x=a$, Z doit se réduire à une fonction de Y dont il est facile d'avoir l'expression; en effet, pour $x=a$, z est donnée en fonction de y par la formule (31), et l'on en déduit successivement

$$\begin{aligned} Y = {} & \quad q \quad = 2y\,\psi_2(a)+3y^2\psi_3(a)+\ldots, \\ Z = {} & z-qy = -y^2\psi_2(a)-2y^2\psi_3(a)+\ldots. \end{aligned}$$

Mais, $\psi_2(a)$ n'étant pas nul, on peut tirer de la première de ces formules l'expression de y en fonction de Y; en portant l'expression de y dans la seconde formule, on voit que, pour $x=a$, Z se réduit à une fonction holomorphe de Y,

$$(34)\qquad Z = -\frac{Y^2}{4\psi_2(a)} + KY^3 + \ldots.$$

La fonction Z des deux variables x et Y est donc complètement déterminée par la condition de se réduire à la fonction holomorphe (34) pour $x = a$ et de satisfaire à l'équation (33). Nous allons montrer que cette fonction Z est une fonction holomorphe des deux variables x et Y dans le voisinage du segment $(-h, +h)$ de l'axe des x. Il suffit pour cela que le coefficient de Y^2 dans le développement de l'intégrale Z suivant les puissances de Y

$$(35)\qquad Z = Y^2\,\Psi_2(x) + Y^3\,\Psi_3(x) + \ldots$$

n'admette pas de pôles dans l'intervalle $(-h, +h)$. Ce coefficient $\Psi_2(x)$ doit vérifier l'équation différentielle de Riccati

$$(36)\qquad \Psi_2'(x) = \varphi_{002} - (\varphi_{010} + 2\varphi_{101})\Psi_2 + 4\varphi_{200}\Psi_2^2$$

et se réduire à $-\frac{1}{4\psi_2(a)}$ pour $x = a$. Or cette équation (36) se déduit de l'équation (22), qui définit la fonction $\psi_2(x)$, en posant

$$\psi_2(x) = -\frac{1}{4\Psi_2(x)}.$$

Cette fonction $\Psi_2(x)$ est donc égale à $-\frac{1}{4\psi_2(x)}$, et, par conséquent, d'après la façon dont on a choisi l'intervalle $(-h, +h)$, elle est continue dans cet intervalle et s'annule pour $x = 0$. Il s'ensuit que la surface (Σ) est représentée dans le voisinage de l'origine par le développement (35), la série étant convergente dans l'intervalle $(-h, +h)$, pourvu que la valeur absolue de Y soit inférieure à un nombre positif convenable. La surface (S) elle-même est donc représentée, dans le voisinage de l'origine, par le système des deux formules

$$(37)\qquad \begin{cases} x = x, \\ y = \quad -Q \quad = -2Y\,\Psi_2(x) - 3Y^2\,\Psi_3(x) - \ldots - nY^{n-1}\,\Psi_n(x) \qquad - \ldots, \\ z = Z - QY = -\,Y^2\,\Psi_2(x) - 2Y^3\,\Psi_3(x) - \ldots - (n-1)Y^n\,\Psi_n(x) - \ldots, \end{cases}$$

x et Y devant être considérés comme deux paramètres variables.

Les seconds membres de ces formules sont des fonctions holomorphes des variables x et Y dans le voisinage des valeurs $x = 0$, $Y = 0$. L'origine est donc une singularité *algébrique* pour la surface (S).

Si la fonction $\varphi_{002}(x)$ n'est pas nulle pour $x = 0$ (ce qui est le cas général), la fonction $\Psi_2(x)$ admet $x=0$ pour racine simple. Considérons sur la surface (Σ) la courbe C définie par la relation

$$\frac{\partial Q}{\partial Y}=2\Psi_2(x)+6Y\Psi_3(x)+\ldots+n(n-1)Y^{n-2}\Psi_n(x)+\ldots=0;$$

cette courbe C passe par l'origine, qui est un point simple puisque $\Psi_2'(0)$ n'est pas nul. Nous supposerons d'abord que cette courbe C ne se réduit pas à $x=0$, ce qui ne pourrait avoir lieu que si toutes les fonctions $\Psi_3, \ldots, \Psi_n, \ldots$ étaient nulles pour $x=0$. A la courbe C de (Σ) correspond sur la surface (S) une courbe Γ tangente à l'origine à l'axe Ox.

Supposons d'abord que $\Psi_3(0)$ ne soit pas nul, alors, pour un point de la courbe Γ voisin de l'origine, le développement de x suivant les puissances de Y commence par un terme du premier degré en Y, tandis que les développements de y et de z commencent par des termes du deuxième et du troisième degré respectivement.

Soient

$$\Psi_2(x)=Ax+A_1x^2+\ldots, \qquad A\neq 0,$$
$$\Psi_3(x)=B+B_1x+\ldots, \qquad B\neq 0,$$

on trouve facilement pour les premiers termes de x, y, z

$$(\Gamma)\qquad \left\{\begin{aligned} x&=-\frac{3B}{A}Y+\ldots,\\ y&=3BY^2+\ldots,\\ z&=BY^3+\ldots,\end{aligned}\right.$$

de sorte que le plan osculateur à l'origine est le plan des xy. Cette courbe Γ est un lieu de points de rebroussement pour les sections planes de la surface par des plans parallèles au plan $x=0$.

En effet, soient (ξ, η) les coordonnées d'un point de la courbe Γ voisin de l'origine; en remplaçant x par ξ dans les équations (37), les formules obtenues représentent la section de la surface (S) par le plan $x=\xi$. Or les dérivées

$$\frac{\partial y}{\partial Y}, \quad \frac{\partial z}{\partial Y}$$

s'annulent pour $x=\xi$, $y=\eta$: le point correspondant aux valeurs (ξ, η) est donc un point de rebroussement de la section plane. La forme de la surface (S) dans le voisinage de l'origine est donc analogue à celle d'une surface développable, qui aurait la courbe Γ pour arête de rebroussement, ce qui est bien d'accord avec la théorie géométrique des équations aux dérivées partielles du premier ordre [1].

Si la courbe C était tangente à l'origine à l'axe des Y, $x = 0$, on verrait de même que les développements de x, y, z suivant les puissances de Y commencent respectivement par des termes de degrés n, $n+1$, $n+2$ $(n > 1)$, et l'axe des x est une tangente stationnaire de Γ.

La conclusion est différente si toutes les fonctions Ψ_3, Ψ_4, ... sont nulles pour $x = 0$; la courbe C se réduit alors à la droite $x = 0$, et la courbe correspondante Γ au point $x = y = z = 0$. Il est facile de vérifier que la surface (S) admet alors l'origine comme point conique. En effet, si nous donnons au paramètre Y une valeur constante $Y = \lambda$, et que nous fassions varier x à partir de zéro, le point (x, y, z) de la surface S décrit une courbe Γ_λ issue de l'origine, représentée par les équations

$$y = -x[2\Psi'_2(0)\lambda + 3\Psi'_3(0)\lambda^2 + \ldots] + x^2 + \ldots,$$
$$z = -x[\Psi'(0)\lambda^2 + 2\Psi'_3(0)\lambda^3 + \ldots] + x^2 + \ldots.$$

Le lieu des tangentes à ces courbes à l'origine est un cône dont on obtiendrait l'équation en réduisant les seconds membres des formules précédentes à leurs premiers termes et en éliminant le paramètre λ. Nous retrouvons ainsi l'intégrale à point conique, lieu des courbes caractéristiques issues de l'origine.

Les singularités précédentes sont les singularités *normales,* qui correspondent au cas général où la fonction $\varphi_{002}(x)$ n'est pas nulle pour $x = 0$. Si l'on a $\varphi_{002}(0) = 0$, l'origine est un pôle multiple pour $\psi_2(x)$ et par suite une racine multiple de $\Psi_2(x)$. Je laisse de côté l'étude détaillée de tous les cas particuliers possibles. Remarquons seulement que, lorsque $x = 0$ est une racine double de $\Psi_2(x)$ et une racine simple de $\Psi_3(x)$, la courbe C a un point double à l'origine; la courbe de rebroussement Γ a donc elle-même un point double à l'origine, et les deux branches de courbe qui y passent peuvent être réelles ou imaginaires.

