ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

S. CARRUS

Familles de surfaces à trajectoires orthogonales planes

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 2e série, tome 8 (1906), p. 153-239

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1906_2_8__153_0>

FAMILLES DE SURFACES

A

TRAJECTOIRES ORTHOGONALES PLANES,

PAR M. S. CARRUS,

Lieutenant au 23e régiment d'Artillerie,
Agrégé de l'Université.

INTRODUCTION.

Je me propose de rechercher et d'étudier les familles de surfaces admettant comme trajectoires orthogonales des courbes planes.

Je supposerai que l'équation de la famille

$$f(x, y, z) = \rho$$

est résolue par rapport au paramètre variable.

La fonction $f(x, y, z)$ doit satisfaire à une équation aux dérivées partielles du troisième ordre qui présente les plus grandes analogies avec l'équation des systèmes triples orthogonaux.

Nous séparerons en deux Parties bien distinctes les études qui se rapportent à ce sujet.

A. — Les courbes trajectoires ne font pas partie d'un système triple.

1° Cette étude a été entreprise d'une façon systématique par *Ribaucour* dans sa *Théorie générale des surfaces courbes* parue en 1891 dans le *Journal de Liouville*. Ribaucour traite ce problème d'une façon particulière en rattachant les courbes trajectoires aux plans tangents d'une surface de référence. Le problème se réduit, dans ce cas, de lui-même à un problème du second ordre. (Une première intégration a été faite quand on a fixé la surface enveloppe des plans des courbes.) Il établit, en particulier, ce résultat remarquable :

Étant donnée une telle famille de courbes trajectoires, on peut déformer comme on voudra la surface de référence, chaque plan tangent entraînant la courbe trajectoire située dans son plan, et les courbes ne cesseront pas d'être les trajectoires orthogonales de familles de surfaces.

2° Cette question a été proposée par M. *Cosserat* en 1901, puis en 1902, comme sujet d'un Concours institué par l'Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres de Toulouse. Quelques résultats ont valu à l'auteur de cette thèse une médaille de vermeil.

Dans une Note parue dans l'intervalle des deux concours, M. Cosserat avait donné les formes simples auxquelles se réduit l'équation aux dérivées partielles, dans le cas où la fonction $f(x, y, z)$ est à variables séparées, et dans le cas où les plans des courbes trajectoires passent par un point fixe ou restent parallèles à une direction fixe.

3° *Recherches de dynamique de M. Darboux.* — M. Darboux a donné implicitement le moyen d'obtenir de nombreuses solutions du problème.

En étudiant le mouvement d'un point dans l'espace (*Leçons sur les surfaces*, n^{os} 553 et suivants) dans le cas où il y a une fonction des forces, il a montré que, si l'on prend toutes les trajectoires correspondant à la même valeur de la constante des forces vives, et, parmi toutes ces trajectoires, toutes celles qui sont normales à une même surface, *ces trajectoires sont, par cela même, normales à toute une famille de surfaces.*

Le problème dépend entièrement de la recherche d'une solution complète de l'équation

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)^2 = 2(\mathrm{U} + h).$$

Si l'on a une telle solution $\theta(x, y, z)$ dépendant de deux constantes arbitraires a, b, *on obtiendra les courbes trajectoires en posant*

$$\frac{\partial\theta}{\partial a} = a', \qquad \frac{\partial\theta}{\partial b} = b'.$$

Il suffit donc d'être assuré que ces courbes trajectoires seront des courbes planes. On aura, par exemple, une telle certitude si la force passe par un point fixe ou si elle est parallèle à une direction fixe.

4° Quelques extraits de cette étude ont paru déjà aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences.* Ils ont été suivis de remarques de M. Darboux montrant que le problème peut, dans tous les cas, être intégré une fois et se ramener à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du second ordre avec introduction d'une fonction arbitraire de deux variables.

Depuis (*Comptes rendus,* 6 mars 1905), M. Darboux a généralisé ce résultat et obtenu une réduction analogue dans le cas où les courbes trajectoires doivent satisfaire à des conditions très variées.

B. — La famille de surfaces est aussi une famille de Lamé.

1° Dès 1862, O. Bonnet, dans un Mémoire *Sur les surfaces orthogonales* inséré aux *Comptes rendus,* recherchait les systèmes triples dans lesquels une des séries de trajectoires orthogonales est composée de courbes planes.

2° Ce problème fut complètement résolu par M. Darboux qui a donné (*Leçons sur les surfaces,* n^{os} 761, 762, 972) la remarquable construction suivante :

Construisons une développable isotrope quelconque. Coupons-la par les plans tangents d'une surface. On peut ensuite déformer cette dernière surface comme on voudra, chaque plan tangent entraînant la courbe correspondante; les courbes d'intersection seront toujours les trajectoires de familles de surfaces.

3° Enfin, à peu près à la même époque, MM. *Darboux* et *Bianchi* arrivaient au même résultat par une méthode différente en ramenant le problème au problème de la représentation sphérique (*Leçons sur les surfaces,* n^{os} 1060 et suivants).

Cette étude comprend quatre Parties.

Dans la première, nous donnons quelques *résultats généraux* relatifs à ces familles, et, en particulier, le théorème fondamental suivant :

Si l'on a une famille de surfaces à trajectoires orthogonales planes, on peut avoir immédiatement, et sans intégration, les équations des courbes trajectoires.

Comme conséquence, *si l'équation de la famille de surfaces est algébrique, les équations des courbes trajectoires le sont aussi.*

Nous faisons une première application au cas où la famille de surfaces se présente sous la forme

$$X + Y + Z = \rho,$$

X, Y, Z, désignant des fonctions de x, y, z respectivement. Nous montrons que, dans ce cas, *les plans des courbes trajectoires passent par un point fixe.* Un cas particulièrement intéressant est celui où toutes les courbes trajectoires sont des *paraboles* tangentes à trois plans fixes parallèles aux plans de coordonnées.

Dans la deuxième Partie, nous étudions les familles de surfaces dans lesquelles *les plans* des courbes trajectoires *sont parallèles à une direction donnée ou passent par un point fixe*. Dans un cas particulier, nous obtenons le moyen d'obtenir, à volonté, comme courbes trajectoires des coniques quelconques. Ces résultats se rattachent immédiatement aux études de dynamique de M. Darboux.

La troisième Partie comprend la recherche *des familles de Lamé* admettant des trajectoires orthogonales planes dans les deux cas ci-dessus. Nous donnons la solution complète, sans aucune quadrature, et obtenons ainsi *des familles de Lamé dépendant d'une fonction arbitraire d'une variable et d'une fonction arbitraire de deux variables*.

L'équation des lignes de courbure de ces familles est remarquablement simple. Son intégration dans un cas particulier nous donne un système triple remarquable dans lequel les trois familles admettent deux systèmes de lignes de courbure planes. Ce système avait d'ailleurs été découvert par M. Darboux (*Leçons sur les surfaces*, n° 1056) et nous avons pu en faire l'identification.

Nous devons d'ailleurs ajouter que l'illustre géomètre avait traité un problème plus général, celui de la détermination des familles de Lamé telles que les plans osculateurs des courbes trajectoires aux points où elles sont rencontrées par une même surface de la famille passent par un point fixe, mais qui peut, d'ailleurs, être variable avec la surface considérée.

Enfin, dans la quatrième Partie, nous traitons *le problème d'après la méthode de Ribaucour*, nous donnons la solution absolument générale dépendant de *deux fonctions arbitraires de deux variables*, dans le cas où la surface de référence est développable, et nous obtenons de nouvelles solutions particulières dans le cas où la surface de référence est à courbure constante.

Qu'il me soit permis, en terminant, d'adresser mes plus vifs remercîments à MM. les Membres du Comité des *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, qui ont bien voulu permettre l'insertion de ce travail dans les *Annales*; à MM. Cosserat et Bourget, professeurs à la Faculté, qui m'ont aidé de leurs conseils. Je leur en serai éternellement reconnaissant.

PREMIÈRE PARTIE.

1. Soit

$$f(x, y, z) = \rho$$

l'équation, supposée résolue par rapport au paramètre variable ρ, d'une famille de surfaces admettant pour trajectoires orthogonales des courbes planes.

Les équations de l'élément de trajectoire orthogonale passant au point xyz sont

$$(1) \qquad \frac{dx}{f'_x} = \frac{dy}{f'_y} = \frac{dz}{f'_z}.$$

Ce sont les équations différentielles auxquelles satisfont les courbes trajectoires. Egalons à dt la valeur commune de ces rapports, t désignant un paramètre destiné à fixer la position du point sur la courbe. Intégrées, ces équations donneraient trois relations de la forme

$$(2) \qquad x = \varphi(t, c_1, c_2), \qquad y = \psi(t, c_1, c_2), \qquad z = \theta(t, c_1, c_2)$$

qui sont les équations d'une des courbes trajectoires.

Elles dépendent de deux constantes c_1, c_2. On obtiendra toutes les courbes trajectoires en faisant varier ces deux constantes de toutes les manières possibles.

2. Pour que la courbe représentée par les équations (2) soit plane, il faut et il suffit que l'on puisse déterminer des constantes, m, n, p, q, telles, que l'on ait une relation identique de la forme

$$mx + ny + pz + q \equiv 0.$$

En dérivant par rapport à t, on obtiendrait les relations

$$mx' + ny' + pz' = 0,$$
$$mx'' + ny'' + pz'' = 0,$$
$$mx''' + ny''' + pz''' = 0.$$

Pour que m, n, p, q ne soient pas tous nuls il faut que l'on ait

$$D = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = 0.$$

Il suffit de développer cette relation pour obtenir l'équation aux dérivées partielles à laquelle doit satisfaire la fonction $f(x, y, z)$.

Les relations différentielles (1) donnent

$$x' = f'_x, \qquad y' = f'_y, \qquad z' = f'_z.$$

Dérivant par rapport à t en considérant x, y, z, comme fonctions de t, on obtiendra

$$\begin{aligned} x'' &= f''_{x^2} f'_x + f''_{xy} f'_y + f''_{xz} f'_z, \\ y'' &= f''_{xy} f'_x + f''_{y^2} f'_y + f''_{yz} f'_z, \\ z'' &= f''_{xz} f'_x + f''_{yz} f'_y + f''_{z^2} f'_z. \end{aligned}$$

Pour simplifier l'écriture nous introduirons la fonction

$$u(x, y, z) = f'^2_x + f'^2_y + f'^2_z,$$

on aura

$$x'' = \tfrac{1}{2} u'_x, \qquad y'' = \tfrac{1}{2} u'_y, \qquad z'' = \tfrac{1}{2} u'_z.$$

Dérivant encore une fois pour obtenir les dérivées troisièmes

$$2x''' = u''_{x^2} f'_x + u''_{xy} f'_y + u''_{xz} f'_z = \delta_f u'_x,$$

en employant une notation bien connue

$$\delta_u v = \delta_v u = v'_x u'_x + v'_y u'_y + v'_z u'_z.$$

De même

$$2y''' = \delta_f u'_y, \qquad 2z''' = \delta_f u'_z.$$

Transportons les valeurs des dérivées de x, y, z dans le déterminant, nous aurons

$$\text{(3)} \qquad D = \begin{vmatrix} f'_x & f'_y & f'_z \\ u'_x & u'_y & u'_z \\ \delta_f u'_x & \delta_f u'_y & \delta_f u'_z \end{vmatrix} = 0.$$

Telle est l'équation aux dérivées partielles à laquelle doit satisfaire la fonction $f(x, y, z)$.

Ce déterminant paraît extrêmement compliqué. Son développement complet comprendra $2^2 3^4 = 324$ termes.

3. Cette équation, rationnelle et entière, est linéaire par rapport aux dérivées du troisième ordre de f, du troisième degré par rapport à celles du second, du quatrième par rapport à celles du premier. Elle ne contient ni la fonction, ni les

variables indépendantes. Si l'on isole et si l'on désigne par A l'ensemble des termes qui contiennent les dérivées du troisième ordre, elle est de la forme

$$D = A + B = 0,$$

où A n'est plus que du premier degré par rapport aux dérivées du second ordre, et où B est du troisième degré par rapport à celles du premier et du second ordre.

On voit la grande analogie qui existe entre cette équation et l'équation aux dérivées partielles du troisième ordre à laquelle satisfont les familles de surfaces susceptibles de faire partie d'un système triple orthogonal, équation qui jouit de toutes les propriétés ci-dessus. Si l'on prend cette équation sous la première forme donnée par M. Darboux (qui introduit les dérivées A_{ik}) on trouve que *cette analogie est poussée jusqu'à l'identité absolue en ce qui concerne l'ensemble des termes ne contenant aucune dérivée du troisième ordre*. Cette identité de deux moitiés des deux équations, soit de 162 termese, st évidemment très remarquable.

Si l'on pose

$$a_{ik} = -2(f_{i1}f_{k1} + f_{i2}f_{k2} + f_{i3}f_{k3}),$$

ces ensembles de termes peuvent s'écrire dans les deux équations

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} & a_{33} & a_{23} & a_{31} & a_{12} \\ f_{11} & f_{22} & f_{33} & f_{23} & f_{31} & f_{12} \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2f_1 & 0 & 0 & 0 & f_3 & f_3 \\ 0 & 2f_2 & 0 & f_3 & 0 & f_1 \\ 0 & 0 & 2f_3 & f_2 & f_1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$D' = \begin{vmatrix} f_1 a_{11} + f_2 a_{12} + f_3 a_{13} & f_1 a_{21} + f_2 a_{22} + f_3 a_{23} & f_1 a_{31} + f_2 a_{32} + f_3 a_{33} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}.$$

Pour faire une vérification, nous supposerons

$$f_2 = f_3 = 0.$$

Ces deux ensembles se réduisent alors facilement à

$$4f_1^3 f_{23}(f_{12}^2 - f_{13}^2) + 4f_1^3(f_{33} - f_{22})f_{12}f_{13}.$$

D'ailleurs, il est facile *de mettre en évidence le second déterminant dans le* *premier;* en introduisant les combinaisons $f_1 a_{11} + f_2 a_{12} + f_3 a_{13}, \ldots,$ on trouve

$$f_1 f_2 f_3 \Delta' = \frac{1}{2} \left| \begin{array}{ccc|ccc} & & & a_{23} & a_{31} & a_{12} \\ & \mathrm{D}' & & 2f_{23} & 2f_{31} & 2f_{12} \\ \hline & & & 0 & 0 & 0 \\ u & 0 & 0 & 0 & f_3 & f_2 \\ 0 & u & 0 & f_3 & 0 & f_1 \\ 0 & 0 & u & f_2 & f_1 & 0 \end{array} \right|.$$

Si l'on développe le déterminant par rapport aux puissances de u, le coefficient de u^3 est évidemment nul; on reconnaît que l'ensemble des termes en u et u^2 est identiquement nul; le second membre se réduit donc au terme indépendant de u, c'est-à-dire à $f_1 f_2 f_3 \mathrm{D}'$. Nous donnerons du reste une autre vérification simple dans le cas où la fonction $f(x, y, z)$ est à variables séparées.

Enfin, si par analogie avec l'équation des systèmes triples on introduit la fonction

$$\mathrm{H} = \frac{1}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}},$$

l'équation pourra s'écrire

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ \partial_f \mathrm{H}_1 & \partial_f \mathrm{H}_2 & \partial_f \mathrm{H}_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Si d'autre part nous prenons l'équation des systèmes triples sous la seconde forme $\Delta_1 = 0$ de M. Darboux, qui utilise la même fonction H, en développant les équations par rapport à $\mathrm{H}_{11}, \mathrm{H}_{32}, \ldots,$ on établira l'identité

$$\frac{\Delta + \Delta_1}{2u} = \sum f_1 (\partial_{f_2} \mathrm{H}_3 - \partial_{f_3} \mathrm{H}_2).$$

En égalant le second membre à zéro, on aura une équation très simplifiée qui pourra remplacer l'équation des systèmes triples dans la recherche des familles de Lamé à trajectoires orthogonales planes.

4. L'application du théorème général de Cauchy nous montre qu'il existe une intégrale holomorphe, et telle que, pour $x = x_0$, les fonctions f, f_1, f_{11} se réduisent à trois fonctions arbitraires données à l'avance des variables y et z. L'intégrale générale de l'équation dépend donc de trois fonctions arbitraires de deux variables.

5. Nous allons transformer le déterminant D et mettre l'équation des familles sous une forme très remarquable. Développons-le par rapport aux éléments de la seconde ligne, il viendra

$$\sum u_1(f_1 A_1 + f_2 A_2 + f_3 A_3) = 0,$$

en posant

(4) $$f_2 u_3 - f_3 u_2 = A, \qquad f_3 u_1 - f_1 u_3 = B, \qquad f_1 u_2 - f_2 u_1 = C$$

ou

$$\sum f_1(u_1 A_1 + u_2 B_1 + u_3 C_1) = 0.$$

Multiplions par f_3, et nous pourrons écrire

$$\sum f_1[BA_1 - AB_1 + u_3(f_1 A_1 + f_2 B_1 + f_3 C_1)] = 0$$

qui, en vertu des identités

$$Af_1 + Bf_2 + Cf_3 \equiv 0, \qquad Au_1 + Bu_2 + Cu_3 \equiv 0,$$

se réduit, comme on le voit facilement, à

$$\sum f_1(BA_1 - AB_1) = 0$$

ou

$$f_1 \frac{\partial}{\partial x}\frac{B}{A} + f_2 \frac{\partial}{\partial y}\frac{B}{A} + f_3 \frac{\partial}{\partial z}\frac{B}{A} = 0.$$

Posons

(5) $$v(x, y, z) = \frac{B}{A} = \frac{f_3 u_1 - f_1 u_3}{f_2 u_3 - f_3 u_2},$$

et l'équation pourra s'écrire

(6) $$f_1 v_1 + f_2 v_2 + f_3 v_3 = 0.$$

Dans une Note qui a fait suite à notre première Communication à l'Académie des Sciences, M. Darboux a pu déduire cette même équation des équations qui déterminent les coefficients de l'équation du plan de la courbe trajectoire

$$\begin{aligned} mx + ny + pz + 1 &= 0, \\ mf_1 + nf_2 + pf_3 &= 0, \\ mu_1 + nu_2 + pu_3 &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi :

La condition nécessaire et suffisante pour que la famille de surfaces

$$f(x, y, z) = \rho$$

admette des trajectoires orthogonales planes, est que la fonction $f(x, y, z)$ *satisfasse à l'équation aux dérivées partielles du troisième ordre*

$$f_1 v_1 + f_2 v_2 + f_3 v_3 = 0,$$

où l'on a posé

$$v(x, y, z) = \frac{f_3 u_1 - f_1 u_3}{f_2 u_3 - f_3 u_2}, \qquad u(x, y, z) = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2.$$

6. Considérons la nouvelle famille de surfaces

$$v(x, y, z) = \sigma.$$

La condition (6) exprime qu'en tout point commun à deux surfaces

$$f(x, y, z) = \rho, \qquad v(x, y, z) = \sigma,$$

les deux surfaces se coupent orthogonalement.

On en déduit facilement :

La surface $v(x, y, z) = \sigma$ *contient la trajectoire orthogonale tout entière. La courbe trajectoire passant au point* x_0, y_0, z_0 *se trouve donc sur la surface*

$$v(x, y, z) = v(x_0, y_0, z_0). \tag{7}$$

Considérons la surface

$$f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)$$

la courbe d'intersection de cette surface avec la surface

$$v(x, y, z) = v(x_0, y_0, z_0).$$

A chaque point de cette courbe est liée une courbe trajectoire.

Le lieu de ces courbes trajectoires est constitué par la surface v.

L'équation de la famille de surfaces v peut s'écrire

$$f_3 u_1 - f_1 u_3 = \sigma(f_2 u_3 - f_3 u_2).$$

L'ensemble des courbes trajectoires engendre donc un faisceau linéaire de surfaces, et l'on voit comment il faut grouper ces courbes trajectoires pour obtenir une surface du faisceau.

7. Quelle sera l'équation du plan de la courbe trajectoire passant au point x_0, y_0, z_0? Soit

$$mX + nY + pZ + q = 0$$

l'équation de ce plan. On a trouvé les conditions

$$\begin{aligned} m x_0 + n y_0 + p z_0 + q &= 0, \\ m f'_{x_0} + n f'_{y_0} + p f'_{z_0} &= 0, \\ m u'_{x_0} + n u'_{y_0} + p u'_{z_0} &= 0. \end{aligned}$$

L'équation du plan de la courbe est donc

$$(8) \qquad D = \begin{vmatrix} X - x_0 & Y - y_0 & Z - z_0 \\ f'_{x_0} & f'_{y_0} & f'_{z_0} \\ u'_{x_0} & u'_{y_0} & u'_{z_0} \end{vmatrix} = 0.$$

En résumé :

Si l'on a une famille de surfaces

$$f(x, y, z) = \rho,$$

pour avoir les équations des courbes trajectoires, il sera inutile d'intégrer les équations

$$\frac{dx}{f_1} = \frac{dy}{f_2} = \frac{dz}{f_3}.$$

On aura immédiatement et sans intégration aucune les équations de la courbe qui passe en un point quelconque x_0, y_0, z_0 (7), (8).

8. On voit en particulier que : *Si la famille de surfaces est algébrique, les équations des courbes trajectoires le sont nécessairement aussi.*

9. Il faut remarquer que la fonction $\varphi(x, y, z)$ n'est pas formée symétriquement au moyen des dérivées de $f(x, y, z)$. Cette dissymétrie disparaît dans la somme $f_1\varphi_1 + f_2\varphi_2 + f_3\varphi_3$ après suppression du facteur de dissymétrie $\frac{f_3}{(f_2 u_3 - f_3 u_2)^2}$.

Ce résultat nous permet d'avoir trois formes différentes pour la famille de surfaces

$$\varphi(x, y, z) = \sigma,$$

qui contient les trajectoires orthogonales. On les obtiendra en permutant circulairement les lettres x, y, z; A, B, C désignant les fonctions précédemment définies (n° 5) nous aurons les diverses formes

$$\begin{cases} v = \dfrac{B}{A}, & v' = \dfrac{C}{B}, & v'' = \dfrac{A}{C}, \\ w = \dfrac{C}{A}, & w' = \dfrac{A}{B}, & w'' = \dfrac{B}{C}, \end{cases}$$

qui se réduisent d'ailleurs à deux distinctes v, w.

Ainsi, les équations que nous obtenons pour représenter les courbes trajectoires

$$v(x, y, z) = \text{const.}, \qquad w(x, y, z) = \text{const.}$$

sont, elles aussi, *toutes résolues par rapport aux paramètres variables.*

D'une façon générale, *une fonction quelconque de* v, w

$$V = \varphi(v, w),$$

satisfera à l'équation

$$(6') \qquad f_1 V_1 + f_2 V_2 + f_3 V_3 = 0.$$

Réciproquement, *toute fonction* $V(x, y, z)$ *satisfaisant à l'équation ci-dessus se réduit à une fonction de* v, w.

On saura donc dans ce cas complètement résoudre l'équation (6′) *qui détermine la fonction* $V(x, y, z)$, $f(x, y, z)$, *étant supposée connue.*

D'autre part, nous pouvons généraliser le résultat obtenu au n° 5 et dire :

On peut mettre, d'une infinité de façons, l'équation qui exprime que la famille de surfaces

$$f(x, y, z) = \rho$$

admet des trajectoires orthogonales planes, sous la forme

$$f_1 V_1 + f_2 V_2 + f_3 V_3 = 0.$$

Il suffit de prendre pour $V(x, y, z)$ *une fonction quelconque des fonctions* v, w, *déjà définies.*

La courbe trajectoire passant au point x_0, y_0, z_0 *se trouve sur toutes les surfaces*

$$V(x, y, z) = V(x_0, y_0, z_0).$$

En particulier, *les surfaces*

$$v(x, y, z) = v(x_0, y_0, z_0), \qquad w(x, y, z) = w(x_0, y_0, z_0),$$

se coupent suivant une courbe plane qui est la trajectoire orthogonale passant par le point x_0, y_0, z_0.

Enfin, les équations de la courbe trajectoire passant au point x_0, y_0, z_0 peuvent se mettre sous la forme très symétrique

$$\frac{A}{A_0}=\frac{B}{B_0}=\frac{C}{C_0}.$$

10. Considérons maintenant deux surfaces quelconques

$$v(x, y, z)=a, \qquad w(x, y, z)=b,$$

a et b étant deux constantes quelconques.

Soit x_0, y_0, z_0 un point commun à ces deux surfaces.

On pourra mettre leurs équations sous la forme

$$v(x, y, z)=v(x_0, y_0, z_0), \qquad w(x, y, z)=w(x_0, y_0, z_0).$$

Donc, *quelles que soient les constantes* a, b, *les deux surfaces se coupent suivant une courbe plane qui est une trajectoire orthogonale.*

On a ainsi un exemple de deux familles de surfaces telles que toutes les surfaces d'une famille coupent toutes les surfaces de l'autre famille suivant des courbes planes.

11. On obtiendra des familles de surfaces à trajectoires orthogonales planes en prenant, par exemple,

$$v=\text{const.}$$

On obtient ainsi une équation aux dérivées partielles du second ordre, dont toutes les solutions appartiennent à l'équation aux dérivées partielles du troisième ordre qui régit le problème. (C'est ce qui arrive d'ailleurs toutes les fois que l'on restreint le problème, si l'on se donne par exemple la surface enveloppe des plans des courbes trajectoires. Nous reviendrons sur cette remarque.)

Supposons, par exemple,

$$v=0,$$

c'est-à-dire

$$f_3 u_1-f_1 u_3=0;$$

on en déduit que

$$u(x, y, z)=f_1^2+f_2^2+f_3^2=F(y, f).$$

Plus généralement, supposons une relation linéaire entre les fonctions v, w

$$a+bv+cw=0,$$

a, b, c désignant trois constantes quelconques. Cette relation a une signification géométrique très simple.

L'équation du plan de la courbe trajectoire peut s'écrire

$$X - x + v(Y - y) + w(Z - z) = 0.$$

La relation linéaire indique donc que les plans des courbes trajectoires restent parallèles à une direction fixe a, b, c.

Plus généralement encore, supposons une relation quelconque

$$\varphi(v, w) = 0.$$

On voit qu'elle correspond au cas où *les plans parallèles aux plans des courbes trajectoires, menés par l'origine des coordonnées, ont une enveloppe. C'est le cône dont les équations sont en coordonnées tangentielles* (u, v, w, r)

$$r = 0, \qquad \varphi\left(\frac{v}{u}, \frac{w}{u}\right) = 0.$$

Mais $\varphi(v, w)$ est une des fonctions V dont nous avons parlé plus haut (n° 9) et qui sont telles que l'on peut mettre l'équation des familles de surfaces sous la forme

$$f_1 V_1 + f_2 V_2 + f_3 V_3 = 0.$$

On a donc une signification géométrique très simple de la relation

$$V = 0.$$

Partons d'une surface ρ_0, et prenons son intersection avec une surface

$$v(x, y, z) = a.$$

A chaque point de la courbe d'intersection est liée une courbe trajectoire. D'après ce que nous avons vu, elle est située sur la surface $v = a$. Mais, d'autre part, en vertu de la relation

$$V(v, w) = 0,$$

puisque, pour chacun de ses points, v est constant, w le sera aussi. L'équation du plan de la courbe trajectoire, qui est

$$X - x + v(Y - y) + w(Z - z) = 0,$$

montre que *ce plan est parallèle à un plan fixe.*

Les courbes trajectoires ainsi obtenues sont donc les intersections de la *surface*

$$v(x, y, z) = a$$

par des plans parallèles.

Ou bien encore : *les surfaces de la famille*

$$v(x, y, z) = a$$

sont découpées en tranches parallèles par les courbes trajectoires.

12. Supposons que les plans des courbes trajectoires restent parallèles à une direction fixe a, b, c. On devra avoir la relation

$$aA + bB + cC = 0.$$

Développons-la. Elle peut s'écrire

$$u_1(bf_3 - cf_2) + u_2(cf_1 - af_3) + u_3(af_2 - bf_1) = 0.$$

Déterminons deux fonctions $\lambda(x, y, z)$, $\mu(x, y, z)$ par les relations

$$u_1 = f_1\lambda + a\mu, \qquad u_2 = f_2\lambda + b\mu.$$

En transportant ces valeurs dans la relation ci-dessus elle se réduit à

$$u_3 = f_3\lambda + c\mu.$$

Ainsi, on peut déterminer deux fonctions de x, y, z, telles que l'on ait simultanément

$$u_1 = f_1\lambda + a\mu, \qquad u_2 = f_2\lambda + b\mu, \qquad u_3 = f_3\lambda + c\mu.$$

Ces relations indiquent que $u(x, y, z)$ se réduit à une fonction, qui peut d'ailleurs être quelconque, de f et de $ax + by + cz$. Ainsi :

Quand les plans des courbes trajectoires restent parallèles à une direction fixe a, b, c le problème se réduit à l'intégration de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = \mathfrak{F}(f, ax + by + cz). \tag{9}$$

Ce résultat, qui peut d'ailleurs s'établir directement, immédiatement, a été donné pour la première fois par M. Cosserat (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Toulouse,* 10^e^ série, t. I, p. 144).

Quelle sera la forme des fonctions $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$?

En remplaçant u_1, u_2, u_3 par les valeurs ci-dessus, dans la forme générale de la fonction $v(x, y, z)$,

$$v(x, y, z) = \frac{f_3 u_1 - f_1 u_3}{f_2 u_3 - f_3 u_2},$$

elle se réduit à

$$v(x, y, z) = \frac{af_3 - cf_1}{cf_2 - bf_3};$$

de même

$$w(x, y, z) = \frac{bf_1 - af_2}{cf_2 - bf_3}.$$

Comme on pouvait s'y attendre, les fonctions v, w ne sont pas indépendantes, dans ce cas, mais sont liées par la relation identique

$$a + bv + cw = 0.$$

13. De même, si l'on veut que les plans des courbes trajectoires passent par un point fixe, l'origine des coordonnées par exemple, il faudra que l'on ait

$$Ax + By + Cz = 0.$$

En développant cette relation, on l'écrira

$$x(f_2 u_3 - f_3 u_2) + y(f_3 u_1 - f_1 u_3) + z(f_1 u_2 - f_2 u_1) = 0;$$

on en déduira, par une méthode absolument identique à celle du numéro précédent,

$$(10) \qquad f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = \mathcal{F}(f, x^2 + y^2 + z^2),$$

résultat que l'on peut encore établir directement et qui a été énoncé également par M. Cosserat dans la Note citée à la page précédente, n° **12**.

Dans ce cas,

$$v(x, y, z) = \frac{xf_3 - zf_1}{zf_2 - yf_3}, \qquad w(x, y, z) = \frac{yf_1 - xf_2}{zf_2 - yf_3}.$$

Si le point fixe avait pour coordonnées x_0, y_0, z_0, la fonction $v(x, y, z)$ serait la suivante :

$$v(x, y, z) = \frac{(x - x_0)f_3 - (z - z_0)f_1}{(z - z_0)f_2 - (y - y_0)f_3}.$$

On démontrera facilement, réciproquement, que, si la fonction $v(x, y, z)$ a l'une des formes indiquées ci-dessus, les plans des courbes restent parallèles à une direction fixe ou passent par un point fixe.

Faisons la démonstration pour ce second cas. Supposons que l'on ait

$$v(x, y, z) = \frac{xf_3 - zf_1}{zf_2 - yf_3} = \frac{f_3 u_1 - f_1 u_3}{f_2 u_3 - f_3 u_2}.$$

Si la famille n'est pas composée de surfaces de révolution de même axe, on pourra déterminer deux fonctions $\lambda(x, y, z)$, $\mu(x, y, z)$ par les conditions

$$u_1 = f_1 \lambda + x\mu, \qquad u_2 = f_2 \lambda + y\mu.$$

En transportant ces valeurs dans l'égalité donnée, on en déduira

$$u_3 = f_3 \lambda + z\mu.$$

Ces trois dernières relations indiquent que l'on a

$$u = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = \mathcal{F}(x^2 + y^2 + z^2, f),$$

ce qui démontre la réciproque.

Ainsi, dans les deux cas que nous venons d'indiquer, le problème se réduit à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre.

14. Si l'on se donne la surface enveloppe des plans des courbes trajectoires, sous la forme

$$\varphi(u, v, w, t) = 0,$$

en coordonnées tangentielles (u, v, w, t), on réduira le problème à l'intégration d'une équation du second ordre.

Les équations qui déterminent les coefficients du plan de la courbe trajectoire sont, en effet, comme on l'a vu,

$$\begin{aligned} ux + vy + wz + t &= 0, \\ uf_1 + vf_2 + wf_3 &= 0, \\ uu_1 + vu_2 + wu_3 &= 0; \end{aligned}$$

on en déduit

$$\frac{u}{f_2 u_3 - f_3 u_2} = \frac{v}{f_3 u_1 - f_1 u_3} = \frac{w}{f_1 u_2 - f_2 u_1} = \frac{-t}{\begin{vmatrix} x & y & z \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}}.$$

On a donc la relation

$$\varphi\big(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, -(\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z)\big) = 0.$$

C'est une équation aux dérivées partielles du second ordre dont toutes les solutions appartiennent à l'équation aux dérivées partielles du troisième ordre qui régit le problème dans le cas général. Comme on peut l'écrire

$$\frac{C}{Ax+By+Cz}=\Phi\left(\frac{A}{Ax+By+Cz}, \frac{B}{Ax+By+Cz}\right),$$

la fonction Φ de deux variables indépendantes étant quelconque, cette transformation, due à M. Darboux, constitue une première intégration effectuée sur l'équation du troisième ordre.

Dans la Note qui a fait suite à notre première Communication à l'Académie (13 janvier 1905), il a paru à M. Darboux que, puisque l'équation $D=0$ aux dérivées partielles du troisième ordre admet, dans tous les cas, une intégrale première de la forme

$$\Phi(l, m, n)=0,$$

cette équation pouvait être mise sous la forme

$$\Theta=\begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix}=0,$$

l, m, n étant les fonctions de x, y, z définies par les relations

$$l=\frac{f_2u_3-f_3u_2}{\Delta}, \qquad m=\frac{f_3u_1-f_1u_3}{\Delta}, \qquad n=\frac{f_1u_2-f_2u_1}{\Delta},$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} x & y & z \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix},$$

relations desquelles on déduit

$$\delta_f l=\frac{zf_2-yf_3}{\Delta^2}D.$$

Et en effet, si l'on multiplie deux fois le déterminant Θ par le déterminant Δ en tenant compte des relations

$$\begin{aligned} lx+my+nz&=1, \\ lf_1+mf_2+nf_3&=0, \\ lu_1+mu_2+nu_3&=0, \end{aligned}$$

on trouve l'identité (¹)

$$\Theta\Delta^4=+D\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ \delta_u f_1 & \delta_u f_2 & \delta_u f_2 \end{vmatrix}$$

dont le second membre contient bien en facteur D.

(¹) Il y a évidemment une erreur d'impression dans la Note de M. Darboux qui

15. Enfin, proposons-nous de déterminer les surfaces caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles du troisième ordre. On sait que, pour les obtenir, il suffit de considérer l'ensemble des termes qui contiennent des dérivées du troisième ordre de $f(x, y, z)$ et d'y remplacer chaque dérivée f'''_{ikl} par le produit $p_i p_k p_l$; p_i, p_k, p_l désignant les dérivées premières d'une certaine fonction $\varphi(x, y, z)$ qui, égalée à une constante, définira les surfaces caractéristiques.