12. Revenons au cas général où l'équation $\Psi_2(x) = 0$ admet $x = 0$ pour racine simple, et où l'une au moins des fonctions $\Psi_3(x)$, $\Psi_4(x)$, ... ne s'annule pas pour cette valeur de x. Remplaçons, dans la seconde des équations (37), y par $x^2 u$ et Y par xU; en divisant les deux membres de l'égalité obtenue par x^2, il reste

$$(37\ bis) \qquad u = -2U[\Psi'_2(0) + x + \ldots] - 3U^2\Psi_3(x) + \ldots.$$

De cette relation (37 *bis*) on peut déduire, puisque $\Psi'_2(0)$ n'est pas nul, un

(1) *Voir* le Mémoire de M. Darboux, *Sur les solutions singulières des équations aux dérivées partielles du premier ordre* (*Mémoires des savants étrangers,* t. XXVII).

développement de U en série entière ordonnée suivant les puissances de u et de x, et par suite un développement de $\frac{Y}{x}$ en série entière ordonnée suivant les puissances de x et de $\frac{y}{x^2}$. En l'ordonnant suivant les puissances de $\frac{y}{x^2}$, on peut l'écrire

$$(38) \qquad \frac{Y}{x} = \frac{y}{x^2}\pi_1(x) + \left(\frac{y}{x^2}\right)^2 \pi_2(x) + \ldots + \left(\frac{y}{x^2}\right)^n \pi_n(x) + \ldots,$$

$\pi_1(x)$, $\pi_2(x)$, $\ldots$, $\pi_n(x)$, $\ldots$ étant des séries entières en x. D'autre part, on peut écrire la dernière des formules (37)

$$(39) \quad \frac{z}{x^2} = -\left(\frac{Y}{x}\right)^2 \Psi_2(x) - 2x\,\Psi_3(x)\left(\frac{Y}{x}\right)^3 - \ldots - (n-1)x^{n-2}\,\Psi_n(x)\left(\frac{Y}{x}\right)^n - \ldots.$$

En remplaçant enfin dans ce développement $\frac{Y}{x}$ par la série (38), on obtient finalement un développement de $\frac{z}{x^2}$ *suivant les puissances de x et de* $\frac{y}{x^2}$,

$$(40) \qquad \frac{z}{x^2} = \frac{y^2}{x^4}\Pi_2(x) + \left(\frac{y}{x^2}\right)^3 \Pi_3(x) + \ldots + \left(\frac{y}{x^2}\right)^n \Pi_n(x) + \ldots,$$

$\Pi_2(x)$, $\Pi_3(x)$, $\ldots$, $\Pi_n(x)$ *étant des séries entières en x.*

D'après la façon même dont la série (40) a été obtenue, on peut affirmer que cette série est convergente lorsque les modules de x et de $\frac{y}{x^2}$ restent inférieurs à une certaine limite, pourvu que la série (35) soit elle-même convergente dans le voisinage de l'origine. La formule (40) représente la nappe de la surface intégrale (S) passant par l'axe des x dans le voisinage de l'origine. Il est facile d'obtenir des développements de cette espèce pour représenter une portion de nappe d'une surface développable passant par une génératrice dans le voisinage de l'arête de rebroussement.

Remarque. — Lorsque toutes les fonctions Ψ_3, Ψ_4, $\ldots$ sont divisibles par x, on tire de la seconde des équations (37) un développement de Y suivant les puissances de x et de $\frac{y}{x}$, et en substituant dans la troisième on a, pour représenter l'intégrale à point conique, un développement en série entière de $\frac{z}{x}$ suivant les puissances de x et de $\frac{y}{x}$.

13. En résumé, on voit que l'intégrale qui se réduit pour $x = a$ à une fonction donnée de y est représentée dans le voisinage de l'origine par un développement de la forme (40) ou, ce qui revient au même, de la forme

$$(41) \qquad z = y^2\,\psi_2(x) + y^3\,\psi_3(x) + \ldots + y^n\,\psi_n(x) + \ldots,$$

le coefficient $\psi_2(x)$ admettant l'origine pour pôle du premier ordre, et les autres coefficients $\psi_3, \ldots, \psi_n, \ldots$ n'ayant à l'origine qu'une discontinuité polaire. Il est clair que ces coefficients se détermineraient de proche en proche par l'intégration des équations (23). On reconnaît aisément, sur ces équations, que l'intégration ne peut introduire d'exposant fractionnaire, mais il paraît plus difficile de voir directement que l'intégration n'introduira jamais de terme logarithmique, aussi loin que l'on aille dans la suite des opérations, quelles que soient les valeurs initiales que l'on prenne pour $x = a$.

La conclusion serait la même, si l'origine était un pôle multiple de $\psi_2(x)$, et l'on peut énoncer d'une façon générale la propriété suivante :

Étant donnée une équation aux dérivées partielles du premier ordre analytique, les seuls points singuliers MOBILES *des intégrales analytiques sur une caractéristique sont des points singuliers algébriques.*

Dans cet énoncé, on laisse de côté, bien entendu, les points singuliers que la caractéristique elle-même peut présenter, et l'on ne considère que les surfaces intégrales admettant tous les éléments de cette caractéristique.

14. La méthode précédente s'applique aussi aux équations linéaires, mais les résultats sont encore plus simples. Soit

$$(42) \qquad p = a_{10}y + a_{01}z + \ldots + a_{ik}y^i z^k + \ldots + q(b_{10}y + b_{01}z + \ldots)$$

une équation linéaire aux dérivées partielles admettant pour caractéristique la ligne droite

$$y = z = 0;$$

nous supposerons que les coefficients a_{ik} et b_{ik} sont des fonctions holomorphes (ou tout au moins continues) de la variable x le long du segment (X_0, X_1) de l'axe des x, et que la série (42) est convergente, quelle que soit la valeur de x dans cet intervalle, pourvu que les modules des variables y, z, q restent inférieurs à un nombre positif déterminé.

L'axe des x appartient à une infinité de caractéristiques du premier ordre, et il suffit, pour déterminer une de ces caractéristiques, de se donner le plan tangent en un point du segment (X_0, X_1), c'est-à-dire un des éléments de la caractéristique. Soit $f(y)$ une fonction analytique de la variable y, s'annulant pour $y = 0$, et holomorphe dans le domaine de l'origine

$$(43) \qquad f(y) = \frac{y}{1} f'(0) + \frac{y^2}{1.2} f''(0) + \ldots + \frac{y^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(0) + \ldots.$$

Proposons-nous de développer suivant les puissances de y l'intégrale de l'équation (42) qui se réduit à $f(y)$ pour une valeur $x = a$ de l'intervalle (X_0, X_1),

$$z = \psi_1(x)y + \psi_2(x)y^2 + \ldots + \psi_n(x)y^n + \ldots.$$

Les valeurs initiales des fonctions ψ_1, ψ_2, ..., ψ_n, ... pour $x = a$ se tirent immédiatement du développement (43),

$$\psi_1(a) = f'(0), \qquad \psi_2(a) = \frac{f''(0)}{1.2}, \qquad \ldots, \qquad \psi_n(a) = \frac{f^{(n)}(0)}{1.2\ldots n}, \qquad \ldots.$$

D'autre part, on tire du développement de z en série

$$\begin{aligned} p &= \psi_1'(x)y + \psi_2'(x)y^2 + \ldots + \psi_n'(x)y^n \quad + \ldots, \\ q &= \psi_1(x) \quad + 2\psi_2(x)y + \ldots + n\psi_n(x)y^{n-1} + \ldots. \end{aligned}$$

En remplaçant z, p, q par leurs développements dans l'équation (42), et en égalant les coefficients des mêmes puissances de y dans les deux membres, on a, comme plus haut (n° 6), une suite d'équations différentielles permettant de déterminer de proche en proche les fonctions $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ..., en tenant compte des valeurs initiales.

La première de ces équations est une *équation de Riccati*

$$\frac{d\psi_1}{dx} = a_{10} + (a_{01} + b_{10})\psi_1 + b_{01}\psi_1^2; \tag{44}$$

les équations suivantes sont linéaires par rapport à la fonction inconnue et à sa dérivée. Le type général est le suivant :

$$\frac{d\psi_n}{dx} = a_{01}\psi_n + n\,b_{10}\psi_n + b_{01}\psi_1\psi_n + P, \tag{45}$$

P étant un polynome entier, à coefficients réels et positifs, par rapport aux fonctions a_{ik}, b_{ik} et aux fonctions ψ_1, ψ_2, ..., ψ_{n-1}.

Si l'intégrale de l'équation (44) qui prend la valeur $f'(0)$ pour $x = a$ est continue dans l'intervalle (x_0, x_1) $(X_0 \leqq x_0 < a < x_1 \leqq X_1)$, il en est de même des coefficients suivants ψ_2, ..., ψ_n, ... et la série est convergente dans tout cet intervalle pourvu que $|y|$ soit inférieur à un nombre positif convenable. Mais on peut obtenir un résultat plus complet lorsque les coefficients a_{ik} et b_{ik} sont des fonctions analytiques de x. En effet, une intégrale de l'équation de Riccati ne peut avoir que des pôles comme points singuliers dans l'intervalle (X_0, X_1) ; soit

$$\psi_1(x) = \frac{u(x)}{v(x)},$$

l'intégrale qui prend la valeur $f'(0)$ pour $x = a$, $u(x)$ et $v(x)$ étant des fonctions holomorphes de x dans l'intervalle (X_0, X_1). La transformation déjà employée (n° 3),

$$y = v(x)Y - u(x)Z,$$
$$z = u(x)Y + v(x)Z,$$
$$x = x$$

remplace l'équation linéaire (42) par une équation linéaire de même forme admettant la caractéristique du premier ordre

$$y = z = p = q = 0.$$

Pour cette nouvelle équation le coefficient a_{10} doit donc être nul et l'intégrale que l'on veut étudier se change en une intégrale tangente au plan des xy le long de l'axe Ox. Pour cette intégrale on a donc $\psi_1(x) = 0$, et, par conséquent, cette intégrale n'a aucun point singulier sur la caractéristique. Il en est donc de même de la surface intégrale de la première équation, et nous voyons que les surfaces intégrales de l'équation (42) qui passent par la caractéristique $y = z = 0$ n'ont aucun point singulier sur le segment (X_0, X_1).

La *fonction intégrale* z peut cependant avoir des points singuliers sur ce segment, mais ce sont les points où le plan tangent se confond avec le plan des xz.

Il est très facile de vérifier directement que tout pôle de $\psi_1(x)$ correspond à un point où le plan tangent est le plan xOz. Supposons, par exemple, que la fonction $\psi_1(x)$ ait un pôle à l'origine $x = 0$. Pour étudier la surface intégrale correspondante dans le voisinage de l'origine, imaginons que l'on prenne pour variables indépendantes x et z, et y pour la fonction inconnue. De la relation

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

on tire

$$dy = \frac{dz - p\,dx}{q}.$$

On a donc

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{q}, \qquad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{p}{q},$$

et, par suite,

$$q = \frac{1}{\dfrac{\partial y}{\partial z}}, \qquad p = -\frac{\dfrac{\partial y}{\partial x}}{\dfrac{\partial y}{\partial z}}.$$

Après ce changement de variables, l'équation (42) devient

$$-\frac{\partial y}{\partial x} = b_{10}y + b_{01}z + \ldots + \frac{\partial y}{\partial z}(a_{10}y + a_{01}z + \ldots).$$

Si la fonction $\psi_1(x)$ est infinie pour $x = 0$, au contraire dans le développement de y suivant les puissances de z, le coefficient de z doit être nul. Il s'ensuit que l'on a pour y une série entière en y et x, n'ayant pas de termes du premier degré, c'est-à-dire que l'origine est bien un point ordinaire pour la surface intégrale, le plan tangent étant le plan des xOz.

15. Nous allons appliquer les considérations qui précèdent à une question intéressante de la théorie des équations différentielles.

Soit

$$y'' = G(x, y, y') \tag{46}$$

une équation différentielle du second ordre. Nous dirons qu'une équation du premier ordre

$$y' = u(x, y) \tag{47}$$

est une *intégrale intermédiaire* de l'équation (46) si toutes les intégrales de l'équation (47) satisfont aussi à l'équation (46). Il faut et il suffit pour cela que l'on ait

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} u = G(x, y, u). \tag{48}$$

La méthode classique pour intégrer cette équation (48) conduit à considérer le système

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{u} = \frac{du}{G(x, y, u)},$$

que l'on peut encore écrire

$$u = \frac{dy}{dx}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = G\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right);$$

on retrouve précisément l'équation (46), et, par conséquent, ce procédé ne peut simplifier le problème, comme on devait s'y attendre. Mais la liaison entre les deux équations (46) et (48) permet de traiter simplement une question importante relative à l'équation (46), qui se présente en particulier dans le calcul des variations.

Soit $y = f(x)$ une intégrale de l'équation (46) continue, ainsi que sa dérivée, dans un certain intervalle (X_0, X_1), où $X_0 < X_1$. Considérons un intervalle (x_0, x_1) compris dans le précédent, $(X_0 \leq x_0 < x_1 \leq X_1)$, et la région $\mathcal{R}_\varepsilon$ du plan (x, y) défini par les inégalités [1]

$$x_0 \leq x \leq x_1, \qquad f(x) - \varepsilon \leq y \leq f(x) + \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif. Nous dirons que la région $\mathcal{R}_\varepsilon$ est un *champ* s'il existe

(1) Dans ce paragraphe et dans le suivant, nous supposons toujours qu'il s'agit de variables réelles.

une fonction $u(x, y)$ continue, ainsi que ses deux dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$, dans la région $\mathcal{R}_\varepsilon$, se réduisant à $f'(x)$ pour $y = f(x)$, et satisfaisant à l'équation (48). Si la région $\mathcal{R}_\varepsilon$ est un champ, par chaque point de ce champ il passe une courbe intégrale de l'équation

$$y' = u(x, y);$$

le faisceau formé par ces courbes comprend, en particulier, la courbe $y = f(x)$.

Si l'on observe maintenant que les équations

$$(49) \qquad y = f(x), \qquad u = f'(x)$$

représentent une courbe caractéristique de l'équation linéaire (48), on voit que le problème de reconnaître s'il est possible de choisir le nombre ε assez petit pour que la région $\mathcal{R}_\varepsilon$ soit un champ est équivalent au problème suivant :

Reconnaître si l'équation (48) *admet une intégrale passant par le segment de caractéristique* (49), *compris entre les deux points d'abscisses x_0 et x_1, et continue, ainsi que ses deux dérivées partielles, dans le voisinage de ce segment.*

On déduit très facilement la réponse de l'étude qui vient d'être faite, pourvu que la fonction G soit analytique par rapport aux deux variables y et y'. Faisons d'abord la transformation

$$y = f(x) + \mathrm{Y}, \qquad u = f'(x) + z;$$

l'équation (48) devient

$$(50) \qquad p + qz = \mathrm{G}[x, f(x) + \mathrm{Y}, f'(x) + z] - f''(x) \qquad \left\{ \begin{aligned} p &= \frac{\partial z}{\partial x}, \\ q &= \frac{\partial z}{\partial \mathrm{Y}}, \end{aligned} \right.$$

et il s'agit d'étudier les intégrales de l'équation (50) s'annulant pour $\mathrm{Y} = 0$ dans l'intervalle (x_0, x_1). Le second membre est nul pour $\mathrm{Y} = z = 0$, quel que soit x, puisque $f(x)$ est une intégrale de l'équation (46); nous supposerons que c'est une fonction holomorphe des variables Y et z, quelle que soit la valeur réelle de x entre X_0 et X_1, pourvu que $|\mathrm{Y}|$ et $|z|$ soient inférieurs à un nombre positif ρ. Si l'on écrit les premiers termes du développement de ce second membre suivant les puissances de Y et de z, on est conduit à l'équation

$$p + qz = \mathrm{A}_{10}\mathrm{Y} + \mathrm{A}_{01}z + \ldots,$$

où A_{10} et A_{01} sont les dérivées partielles $\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial y}$, $\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial y'}$, où l'on aurait remplacé y et z par $f(x)$ et $f'(x)$ respectivement après la différentiation. L'équation de Riccati (44) est ici

$$
\frac{d\psi_1}{dx} + \psi_1^2 - A_{10} - A_{01}\psi_1 = 0, \tag{44'}
$$

et il suffit que cette équation admette une intégrale continue dans l'intervalle (x_0, x_1) pour que la région $\mathcal{R}_\varepsilon$ soit un champ, le nombre ε ayant été pris assez petit.

L'intégration de l'équation (44)' se ramène à celle de l'équation linéaire du second ordre

$$
\frac{d^2\xi}{dx^2} - A_{01}\frac{d\xi}{dx} - A_{10}\xi = 0, \tag{51}
$$

en posant $\psi_1 = \frac{1}{\xi}\frac{d\xi}{dx}$. Il suffira donc que l'équation (51) admette une intégrale ne s'annulant pas dans l'intervalle (x_0, x_1). Soient ξ_1 une intégrale particulière (autre que zéro), s'annulant pour $x = x_0$, et x'_0 la première racine de cette intégrale supérieure à x_0; si cette intégrale n'a pas de racine entre x_0 et X_1, on prendra $x'_0 = X_1$. Pour que l'équation (51) ait une intégrale ne s'annulant pas entre x_0 et x_1, *il faut et il suffit que l'on ait* $x_1 < x'_0$.