Or, les éléments de la troisième ligne dans le déterminant (3) sont les seuls qui contiennent des dérivées du troisième ordre. L'élément

$$u_{11}f_1 + u_{12}f_2 + u_{13}f_3$$

développé donnera

$$f_1(f_1f_{111}+f_2f_{112}+f_3f_{113})+f_2(f_1f_{121}+f_2f_{122}+f_3f_{123})+f_3(f_1f_{131}+f_2f_{132}+f_3f_{133})$$

et si l'on fait la substitution ci-dessus

$$\varphi_1(f_1\varphi_1+f_2\varphi_2+f_3\varphi_3)^2.$$

De sorte que, après substitution, le déterminant deviendra

$$(f_1\varphi_1+f_2\varphi_2+f_3\varphi_3)^2 \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \end{vmatrix}.$$

En égalant ce résultat à zéro, on a l'équation aux dérivées partielles qui détermine les caractéristiques.

Elle se décompose donc en trois facteurs dont un facteur double

$$f_1\varphi_1+f_2\varphi_2+f_3\varphi_3 = 0$$

qui admet pour solutions les fonctions $V(x, y, z)$ précédemment considérées (n° 9) et dont toutes les surfaces correspondantes coupent orthogonalement les surfaces de la famille. Ces fonctions $V(x, y, z)$ comprennent en particulier les fonctions l, m, n introduites par M. Darboux et qui entrent dans l'équation du plan de la courbe

$$lx + my + nz - 1 = 0;$$

---

donne

$$\theta\Delta^4 = -D \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ \delta_f u_1 & \delta_f u_2 & \delta_f u_3 \end{vmatrix}.$$

on a

$$l_1 f_1 + l_2 f_2 + l_3 f_3 = 0.$$

Si en effet on développe le premier membre de cette équation en introduisant la valeur de l

$$l = \frac{f_2 u_3 - f_3 u_2}{\Delta}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} x & y & z \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix},$$

on voit que ce premier membre est linéaire par rapport à x, y, z; le coefficient de x est identiquement nul, et les coefficients de y et z nuls en vertu de l'équation à laquelle satisfait la fonction $f(x, y, z)$.

Le troisième facteur simple formé par le déterminant ci-dessus admet pour solutions les fonctions $\varphi(x, y, z)$

$$\varphi(x, y, z) = \mathfrak{F}(u, f),$$

$\mathfrak{F}$ désignant une fonction quelconque de deux variables.

Si l'on égale la fonction $\varphi(x, y, z)$ à une constante σ, chaque surface σ est composée de points où la famille se comporte comme une famille de surfaces parallèles.

En particulier, dans le cas où les plans des courbes trajectoires passent par un point fixe, les intersections des surfaces φ avec les surfaces f sont des courbes *sphériques,* puisque dans ce cas la fonction f satisfait à une équation de la forme

$$u = \Theta(f, x^2 + y^2 + z^2).$$

Tous les résultats ci-dessus s'expliquent suffisamment si l'on se rappelle la signification des courbes caractéristiques dans la théorie des équations aux dérivées partielles.

16. Nous allons faire une première application de ces résultats généraux au cas où la famille de surfaces se présente sous la forme

$$f(x, y, z) = \mathrm{X} + \mathrm{Y} + \mathrm{Z} = \rho,$$

X, Y, Z désignant des fonctions de x, y, z respectivement.

L'équation

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ \delta_f u_1 & \delta_f u_2 & \delta_f u_3 \end{vmatrix} = 0$$

se réduit dans ce cas à

$$(11) \qquad 4X'Y'Z' \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ X'' & Y'' & Z'' \\ X'X''' + X''^2 & Y'Y''' + Y''^2 & Z'Z''' + Z''^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Sous cette forme réduite, on remarquera la très grande analogie qui existe entre cette équation et l'équation correspondante des systèmes triples orthogonaux

$$-2X'Y'Z' \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ X'' & Y'' & Z'' \\ X'X''' - 2X''^2 & Y'Y''' - 2Y''^2 & Z'Z''' - 2Z''^2 \end{vmatrix} = 0,$$

et en particulier l'identité des ensembles de termes ne contenant aucune dérivée du troisième ordre.

L'équation (11) peut être satisfaite de trois façons différentes :

1° Deux des dérivées secondes, par exemple Y'', Z'', sont nulles.

La famille de surfaces a alors pour équation

$$\varphi(x) + my + nz + p = \rho.$$

Elle se compose de cylindres à génératrices parallèles.

2° Une seule dérivée seconde, par exemple Z'', est nulle.

Alors X et Y doivent satisfaire à une même équation

$$X'X''' + X''^2 + kX'' = 0,$$

k étant une constante. C'est là un cas particulier de l'équation que nous trouvons au cas suivant.

3° Les trois fonctions satisfont à la même équation

$$(12) \qquad X'X''' + X''^2 + kX'' = a,$$

k et a désignant deux constantes arbitraires.

Cette équation a été donnée pour la première fois par M. Cosserat (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, t. XIX, [1899] 1900, p. 372).

L'équation (12) peut s'intégrer complètement. On a d'abord

$$(13) \qquad X'(X'' + k) = ax + b,$$

b désignant une nouvelle constante. Posons alors

$$(14) \qquad X' = (ax + b)z,$$

z sera déterminé par l'équation

$$\frac{z\,dz}{-1+kz+az^2}+\frac{dx}{ax+b}=0. \tag{15}$$

C'est une équation à variables séparées. Soient α, β les racines supposées distinctes, et en supposant $a \neq 0$, du trinome

$$az^2+kz-1=0.$$

L'équation (15) pourra s'écrire

$$\frac{dx}{ax+b}+\frac{1}{a(\alpha-\beta)}\left(\frac{\alpha\,dz}{z-\alpha}-\frac{\beta\,dz}{z-\beta}\right)=0 \tag{15'}$$

et donnera donc, en intégrant,

$$\frac{[(ax+b)(z-\alpha)]^\alpha}{[(ax+b)(z-\beta)]^\beta}=\text{const.} \tag{16}$$

Remplaçons $z(ax+b)$ par X' dans l'équation (16), elle deviendra

$$\frac{[\mathrm{X}'-\alpha(ax+b)]^\alpha}{[\mathrm{X}'-\beta(ax+b)]^\beta}=\frac{m^\alpha}{n^\beta}, \tag{16'}$$

$\frac{m^\alpha}{n^\beta}$ désignant une nouvelle constante.

On peut remplacer cette équation par les deux suivantes, en introduisant une nouvelle variable t,

$$\mathrm{X}'-\alpha(ax+b)=mt^\beta,$$
$$\mathrm{X}'-\beta(ax+b)=nt^\alpha.$$

On en déduit

$$(\alpha-\beta)(ax+b)=nt^\alpha-mt^\beta, \tag{17}$$
$$(\alpha-\beta)\mathrm{X}'=n\alpha t^\alpha-m\beta t^\beta. \tag{18}$$

L'équation (18) peut s'écrire en remplaçant dx par sa valeur tirée de (17)

$$a(\alpha-\beta)^2\,d\mathrm{X}=(n\alpha t^\alpha-m\beta t^\beta)(n\alpha t^{\alpha-1}-m\beta t^{\beta-1})\,dt \tag{19}$$

et, en intégrant,

$$a(\alpha-\beta)^2\mathrm{X}=\frac{n^2\alpha}{2}t^{2\alpha}+\frac{m^2\beta}{2}t^{2\beta}-\frac{2mn\alpha\beta}{(\alpha+\beta)}t^{\alpha+\beta}+\mathrm{C}, \tag{20}$$

C désignant une nouvelle constante.

Les deux équations (17), (20) *résolvent la question.* X *est la fonction de* t *définie par la relation* (20), t *étant une fonction de* x *définie par la relation* (17).

En remplaçant x par y et z, on aura les deux autres fonctions Y et Z, et la famille de surfaces sera

$$X + Y + Z = \rho.$$

Les constantes a, k et, par suite, α, β doivent être les mêmes dans les relations qui définissent X, Y, Z.

Ces formules semblent assez compliquées.

L'application des résultats généraux établis au début de cette étude nous permettra d'établir ce fait que *les plans des courbes trajectoires passent par un point fixe.*

On intégrerait de même l'équation qui donne X, Y, Z (12) dans les cas que nous avons laissés de côté

$$a = 0, \qquad \alpha = \beta.$$

17. $k = 0$. — Ce cas est le plus intéressant.

L'équation à laquelle satisfont X, Y, Z est alors

$$X'X''' + X''^2 = a;$$

d'où, en intégrant une première fois,

$$X'X'' = ax + b$$

et, en intégrant deux fois encore,

$$X = \int (ax^2 + 2bx + c)^{\frac{1}{2}}\, dx.$$

L'équation de la famille de surfaces est donc

$$(21) \qquad \int \sqrt{ax^2 + 2bx + c}\, dx + \int \sqrt{ay^2 + 2b'y + c'}\, dy + \int \sqrt{az^2 + 2b''z + c''}\, dz = \rho,$$

a, b, c, b', c', b'', c'' *désignant* 7 *constantes arbitraires.*

Les intégrales peuvent, d'ailleurs, être calculées.

Nous allons rechercher, d'abord directement, dans ce cas, les équations des courbes trajectoires. Les équations différentielles de ces courbes sont

$$\frac{dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}=\frac{dy}{\sqrt{ay^2+2b^2y+c'}}=\frac{dz}{\sqrt{az^2+2b''z+c''}}.$$

Égalons ces rapports à $\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{dt}{t}$ en désignant par t une autre variable destinée à fixer la position du point sur la courbe trajectoire; on aura, en intégrant,

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} &x\sqrt{a}+\frac{b}{\sqrt{a}}+\sqrt{ax^2+2bx+c}=\alpha t,\\ &y\sqrt{a}+\frac{b'}{\sqrt{a}}+\sqrt{ay^2+2b'y+c'}=\beta t,\\ &z\sqrt{a}+\frac{b''}{\sqrt{a}}+\sqrt{az^2+2b''z+c''}=\gamma t,\end{aligned}\right.$$

α, β, γ désignant trois nouvelles constantes. On obtiendra toutes les courbes trajectoires en faisant varier α, β, γ ou plutôt les rapports $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\gamma}{\alpha}$.

En élevant au carré pour faire disparaître les radicaux, on obtiendra

$$(22')\qquad \left\{\begin{aligned} x&=\frac{\alpha^2t^2-2\alpha t\frac{b}{\sqrt{a}}+\frac{b^2-ac}{a}}{2\alpha t\sqrt{a}},\\ y&=\frac{\beta^2t^2-2\beta t\frac{b'}{\sqrt{a}}+\frac{b'^2-ac'}{a}}{2\beta t\sqrt{a}},\\ z&=\frac{\gamma^2t^2-2\gamma t\frac{b''}{\sqrt{a}}+\frac{b''^2-ac''}{a}}{2\gamma t\sqrt{a}}.\end{aligned}\right.$$

(Ces équations sont plus générales que les premières et correspondent à toutes les familles que l'on obtient en prenant les radicaux avec des signes quelconques.)

Ces courbes sont bien planes. En effet, pour chaque système de valeurs de α, β, γ, on pourra déterminer des constantes que nous écrirons $u\alpha$, $v\beta$, $w\gamma$ telles que l'on ait

$$u\alpha x+v\beta y+w\gamma z+1\equiv 0.$$

Les équations qui déterminent u, v, w sont les suivantes :

$$\begin{aligned} &u\alpha^2+v\beta^2+w\gamma^2=0,\\ &u\alpha b+v\beta b'+w\gamma b''-a=0,\\ &u(b^2-ac)+v(b'^2-ac')+w(b''^2-ac'')=0.\end{aligned}$$

La seconde de ces relations exprime que *les plans des courbes trajectoires passent par un point fixe*

$$x_0 = -\frac{b}{a}, \qquad y_0 = -\frac{b'}{a}, \qquad z_0 = -\frac{b''}{a}.$$

Ces courbes trajectoires sont toutes des hyperboles. On obtiendra une branche en faisant varier t de $-\infty$ à 0, l'autre de 0 à $+\infty$.

Ces hyperboles sont, quels que soient α, β, γ, *tangentes à des plans fixes parallèles aux plans de coordonnées.*

Par exemple, elles sont tangentes aux deux plans fixes

$$x = x_0, \qquad x = x_1,$$

x_0 et x_1 étant les racines de l'équation

$$ax^2 + 2bx + c = 0.$$

Ces deux plans sont équidistants du point fixe.

En résumé :

La famille de surfaces

$$\int\sqrt{ax^2+2bx+c}\,dx + \int\sqrt{ay^2+2b'y+c'}\,dy + \int\sqrt{az^2+2b''z+c''}\,dz = \rho$$

a ses trajectoires orthogonales planes. Ce sont des hyperboles tangentes à six plans fixes parallèles 2 à 2 aux plans de coordonnées, et les plans des courbes trajectoires passent par un point fixe.

Les coordonnées de ce point fixe sont

$$x_0 = -\frac{b}{a}, \qquad y_0 = -\frac{b'}{a}, \qquad z_0 = -\frac{b''}{a}.$$

Les plans tangents correspondants sont équidistants du point fixe.

Si l'on transporte l'origine au point fixe, l'équation de la famille peut s'écrire

$$\begin{aligned}(23)\qquad & x\sqrt{x^2+c} + y\sqrt{y^2+c'} + z\sqrt{z^2+c''} \\ & + \mathrm{L}\left(x+\sqrt{x^2+c}\right)^{c}\left(y+\sqrt{y^2+c'}\right)^{c'}\left(z+\sqrt{z^2+c''}\right)^{c''} = \rho.\end{aligned}$$

Les équations des courbes trajectoires sont, dans ce cas,

$$(24)\qquad x = \frac{\alpha^2 t^2 - c}{2\alpha t}, \qquad y = \frac{\beta^2 t^2 - c'}{2\beta t}, \qquad z = \frac{\gamma^2 t^2 - c''}{2\gamma t}.$$

L'équation du plan de la courbe correspondant aux valeurs α, β, γ est

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \frac{c}{\alpha} & \frac{c'}{\beta} & \frac{c''}{\gamma} \end{vmatrix} = 0.$$

18. Nous pouvons retrouver tous ces résultats par l'application des théorèmes démontrés au début de cette étude.

Nous avons démontré que les courbes trajectoires sont sur les surfaces

$$v(x, y, z) = \frac{f_3 u_1 - f_1 u_3}{f_2 u_3 - f_3 u_2} = \sigma.$$

Dans le cas actuel, on a (en se bornant à l'équation réduite)

$$f_1 = \sqrt{x^2 + c}, \qquad f_2 = \sqrt{y^2 + c'}, \qquad f_3 = \sqrt{z^2 + c''},$$
$$u = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = x^2 + y^2 + z^2 + c + c' + c''.$$

On a donc

$$v(x, y, z) = \frac{x\sqrt{z^2 + c''} - z\sqrt{x^2 + c}}{z\sqrt{y^2 + c'} - y\sqrt{z^2 + c''}} = \sigma.$$

Cette forme de la fonction $v(x, y, z)$ suffit à montrer que les plans des courbes trajectoires passent par un point fixe, origine des coordonnées (n° 13).

On verra facilement qu'il suffit de prendre

$$\sigma = \frac{\beta}{\alpha}\,\frac{c''\alpha^2 - c\gamma^2}{c'\gamma^2 - c''\beta^2},$$

pour que la surface

$$v(x, y, z) = \sigma$$

passe par la courbe

$$x = \frac{\alpha^2 t^2 - c}{2\alpha t}, \qquad y = \frac{\beta^2 t^2 - c'}{2\beta t}, \qquad z = \frac{\gamma^2 t^2 - c''}{2\gamma t}.$$

D'autre part, l'équation du plan de la trajectoire est

$$X + v_0 Y + w_0 Z = 0;$$

or

$$v_0 = \frac{\beta}{\alpha}\,\frac{c''\alpha^2 - c\gamma^2}{c'\gamma^2 - c''\beta^2},$$

on trouverait, de même,

$$w_0 = \frac{\gamma}{\alpha}\,\frac{c\beta^2 - c'\alpha^2}{c'\gamma^2 - c''\beta^2}.$$

Par suite, l'équation du plan est

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \dfrac{c}{\alpha} & \dfrac{c'}{\beta} & \dfrac{c''}{\gamma} \end{vmatrix} = 0,$$

comme nous l'avons trouvé.

19. Si l'on suppose $a = 0$, l'équation de la famille peut s'écrire en choisissant convenablement les axes

$$(25) \qquad x\sqrt{bx} + y\sqrt{b'y} + z\sqrt{b''z} = \rho.$$

Les équations différentielles des courbes trajectoires sont, dans ce cas,

$$\frac{dx}{\sqrt{bx}} = \frac{dy}{\sqrt{b'y}} = \frac{dz}{\sqrt{b''z}}.$$

En égalant ces rapports à dt et intégrant, on aura

$$(26) \qquad \begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{b}} = t + \alpha, \\ \sqrt{\dfrac{y}{b'}} = t + \beta, \\ \sqrt{\dfrac{z}{b''}} = t + \gamma. \end{cases}$$

A tout système de valeurs de α, β, γ, ou plutôt des différences $\alpha - \beta$, $\alpha - \gamma$, correspond une courbe trajectoire. A chacun de ces systèmes on peut faire correspondre des quantités m, n, p, q, telles que l'on ait identiquement

$$mx + ny + pz + q = 0.$$

Ces quantités sont déterminées par les relations

$$\begin{aligned} mb + nb' + pb'' &= 0, \\ mb\alpha + nb'\beta + pb''\gamma &= 0, \\ m\alpha^2 + n\beta^2 + p\gamma^2 + q &= 0. \end{aligned}$$

La première de ces relations montre que les plans des courbes trajectoires restent parallèles à une direction fixe b, b', b''.