Remarque. — Soient M_0 et M'_0 les points de la courbe intégrale $y = f(x)$, d'abscisses x_0 et x'_0. Il serait bien aisé de déduire de la théorie géométrique des caractéristiques des équations linéaires, et de ce qui a été établi plus haut, la propriété suivante. Considérons une courbe intégrale de l'équation (46) issue du point M_0, et coupant la première sous un angle θ très petit; soit m le point de rencontre de ces deux courbes le plus voisin du point M_0 et d'abscisse supérieure à x_0. Lorsque l'angle θ tend vers zéro, ce point m a précisément pour limite le point M'_0.

Ce résultat peut aussi s'établir en observant que l'équation linéaire (51) est l'équation *aux variations* relative aux intégrales de l'équation (46) infiniment voisines de l'intégrale $y = f(x)$, c'est-à-dire l'équation que l'on obtient en égalant à zéro le coefficient de λ dans les deux membres de l'équation

$$
f''(x) + \lambda\xi'' = G[x, f(x) + \lambda\xi, f'(x) + \lambda\xi'].
$$

Pour retrouver la condition de Jacobi relative au signe de la variation seconde de l'intégrale

$$
I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx,
$$

il suffit d'appliquer le résultat qui précède à l'équation du second ordre que l'on obtient en égalant à zéro la première variation de cette intégrale.

IV.

16. Considérons maintenant une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre admettant la caractéristique du second ordre Γ_2 définie par les équations

$$y = z = p = q = r = s = t = 0.$$

Ainsi qu'on l'a déjà fait remarquer (nº 5), cette équation est de la forme

$$s = Az + Bp + Cq + Dr + Ey^2 + Fyt + Ht^2 + \ldots, \tag{52}$$

les termes non écrits étant au moins du second degré en y, z, p, q, r, t et les coefficients étant des fonctions holomorphes de la variable x dans un domaine simplement connexe $\mathfrak{D}_x$, renfermant un segment (X_0, X_1) de l'axe réel. De plus, la série qui est au second membre est supposée convergente lorsque, la variable x restant dans le domaine $\mathfrak{D}_x$, les modules des variables y, z, p, q, r, t restent inférieurs à un nombre positif ρ.

Soit $f(y)$ une fonction analytique de y, holomorphe dans le domaine de l'origine et s'annulant, ainsi que ses deux premières dérivées, pour $y = 0$,

$$f(y) = f'''(0)\frac{y^3}{6} + f^{\text{IV}}(0)\frac{y^4}{24} + \ldots. \tag{53}$$

L'équation (52) admet une infinité d'intégrales se réduisant à $f(y)$ pour une valeur particulière a de la variable x comprise entre X_0 et X_1, mais cette intégrale est complètement déterminée si elle est en outre assujettie à renfermer tous les éléments de la caractéristique Γ_2. Si l'on développe cette intégrale suivant les puissances de y, on obtient une série de la forme

$$z = \psi_3 y^3 + \psi_4 y^4 + \ldots + \psi_n y^n + \ldots, \tag{54}$$

ψ_3, ψ_4, ..., ψ_n, ... étant des fonctions de x dont on connaît *a priori* les valeurs pour $x = a$,

$$\psi_3(a) = \frac{f'''(0)}{6}, \qquad \psi_4(a) = \frac{f^{\text{IV}}(0)}{24}, \qquad \ldots, \qquad \psi_n(a) = \frac{f^{(n)}(0)}{1.2\ldots n}, \quad \ldots \tag{55}$$

De la formule (54) on tire

$$\begin{aligned}
p &= y^3\psi_3' + y^4\psi_4' + y^5\psi_5' + \ldots,\\
q &= 3y^2\psi_3 + 4y^3\psi_4 + 5y^4\psi_5 + \ldots,\\
r &= y^3\psi_3'' + y^4\psi_4'' + y^5\psi_5'' + \ldots,\\
s &= 3y^2\psi_3' + 4y^3\psi_4' + 5y^4\psi_5' + \ldots,\\
t &= 6y\,\psi_3 + 12y^2\psi_4 + 20y^3\psi_5 + \ldots.
\end{aligned}$$

Substituons ces développements dans l'équation (52) et égalons d'abord les coefficients de y^2 dans les deux membres; on obtient une *équation de Riccati* pour déterminer le coefficient ψ_3,

$$(56) \qquad 3\frac{d\psi_3}{dx} = E + (3C + 6F)\psi_3 + 36H\psi_3^2.$$

Prenons de même le coefficient de $y^{n-1}(n > 3)$; dans le premier membre, ce coefficient est $n\psi_n'$. Dans le second membre, le coefficient de y^{n-1} ne peut dépendre que de $\psi_3, \psi_4, \ldots, \psi_n$, car il en est ainsi dans z, p, q, r; dans t le terme en y^{n-1} contient ψ_{n+1}, mais il n'y a aucun terme en t dans le second membre. De plus, le coefficient de y^{n-1} dans le second membre est *linéaire* par rapport à ψ_n. En effet, tous les termes en z, p, r ne donnent pas de terme en y^{n-1} renfermant ψ_n; le terme Cq donne le terme $nCy^{n-1}\psi_n$; les termes Fyt et Ht^2 donnent respectivement $n(n-1)F\psi_n y^{n-1}$ et $12Hn(n-1)\psi_3\psi_n y^{n-1}$. On a donc pour déterminer $\psi_n(x)(n > 3)$ l'*équation linéaire*

$$(57) \qquad \frac{d\psi_n}{dx} = [C + (n-1)F + 12H(n-1)\psi_3]\psi_n + R(\psi_3, \psi_4, \ldots, \psi_{n-1}),$$

R étant un polynome, à coefficients entiers et positifs, par rapport à quelques-uns des coefficients de la série (52) et par rapport aux fonctions $\psi_3, \psi_4, \ldots, \psi_{n-1}$ et à leurs dérivées du premier et du second ordre.

Les équations (56) et (57), jointes aux conditions initiales (55), permettent de déterminer de proche en proche tous les coefficients du développement cherché (54). Ces coefficients sont des fonctions holomorphes de x dans le domaine de $x = a$ et, si l'on ordonne la série (54) par rapport aux puissances positives de y et de $x - a$, on obtient une série double qui est certainement convergente pourvu que les modules de y et de $x - a$ restent inférieurs à une limite assez petite. Nous nous proposons d'obtenir un résultat plus précis en étudiant la convergence de la série (54) dans le voisinage de la caractéristique Γ_2.

La fonction $\psi_3(x)$, satisfaisant à l'équation de Riccati (56), ne peut avoir que des pôles dans le domaine simplement connexe $\mathcal{D}_x$. Soit $\mathcal{D}'_x$ un domaine simplement connexe, intérieur à $\mathcal{D}_x$, tel que $\psi_3(x)$ n'ait aucun pôle sur le contour ni à l'intérieur de $\mathcal{D}'_x$. Les autres fonctions $\psi_4(x), \psi_5(x), \ldots$ seront toutes des fonctions holomorphes dans le même domaine. Nous supposerons que l'on a effectué au préalable une transformation conforme sur la variable x, de façon que ce domaine $\mathcal{D}'_x$ se réduise à un cercle de rayon *un* ayant pour centre l'origine, et que l'on ait en outre $a = 0$. Le second membre de la formule (52) est alors une fonction holomorphe des variables x, y, z, p, q, r, t dans le domaine défini par les inégalités

$$|x| \leqq 1, \quad |y| \leqq \rho, \quad |z| \leqq \rho, \quad |p| \leqq \rho, \quad |q| \leqq \rho, \quad |r| \leqq \rho, \quad |t| \leqq \rho;$$

toutes les fonctions ψ_3, ψ_4, ..., ψ_n, ... sont elles-mêmes des fonctions holomorphes de x pourvu que l'on ait $|x| \leqq 1$. Ces fonctions sont toujours déterminées par les équations (56) et (57), et les conditions initiales (55) où l'on doit supposer $a = 0$.

17. Nous pouvons, par une suite de transformations simples, faire disparaître un certain nombre de termes de l'équation (52), comme pour une équation du premier ordre (n° 7). Si l'on pose d'abord

$$z = f(y) + Z,$$

la nouvelle équation sera de même forme que la première, mais la nouvelle fonction inconnue Z devra se réduire à zéro pour $x = 0$, de sorte que l'on peut supposer que les valeurs initiales de toutes les fonctions $\psi_n(x)$ pour $x = 0$ sont nulles.

Soient $\psi_3(x)$ et $\psi_4(x)$ les deux premières de ces fonctions; si l'on pose

$$z = y^3 \psi_3(x) + y^4 \psi_4(x) + Z,$$

on est encore conduit à une équation de même forme, et l'intégrale de cette équation qui se réduit à zéro pour $x = 0$, ou pour $y = 0$, a un développement qui commence par un terme en y^5. On en conclut que, dans le second membre de cette équation, les coefficients de y^2 et de y^3 doivent être nuls.

Ayant ainsi fait disparaître les termes en y^2 et en y^3, pour faire disparaître le terme en yt, posons

$$x = X, \qquad y = Y\lambda(X), \qquad \lambda' = \frac{\partial \lambda}{\partial X},$$

λ étant une fonction de X qui sera déterminée plus loin. La relation

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

devient

$$dz = p\,dX + q(\lambda' Y\,dX + \lambda\,dY),$$

et l'on en tire

$$\frac{\partial z}{\partial X} = P = p + q\lambda' Y, \qquad \frac{\partial z}{\partial Y} = Q = \lambda q,$$

puis inversement

$$q = \frac{Q}{\lambda}, \qquad p = P - \frac{\lambda'}{\lambda} QY.$$

On a ensuite

$$dq = s\,dx + t\,dy$$

ou

$$\frac{dQ}{\lambda} - \frac{\lambda'}{\lambda^2} Q\,dX = s\,dX + t\lambda' Y\,dX + t\lambda\,dY,$$

c'est-à-dire

$$dQ = S\,dX + T\,dY = \frac{\lambda'}{\lambda} Q\,dX + s\lambda\,dX + t\lambda\lambda' Y\,dX + t\lambda^2\,dY$$

et, par conséquent,

$$S = \frac{\lambda'}{\lambda} Q + s\lambda + t\lambda\lambda' Y, \qquad T = t\lambda^2.$$

Inversement, en résolvant ces relations par rapport à t et s, on en tire

$$t = \frac{T}{\lambda^2}, \qquad s = \frac{S}{\lambda} - \frac{\lambda'}{\lambda^2} Q - \frac{\lambda'}{\lambda^2} TY.$$

On a, de même,

$$dp = r\,dx + s\,dy$$

ou

$$\begin{aligned} dP - \frac{\lambda'}{\lambda} Q\,dY - \frac{d\left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)}{dX} QY\,dX - \frac{\lambda'}{\lambda} Y(S\,dX + T\,dY) \\ = r\,dX + s\lambda' Y\,dX + s\lambda\,dY, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$R - \frac{d\left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)}{dX} QY - \frac{\lambda'}{\lambda} SY = r + s\lambda' Y,$$

$$S - \frac{\lambda'}{\lambda} Q - \frac{\lambda'}{\lambda} YT = s\lambda.$$

Ayant déjà la valeur de s, la première de ces deux relations nous donne

$$r = R - \frac{2\lambda'}{\lambda} SY + \left(\frac{Y\lambda'}{\lambda}\right)^2 T - QY \frac{d\left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)}{dX} + \left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^2 QY.$$

Une équation de la forme (52), ne contenant ni terme en y^2, ni terme en y^3, se change en une équation de la forme

$$\begin{aligned} \frac{S}{\lambda} - \frac{\lambda'}{\lambda^2} Q - \frac{\lambda'}{\lambda^2} TY = Az + B\left(P - \frac{\lambda'}{\lambda} QY\right) + C\frac{Q}{\lambda} + F\frac{YT}{\lambda} + H\frac{T^2}{\lambda^4} \\ + D\left[R - 2\frac{\lambda'}{\lambda} SY + \left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^2 Y^2 T - QY\frac{d\left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)}{dX} + \left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^2 QY\right] + \ldots, \end{aligned}$$

les termes non écrits étant au moins du second degré en Y, P, Q, z, R, S, T, et il n'y aura pas de terme en TY dans cette nouvelle équation si l'on a choisi λ de façon que l'on ait $\frac{\lambda'}{\lambda} = -F$. Il suffit pour cela de prendre

$$\lambda = e^{-\int_0^x F\,dx}.$$

Ayant choisi λ de cette façon, si l'on résout l'équation précédente par rapport à S, on en déduit un développement en série entière de S suivant les puissances de Y, z, P, Q, R, T, ne renfermant ni terme en Y, ni terme en Y^2, ni terme en Y^3, ni terme en T, ni terme en TY, et cette nouvelle série est convergente pourvu que $|x|$ soit $\leqq 1$, et que les modules des variables Y, z, P, Q, R, T ne dépassent pas un nombre positif ρ' [1].

Ayant ainsi remplacé l'équation (52) par une équation de même forme où manquent les termes en y^2, en y^3 et en yt, posons encore

$$z = \mu(x)\,\mathrm{Z};$$

il vient

$$p = \mu'(x)\,\mathrm{Z} + \mu\mathrm{P}, \qquad q = \mu(x)\,\mathrm{Q},$$
$$r = \mu''(x)\,\mathrm{Z} + 2\mu'(x)\,\mathrm{P} + \mu\,\mathrm{R}, \qquad s = \mu'\mathrm{Q} + \mu\,\mathrm{S}, \qquad t = \mu(x)\,\mathrm{T};$$

le terme en Q disparaîtra de la nouvelle équation si l'on prend $\mu = e^{\int_0^x \mathrm{C}\,dx}$. Par cette transformation, les termes en z, p, r sont seuls changés; on aboutit donc finalement à une équation de même forme

$$s = \mathrm{A}z + \mathrm{B}p + \mathrm{D}r + \mathrm{H}t^2 + \ldots \tag{52 bis}$$

où manquent les termes en q, en y^2, en y^3 et en yt. Posons enfin, dans l'équation (52) *bis*, $z = y^3\mathrm{Z}$; on aura

$$p = y^3\mathrm{P}, \qquad q = y^3\mathrm{Q} + 3y^2\mathrm{Z},$$
$$r = y^3\mathrm{R}, \qquad s = y^3\mathrm{S} + 3y^2\mathrm{P}, \qquad t = y^3\mathrm{T} + 6y^2\mathrm{Q} + 6y\mathrm{Z} = y\,(6\mathrm{Z} + 6y\mathrm{Q} + y^2\mathrm{T}).$$

Après la substitution dans l'équation (52) *bis*, tous les termes sont divisibles par y^2; ce facteur étant supprimé, il reste dans le premier membre $y\mathrm{S} + 3\mathrm{P}$, et dans le second membre

$$\mathrm{A}y\mathrm{Z} + \mathrm{B}y\mathrm{P} + \mathrm{D}y\mathrm{R} + \mathrm{F}\,(y, \mathrm{Z}, y\mathrm{P}, y\mathrm{Q}, y\mathrm{R}, y^2\mathrm{T}),$$

F ne renfermant que des termes du second degré au moins. Nous pouvons donc écrire l'équation obtenue, en remplaçant les grandes lettres par les petites lettres correspondantes,

$$ys + 3p = \mathrm{A}yz + \mathrm{B}yp + \mathrm{D}yr + \mathrm{F}\,(y, z, yp, yq; yr, y^2t), \tag{58}$$

F ne renfermant que des termes du second degré au moins en y, z, yp, yq, yr, y^2t.

18. Cette équation (58) admet une intégrale représentée par un développement de la forme

$$z = y^2\varphi_2 + y^3\varphi_3 + \ldots + y^n\varphi_n + \ldots, \tag{59}$$

φ_2, φ_3, ... φ_n, ... étant des séries entières en x qui s'annulent pour $x = 0$. On obtient l'équation différentielle qui donne φ_n, par exemple, en égalant les coefficients de y^n dans les deux membres après la substitution, ce qui conduit à

---

[1] *Voir* le Mémoire cité plus haut (note de la p. 436).

l'équation

$$(n+3)\varphi'_n = \mathrm{P}(\varphi_1, \ldots),$$

le second membre se déduisant des coefficients de la série (58) et des coefficients de $\varphi_2, \ldots, \varphi_{n-2}$ par des additions et des multiplications seulement. Pour prouver la convergence de la série (59) on peut donc remplacer le second membre de l'équation (58) par une fonction majorante. On peut prendre pour fonction majorante une expression de la forme

$$\frac{\mathrm{M}(yp+yr)}{1-x} + \frac{\mathrm{M}(y+z+yp+yq+yr+y^2t)^2}{(1-x)[1-\alpha(y+z+yp+yq+yr+y^2t)]},$$

M et α étant deux nombres positifs, et l'on peut *a fortiori* prendre pour équation auxiliaire l'équation

$$(60)\quad ys+3p = \frac{\mathrm{M}\left(\dfrac{5yp}{1-x}+yr\right)}{1-x} + \frac{\mathrm{M}}{1-x}\,\frac{\left[\dfrac{y}{(1-x)^2}+z+\dfrac{5yp}{1-x}+4yq+yr+y^2t\right]^2}{1-\alpha\left[\dfrac{y}{(1-x)^2}+z+\dfrac{5yp}{1-x}+4yq+yr+y^2t\right]},$$

dont le second membre est une fonction majorante pour le second membre de l'équation (58).