Ceci est conforme au résultat que nous avions trouvé dans le cas précédent.

Lorsque a tend vers zéro, le point de coordonnées $-\frac{b}{a}$, $-\frac{b'}{a}$, $-\frac{b''}{a}$, par lequel passent tous les plans des courbes trajectoires, s'éloigne à l'infini dans la direction b, b', b''.

Les équations des courbes trajectoires peuvent s'écrire

$$x = b\,(t+\alpha)^2,$$
$$y = b'(t+\beta)^2,$$
$$z = b''(t+\gamma)^2.$$

Ces courbes sont des paraboles tangentes aux trois plans fixes des coordonnées.

L'équation du plan de la courbe (α, β, γ) est

$$(27) \qquad \begin{vmatrix} X-\alpha^2 & Y-\beta^2 & Z-\gamma^2 \\ b & b' & b'' \\ b\alpha & b'\beta & b''\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

Dans le cas actuel, on trouvera que notre famille de surfaces qui contient les trajectoires orthogonales est

$$v(x, y, z) = \frac{b\sqrt{b''z} - b''\sqrt{bx}}{b''\sqrt{b'y} - b'\sqrt{b''z}} = \sigma.$$

Cette forme suffit (n° 13) à montrer que les plans des courbes trajectoires restent parallèles à une direction fixe b, b', b''.

Il suffit de prendre

$$\sigma = \frac{b}{b'}\,\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\gamma},$$

pour quela surface correspondante passe par la courbe α, β, γ.

Si on laisse v constant, comme on a entre les fonctions v, w,

$$w = \frac{b'\sqrt{bx} - b\sqrt{b'y}}{b''\sqrt{b'y} - b'\sqrt{b''z}},$$

la relation

$$b + b'v + b''w = 0,$$

w le sera aussi. L'équation du plan de la courbe qui peut s'écrire

$$X - \alpha^2 + v(Y-\beta^2) + w(Z-\gamma^2) = 0$$

montre que ce plan *reste alors parallèle à un plan fixe.*

En tous les points de l'intersection d'une surface de la famille par une sur-

face fixe $v(x, y, z) = \sigma$, les courbes trajectoires sont les intersections de la surface $v(x, y, z) = \sigma$ par des plans parallèles. On se trouve dans un cas particulier, où les plans parallèles aux plans des courbes trajectoires menés par l'origine ont une enveloppe.

Remarquons enfin que ces surfaces

$$x\sqrt{bx} + y\sqrt{b'y} + z\sqrt{b''z} = \rho$$

rentrent dans la catégorie des surfaces tétraédrales de Lamé.

Si nous écrivons la famille sous la forme

$$\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{z}{C}\right)^{\frac{3}{2}} = \rho,$$

les lignes asymptotiques de ces surfaces sont déterminées par l'équation

$$\sqrt{\alpha}\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{3}{4}} + \sqrt{\beta}\left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{3}{4}} + \sqrt{\gamma}\left(\frac{z}{C}\right)^{\frac{3}{4}} = 0$$

(Darboux, *Leçons sur les systèmes orthogonaux,* Livre I, Chap. VI) où α, β, γ sont trois constantes dont la somme est nulle.

20. Nous allons établir un résultat absolument général relativement aux plans des courbes trajectoires de toutes les familles

$$X + Y + Z = \rho.$$

Nous avons vu que, si X, Y, Z sont trois solutions d'une équation de la forme (12)

$$X'X''' + X''^2 + kX'' = a,$$

où l'on remplace respectivement la variable indépendante par x, y, z, la famille de surfaces

$$X + Y + Z = \rho$$

admet des trajectoires orthogonales planes.

Nous avons d'ailleurs établi que, si

$$f(x, y, z) = \rho$$

est une telle famille de surfaces, si l'on forme les fonctions

$$u = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2,$$

$$A = f_2 u_3 - f_3 u_2, \qquad B = f_3 u_1 - f_1 u_3, \qquad C = f_1 u_2 - f_2 u_1,$$

les trajectoires orthogonales sont sur les surfaces

$$v(x, y, z) = \frac{B}{A} = \sigma, \qquad w(x, y, z) = \frac{C}{A} = \tau.$$

Formons dans le cas qui nous occupe la fonction $v(x, y, z)$. On a

$$u = X'^2 + Y'^2 + Z'^2,$$

par suite

$$A = 2Y'Z'(Z'' - Y''),$$
$$B = 2Z'X'(X'' - Z''),$$
$$C = 2X'Y'(Y'' - X'').$$

Or, en intégrant une première fois l'équation (12), on a

$$X'(X'' + k) = ax + b;$$

par suite

$$X'' = \frac{ax + b - kX'}{X'}$$

et des valeurs correspondantes pour Y'', Z'', b seul variant.

En portant ces valeurs dans la fonction $v(x, y, z)$, elle devient

$$v(x, y, z) = \frac{(ax + b)Z' - (az + b'')X'}{(az + b'')Y' - (ay + b')Z'}.$$

Si l'on se rappelle la forme de la fonction $v(x, y, z)$, dans le cas où les plans des courbes trajectoires passent par un point fixe x_0, y_0, z_0 (n° 13)

$$v(x, y, z) = \frac{(x - x_0)f_3 - (z - z_0)f_1}{(z - z_0)f_2 - (y - y_0)f_3},$$

et, en vertu de la réciproque que nous avons démontrée, on en conclut que les plans des courbes trajectoires passent par le point fixe

$$x_0 = -\frac{b}{a}, \qquad y_0 = -\frac{b'}{a}, \qquad z_0 = -\frac{b''}{a}.$$

C'est précisément le résultat que nous avions obtenu dans le cas simple où $k = 0$. Ainsi :

Pour toutes les familles de surfaces de la forme

$$X + Y + Z = \rho$$

admettant des trajectoires orthogonales planes, les plans des courbes trajectoires passent par un point fixe. Les coordonnées de ce point fixe sont

$$-\frac{b}{a}, \quad -\frac{b'}{a}, \quad -\frac{b''}{a},$$

b, b', b'' étant les premières constantes introduites par l'intégration de l'équation à laquelle satisfont X, Y, Z

$$X'X''' + X''^2 + kX'' = a.$$

DEUXIÈME PARTIE.

Nous nous proposons, dans cette Partie, d'étudier, plus spécialement, les familles de surfaces à trajectoires orthogonales planes, telles, que les plans des courbes trajectoires restent parallèles à une direction fixe, ou passent par un point fixe.

Quand les plans des courbes trajectoires sont parallèles à la direction dont les paramètres directeurs sont a, b, c, nous avons vu que la fonction $f(x, y, z)$ satisfait à une équation aux dérivées partielles du premier ordre (nº 12)

$$u(x, y, z) = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = \mathfrak{F}(f, ax + by + cz).$$

Si nous prenons l'axe des x parallèle à cette direction fixe, la fonction $f(x, y, z)$ devra satisfaire à l'équation

$$p^2 + q^2 + r^2 = \mathfrak{F}(f, x) \tag{1}$$

en mettant suivant l'usage p, q, r au lieu de f_1, f_2, f_3.

On peut d'ailleurs établir directement ce résultat.

Les équations des courbes trajectoires de la famille

$$f(x, y, z) = \rho$$

sont

$$\frac{dx}{f_1} = \frac{dy}{f_2} = \frac{dz}{f_3}.$$

Si la courbe est dans un plan parallèle à ox, on a

$$my + nz + p = 0;$$

on aura, en dérivant par rapport à t,

$$mf_2 + nf_3 = 0,$$
$$mu_2 + nu_3 = 0,$$

et, par suite,

$$\frac{u_2}{f_2} = \frac{u_3}{f_3}. \tag{2}$$

On en déduit immédiatement

$$u(x, y, z) = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = \mathfrak{F}(f, x). \tag{3}$$

Développons, d'autre part, la relation (2). Elle s'écrit

$$f_3(f_1 f_{12} + f_2 f_{22} + f_3 f_{32}) = f_2(f_1 f_{13} + f_2 f_{23} + f_3 f_{33})$$

ou

$$f_1 \frac{\partial}{\partial x} \frac{f_2}{f_3} + f_2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{f_2}{f_3} + f_3 \frac{\partial}{\partial z} \frac{f_2}{f_3} = 0,$$

ou enfin

$$(4) \qquad f_1 v_1 + f_2 v_2 + f_3 v_3 = 0$$

en posant

$$v(x, y, z) = \frac{f_2}{f_3}.$$

Telle est dans ce cas la forme de la fonction que nous avons désignée par $v(x, y, z)$ et qui est telle que les surfaces

$$v(x, y, z) = \sigma$$

renferment les trajectoires orthogonales.

Pour donner une application immédiate, si la famille de surfaces est de la forme

$$f(x, y^2 + z^2) = \rho,$$

c'est-à-dire si elle est composée de surfaces de révolution autour de ox, les surfaces

$$v(x, y, z) = \frac{f_2}{f_3} = \frac{y}{z} = \sigma$$

sont les plans passant par ox. Ils coupent bien orthogonalement toutes les surfaces de la famille et renferment les courbes trajectoires.

22. Résolvons maintenant l'équation (1).

Supposons d'abord que le second membre soit indépendant de x. On sait alors que la famille est composée de surfaces parallèles.

23. Nous avons vu que l'équation du problème peut s'écrire

$$f_1 v_1 + f_2 v_2 + f_3 v_3 = 0$$

en posant

$$v = \frac{f_2}{f_3}.$$

Un autre cas simple est celui où $\frac{f_2}{f_3}$ est indépendant de x.

L'équation de la famille de surfaces est alors de la forme

$$\mathcal{F}(x, \varphi(y, z)) = \rho.$$

On aura

$$\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2=\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\varphi}\right)^2(\varphi_y'^2+\varphi_z'^2).$$

Par suite, pour que le second membre se réduise à une fonction de ρ et de x, c'est-à-dire à une fonction de φ et de x, il faut et il suffit que l'on ait

$$\varphi_y'^2+\varphi_z'^2=f(\varphi).$$

On peut donc poser

$$\varphi(y,z)=f_1\big(y\cos\theta+z\sin\theta+\chi(\theta)\big),$$

θ étant une fonction de y et de z définie par l'équation

$$-y\sin\theta+z\cos\theta+\chi'(\theta)=0,$$

χ et f_1 désignant deux fonctions arbitraires d'une variable.

Ainsi, *on peut définir la famille de surfaces par les équations*

$$y\cos\theta+z\sin\theta+\chi(\theta)=\mathcal{F}(x,\rho), \tag{5}$$

$$-y\sin\theta+z\cos\theta+\chi'(\theta)=0. \tag{6}$$

(Nous changeons légèrement les notations.) De ces deux relations, on peut déduire y et z en fonction de trois paramètres ρ, x, θ.

On obtiendra une surface de la famille en laissant ρ constant et faisant varier x et θ. Les courbes trajectoires sont sur les surfaces $\theta=$ const. On a donc l'équation du plan de la courbe trajectoire

$$-y\sin\theta+z\cos\theta+\chi'(\theta)=0,$$

qui est bien parallèle à Ox.

Si l'on forme le ds^2 de la surface, on se rend compte aisément que chaque surface de la famille est une *surface moulure cylindrique*. Cette solution était d'ailleurs évidente géométriquement. Les paramètres ρ, x, θ définissent un système triple orthogonal.

24. Nous supposerons maintenant que la fonction $\mathcal{F}(f,x)$ se réduise à une fonction de x seulement. Nous résoudrons donc l'équation aux dérivées partielles

$$p^2+q^2+r^2=\mathcal{F}(x). \tag{7}$$

La méthode de Jacobi donne tout de suite une intégrale complète

$$\rho-\rho_0=\alpha y+\beta z+\int\sqrt{\mathcal{F}(x)-\alpha^2-\beta^2}\,dx. \tag{8}$$

Les caractéristiques qui ont pour équations

$$\frac{dx}{\frac{\partial\rho}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial\rho}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial\rho}{\partial z}}$$

représentent en même temps les trajectoires orthogonales de la famille. Elles ont pour équations

$$(9) \qquad \frac{y-y_0}{\alpha} = \frac{z-z_0}{\beta} = \int \frac{dx}{\sqrt{\mathfrak{F}(x)-\alpha^2-\beta^2}}\,dx.$$

Les deux premiers rapports montrent bien que ces courbes sont dans des plans parallèles à Ox.

On obtient donc, à la fois, les surfaces de la famille et les courbes trajectoires.

25. Rapportons la courbe trajectoire à deux axes situés dans son plan, dont l'un soit parallèle à Ox. Pour cela, posons

$$\alpha = k\sin\theta, \qquad \beta = k\cos\theta.$$

L'équation de cette courbe sera

$$(10) \qquad Z = (y-y_0)\sin\theta + (z-z_0)\cos\theta = k\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\mathfrak{F}(x)-k^2}}.$$

Les courbes ne dépendent donc que d'un seul paramètre

$$(11) \qquad k = \sqrt{\alpha^2+\beta^2},$$

α et β variant de telle façon que k reste constant, le plan de la courbe se déplace enveloppant un cylindre, mais la courbe trajectoire reste invariable de forme et d'orientation par rapport aux axes situés dans son plan.

26. Si

$$\mathfrak{F}(x) = \frac{1}{x^2},$$

on a un cas traité par M. Darboux dans ses *Leçons sur les systèmes triple-orthogonaux*. Les équations des courbes sont

$$(12) \qquad \frac{y-y_0}{\alpha} = \frac{z-z_0}{\beta}, \qquad (y-y_0)^2+(z-z_0)^2+x^2 = \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}.$$

Ce sont *des cercles assujettis à couper à angle droit le plan des* yz.

M. Darboux a montré que, pour construire une surface Σ, en partant d'une surface particulière Σ_0, il suffisait de construire le point M qui, avec M_0, P, Q, pris toujours dans le même ordre, donne un rapport anharmonique constant, P, Q désignant les deux points d'intersection du cercle avec le plan des yz.

27. On peut du reste démontrer directement ces résultats.

Transformons la famille de surfaces satisfaisant à l'équation

$$p^2 + q^2 + r^2 = \frac{1}{x^2} \tag{13}$$

par inversion, en prenant pour pôle un point quelconque du plan des yz. On trouvera facilement que la fonction qui détermine la nouvelle famille satisfait à l'équation

$$p_1^2 + q_1^2 + r_1^2 = \frac{1}{x_1^2}.$$

Cette nouvelle famille admet donc aussi des trajectoires orthogonales planes, et, comme elles sont les transformées par inversion des trajectoires de la première famille, on en conclut que toutes ces courbes sont des cercles qui coupent orthogonalement le plan des yz.

En transformant la famille de cercles par une inversion de pôle quelconque, on obtient un nouveau système cyclique que l'on construira en prenant les cercles orthogonaux à une sphère fixe et à une surface quelconque Σ. Ce résultat est dû à Ribaucour. Nous n'insisterons pas sur les propriétés très remarquables de ce système cyclique (Darboux, *Systèmes orthogonaux*, n^{os} 32 et suiv.).

28. On peut chercher à déterminer la forme de la fonction $\mathcal{F}(x)$ pour que les courbes trajectoires soient des paraboles dont l'équation réduite soit de la forme

$$Z^2 = ax + b.$$

On trouve que :

Toutes les fois que $\mathcal{F}(x)$ *a la forme linéaire,*

$$\mathcal{F}(x) = 4\lambda x + \mu, \tag{14}$$

les courbes trajectoires sont des paraboles dont l'équation réduite est

$$\frac{2\lambda Z}{k} = \sqrt{4\lambda x + \mu - k^2} - \sqrt{4\lambda x_0 + \mu - k^2}. \tag{15}$$

Si une seule trajectoire est une parabole, toutes le seront donc.

29. Si l'on cherche à obtenir, comme courbes trajectoires, des coniques

$$\frac{x^2}{A} + \frac{Z^2}{B} = 1, \tag{16}$$

on trouve que $\mathcal{F}(x)$ doit être de la forme

$$\mathcal{F}(x) = \lambda + \frac{\mu}{x^2}, \tag{17}$$

et l'on a alors

$$A = \frac{\mu}{k^2 - \lambda}, \qquad B = \frac{k^2 \mu}{(k^2 - \lambda)^2}. \tag{18}$$

30. En désignant par $2a$, $2c$ le grand axe et la distance focale de la conique, on déduit des valeurs ci-dessus

$$\frac{a^2}{c} = \sqrt{-\frac{\mu}{\lambda}}. \tag{19}$$

Cette relation est indépendante de α, β, c'est-à-dire de la trajectoire considérée.

Par suite :

La distance du centre de la conique aux directrices est constante pour toutes les courbes trajectoires.

31. Enfin le cas où $\mathcal{F}(x) = x^2$ se traiterait de la même façon :
Les courbes trajectoires sont des chaînettes

$$Z = k \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\mathcal{F}(x) - k^2}} = k L \frac{x + \sqrt{x^2 - k^2}}{x_0 + \sqrt{x_0^2 - k^2}}.$$

32. Dans le cas où on laisse quelconque la direction a, b, c, ..., on verra que les courbes trajectoires ont pour équations

$$\begin{aligned} \frac{x - x_0 - a(t - t_0)}{p_0 - aA} &= \frac{y - y_0 - b(t - t_0)}{q_0 - bA} \\ &= \frac{z - z_0 - c(t - t_0)}{r_0 - cA} = \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{\sqrt{A^2 - \mathcal{F}(t_0) + \mathcal{F}(t)}}, \end{aligned} \tag{20}$$

en posant

$$A = ap_0 + bq_0 + cr_0, \qquad t_0 = ax_0 + by_0 + cz_0,$$

$x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, r_0$ désignant les constantes de Cauchy.

Une seule quadrature suffit pour obtenir ces courbes. Elles sont bien planes, car on en déduit l'équation

$$(21) \qquad \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a & b & c \\ p_0 & q_0 & r_0 \end{vmatrix} = 0.$$

C'est l'équation du plan de la courbe.

33. Nous rechercherons de la même façon les familles de surfaces telles *que les plans des courbes trajectoires passent par un point fixe.*

Si nous prenons ce point fixe comme origine des coordonnées, et si nous exprimons que les courbes trajectoires dont les équations différentielles sont

$$\frac{dx}{dt} = f_1, \qquad \frac{dy}{dt} = f_2, \qquad \frac{dz}{dt} = f_3$$

sont dans des plans passant par l'origine, dont l'équation sera de la forme

$$mx + ny + pz = 0;$$

nous obtiendrons, en dérivant deux fois par rapport à t, les relations

$$mf_1 + nf_2 + pf_3 = 0,$$
$$mu_1 + nu_2 + pu_3 = 0,$$

en posant toujours

$$u(x, y, z) = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2.$$

On en déduit

$$(22) \qquad \mathrm{D} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = 0,$$

et, par suite,

$$(23) \qquad u(x, y, z) = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = \mathfrak{F}(f, x^2 + y^2 + z^2),$$

$\mathfrak{F}$ désignant une fonction quelconque de deux variables.

Ainsi, *pour que la famille de surfaces*

$$f(x, y, z) = \rho$$

admette des trajectoires orthogonales planes, les plans des courbes passant constamment par l'origine, il faut et il suffit que la fonction $f(x, y, z)$ satis-

fasse à une équation aux dérivées partielles du premier ordre de la forme

$$f_1^2+f_2^2+f_3^2=\mathcal{F}(f,\ x^2+y^2+z^2). \tag{23'}$$

34. Nous supposerons d'abord que $\mathcal{F}$ ne dépende que de

$$\sigma=x^2+y^2+z^2.$$

Ici encore, on pourrait passer aux coordonnées polaires et obtenir immédiatement une intégrale complète. La méthode de Cauchy, que nous emploierons, nous donnera les coordonnées des points d'une courbe trajectoire en fonction d'un paramètre.

L'intégration de l'équation aux dérivées partielles

$$p^2+q^2+r^2=\mathrm{F}(\sigma) \tag{24}$$

est ramenée à celle du système

$$\frac{dx}{p}=\frac{dy}{q}=\frac{dz}{r}=\frac{df}{\mathrm{F}(\sigma)}=\frac{dp}{x\mathrm{F}'_\sigma}=\frac{dq}{y\mathrm{F}'_\sigma}=\frac{dr}{z\mathrm{F}'_\sigma}=\frac{d\sigma}{2\lambda}, \tag{25}$$

en posant

$$px+qy+rz=\lambda. \tag{26}$$

On en déduit le système

$$\frac{d\sigma}{2\lambda}=\frac{d\lambda}{\sigma\mathrm{F}'_\sigma+\mathrm{F}(\sigma)}=\frac{d\rho}{\mathrm{F}(\sigma)}, \tag{27}$$

qui ne renferme que σ, ρ, λ. Si l'on élimine

$$\lambda=\frac{\mathrm{F}(\sigma)}{2\rho'_\sigma} \tag{28}$$

entre ces deux égalités, on trouve l'équation

$$\mathrm{F}^2\rho''+2\sigma\mathrm{F}'\rho'^3+2\mathrm{F}\rho'^3-\mathrm{F}\mathrm{F}'_\sigma\rho'=0. \tag{29}$$

C'est là une équation de Bernoulli qui détermine la fonction $u(\sigma)$. Elle peut s'intégrer et donne

$$\rho-\rho_0=\int_{\sigma_0}^{\sigma}\frac{\mathrm{F}\,d\sigma}{\sqrt{4\sigma\mathrm{F}-k^2}}, \tag{30}$$

k étant une constante.

On a d'ailleurs, sans intégration,

$$\lambda = px + qy + rz = \frac{\mathbf{F}}{2\rho'_\sigma} = \tfrac{1}{2}\sqrt{4\sigma\mathbf{F} - k^2}. \tag{31}$$

Des rapports (25) on déduira facilement ensuite que x, y, z sont trois solutions d'une même équation

$$(4\sigma\mathbf{F} - k^2)\,x'' + 2(\sigma\mathbf{F}' + \mathbf{F})\,x' - x\mathbf{F}' = 0, \tag{32}$$

x, y, z étant déterminés, on aura, sans nouvelle intégration

$$\left\{\begin{aligned} p &= 2\lambda x' = \sqrt{4\sigma\mathbf{F} - k^2}\,x', \\ q &= 2\lambda y' = \sqrt{4\sigma\mathbf{F} - k^2}\,y', \\ r &= 2\lambda z' = \sqrt{4\sigma\mathbf{F} - k^2}\,z'. \end{aligned}\right. \tag{32'}$$

Ainsi, *le problème est ramené à une quadrature*

$$\rho - \rho_0 = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{\mathbf{F}\,d\sigma}{\sqrt{4\sigma\mathbf{F} - k^2}},$$

et à l'intégration de l'équation linéaire du second ordre

$$(4\sigma\mathbf{F} - k^2)\,x'' + 2(\sigma\mathbf{F}' + \mathbf{F})\,x' - x\mathbf{F}' = 0.$$

k^2 dépendra des coordonnées initiales $x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, r_0, \rho_0$ par la relation

$$p_0x_0 + q_0y_0 + r_0z_0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{4\sigma_0\mathbf{F}_0 - k^2}; \tag{33}$$

on introduira les constantes de Cauchy et, par suite, une fonction arbitraire de deux variables $\psi(v, w)$, en posant

$$x_0 = \text{const.}, \qquad y_0 = v, \qquad z_0 = w, \qquad \rho_0 = \psi(v, w), \qquad q_0 = \psi'_v, \qquad r_0 = \psi'_w,$$

p_0 se déduira de l'équation

$$p_0^2 + q_0^2 + r_0^2 = \mathbf{F}(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2).$$

En d'autres termes, des formules de la forme

$$\begin{aligned} x &= \varphi\ (\sigma, x_0, p_0, k), \\ y &= \varphi_1(\sigma, y_0, q_0, k), \\ z &= \varphi_2(\sigma, z_0, r_0, k) \end{aligned}$$

définissent x, y, z comme fonctions de trois variables v, w, σ, σ étant elle-même une fonction du paramètre ρ de la surface, de v, w définie par la relation

$$\rho - \psi(v, w) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{F\, d\sigma}{\sqrt{4\sigma F - k^2}}.$$

35. L'équation qui détermine x, y, z est une équation linéaire du second ordre. On peut la ramener à une équation de Riccati de la forme

$$t' + t^2 - \varphi(\sigma) = 0.$$

Remarquons aussi qu'il suffit d'avoir une seule solution particulière renfermant k, car, si $\varphi(\sigma, k)$ est une solution de l'équation (32), $\varphi(\sigma, -k)$ sera aussi solution de l'équation et, par suite, la solution générale sera

$$x = a\,\varphi(\sigma, k) + b\,\varphi(\sigma, -k),$$

en désignant par a, b deux constantes arbitraires et en admettant que $\varphi(\sigma, k)$ soit différent de $\varphi(\sigma, -k)$.

36. Il n'est pas nécessaire d'effectuer les intégrations pour démontrer qu'en effet les courbes trajectoires sont planes, et pour trouver l'équation du plan.

En effet, on obtiendra une surface de la famille en considérant, dans les formules qui donnent x, y, z, ρ comme constant et faisant varier v, w. Mais la forme même de l'équation

$$p^2 + q^2 + r^2 = F(x^2 + y^2 + z^2),$$

et les équations des courbes trajectoires

$$\frac{dx}{p} = \frac{dy}{q} = \frac{dz}{r}$$

montrent que, si l'on a intégré le système (25), on a par cela même les équations des courbes trajectoires, et qu'on obtient ces dernières en laissant v, w constants et faisant varier seulement ρ, *ou, ce qui revient au même, seulement* σ.

Or, la forme de la solution sera la suivante

$$(34)\qquad \begin{cases} x = a\,\varphi(\sigma) + b\,\psi(\sigma), \\ y = a_1\varphi(\sigma) + b_1\psi(\sigma), \\ z = a_2\varphi(\sigma) + b_2\psi(\sigma), \end{cases}$$

puisque x, y, z satisfont à la même équation linéaire (32); a, b, a_1, b_1, a_2, b_2 ne dépendent que des coordonnées initiales, c'est-à-dire de v, w. *Ce sont les équa-*

tions des courbes trajectoires. Elles ne dépendent donc que de l'équation

$$(4\sigma F - k^2)x'' + 2(\sigma F' + F)x' - xF' = 0.$$

Du système (34) on déduit, en particulier, l'équation du plan de la courbe

$$(35) \qquad \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0;$$

on déterminera les a et les b en fonction des conditions initiales. On trouve ainsi

$$(36) \qquad a = \frac{x_0\psi'_0 - \dfrac{p_0}{\sqrt{4\sigma_0 F_0 - k^2}}\psi_0}{\varphi_0\psi'_0 - \psi_0\varphi'_0}, \qquad b = \frac{-x_0\varphi'_0 + \dfrac{p_0}{\sqrt{4\sigma_0 F_0 - k^2}}\varphi_0}{\varphi_0\psi'_0 - \psi_0\varphi'_0};$$

on aurait des valeurs analogues pour a_1, b_1, a_2, b_2.

En remplaçant les a et les b dans l'équation du plan, on obtient simplement

$$(35') \qquad \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ p_0 & q_0 & r_0 \end{vmatrix} = 0.$$

37. Nous avons vu que la détermination des courbes trajectoires dépendait uniquement de l'intégration de l'équation

$$(4\sigma F - k^2)x'' + 2(\sigma F' + F)x' - xF' = 0.$$

Cette équation ne dépend pas de p_0, q_0, r_0 individuellement, mais de la combinaison $p_0x_0 + q_0y_0 + r_0z_0$ en vertu de la relation (33). Dans le cas général, la solution est de la forme (34), les a et les b ayant les valeurs données (36).

Si l'on forme les combinaisons Σx^2, Σxx_0 on trouvera évidemment

$$\Sigma x^2 = \sigma, \qquad \Sigma xx_0 = F_1(\sigma, \sigma_0, k).$$

Si donc, on élimine σ entre ces deux relations pour avoir la deuxième équation des courbes trajectoires, on obtiendra une relation de la forme

$$(37) \qquad \Phi(\Sigma x^2, \Sigma xx_0, \sigma_0, k) = 0$$

qui représente une surface Φ de révolution.

La courbe trajectoire est ainsi définie par son plan et une surface de révolution sur laquelle elle se trouve tracée.

L'équation de la surface Φ ne dépend pas non plus de p_0, q_0, r_0 individuellement, mais seulement de la combinaison $p_0 x_0 + q_0 y_0 + r_0 z_0$.

Considérons toutes les familles de surfaces comprises dans l'équation

$$p^2 + q^2 + r^2 = \mathrm{F}(\sigma).$$

Il en existe une ∞^2 dépendant d'une fonction arbitraire de deux variables $\psi(v, w)$ introduite par l'intégration.

Prenons, par exemple, comme condition initiale $x_0 = 0$ et considérons toutes celles de ces familles qui correspondent aux fonctions $\psi(v, w)$ comprises dans la formule

$$\psi(v, w) = f(v, w) + \theta\left(\frac{w}{v}\right), \tag{38}$$

$f(v, w)$ étant une fonction déterminée, θ étant une fonction variant d'une famille à l'autre.

Pour toutes ces familles, on a

$$v\psi'_v + w\psi'_w = vf'_v + wf'_w.$$

A chaque système de valeurs de v, w correspond une courbe trajectoire pour chaque famille.

Les équations des plans des courbes trajectoires

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & v & w \\ p_0 & q_0 & r_0 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$x(vr_0 - wq_0) + p_0(wy - vz) = 0,$$

montrent que *tous les plans passent par une droite fixe du plan des yz.*

Mais, de plus, la quantité k, qui ne dépend que de $p_0 x_0 + q_0 y_0 + r_0 z_0$ ou de $v\psi'_v + w\psi'_w$, est aussi indépendante de la famille de surfaces considérée. Il en est donc de même de la surface Φ. Toutes les courbes trajectoires sont tracées sur cette surface. On peut donc dire que :

Pour toutes les familles correspondant aux fonctions $\psi(v, w)$ comprises dans la formule (38), *les courbes trajectoires correspondant à un même système de valeurs de v, w sont les intersections d'une même surface Φ de révolution par les divers plans passant par une droite fixe du plan des yz.*

L'axe de révolution est, d'ailleurs, à chaque instant, dans le plan des yz, perpendiculaire à cette droite fixe.

38. Les remarques précédentes montrent qu'on connaît, sans intégration aucune, deux des trois équations des courbes trajectoires en fonction d'un paramètre σ.

De plus, la quantité

$$\theta = xx_0 + yy_0 + zz_0$$

sera aussi solution de l'équation (32).

θ sera donc de la forme

$$A\varphi(\sigma, k) + B\psi(\sigma, k).$$

Pour déterminer A et B, on aura d'abord la condition

$$\sigma_0 = A\varphi_0 + B\psi_0.$$

D'autre part, des relations (36) on déduit

$$A\varphi'_0 + B\psi'_0 = \tfrac{1}{2}.$$

Ainsi, *on prendra pour* $\theta = xx_0 + yy_0 + zz_0$ *la solution de l'équation*

$$(4\sigma F - k^2)\theta'' + 2(\sigma F' + F)\theta' - F'\theta = 0,$$

solution qui est de la forme

$$\theta = A\varphi(\sigma) + B\psi(\sigma),$$

et l'on déterminera A *et* B *par les relations*

$$\sigma_0 = A\varphi_0 + B\psi_0,$$
$$\tfrac{1}{2} = A\varphi'_0 + B\psi'_0.$$

On aura ainsi la troisième équation des courbes trajectoires.

En remplaçant σ *par sa valeur, cette équation sera de la forme*

$$xx_0 + yy_0 + zz_0 = \mathfrak{F}(x^2 + y^2 + z^2, \sigma_0, k).$$

Elle représente une surface de révolution qui passe par la courbe trajectoire.

39. Nous allons appliquer ces résultats à quelques cas particuliers. Soit d'abord

$$F(\sigma) = \sigma.$$

On a à intégrer l'équation (30). On trouve

$$(39)\qquad \rho - \psi(v, w) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{F\,d\sigma}{\sqrt{4\sigma F - k^2}} = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{\sigma\,d\sigma}{\sqrt{4\sigma^2 - k^2}} = \tfrac{1}{4}\left(\sqrt{4\sigma^2 - k^2}\right)_{\sigma_0}^{\sigma}.$$

L'équation qui détermine x, y, z est

$$(4\sigma^2 - k^2)x'' + 4\sigma x' - x = 0. \tag{40}$$

On la ramène à l'équation de Riccati

$$t' + t^2 + \frac{3k^2}{(4\sigma^2 - k^2)^2} = 0,$$

dont on trouve facilement la solution particulière

$$t = \frac{4\sigma + k}{\sqrt{4\sigma^2 - k^2}},$$

à laquelle correspond la solution particulière

$$x_1 = \sqrt{2\sigma + k},$$

et, par suite aussi, en vertu de la remarque faite,

$$x_2 = \sqrt{2\sigma - k}$$

sera solution de l'équation (40).

Si donc k est différent de zéro (la solution serait complètement imaginaire, et ce fait est général), la solution générale de l'équation (40) est

$$x = a\sqrt{2\sigma - k} + b\sqrt{2\sigma + k}. \tag{41}$$

On aura ensuite

$$p = \sqrt{4\sigma^2 - k^2}\,x' = a\sqrt{2\sigma + k} + b\sqrt{2\sigma - k}. \tag{42}$$

On déterminera les constantes a, b en fonction des coordonnées initiales par les relations

$$\left\{\begin{aligned} x_0 &= a\sqrt{2\sigma_0 - k} + b\sqrt{2\sigma_0 + k}, \\ p_0 &= a\sqrt{2\sigma_0 + k} + b\sqrt{2\sigma_0 - k}. \end{aligned}\right. \tag{43}$$

On aurait de même deux autres groupes d'équations analogues à (41)-(42) pour déterminer y et q, z et r, avec des conditions analogues à (43).

En résumé, les équations

$$\left\{\begin{aligned} x &= a\ \sqrt{2\sigma - k} + b\ \sqrt{2\sigma + k}, \\ y &= a_1\sqrt{2\sigma - k} + b_1\sqrt{2\sigma + k}, \\ z &= a_2\sqrt{2\sigma - k} + b_2\sqrt{2\sigma + k}, \end{aligned}\right. \tag{44}$$

$$4[\rho - \psi(v, w)] = \sqrt{4\sigma^2 - k^2} - \sqrt{4\sigma_0^2 - k^2}$$

déterminent x, y, z en fonction de v, w (dont dépendent les coordonnées initiales) et σ, σ étant déterminée en fonction de v, w et du paramètre ρ de la surface par la dernière des équations (44).

Ainsi que nous l'avons dit, on obtiendra les surfaces de la famille en considérant dans ces formules ρ comme constant et faisant varier v, w. *On obtiendra les courbes trajectoires en laissant v, w constants et faisant varier seulement* ρ, c'est-à-dire σ. On a donc à la fois les surfaces et les courbes trajectoires de ces surfaces.

En particulier, les équations de ces courbes sont les trois premières des équations (44), a, b ayant les valeurs suivantes en fonction des coordonnées initiales

$$(45)\qquad a=\frac{p_0\sqrt{2\sigma_0+k}-x_0\sqrt{2\sigma_0-k}}{2k},\qquad b=\frac{x_0\sqrt{2\sigma_0+k}-p_0\sqrt{2\sigma_0-k}}{2k},$$

a_1, b_1, a_2, b_2 ayant des valeurs analogues.

De ces équations on déduit d'abord

$$(46)\qquad \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ p_0 & q_0 & r_0 \end{vmatrix} = 0.$$

C'est l'équation du plan de la courbe trajectoire.