La série (59) est certainement convergente dans tout domaine où une série entière, *à coefficients positifs,* représentant une intégrale de l'équation (60), est elle-même convergente. Cela étant, cherchons une intégrale de l'équation (60) qui soit de la forme

$$z = \varphi(u) = \varphi\left(\frac{y}{(1-x)^2}\right);$$

on a successivement

$$p = 2\varphi'(u)\frac{y}{(1-x)^3},$$

$$q = \varphi'(u)\frac{1}{(1-x)^2},$$

$$r = 4\varphi''(u)\frac{y^2}{(1-x)^6} + 6\varphi'(u)\frac{y}{(1-x)^4},$$

$$s = 2\varphi''(u)\frac{y}{(1-x)^5} + 2\varphi'(u)\frac{1}{(1-x)^3},$$

$$t = \varphi'(u)\frac{1}{(1-x)^4},$$

$$\frac{yp}{1-x} = 2u^2\varphi'(u), \qquad yq = u\varphi'(u), \qquad yr = 4u^3\varphi''(u) + 6u^2\varphi'(u),$$

$$ys = \frac{1}{1-x}[2u^2\varphi''(u) + 2u\varphi'(u)], \qquad y^2t = u^2\varphi''(u),$$

$$ys+3p = \frac{1}{1-x}[2u^2\varphi''(u) + 8u\varphi'(u)].$$

L'équation (60) devient

$$\begin{aligned}
&2u^2\varphi''(u)+8u\varphi'(u)\\
&\quad=4\mathrm{M}u[u^2\varphi''(u)+4u\varphi'(u)]\\
&\qquad+\mathrm{M}\frac{[u+\varphi(u)+16u^2\varphi'(u)+4u^3\varphi''(u)+4u\varphi'(u)+u^2\varphi''(u)]^2}{1-\alpha[u+\varphi(u)+16u^2\varphi'(u)+4u^3\varphi''(u)+4u\varphi'(u)+u^2\varphi''(u)]},
\end{aligned}$$

ce que l'on peut encore écrire

$$2\mathrm{U}=4\mathrm{M}u\mathrm{U}+\mathrm{M}\frac{[u+\varphi(u)+4u\mathrm{U}+\mathrm{U}]^2}{1-\alpha[u+\varphi(u)+4u\mathrm{U}+\mathrm{U}]},$$

en posant

$$\mathrm{U}=u^2\varphi''(u)+4u\varphi'(u).$$

En résolvant cette équation par rapport à U, on a un développement de U suivant les puissances de u et de $\varphi(u)$, *à coefficients positifs,* commençant par des termes du second degré

$$\mathrm{U}=\alpha u^2+\beta u\varphi(u)+\gamma\varphi^2(u)+\ldots.$$

L'équation différentielle

$$(61)\qquad u^2\varphi''(u)+4u\varphi'(u)=\alpha u^2+\beta u\varphi(u)+\gamma\varphi^2(u)+\ldots$$

admet une intégrale holomorphe, s'annulant pour $u=0$, dont on peut calculer les coefficients de proche en proche. Ces coefficients sont positifs et plus petits que ceux du développement de la racine de l'équation

$$\varphi(u)=\alpha u^2+\beta u\varphi(u)+\gamma\varphi^2(u)+\ldots,$$

qui est nulle pour $u=0$.

En résumé, l'équation (60) admet une intégrale particulière $z=\varphi\left(\frac{y}{(1-x)^2}\right)$ qui est une fonction holomorphe de $\frac{y}{(1-x)^2}$ pourvu que l'on ait

$$\frac{|y|}{|1-x|^2}<r,$$

et qui est représentée par un développement suivant les puissances de $\frac{y}{(1-x)^2}$, dont les coefficients sont réels et positifs. Si l'on ordonne cette série suivant les puissances de x et de y, on obtient une série entière $\mathrm{S}(x,y)$, dont tous les coefficients sont encore réels et positifs, et qui est convergente pourvu que l'on ait $|x|<\theta$, $|y|<\eta$, θ et η étant deux nombres positifs, dont le premier θ est inférieur à un, assujettis à vérifier la relation

$$(62)\qquad \eta<r(1-\theta)^2.$$

Il en sera donc de même de la série entière (59) qui représente l'intégrale de l'équation (58) s'annulant pour $x = 0$, quelle que soit la valeur de y. On en déduit une conclusion tout à fait semblable à celle qui a été obtenue pour les équations du premier ordre (n° 10). Si l'intégrale ψ_3 de l'équation (56) prenant la valeur $\frac{f'''(0)}{6}$ pour $x = a$ est holomorphe dans un domaine simplement connexe $\mathcal{D}'_x$, et sur le contour de ce domaine, *on peut trouver un nombre positif* η *tel que l'intégrale* z *de l'équation* (52), *qui se réduit à* $f(y)$ *pour* $x = a$, *et qui renferme tous les éléments de* Γ_2, *soit une fonction holomorphe des deux variables* x *et* y *lorsque* x *décrit le domaine* $\mathcal{D}'_x$, *et que* $|y|$ *reste inférieur à* η.

Cette intégrale est représentée par la série (54), qui est nécessairement convergente lorsque les variables x et y décrivent respectivement les deux domaines précédents.

En définitive, la détermination des points singuliers d'une intégrale, situés sur la caractéristique Γ_2, revient à la détermination des pôles de ψ_3. Si l'équation de Riccati (56) n'admet aucune intégrale *réelle,* continue sur le segment (x_0, x_1) de l'axe réel, on peut affirmer qu'il n'existe aucune intégrale de l'équation (52), n'ayant aucun point singulier sur ce segment.

19. Le théorème précédent s'applique à toutes les caractéristiques du second ordre, ne renfermant pas d'*éléments exceptionnels* du second ordre (n° 5). Mais il peut se faire qu'une équation aux dérivées partielles du second ordre $F = 0$ admette des *caractéristiques du premier ordre;* on dit qu'une multiplicité M_1 d'éléments unis du premier ordre

$$(63) \qquad x = f_1(\lambda), \qquad y = f_2(\lambda), \qquad z = f_3(\lambda), \qquad p = \varphi_1(\lambda), \qquad q = \varphi_2(\lambda),$$

où λ est un paramètre variable, est une caractéristique du premier ordre Γ_1, si tous les éléments de cette multiplicité Γ_1 appartiennent à une infinité de caractéristiques du second ordre Γ_2, dépendant d'une constante arbitraire. On obtiendra les équations d'une de ces caractéristiques Γ_2 en ajoutant aux équations (63) trois nouvelles équations donnant r, s, t

$$(64) \qquad r = \pi_1(\lambda), \qquad s = \pi_2(\lambda), \qquad t = \pi_3(\lambda),$$

les fonctions π_1, π_2, π_3 vérifiant les deux relations

$$\varphi'_1 = \pi_1 f'_1 + \pi_2 f'_2, \qquad \varphi'_2 = \pi_2 f'_1 + \pi_3 f'_2$$

et l'équation proposée

$$F(f_1, f_2, f_3, \varphi_1, \varphi_2, \pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0.$$

Proposons-nous d'examiner ce que devient la proposition générale pour une caractéristique du premier ordre. Nous supposerons que cette caractéristique du premier ordre Γ_1 est définie par les relations (n° 4)

$$y = z = p = q = 0; \tag{63'}$$

toutes les caractéristiques du second ordre Γ_2 qui contiennent Γ_1 s'obtiennent en ajoutant aux équations de Γ_1 les suivantes

$$r = 0, \qquad s = 0, \qquad t = \pi(x), \tag{64'}$$

$\pi(x)$ étant une fonction de x qui dépend d'un paramètre variable. Pour que les équations $(63)'$ définissent une caractéristique du premier ordre de l'équation

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

il faut que l'on ait identiquement

$$F[x, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \pi(x)] = 0,$$

et, comme $\pi(x)$ dépend d'une constante arbitraire, les valeurs de x et de $\pi(x)$ sont indépendantes l'une de l'autre, et l'on doit avoir identiquement

$$F(x, 0, 0, 0, 0, 0, 0, t) = 0,$$

quels que soient x et t.