Si l'on tient compte des relations

$$p_0^2+q_0^2+r_0^2=x_0^2+y_0^2+z_0^2,$$
$$2(p_0x_0+q_0y_0+r_0z_0)=\sqrt{4\sigma_0^2-k^2},$$

on déduira facilement des équations (45)

$$\Sigma a^2=\Sigma b^2=\tfrac{1}{4},\qquad \Sigma ab=0,$$

et, par suite,

$$\Sigma ax=\tfrac{1}{4}\sqrt{2\sigma-k},$$
$$\Sigma bx=\tfrac{1}{4}\sqrt{2\sigma+k};$$

d'où, en éliminant σ,

$$[\Sigma(b+a)x][\Sigma(b-a)x]=\frac{k}{8},$$

et en remplaçant les a et les b par leurs valeurs

$$[\Sigma(p_0+x_0)x][\Sigma(x_0-p_0)x]=\frac{k^2}{4},$$

ou enfin

$$(47)\qquad (x_0x+y_0y+z_0z)^2-(p_0x+q_0y+r_0z)^2=\frac{k^2}{4}.$$

Cette équation représente un cylindre ayant pour section droite la courbe trajectoire. Donc :

Quelle que soit la fonction $\psi(v, w)$, pour toutes les familles de surfaces satisfaisant à l'équation

$$p^2+q^2+r^2=x^2+y^2+z^2,$$

les courbes trajectoires sont des hyperboles dont le centre est à l'origine.

40. Nous allons faire une deuxième application de nos formules au cas de la fonction

$$F(\sigma)=\frac{1}{\sigma}$$

correspondant à l'équation aux dérivées partielles

$$p^2+q^2+r^2=\frac{1}{x^2+y^2+z^2},$$

on a d'abord

$$\rho-\psi(v, w)=\int_{\sigma_0}^{\sigma}\frac{F\,d\sigma}{\sqrt{4\sigma F-k^2}}=\frac{1}{\sqrt{4-k^2}}\,L\,\frac{\sigma}{\sigma_0};$$

d'où

$$\sigma=\sigma_0 e^{\sqrt{4-k^2}(\rho-\psi)}. \tag{48}$$

k sera déterminée en fonction des coordonnées initiales par la relation

$$p_0x_0+q_0y_0+r_0z_0=\tfrac{1}{2}\sqrt{4-k^2}.$$

Nous supposerons $4-k^2>0$. D'autre part, l'équation qui donne x, y, z est

$$(4-k^2)\,x''+\frac{x}{\sigma^2}=0. \tag{49}$$

Si l'on essaie une solution de la forme $x=\sigma^\beta$ on trouve que β doit être racine de l'équation

$$(4-k^2)\,\beta(\beta-1)+1=0.$$

Cette équation admet deux racines distinctes (si $k\neq 0$)

$$\beta \quad \text{et} \quad \beta'=1-\beta.$$

L'équation étant linéaire, la solution générale de l'équation (49) est

$$x=a\sigma^\beta+b\sigma^{1-\beta}.$$

Mais les racines sont imaginaires dans l'hypothèse où nous nous sommes placé. Nous allons donc transformer cette solution. On a

$$\beta = \frac{1}{2} + \frac{ki}{2\sqrt{4-k^2}}.$$

On peut donc écrire

$$x = \sigma^{\frac{1}{2}}(a\cos\varphi + b\sin\varphi) \tag{50}$$

en posant, pour abréger,

$$\varphi = \frac{1}{2}\frac{k}{\sqrt{4-k^2}}\,\mathrm{L}\,\sigma.$$

D'autre part,

$$\lambda = px + qy + rz = \tfrac{1}{2}\sqrt{4\sigma\mathrm{F} - k^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{4-k^2}, \tag{51}$$

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{4-k^2}\,x' \\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{4-k^2}\,\sigma^{-\frac{1}{2}}\left[a\left(\cos\varphi - \frac{k}{\sqrt{4-k^2}}\sin\varphi\right) + b\left(\sin\varphi + \frac{k}{\sqrt{4-k^2}}\cos\varphi\right)\right]. \end{aligned}$$

Les valeurs de a, b seront connues en fonction des valeurs initiales p_0, x_0, en remplaçant, dans les expressions de x et p, σ, x, p par σ_0, x_0, p_0.

En résolvant les deux équations ainsi obtenues, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{k}{2}\sigma_0^{\frac{1}{2}}a &= \frac{x_0}{2}\sqrt{4-k^2}\left(\sin\varphi_0 + \frac{4}{\sqrt{4-k^2}}\cos\varphi_0\right) - p_0\sigma_0\sin\varphi_0, \\ \frac{k}{2}\sigma_0^{\frac{1}{2}}b &= -\frac{x_0}{2}\sqrt{4-k^2}\left(\cos\varphi_0 - \frac{4}{\sqrt{4-k^2}}\sin\varphi_0\right) + p_0\sigma_0\cos\varphi_0. \end{aligned}$$

Enfin, en substituant ces valeurs de a, b dans l'expression de x, on aura x en fonction de σ et des valeurs initiales x_0, p_0, σ_0. On trouve ainsi simplement

$$x = x_0\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^{\frac{1}{2}}\cos(\varphi-\varphi_0) + \frac{1}{k}\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^{\frac{1}{2}}\sin(\varphi-\varphi_0)\left(2p_0\sigma_0 - x_0\sqrt{4-k^2}\right).$$

Mais on a

$$\sigma = \sigma_0 e^{\sqrt{4-k^2}(\rho-\psi)},$$

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{1}{2}\frac{k}{\sqrt{4-k^2}}\,\mathrm{L}\frac{\sigma}{\sigma_0} = \tfrac{1}{2}k(\rho-\psi);$$

on a donc la formule définitive

$$x = e^{\frac{1}{2}\sqrt{4-k^2}(\rho-\psi)}\left[x_0\cos\tfrac{1}{2}k(\rho-\psi) + \frac{1}{k}\sin\tfrac{1}{2}k(\rho-\psi)\left(2p_0\sigma_0 - x_0\sqrt{4-k^2}\right)\right] \tag{52}$$

et des expressions analogues pour y et z.

Ces formules toutes résolues en x, y, z en fonction de trois paramètres ρ, v, w donnent à la fois les surfaces de la famille qu'on obtiendra en laissant ρ constant, et les courbes trajectoires en laissant v, w constants.

De ces formules on déduira aisément les suivantes

$$\Sigma\, x^2 = e^{\sqrt{4-k^2}(\rho-\psi)}\, \Sigma x_0^2,$$
$$\Sigma x x_0 = e^{\frac{1}{2}\sqrt{4-k^2}(\rho-\psi)} \cos\tfrac{1}{2}k(\rho-\psi)\, \Sigma x_0^2,$$

entre lesquelles on éliminera facilement ρ pour avoir une équation indépendante de ρ. L'équation résultante sera celle de la surface de révolution, que nous avons désignée par Φ, sur laquelle est tracée la courbe trajectoire.

41. Supposons, par exemple, que la fonction $\psi(v, w)$ soit choisie de telle sorte que l'on ait

$$p_0 x_0 + q_0 y_0 + r_0 z_0 = 0.$$

Alors $k = 2$. Les formules se réduisent aux suivantes

$$(52') \qquad \begin{cases} x = x_0 \cos(\rho-\psi) + p_0\sigma_0 \sin(\rho-\psi), \\ y = y_0 \cos(\rho-\psi) + q_0\sigma_0 \sin(\rho-\psi), \\ z = z_0 \cos(\rho-\psi) + r_0\sigma_0 \sin(\rho-\psi). \end{cases}$$

On en déduit l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2.$$

Les courbes trajectoires sont alors des cercles dont le centre est à l'origine.

Supposons $x_0 = 0$. En vertu de la relation

$$q_0 y_0 + r_0 z_0 = 0$$

ou

$$v\psi'_v + w\psi'_w = 0,$$

la fonction $\psi(v, w)$ se réduit à une fonction de $t = \dfrac{w}{v}$.

Si donc on pose

$$\psi(v, w) = \varphi(t),$$

on verra facilement que, pour avoir la famille de surfaces, il faudra éliminer t entre les équations

$$\rho = \varphi(t) - \operatorname{arc\,tang} \frac{\sqrt{x^2(1+t^2) + (ty-z)^2}}{tz+y},$$
$$(1+t^2)\,\varphi'(t) = \frac{ty-z}{\sqrt{x^2(1+t^2)+(ty-z)^2}}.$$

Or la deuxième équation est la dérivée par rapport à t de la première. Ces deux équations définissent donc l'enveloppe de la famille de surfaces

$$x^2(1+t^2)+(ty-z)^2=(tz+y)^2\, tg^2[\rho-\varphi(t)].$$

Les surfaces de la famille sont donc les cônes enveloppes d'une famille de cônes du second degré, de révolution, ayant pour sommet l'origine et dont l'axe décrit le plan zoy.

42. Comme troisième application, nous traiterons le cas où

$$F(\sigma)=\frac{1}{\sigma^2}.$$

On a d'abord

$$\rho-\psi(v,w)=\int_{\sigma_0}^{\sigma}\frac{F\,d\sigma}{\sqrt{4\sigma F-k^2}}=-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{4-k^2\sigma}{\sigma}}\right)_{\sigma_0}^{\sigma}. \tag{53}$$

L'équation qui détermine x, y, z est

$$\sigma^2(4-k^2\sigma)x''-2\sigma x'+2x=0. \tag{54}$$

Elle admet visiblement la solution particulière $x=a\sigma$ et par suite on trouvera facilement la solution générale

$$\left\{\begin{aligned} x&=a\,\sigma+b\,\varphi(\sigma),\\ y&=a_1\sigma+b_1\varphi,\\ z&=a_2\sigma+b_2\varphi \end{aligned}\right. \tag{55}$$

en posant

$$\varphi(\sigma)=\sqrt{\sigma(4-k^2\sigma)}. \tag{56}$$

D'autre part, on aura

$$p\sigma=a\varphi+b(2-k^2\sigma), \tag{57}$$

on déterminera a, b au moyen des relations

$$x_0=a\sigma_0+b\varphi_0,$$
$$p_0\sigma_0=a\varphi_0+b(2-k^2\sigma_0).$$

Enfin k^2 dépend des coordonnées initiales par la relation

$$p_0x_0+q_0y_0+r_0z_0=\tfrac{1}{2}\sqrt{4\sigma_0F_0-k^2}=\frac{1}{2\sigma_0}\varphi_0, \tag{58}$$

on trouve ainsi

$$(59)\qquad a = \frac{p_0\sigma_0\varphi_0 - x_0(2 - k^2\sigma_0)}{2\sigma_0}, \qquad b = \frac{x_0\varphi_0 - p_0\sigma_0^2}{2\sigma_0},$$

on en déduit facilement les relations

$$(60)\qquad \Sigma a^2 = \frac{k^2}{4}, \qquad \Sigma b^2 = \tfrac{1}{4}, \qquad \Sigma ab = 0.$$

On sait que l'on obtient les courbes trajectoires de la famille en laissant dans les formules (53), (55), v, w constants et faisant varier seulement ρ, *c'est-à-dire* σ.

Cela résulte comme nous l'avons indiqué bien souvent de la forme même de l'équation aux dérivées partielles. On démontrerait d'ailleurs directement la relation

$$\frac{\partial x}{\partial \rho}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial \rho}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial \rho}\frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

Les équations des courbes trajectoires sont donc les équations (55) avec les valeurs de a, b données par les formules (59). On en déduit d'abord l'équation du plan de la courbe; et, d'autre part, en tenant compte des relations (60),

$$\Sigma ax = \frac{k^2\sigma}{4}, \qquad (\Sigma bx)^2 = \frac{\sigma(4 - k^2\sigma)}{16}.$$

D'où la nouvelle équation indépendante de σ

$$(61)\qquad k^2(\Sigma bx)^2 = \Sigma ax(1 - \Sigma ax)$$

qui représente un cylindre du second degré dont la courbe trajectoire est une section droite.

On a enfin

$$x^2 + y^2 + z^2 = \sigma$$

et, en éliminant σ,

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{4}{k^2}(ax + a_1 y + a_2 z).$$

Les courbes trajectoires sont donc des cercles passant par l'origine.

Ceci résulte d'ailleurs immédiatement de ce que nous disons au numéro suivant.

43. D'une façon générale, considérons une famille de surfaces $f(x, y, z) = \rho$ admettant des trajectoires planes, les plans de ces trajectoires passant par l'origine des coordonnées. La fonction $f(x, y, z)$ satisfait à une équation aux dérivées partielles de la forme

$$p^2 + q^2 + r^2 = \mathcal{F}(f, \sigma).$$

Si l'on transforme cette famille de surfaces par inversion en prenant l'origine pour pôle d'inversion, on obtiendra une nouvelle famille de surfaces jouissant de la même propriété et par suite satisfaisant à une équation analogue.

Faisons, en effet, la transformation représentée par les formules

$$\frac{x_1}{x} = \frac{y_1}{y} = \frac{z_1}{z} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2} = \frac{x_1^2+y_1^2+z_1^2}{1} = \frac{1}{\sigma} = \frac{\sigma_1}{1}.$$

La fonction $f(x, y, z)$ devient une fonction $f_1(x_1, y_1, z_1)$ qui admet des dérivées p_1, q_1, r_1. On aura

$$p = p_1 \frac{\sigma - 2x^2}{\sigma^2} - q_1 \frac{2xy}{\sigma^2} - r_1 \frac{2xz}{\sigma^2},$$

et des valeurs analogues pour q, r.

On en déduit

$$p^2 + q^2 + r^2 = (p_1^2 + q_1^2 + r_1^2)\,\sigma_1^2.$$

Si donc la fonction $f(x, y, z)$ satisfait à l'équation

$$p^2 + q^2 + r^2 = \mathcal{F}(f, \sigma),$$

la fonction $f_1(x_1, y_1, z_1)$ satisfera à l'équation

$$p_1^2 + q_1^2 + r_1^2 = \frac{1}{\sigma_1^2}\mathcal{F}\left(f_1, \frac{1}{\sigma_1}\right).$$

Cette remarque nous permet de doubler, pour ainsi dire, nos solutions. Si nous avons résolu le problème pour une fonction $\mathcal{F}(f, \sigma)$ nous l'aurons résolu pour la fonction $\frac{1}{\sigma^2}\mathcal{F}(f, \sigma)$, en faisant une inversion.

Ainsi, aux fonctions

$$\sigma, \quad \frac{1}{\sigma^2}, \quad \frac{1}{\sigma}$$

correspondent les fonctions

$$\frac{1}{\sigma^3}, \quad 1, \quad \frac{1}{\sigma}.$$

En particulier, cette transformation, appliquée aux familles que nous avons obtenues dans notre troisième application, donne les familles de surfaces parallèles.

Il était donc à prévoir que les courbes trajectoires étaient des cercles passant par l'origine.

De même toutes les familles de surfaces satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles

$$p^2 + q^2 + r^2 = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$$

peuvent être associées deux à deux, de telle façon que les surfaces de l'une des familles soient les inverses des surfaces de l'autre famille.

44. Tous les résultats que nous avons trouvés [cas où la fonction qui figure dans le second membre de l'équation

$$f_x'^2 + f_y'^2 + f_z'^2 = \varphi(x, y, z)$$

se réduit à une fonction de x ou à une fonction de $x^2 + y^2 + z^2$], s'expliquent d'une façon remarquablement simple si l'on fait usage des théorèmes démontrés par M. Darboux sur les mouvements d'un point dans l'espace quand il y a une fonction des forces $U(x, y, z)$ (*Leçons sur les surfaces*, n^os 553 et suivants).

Dans ce cas les équations du mouvement sont

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z},$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 2(U + h).$$

Si l'on prend toutes les trajectoires correspondant à la même valeur de la constante des forces vives, toutes les trajectoires possibles dépendent encore de quatre constantes arbitraires. *Si l'on prend toutes celles qui sont normales à une seule surface, elles sont, par cela même, normales à toute une famille de surfaces.*

Pour obtenir une telle congruence de courbes, il suffit de prendre une famille de surfaces $\theta = \text{const.}$, *la fonction* $\theta\ (x, y, z)$ *satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles*

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)^2 = 2(U + h).$$

Les courbes trajectoires seront les trajectoires de cette famille de surfaces.

Mais M. Darboux a montré de plus que l'on peut obtenir, sans intégration aucune, ces courbes trajectoires si l'on a une solution θ dépendant de deux constantes arbitraires a, b en prenant

$$\frac{\partial \theta}{\partial a} = a', \qquad \frac{\partial \theta}{\partial b} = b'.$$

Ces résultats permettent de retrouver tous les cas que nous avons traités.

Il est évident que, toutes les fois que la force restera parallèle à une direction fixe, celle de l'axe des x, la fonction des forces se réduira à une fonction de x, et toutes les trajectoires seront des courbes planes dans les plans parallèles à ox menés par les vitesses initiales. Il suffit de prendre pour $\theta(x, y, z)$ une solution d'une équation de la forme

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)^2=\varphi(x).$$

Si la force passe par un point fixe (origine des coordonnées), la fonction des forces se réduit à une fonction de $x^2+y^2+z^2$ et toutes les trajectoires du mobile seront dans des plans passant par l'origine.

En particulier, si la force est répulsive, proportionnelle à la distance à l'origine, les courbes trajectoires sont, comme on sait, des coniques ayant pour centre l'origine; on a le cas que nous avons traité (n° 39).

Si la force est attractive, en raison inverse du carré de la distance, les courbes trajectoires sont des coniques ayant pour foyer le centre d'attraction.

45. Si la fonction $u=f(x, y, z)$ satisfait à une équation aux dérivées partielles de la forme

$$p^2+q^2+r^2=\mathcal{F}(u, x^2+y^2+z^2)=\mathcal{F}(u, \sigma), \tag{62}$$

la fonction $\mathcal{F}$ dépendant maintenant aussi de u, la même méthode d'intégration conduira aux deux équations

$$\frac{d\sigma}{4\lambda}=\frac{d\lambda}{2\sigma\mathcal{F}'_\sigma+\lambda\mathcal{F}'_u+2\mathcal{F}}=\frac{du}{2\mathcal{F}}; \tag{63}$$

en posant toujours

$$\lambda=px+qy+rz$$

on en déduit par l'élimination de λ

$$2\mathcal{F}^2u''+4\sigma\mathcal{F}'_\sigma u'^3+4\mathcal{F}u'^3-\mathcal{F}\mathcal{F}'_u u'^2-2\mathcal{F}\mathcal{F}'_\sigma u'=0, \tag{64}$$

$$\lambda=\frac{\mathcal{F}}{2u'_\sigma}.$$

Ces équations donnent u, puis λ, en fonction de σ et de deux constantes. On verra ensuite facilement que x, y, z sont trois solutions de la même équation linéaire du second ordre

$$4\lambda^2x''+4\lambda\lambda'x'-\lambda x'\mathcal{F}'_u-x\mathcal{F}'_\sigma=0 \tag{65}$$

et que l'on a

$$p=2\lambda x', \qquad q=2\lambda y', \qquad r=2\lambda z'.$$

Un raisonnement identique à celui que nous avons fait (n° 36) montre que l'équation du plan de la courbe trajectoire passant au point x_0, y_0, z_0 est

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ p_0 & q_0 & r_0 \end{vmatrix} = 0,$$

et conduit au résultat suivant :

Les équations des courbes trajectoires en fonction d'un paramètre σ sont

$$x^2 + y^2 + z^2 = \sigma,$$

$$\theta = xx_0 + yy_0 + zz_0 = \mathbf{F}(\sigma),$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ p_0 & q_0 & r_0 \end{vmatrix} = 0,$$

θ *étant la solution de l'équation* (65) *à laquelle satisfont* x, y, z. *Cette solution est de la forme*

$$\theta = \mathbf{A}\,\varphi(\sigma) + \mathbf{B}\,\psi(\sigma),$$

A *et* B *seront déterminés par les relations*

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = \mathbf{A}\,\varphi(\sigma_0) + \mathbf{B}\,\psi(\sigma_0),$$

$$\tfrac{1}{2} = \mathbf{A}\,\varphi'(\sigma_0) + \mathbf{B}\,\psi'(\sigma_0).$$

L'équation

$$\theta = xx_0 + yy_0 + zz_0 = \mathbf{F}(\sigma) = \mathbf{F}(x^2 + y^2 + z^2)$$

représente une surface de révolution passant par la courbe trajectoire.

TROISIÈME PARTIE.

---

46. Nous avons déjà fait remarquer au début de cette étude (n° 3) la grande analogie qui existe entre l'équation des systèmes triples et l'équation des familles de surfaces admettant des trajectoires orthogonales planes.

Nous rappelons, en particulier, que les ensembles de termes ne contenant aucune dérivée partielle du troisième ordre sont identiques dans les deux équations.

Considérons une famille de Lamé (S) admettant des trajectoires orthogonales planes. Associons-lui les deux familles (S_1), (S_2) qui complètent le système triple. Si l'on prend deux surfaces fixes S_1, S_2, comme la surface variable S est à chaque instant normale à l'intersection de S_1, S_2, cette intersection est une trajectoire orthogonale de la famille (S). C'est donc une courbe plane. D'autre part, en vertu du théorème fondamental de Dupin, l'intersection de deux surfaces S_1, S_2 est ligne de courbure pour chacune des surfaces. Donc :

A chaque famille de Lamé admettant des trajectoires orthogonales planes on peut associer deux autres familles de Lamé admettant des lignes de courbure planes dans un système.

Il était donc intéressant d'étudier les familles de Lamé admettant des trajectoires orthogonales planes. C'est cette étude que nous avons entreprise dans les deux cas suivants :

1° Les plans des courbes restent parallèles à une direction fixe;

2° Les plans des courbes passent par un point fixe.

A vrai dire, M. Darboux, dans ses *Leçons sur les systèmes orthogonaux* (Livre I, Chap. IV), avait traité une question plus générale, celle de la détermination des familles de Lamé pour lesquelles les plans osculateurs des trajectoires orthogonales aux points où elles rencontrent l'une des surfaces de la famille concourent en un même point variable avec la surface.

En particulier, pour le premier des cas indiqués, nous donnons, sans signe de quadrature aucun, les formules définissant les familles de Lamé, formules d'une grande généralité d'ailleurs, puisqu'elles dépendent d'une fonction arbitraire de deux variables et d'une fonction arbitraire d'une variable, et cependant d'une très grande simplicité.

La recherche des lignes de courbure de ces familles nous conduit à un résultat remarquablement simple et l'application dans un cas particulier nous donne un système triple dépendant de trois fonctions arbitraires d'une variable, pour lequel toutes les surfaces admettent des lignes de courbure planes dans les deux systèmes. Nous retrouvons ainsi par une méthode différente et sous une forme différente le système découvert par M. Darboux (*Leçons sur les surfaces*, n° 1056).

47. Pour qu'une famille

$$u = f(x, y, z)$$

admette pour courbes trajectoires des courbes planes, dans des plans parallèles à Ox, il faut et il suffit que la fonction $f(x, y, z)$ satisfasse à une équation aux dérivées partielles de la forme

$$\text{(1)} \qquad H = \frac{1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}} = F(u, x).$$

Nous nous proposons de chercher quelle doit être la forme de la fonction $F(u, x)$ pour que la famille correspondante soit une famille de Lamé. Il suffit d'écrire que la fonction u satisfait à l'équation de ces familles

$$\text{(2)} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} H_{11} & H_{22} & H_{33} & H_{23} & H_{13} & H_{12} \\ u_{11} & u_{22} & u_{33} & u_{23} & u_{13} & u_{12} \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2u_1 & 0 & 0 & 0 & u_3 & u_2 \\ 0 & 2u_2 & 0 & u_3 & 0 & u_1 \\ 0 & 0 & 2u_3 & u_2 & u_1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Or, si l'on forme les dérivées de H d'après l'équation (1) et si on les transporte dans l'équation (2), on trouve simplement, après des combinaisons de lignes faciles, pour les éléments de la première ligne,

$$F''_{x^2}, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0,$$

respectivement. L'équation se réduit donc à

$$\text{(3)} \qquad F''_{x^2} \Delta_{11} = 0,$$

Δ_{11} désignant le mineur relatif au premier élément de Δ. Il y a donc deux cas à distinguer :

1° $\Delta_{11} = 0$. — Or, si l'on développe ce déterminant, on trouve

$$\text{(4)} \qquad u_1 u_2 u_3 (u_{22} - u_{33}) + u_1 u_{23} (u_3^2 - u_2^2) + (u_2^2 + u_3^2)(u_2 u_{13} - u_3 u_{12}) = 0.$$

D'autre part, la famille admettant des trajectoires orthogonales planes, les plans étant parallèles à Ox, la fonction u satisfait à l'équation

$$u_1 \frac{\partial}{\partial x} \frac{u_2}{u_3} + u_2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{u_2}{u_3} + u_3 \frac{\partial}{\partial z} \frac{u_2}{u_3} = 0 \tag{5}$$

ou

$$u_2(u_1 u_{13} + u_2 u_{23} + u_3 u_{33}) - u_3(u_1 u_{12} + u_2 u_{22} + u_3 u_{32}) = 0. \tag{5'}$$

Si l'on multiplie cette équation par u_1 et si on l'ajoute à l'équation (4), il vient simplement

$$(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(u_2 u_{13} - u_3 u_{12}) = 0.$$

L'équation

$$u_2 u_{13} - u_3 u_{12} = 0$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{u_2}{u_3} = 0$$

peut donc remplacer l'équation (4). L'équation (5) se réduit alors à

$$u_2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{u_2}{u_3} + u_3 \frac{\partial}{\partial z} \frac{u_2}{u_3} = 0.$$

Ces deux dernières équations définissent (*voir* n° 23) les familles de surfaces moulures cylindriques.

Et, en effet, si l'on considère dans un plan deux familles quelconques de courbes orthogonales et si l'on enroule ce plan sur un cylindre quelconque, on engendre bien un système triple dont la troisième famille est composée des plans de profils, et satisfaisant à la question.

2° $F''_{x^2} = 0$. — La fonction $F(u, x)$ est de la forme

$$F(u, x) = Ax + B,$$

A et B désignant deux fonctions d'ailleurs quelconques de u. On peut donc dire que :

Si l'on écarte les familles de surfaces moulures cylindriques, la condition nécessaire et suffisante pour que la famille de surfaces

$$u(x, y, z) = \rho$$

admette des trajectoires orthogonales planes, dans des plans parallèles à Ox, *et constitue une famille de Lamé, est que la fonction* $u(x, y, z)$ *satisfasse à* *une équation aux dérivées partielles de la forme*

$$(6)\qquad \frac{1}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}}=\mathrm{A}x+\mathrm{B},$$

A *et* B *étant deux fonctions, qui peuvent d'ailleurs être quelconques, de u.*

48. Nous nous proposons maintenant de résoudre l'équation aux dérivées partielles (6).

Tout d'abord, on peut affecter une valeur quelconque à l'une des fonctions A, B. Nous résoudrons l'équation

$$(6')\qquad \frac{1}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}}=x+\theta(u).$$

Il est naturel de rechercher une solution complète représentée par une sphère

$$(7)\qquad \mathrm{F}(x,y,z,u)=(x-a)^2+(y-v)^2+(z-w)^2-\mathrm{R}^2=0.$$

C'est cette méthode qu'a employée M. Darboux dans le cas tout à fait général qu'il a traité, en prenant toutefois des coordonnées pentasphériques spéciales et introduisant des imaginaires.

(La dissymétrie de notre notation sera expliquée par la suite du calcul.)

a, v, w, R sont des fonctions de u à déterminer.

La fonction $u(x,y,z)$ satisfait aux équations

$$2(x-a)+\mathrm{F}'_u u_1=0,$$
$$2(y-v)+\mathrm{F}'_u u_2=0,$$
$$2(z-w)+\mathrm{F}'_u u_3=0,$$

et par suite à l'équation

$$\tfrac{1}{4}\mathrm{F}'^2_u(u_1^2+u_2^2+u_3^2)=(x-a)^2+(y-v)^2+(z-w)^2=\mathrm{R}^2,$$

c'est-à-dire à l'équation

$$(8)\qquad \mathrm{H}=\frac{1}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}}=\frac{a'(x-a)+v'(y-v)+w'(z-w)+\mathrm{RR}'}{\mathrm{R}},$$

en désignant par des lettres accentuées les dérivées par rapport à u.

Si l'on veut que cette équation se confonde avec l'équation (6′), il faut poser

$$(9)\qquad v'=0,\qquad w'=0,\qquad a'=\mathrm{R},\qquad \mathrm{RR}'-aa'=\mathrm{R}\,\theta(u).$$

v et w sont donc des constantes arbitraires; a et R sont des fonctions de u déterminées par les relations

$$(10) \qquad R = a', \qquad a'' - a = \theta(u).$$

Cette dernière équation est une équation linéaire.

Comme la fonction $\theta(u)$ est quelconque, nous pouvons la supposer mise sous la forme

$$\theta(u) = \varphi''(u) - \varphi(u).$$

La solution générale du système (10) est alors

$$(11) \qquad \begin{cases} a = \varphi(u) \;+ \alpha e^{u} + \beta e^{-u}, \\ R = \varphi'(u) + \alpha e^{u} - \beta e^{-u}, \end{cases}$$

α et β désignant deux nouvelles constantes arbitraires.

Ainsi :

On aura une solution complète de l'équation

$$\frac{1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}} = x + \varphi''(u) - \varphi(u)$$

représentée par

$$(x-a)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2 - R^2 = 0$$

en prenant

$$v = \text{const.}, \qquad w = \text{const.},$$

$$a = \varphi(u) + \alpha e^{u} + \beta e^{-u}, \qquad R = a'.$$

Cette solution renferme quatre constantes arbitraires.

49. Pour terminer le problème et obtenir la solution générale, on peut alors procéder de deux façons :

1° Écrire que toutes les sphères correspondant à une valeur u_0 du paramètre sont tangentes à une surface donnée S_0, ce qui s'exprime par une relation entre v, w, α, β. On en déduit que toutes les surfaces correspondant à une valeur u' de u sont tangentes à une surface S'. La famille de surfaces S' dont fait partie S_0 sera la famille générale cherchée.

2° Au point de vue du calcul, nous préférons procéder de la façon suivante : nous supposerons $\beta = 0$ et nous nous donnerons une relation arbitraire

$$(12) \qquad \alpha + \psi(v, w) = 0.$$

Pour avoir la famille générale cherchée, il faudra éliminer v, w entre les équations (7), (11) et

$$\frac{x-\varphi+\varphi'}{1}e^u = \frac{y-v}{\psi'_v} = \frac{z-w}{\psi'_w}. \tag{13}$$

Mieux encore, nous pourrons de ces équations tirer x, y, z en fonction des trois paramètres u, v, w. En tenant compte de l'équation de la sphère, on trouve en effet que les rapports ci-dessus sont égaux à

$$2e^u \frac{\varphi'-\psi e^u}{1+(\psi'^2_v+\psi'^2_w)e^{2u}};$$

on a donc les formules

$$\frac{x-\varphi+\varphi'}{1}e^u = \frac{y-v}{\psi'_v} = \frac{z-w}{\psi'_w} = 2e^u \frac{\varphi'-\psi e^u}{1+(\psi'^2_v+\psi'^2_w)e^{2u}}; \tag{14}$$

on obtiendra une surface de la famille en laissant u constant et faisant varier v, w.

Comme on le voit, cette solution est très générale et dépend d'une fonction arbitraire d'une variable $\varphi(u)$ et d'une fonction arbitraire de deux variables $\psi(v, w)$.

Comment obtenir les équations des courbes trajectoires? En vertu de la forme même de l'équation aux dérivées partielles (1) et en vertu d'un raisonnement déjà fait, les courbes trajectoires sont représentées par *les mêmes formules* (14) mais dans lesquelles on laissera v, w constants, et l'on fera varier seulement u.

Les formules (14) donnent donc à la fois les surfaces de la famille et les courbes trajectoires.

Comment obtenir enfin les *surfaces associées* qui complètent, avec la famille u, le système triple? Ces surfaces sont engendrées par toutes les trajectoires orthogonales rencontrant une même ligne de courbure de S. Les équations des courbes trajectoires sont connues. Le problème est alors ramené à déterminer les lignes de courbure d'une surface, les trois coordonnées d'un point de la surface étant exprimées en fonction de deux paramètres v, w.

Nous résumerons tous ces résultats de la façon suivante :

1° *Toutes les familles de surfaces définies par les formules*

$$(x-\varphi+\varphi')e^u = \frac{y-v}{\psi'_v} = \frac{z-w}{\psi'_w} = 2e^u \frac{\varphi'-\psi e^u}{1+(\psi'^2_v+\psi'^2_w)e^{2u}}$$

sont des familles de Lamé et admettent des trajectoires orthogonales planes dans les plans parallèles à Ox. $\varphi(u)$ *est une fonction quelconque de* u; $\psi(v, w)$ *une fonction quelconque de* v, w;

2° *Réciproquement, si l'on écarte les familles de surfaces moulures cylin-*

driques, toutes les familles de Lamé admettant de telles trajectoires orthogonales sont comprises dans ces formules;

3° *On obtient les surfaces de la famille en laissant u constant et faisant varier v, w; on obtient les trajectoires orthogonales de ces surfaces en laissant v, w constants et faisant varier u; en particulier, l'équation du plan de la courbe v, w est*

$$\frac{y-v}{\psi'_v} = \frac{z-w}{\psi'_w}.$$

4° *Si l'on peut déterminer les lignes de courbure d'une quelconque des surfaces de la famille, on aura, sans nouveaux calculs, deux familles de surfaces à lignes de courbure planes dans un système, les plans des lignes de courbure étant parallèles à Ox et complétant avec la famille le système triple.*

50. Enfin on peut avoir l'équation d'une courbe trajectoire dans son plan. Nous poserons, pour abréger,

$$2\frac{\varphi' - \psi e^u}{1 + (\psi_v'^2 + \psi_w'^2)e^{2u}} = A,$$

puis

$$\frac{\psi'_v}{\sin\theta} = \frac{\psi'_w}{\cos\theta} = k.$$

Nous aurons les formules de transformation

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} Y &= (y-v)\cos\theta - (z-w)\sin\theta = 0, \\ Z &= (y-v)\sin\theta + (z-w)\cos\theta = Ak, \\ &(x - \varphi + \varphi')e^u = A. \end{aligned}\right.$$

Les deux dernières équations, où u varie seul, donnent pour chaque système de valeurs de v, w les équations de la courbe trajectoire correspondante dans son plan. Calculons le rayon de courbure de la courbe au point u; on trouvera

$$(16)\qquad \frac{Z'}{x'} = \frac{2ke^u}{1 - k^2e^{2u}},$$

$$(17)\qquad \rho = \frac{\varphi'(1 - k^2e^{2u}) + D\varphi'' - 2\psi e^u}{2ke^u},$$

en posant

$$D = 1 + k^2e^{2u}.$$

L'équation (16) est remarquable. Elle est indépendante de la fonction $\varphi(u)$ et ne dépend que de la combinaison $e^u\sqrt{\psi_v'^2 + \psi_w'^2}$.

Donc, si l'on considère toutes les familles que l'on obtient en faisant varier seulement la fonction $\varphi(u)$, les tangentes aux courbes trajectoires, c'est-à-dire les normales aux surfaces en tous les points correspondant aux mêmes valeurs de u, v, w sont parallèles.