Il faut en outre que pour les coordonnées de l'un quelconque de ces éléments du second ordre l'équation du second degré

$$\frac{\partial F}{\partial r} dy^2 - \frac{\partial F}{\partial s} dx\, dy + \frac{\partial F}{\partial t} dx^2 = 0,$$

qui détermine les deux directions de caractéristiques issues de cet élément, admette la racine $dy = 0$, c'est-à-dire que $\frac{\partial F}{\partial t}$ soit nul. En résumé, *pour que la multiplicité* Γ_1

$$y = z = p = q = 0$$

soit une caractéristique du premier ordre d'une équation aux dérivées partielles du second ordre $F = 0$, *il faut et il suffit que* F *et* $\frac{\partial F}{\partial t}$ *soient identiquement nuls quand on y remplace les variables* y, z, p, q, r, s *par zéro.*

Cela posé, soit C une courbe plane représentée par les équations

$$x = a, \qquad z = f(y), \tag{C}$$

$f(y)$ étant une fonction holomorphe dans le domaine de l'origine, s'annulant ainsi que $f'(y)$ pour $y=0$. Proposons-nous de déterminer une surface intégrable passant par la courbe C et admettant tous les éléments de la caractéristique du premier ordre Γ_1. Nous pouvons, sans diminuer la généralité, supposer $f''(0)=0$, car il suffit de remplacer z par $z+\frac{f''(0)}{2}y^2$ pour être ramené à ce cas, ce qui ne change pas la forme de l'équation proposée.

L'intégrale cherchée admet alors l'élément du second ordre

$$x=a, \qquad y=z=p=q=r=s=t=0;$$

nous supposerons que ce n'est pas un élément exceptionnel, de façon que la dérivée $\frac{\partial F}{\partial s}$ n'est pas nulle pour ce système de valeurs. On peut alors résoudre l'équation $F=0$ par rapport à s et écrire cette équation, en ordonnant le second membre par rapport aux puissances croissantes de y, z, p, q, r, t,

$$s=Az+By+Cp+Dq+Er+Fzt+\ldots, \tag{65}$$

la série du second membre ne renfermant aucun terme en t^m, c'est-à-dire qu'une puissance quelconque de t y est toujours multipliée par l'un au moins des facteurs y, z, p, q, r. Les coefficients A, B, C, ... désignent toujours des fonctions de la variable x, holomorphes le long d'un segment (x_0, x_1) de l'axe réel $(x_0<a<x_1)$, et la série est supposée convergente, quelle que soit la valeur de x sur ce segment, pour des valeurs assez petites des modules de y, z, p, q, r, t.

L'intégrale cherchée est représentée par un développement en série entière de la forme

$$z=\psi_2(x)y^2+\psi_3(x)y^3+\ldots+\psi_n(x)y^n+\ldots, \tag{66}$$

commençant par un terme en y^2. Les valeurs des fonctions $\psi_2, \psi_3, \ldots, \psi_n, \ldots$ pour $x=a$ sont connues d'après les conditions initiales; en particulier on a

$$\psi_2(a)=0.$$

Substituons la série (66) à la place de z dans les deux membres de l'équation (65); en égalant les coefficients de y, on obtient une équation différentielle du premier ordre pour déterminer $\psi_2(x)$

$$2\frac{d\psi_2}{dx}=P(x, \psi_2), \tag{67}$$

$P(x, \psi_2)$ désignant une *série entière* en ψ_2, car un terme en yt^m donne, après la substitution, un terme en $y\psi_2^m$. On a donc ici, pour déterminer le premier coefficient ψ_2 de la série (66), une *équation différentielle du premier ordre, de forme générale, et non une équation de Riccati.*

La détermination de l'intégrale particulière $\psi_2(x)$, s'annulant pour $x = 0$, fait connaître la caractéristique du second ordre Γ_2 renfermant Γ_1 et passant par l'élément $(x = a, y = z = p = q = r = s = t = 0)$, et l'on est ramené au problème général traité dans les paragraphes précédents. Il suffirait de poser dans l'équation (65)

$$z = \psi_2(x)y^2 + z',$$

pour faire disparaître le terme en y, et l'on serait ramené à une équation de la forme (52). Mais on peut aussi déterminer directement les coefficients ψ_3, ψ_4, ... en partant de l'équation (65) elle-même. Cette équation ne renfermant pas de terme en t^2, on en conclut (n° 16) que tous ces coefficients sont donnés de proche en proche par des équations différentielles linéaires du premier ordre. Par conséquent, si le coefficient $\psi_2(x)$ est holomorphe sur un segment (x'_0, x'_1) de l'axe Ox $(x_0 \leqq x'_0 < a < x'_1 \leqq x_1)$, la série (66) est elle-même convergente tout le long de ce segment pourvu que $|y|$ soit inférieur à un nombre positif convenable, et l'intégrale n'a aucun point singulier sur le segment (x'_0, x'_1) de la caractéristique. L'énoncé du théorème général subsiste encore, pourvu que l'on remplace l'équation de Riccati par une équation différentielle du premier ordre, qui peut être de forme quelconque.

20. Nous avons encore un cas singulier à examiner, celui où l'équation $F = 0$ aurait une infinité de caractéristiques du premier ordre Γ_1, dépendant d'une constante arbitraire, admettant pour support ponctuel une même courbe Γ. Nous dirons pour abréger que Γ est une *caractéristique d'ordre zéro.* Cherchons quelle doit être la forme d'une équation aux dérivées partielles du second ordre

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

pour qu'elle admette la caractéristique d'ordre zéro Γ

$$(\Gamma) \qquad y = z = 0.$$

Toute caractéristique du premier ordre Γ_1, ayant Γ pour support ponctuel, est représentée par les équations

$$(\Gamma_1) \qquad y = z = p = 0, \qquad q = \pi(x, a),$$

la fonction $\pi(x)$ dépendant d'une constante arbitraire a. Une caractéristique du second ordre Γ_2, renfermant Γ_1, est de même représentée par les équations

$$(\Gamma_2)\qquad \begin{cases} y = z = p = 0, \\ q = \pi(x, a), \quad r = 0, \quad s = \pi'(x, a), \quad t = \pi_1(x, a, b), \end{cases}$$

$\pi_1(x, a, b)$ dépendant d'une seconde constante arbitraire b. Pour que Γ soit une caractéristique d'ordre zéro, il faudra, comme tout à l'heure, que F et $\frac{\partial F}{\partial t}$ soient nuls quand on y remplace y, z, p, q, r, s, t par les expressions précédentes, quelles que soient les valeurs de x, a, b. Supposons l'équation résolue par rapport à s,

$$s = \Phi(x, y, z, p, q, r, t);$$

alors, quand on y remplace y, z, p, r par zéro, la valeur de s ne doit dépendre que de x et de q, et, par suite, le développement de Φ suivant les puissances de y, z, p, q, r, t ne doit contenir aucun terme en t^m ni en $t^m q^n (m > 1)$. S'il en est ainsi, la dérivée $\frac{\partial F}{\partial t}$ est nulle aussi pour $y = z = p = r = 0$. L'équation est donc de la forme

$$(68)\qquad s = A + By + Cz + Dp + Eq + Fr + Hyt + \ldots,$$

une puissance quelconque de t étant multipliée par l'un au moins des facteurs y, z, p, r, et les coefficients A, B, C, ... étant toujours des fonctions de x.

Cela posé, supposons que l'on veuille obtenir une intégrale de l'équation (68) se réduisant à zéro pour $y = 0$, et se réduisant pour $x = a$ à une fonction $f(y)$, holomorphe dans le domaine de l'origine et nulle pour $y = 0$. Nous admettrons, ce qui ne restreint pas la généralité, comme on l'a déjà remarqué, que l'on a aussi $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$. Le développement de cette intégrale suivant les puissances de y commence par un terme du premier degré

$$(69)\qquad z = \psi_1(x) y + \psi_2(x) y^2 + \ldots,$$

les fonctions ψ_1 et ψ_2 s'annulant pour $x = a$.

Le premier coefficient ψ_1 doit vérifier une équation différentielle du premier ordre *de forme générale*, car un terme en q^m donne un terme en ψ_1^m après la substitution pour $y = 0$. Connaissant ψ_1, en égalant les coefficients de y dans les deux membres, on a de même une équation différentielle du premier ordre de forme quelconque pour déterminer ψ_2, car un terme en $y t^m$ donne un terme en $y \psi_2^m$ après la substitution. Les autres coefficients, à partir de ψ_3, sont déterminés par des équations *linéaires*. Connaissant ψ_1, ψ_2, on peut du reste ramener l'équation (68) à la forme générale (52) en posant

$$z = \psi_1(x) y + \psi_2(x) y^2 + Z,$$

de sorte que la série (69) est convergente dans tout intervalle (x'_0, x'_1) où les fonctions ψ_1 et ψ_2 sont holomorphes, pourvu que $|y|$ soit suffisamment petit.

21. Considérons, en particulier, les équations de Monge-Ampère, dont toutes les caractéristiques du second ordre renferment une caractéristique du premier ordre. Nous supposons toujours que les deux familles de caractéristiques sont distinctes, et que l'une de ces familles renferme la caractéristique Γ_1 définie par les équations

$$y = z = p = q = 0.$$

Si l'équation du second ordre renferme un terme en $rt - s^2$, la famille de caractéristiques à laquelle appartient Γ_1 est définie par un système de deux relations linéaires en dx, dy, dp, dq,

$$(70)\qquad \left\{\begin{aligned} &dp + A\,dx + B\,dy = 0,\\ &dq + A_1\,dx + B_1\,dy = 0,\end{aligned}\right.$$

A, B, A_1, B_1 étant des fonctions de x, y, z, p, q. Pour que ces équations soient satisfaites en posant $y = z = p = q = 0$, il faut et il suffit que A et A_1 soient nuls identiquement quand on y remplace y, z, p, q par zéro, c'est-à-dire que leurs développements suivant les puissances de y, z, p, q ne renferment pas de terme indépendant. L'équation du second ordre correspondante s'obtient en éliminant le rapport $\dfrac{dy}{dx}$ entre les deux relations

$$(r + A)\,dx + (s + B)\,dy = 0,$$
$$(s + A_1)\,dx + (t + B_1)\,dy = 0,$$

ce qui donne

$$rt - s^2 - (A_1 + B)s + At + B_1 r + AB_1 - BA_1 = 0,$$

ou, en ordonnant par rapport à s,

$$(71)\qquad s^2 + (A_1 + B)s - rt - At - B_1 r + BA_1 - AB_1 = 0.$$

On en tire

$$(71')\qquad s = -\frac{1}{2}(A_1 + B) + \frac{1}{2}\sqrt{(A_1 + B)^2 + 4rt + 4At + 4B_1 r - 4BA_1 + 4AB_1};$$

nous supposerons que B n'est pas nul tout le long de Γ_1, ce qui aura lieu si les deux directions de caractéristiques issues de l'un quelconque de ses éléments sont distinctes. Alors s peut être développée en série entière ordonnée suivant les puissances de y, z, p, q, r, t, sans terme indépendant, au moins pour les valeurs de x dans un certain intervalle, et nous remarquerons que, dans ce développement, la variable t est toujours associée à l'un des facteurs y, z, p, q, r. En d'autres termes, *l'équation de Monge-Ampère, résolue par rapport à* s, *est de la forme*

$$(72) \qquad s = \mathrm{F}(x, y, z, p, q, r, yt, zt, pt, qt, rt),$$

le second membre étant une série entière par rapport à y, z, p, q, r, yt, zt, pt, qt, rt, *sans terme indépendant, dont les coefficients sont des fonctions de* x.

La conclusion est la même si l'équation de Monge-Ampère ne renferme pas de terme en $rt - s^2$; une famille de caractéristiques du premier ordre est définie par deux relations de la forme

$$dy = \lambda\, dx, \qquad \mathrm{A}\, dp + \mathrm{B}\, dq + \mathrm{C}\, dx = 0,$$

λ, A, B, C étant des fonctions de x, y, z, p, q. Pour que la caractéristique Γ_1 fasse partie de cette famille, il faut et il suffit que λ et C soient identiquement nuls, quel que soit x, pour $y = z = p = q = 0$. L'équation du second ordre est alors

$$(\mathrm{A}\lambda + \mathrm{B})s + \mathrm{A}r + \mathrm{B}\lambda t + \mathrm{C} = 0;$$

la fonction B ne peut être nulle identiquement, pour $y = z = p = q = 0$, car les deux directions caractéristiques issues d'un quelconque des éléments de Γ_1 seraient confondues. On aura donc pour s un développement de la forme (72), *ne renfermant* r *et* t *qu'au premier degré.*

Reprenons maintenant le problème général pour l'équation (72), où l'on suppose que les coefficients sont des fonctions holomorphes de x dans un intervalle (x_0, x_1) et où la série est convergente, quelle que soit la valeur de x dans cet intervalle, pourvu que les modules de y, z, ..., rt soient inférieurs à un nombre positif ρ. Soit $x = a$ une valeur de x dans l'intervalle (x_0, x_1) et $f(y)$ une fonction analytique de y, holomorphe dans le domaine de l'origine, et s'annulant, ainsi que sa dérivée, pour $y = 0$. Si l'on veut développer suivant les puissances de y l'intégrale de l'équation (72) qui se réduit à $f(y)$ pour $x = a$ et qui renferme tous les éléments de la caractéristique Γ_1,

$$z = \psi_2(x)y^2 + \psi_3(x)y^3 + \ldots + \psi_n(x)y^n + \ldots,$$

le premier coefficient ψ_2 doit vérifier une *équation de Riccati;* en effet, après la substitution de cette série à la place de z dans le second membre, les seuls termes du premier degré en y renfermant ψ_2 proviennent des termes en q, yt, qt, et, par suite, ψ_2 ne peut y figurer qu'au premier ou au second degré. Les autres coefficients, à partir de ψ_3, sont déterminés par *des équations linéaires.*

L'étude d'une intégrale d'une équation de Monge-Ampère dans le voisinage d'une caractéristique du premier ordre est donc tout à fait analogue à celle que nous avons faite plus haut (nos 6-12) pour une équation aux dérivées partielles du premier ordre. L'analogie se poursuit plus loin, car on peut encore étudier les points singuliers des intégrales situés sur la caractéristique au moyen d'une transformation de Monge-Ampère. Supposons, en effet, que l'intégrale $\psi_2(x)$ que nous avons à considérer, de l'équation de Riccati, admette le point $x = 0$ pour pôle. Si nous appliquons à l'équation (71) la transformation d'Ampère (n° 11)

$$X = x, \qquad Y = q, \qquad Z = z - qy, \qquad P = p, \qquad Q = -y,$$

on a, pour calculer les dérivées partielles du second ordre R, S, T de Z par rapport à X et à Y, les deux relations

$$dP = R\,dX + S\,dY, \qquad dQ = S\,dX + T\,dY,$$

d'où l'on tire

$$R = \frac{rt - s^2}{t}, \qquad S = \frac{s}{t}, \qquad T = -\frac{1}{t}.$$

Inversement, on a aussi

$$x = X, \qquad y = -Q, \qquad z = Z - QY, \qquad p = P, \qquad q = Y,$$
$$r = \frac{RT - S^2}{T}, \qquad s = \frac{S}{T}, \qquad t = -\frac{1}{T}, \qquad rt - s^2 = -\frac{R}{T},$$

et l'équation de Monge-Ampère (71) est remplacée par une équation de même forme admettant aussi la caractéristique du premier ordre

$$Y = Z = P = Q = 0.$$

Cela posé, remarquons que la fonction $\psi_2(x)$ représente la dérivée seconde t le long de l'axe des x; si t est infini pour $x = 0$, T est nul pour la même valeur de x, et l'on est ramené à étudier une intégrale d'une équation de Monge-Ampère passant par la caractéristique en question, le coefficient de Y^2 dans le développement de Z étant holomorphe dans le domaine de l'origine. Cette intégrale est elle-même régulière dans le domaine des valeurs $x = y = 0$. On en déduit les mêmes conséquences que pour les surfaces intégrales d'une équation du premier ordre (nos 11-13), en particulier que les singularités mobiles sur une caractéristique sont des *singularités algébriques*.

L'étude des singularités mobiles, pour une équation du second ordre de forme générale, fera l'objet d'un autre Mémoire.