Si de plus on prend pour chacune de ces surfaces les points qui correspondent aux valeurs de u, v, w, satisfaisant à l'unique condition

$$ke^u = \text{const.}$$

pour tous ces points, *les normales aux surfaces qui y passent sont également inclinées sur* Ox.

Pour que l'expression du rayon de courbure soit indépendante de u, et par suite *pour que la courbe trajectoire soit un cercle, il faut et il suffit que* $\varphi(u)$ *soit de la forme*

$$\varphi(u) = \alpha + \beta e^u + \gamma e^{-u}, \tag{18}$$

α, β, γ désignant trois constantes arbitraires. Cette condition détermine donc, dans le cas particulier où nous sommes placé, *le système cyclique le plus général.*

Mais cette relation est indépendante de v, w; on voit donc que, *si une seule courbe trajectoire est un cercle, il en est de même de toutes les courbes trajectoires.*

Comme on le verra facilement, le rayon du cercle est alors

$$R = \frac{\gamma k^2 + \beta - \psi}{k}. \tag{19}$$

Nous pouvons obtenir une infinité de systèmes cycliques où les cercles ont un *rayon constant.* Il suffit pour cela de choisir arbitrairement α, β, γ et de prendre pour $\psi(v, w)$ une fonction satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles (19), équation qui s'intègre d'ailleurs facilement.

L'équation (17) montre encore que toutes les familles de surfaces pour lesquelles : 1° $\psi(v, w)$ reste la même; 2° $\varphi(u_0) = \Phi(u_0)$, $\varphi'(u_0) = \Phi'(u_0)$, $\varphi''(u_0) = \Phi''(u_0)$ ont en commun la surface u_0 et même rayon de courbure des courbes trajectoires en tous les points de rencontre avec cette surface.

Nous dirons que toutes ces familles sont *osculatrices le long de la surface* u_0.

Donnons-nous une surface u_0 d'une famille quelconque (φ, ψ) et, parmi les systèmes cycliques, choisissons ceux qui correspondent aux valeurs suivantes de α, β, γ :

$$\alpha + 2\gamma e^{-u_0} = \varphi_0 - \varphi'_0, \qquad \beta e^{2u_0} - \gamma = \varphi'_0 e^{u_0}. \tag{20}$$

Les systèmes cycliques ainsi déterminés et qui dépendent encore d'une constante arbitraire ont en commun avec la famille que nous considérons la surface u_0. Ainsi :

Étant donnée une surface quelconque d'une famille quelconque, il existe une infinité de systèmes cycliques, dépendant d'une constante arbitraire, admettant cette surface comme surface de la famille.

Choisissons en particulier le système cyclique qui correspond à la nouvelle relation

$$2\gamma = (\varphi''_0 - \varphi'_0)e^{u_0},$$

d'où

$$2\beta = \frac{\varphi'_0 + \varphi''_0}{e^{u_0}}.$$

Alors les cercles qui composent le système cyclique auront pour rayon en chaque point v, w

$$R = \frac{\gamma k^2 + \beta - \psi}{k} = \frac{\varphi'_0(1 - k^2 e^{2u_0}) + D\varphi''_0 - 2\psi e^{u_0}}{2ke^{u_0}}.$$

Ce sont précisément les rayons de courbure des courbes trajectoires de la famille que nous avons considérée en tous les points de la surface u_0. On a donc, dans le cas particulier où nous sommes placé, la démonstration par le calcul d'un théorème de Ribaucour.

Les cercles osculateurs aux courbes trajectoires, aux points où elles sont rencontrées par une même surface de la famille, forment un système cyclique.

51. Mais, ainsi que nous l'avons vu, cette condition n'est pas nécessaire pour que, étant donnée une surface quelconque de la famille, le système de cercles constitue un système cyclique. Nous allons établir une propriété nécessaire et suffisante du système de cercles. Il suffit pour cela d'interpréter les équations (20). Si le système cyclique α, β, γ satisfait aux conditions (20), ce système a en commun avec la famille (φ, ψ) la surface u_0. On peut donner à β une valeur arbitraire. Les deux équations donneront ensuite sans ambiguïté α et γ. Remplaçons γ par sa valeur dans la formule (19) qui donne les rayons des cercles qui constituent le système cyclique. On trouvera

$$R = \frac{\beta D - \psi - k^2\varphi'_0 e^{u_0}}{k}.$$

Faisons la différence $R - \rho$

$$R - \rho = (2\beta e^{u_0} - \varphi'_0 - \varphi''_0)\frac{1 + k^2 e^{2u_0}}{2ke^{u_0}}.$$

La parenthèse est indépendante de v, w; β ayant été choisie elle est constante pour toute la surface u_0. En chaque point v, w, la différence entre le rayon du cercle et le rayon osculateur de la courbe trajectoire qui passe en ce point est donc proportionnelle à

$$\frac{1 + k^2 e^{2u_0}}{2ke^{u_0}}.$$

On retrouve ainsi la même combinaison ke^{u_0} de laquelle dépendait uniquement l'inclinaison des normales aux surfaces sur l'axe des x.

Soit α l'angle que la normale fait avec ox. On a (16)

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{2ke^{u_0}}{1 - k^2 e^{2u_0}}.$$

Si nous posons

$$2\beta e^{u_0} - \varphi'_0 - \varphi''_0 = \lambda,$$

on aura

$$\mathrm{R} - \rho = \lambda \frac{1 + k^2 e^{2u_0}}{2ke^{u_0}} = \frac{\lambda}{\sin \alpha},$$

on peut donc dire :

Étant donné un système cyclique osculateur le long de la surface u_0, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un autre système de cercles forme un système cyclique est que la projection sur l'axe des x, de la distance des centres des cercles correspondant au même point, soit constante.

52. Considérons maintenant le système cyclique correspondant à une valeur déterminée de β et la nouvelle famille de surfaces définie au moyen des fonctions suivantes :

1° La fonction $\psi(v, w)$ est la même;

2° La fonction $\varphi(u)$ est remplacée par une autre fonction Φ assujettie aux seules conditions

$$\varphi_0 = \Phi_0, \qquad \varphi'_0 = \Phi'_0, \qquad 2\beta e^{u_0} - \varphi'_0 = \Phi''_0.$$

Alors

1° Les deux familles φ, Φ ont en commun la surface u_0;

2° En tout point u_0, v, w le rayon de courbure de la courbe trajectoire pour la famille Φ est égal au rayon du cercle du système cyclique considéré.

Le système de cercles peut donc être considéré d'une infinité de manières comme formé des cercles osculateurs d'une des familles de surfaces.

Réciproquement, *pour deux familles de surfaces*, φ, Φ *admettant en commun une surface u_0, la projection sur ox de la distance des cercles osculateurs, correspondant au même point de la surface u_0 est constante.*

53. Enfin on montrera facilement qu'étant donnée une surface quelconque

$$x = \Theta(y, z),$$

il existe une infinité de nos familles de surfaces qui admettent cette surface pour surface de la famille.

54. On a vu qu'on obtenait une surface de la famille (S) en laissant u constant et faisant varier v, w. D'autre part, pour déterminer des familles de surfaces à lignes de courbure planes dans un système, il suffit de déterminer les lignes de courbure de l'une des surfaces S. Ces surfaces s'obtiendront alors en associant les courbes trajectoires (dont on a les équations) qui rencontrent une même ligne de courbure de S. On voit donc quel intérêt il y a à déterminer les lignes de courbure de la famille (S).

Le calcul semble *a priori* extrêmement pénible. Que l'on songe que l'on doit former l'équation

$$\begin{vmatrix} dx & a & da \\ dy & b & db \\ dz & c & dc \end{vmatrix} = 0,$$

que l'on a

$$a = y'_v z'_w - z'_v y'_w,$$

et que les dérivées partielles de x, y, z par rapport à v, w sont très compliquées.

Ces remarques feront ressortir davantage l'extrême simplicité de l'équation à laquelle nous sommes parvenu.

Voici de quelle façon on peut conduire les calculs : tout d'abord, comme on doit laisser u constant et qu'il n'entrera dans les formules que les dérivées par rapport à v, w, on peut évidemment substituer aux formules (14) les suivantes :

$$x = \frac{y - v}{\psi_1} = \frac{z - w}{\psi_2} = -\frac{2\psi}{1 + \psi_1^2 + \psi_2^2}.$$

[Nous devrions introduire une nouvelle fonction Ψ liée à l'ancienne par la relation

$$\Psi = \psi e^u - \varphi'(u).$$

Nous conserverons la notation ψ].

Nous poserons pour abréger

$$\psi_1^2 + \psi_2^2 = k^2, \qquad 1 + k^2 = D,$$

on trouve alors

$$\left\{\begin{aligned} D^2\,dx &= [4\psi\psi_2\psi_{12} - 2\psi_1(D - 2\psi\psi_{11})]\,dv + [4\psi\psi_1\psi_{12} - 2\psi_2(D - 2\psi\psi_{22})]\,dw, \\ D^2\,dy &= [(D - 2\psi_1^2)(D - 2\psi\psi_{11}) + 4\psi_1\psi_2\psi_{12}]\,dv - [2\psi_1\psi_2(D - 2\psi\psi_{22}) + 2\psi\psi_{12}(D - 2\psi_1^2)]\,dw, \\ D^2\,dz &= -[2\psi_1\psi_2(D - 2\psi\psi_{11}) + 2\psi\psi_{12}(D - 2\psi_2^2)]\,dv + [(D - 2\psi_2^2)(D - 2\psi\psi_{22}) + 4\psi\psi_1\psi_2\psi_{12}]\,dw. \end{aligned}\right.$$

D'autre part,

$$a = (1 - k^2)\mu, \qquad b = 2\psi_1\mu, \qquad c = 2\psi_2\mu$$

en posant

$$\mu = \frac{(D - 2\psi\psi_{11})(D - 2\psi\psi_{22}) - 4\psi^2\psi_{12}^2}{D^3}.$$

Si alors, aux éléments de la première colonne du déterminant on ajoute les éléments de la seconde multipliés par

$$\frac{1}{\mu}\left\{[\psi_1(D - 2\psi\psi_{11}) - 2\psi\psi_2\psi_{12}]\,dv + [\psi_2(D - 2\psi\psi_{22}) - 2\psi\psi_1\psi_{12}]\,dw\right\},$$

on réduira le déterminant à

$$\begin{vmatrix} [2\psi\psi_2\psi_{12} - \psi_1(D - 2\psi\psi_{11})]\,dv + [2\psi\psi_1\psi_{12} - \psi_2(D - 2\psi\psi_{22})]\,dw & 1 - k^2 & da \\ (D - 2\psi\psi_{11})\,dv - 2\psi\psi_{12}\,dw & 2\psi_1 & db \\ (D - 2\psi\psi_{22})\,dw - 2\psi\psi_{12}\,dv & 2\psi_2 & dc \end{vmatrix} = 0,$$

on peut remplacer les éléments de la troisième colonne respectivement par

$$d(1 - k^2), \qquad d(2\psi_1), \qquad d(2\psi_2).$$

Cette substitution une fois faite, ajoutons à la première colonne les éléments de la troisième multipliés par ψ. Après suppression du facteur D le déterminant deviendra

$$\begin{vmatrix} -\psi_1\,dv - \psi_2\,dw & 1 - k^2 & -2(\psi_1\psi_{11} + \psi_2\psi_{12})\,dv - 2(\psi_1\psi_{12} + \psi_2\psi_{22})\,dw \\ dv & 2\psi_1 & 2(\psi_{11}\,dv + \psi_{12}\,dw) \\ dw & 2\psi_2 & 2(\psi_{12}\,dv + \psi_{22}\,dw) \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on ajoute les trois lignes, après multiplication respectivement par $1, \psi_1, \psi_2$, il vient simplement

$$\begin{vmatrix} 0 & D & 0 \\ dv & 2\psi_1 & 2(\psi_{11}\,dv + \psi_{12}\,dw) \\ dw & 2\psi_2 & 2(\psi_{12}\,dv + \psi_{22}\,dw) \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation des lignes de courbure est donc

$$dv(\psi_{12}\,dv + \psi_{22}\,dw) = dw(\psi_{11}\,dv + \psi_{12}\,dw),$$

ou enfin

(21) $$\frac{d\psi_1}{dv} = \frac{d\psi_2}{dw}.$$

Elle ne change pas de forme si l'on revient aux notations primitives. Donc :

Si l'on considère la surface déterminée par les formules (14) *où u a une valeur constante quelconque, l'équation qui détermine les lignes de courbure de cette surface est*

$$\frac{d\psi_1}{dv} = \frac{d\psi_2}{dw}.$$

Elle est indépendante non seulement de la fonction arbitraire $\varphi(u)$, mais encore de u. La représentation des lignes de courbure est donc la même non seulement pour toutes les surfaces de la famille, mais pour une infinité de surfaces dépendant d'une fonction arbitraire d'une variable $\varphi(u)$.

Comme elle peut s'écrire

$$dv^2 - dw^2 + \frac{\psi_{22} - \psi_{11}}{\psi_{12}}\, dv\, dw = 0,$$

cette représentation dépend seulement du rapport $\dfrac{\psi_{22} - \psi_{11}}{\psi_{12}}$.

Rappelons que, toutes les fois qu'on saura intégrer l'équation ci dessus, on obtiendra des familles de surfaces dépendant d'une nouvelle fonction arbitraire d'une variable, $\varphi(u)$, admettant des lignes de courbure planes dans un système.

55. Un cas est particulièrement intéressant (auquel se ramène d'ailleurs un cas plus général comme nous le montrerons au n° 59). Il correspond à la condition

$$\psi_{12} = 0.$$

La fonction $\psi(v, w)$ est de la forme $V + W$, V et W désignant deux fonctions de v et w respectivement.

L'équation qui détermine les lignes de courbure se réduit à

$$dv\, dw = 0.$$

C'est donc le réseau v, w qui est formé des lignes de courbure.

D'ailleurs, si l'on exprime que ce réseau est orthogonal, on trouve la condition

$$\psi_{12}[1 + (\psi_1^2 + \psi_2^2)e^{2u} - (\psi e^u - \varphi')(\psi_{11} + \psi_{22})e^u] = 0.$$

Si la fonction $\psi(v, w)$ est quelconque, la condition obtenue en égalant la parenthèse à zéro détermine, sur chaque surface u, une ligne de points où le réseau v, w est orthogonal.

La condition $\psi_{12} = 0$ est au contraire indépendante de u.

Si elle n'a pas lieu identiquement, elle détermine sur *toutes* les surfaces u une ligne de points, correspondants *aux mêmes valeurs* de v, w, où le réseau v, w est orthogonal.

Si elle a lieu identiquement, le réseau v, w sera orthogonal pour toute surface u. On peut donc dire :

La condition $\psi_{12} = 0$ *est nécessaire et suffisante pour que le réseau* v, w *soit orthogonal sur toute une surface. Si cette condition est remplie, il sera formé des lignes de courbure de la surface, quelle que soit la surface* u, *quelle que soit la fonction* $\varphi(u)$.

Étudions ces lignes de courbure. Si l'on fait $v = \text{const.}$ dans les formules (14), l'équation

$$(x - \varphi + \varphi')e^u = \frac{y - v}{\psi_1}$$

montre que la ligne de courbure correspondante est dans un plan parallèle à OZ. De même les lignes de courbure $w = \text{const.}$ sont dans des plans parallèles à OY.

Ainsi, *les lignes de courbure des deux systèmes de la famille* u *sont planes et dans des plans respectivement parallèles à* OY *et* OZ.

56. Prenons par exemple les lignes de courbure $v = \text{const.}$ Pour chaque surface u, les plans de ces lignes de courbure enveloppent un cylindre. Tous ces cylindres résultent l'un de l'autre par une translation suivie d'une dilatation suivant OX, représentée par la formule

$$X = (x - \varphi + \varphi')e^u.$$

57. La famille de surfaces (S) étant à lignes de courbure planes dans les deux systèmes et admettant des trajectoires orthogonales également planes, les deux familles associées admettent aussi *des lignes de courbure planes dans les deux systèmes et des trajectoires orthogonales planes*.

Une surface (S_1) étant engendrée par des courbes trajectoires de S, courbes dont les équations sont les équations (14) où on laisse v, w constants, il est clair que les équations qui déterminent cette surface S_1 sont encore les équations (14); on obtiendra une surface S_1 de la famille (S_1) en laissant dans ces équations v constant et faisant varier u, w. On obtiendra les courbes trajectoires en faisant varier seulement v.

Les deux familles de lignes de courbure s'obtiennent en ajoutant à la condition $v = \text{const.}$, soit $u = \text{const.}$, soit $w = \text{const.}$ Ces lignes de courbure sont planes. On obtiendra des résultats analogues pour la famille (S_2).

Nous résumerons ces résultats de la façon suivante :

Si $\psi(v, w)$ est de la forme $V + W$, les formules

$$(x - \varphi + \varphi')e^u = \frac{y - v}{\psi_1} = \frac{z - w}{\psi_2} = 2e^u \frac{\varphi' - \psi e^u}{1 + (\psi_1^2 + \psi_2^2)e^{2u}},$$

déterminent un système triple orthogonal. On obtient les familles du système triple en laissant constant dans ces formules soit u, soit v, soit w. Ce système dépend de trois fonctions arbitraires :

1° *Chacune de ces familles u, v, w admet des trajectoires orthogonales planes. Leurs équations sont données par les mêmes formules où on laisse (v, w), (w, u), (u, v) constants. Les plans de ces courbes trajectoires sont respectivement parallèles à OX, OY, OZ.*

2° *Chacune de ces familles admet des lignes de courbure planes dans les deux systèmes.*

3° *En particulier, si $\varphi(u)$ est de la forme $\alpha + \beta e^u + \gamma e^{-u}$, les lignes de courbure de l'un des systèmes des familles v, w sont des cercles.*

On retrouve ainsi un système triple déjà découvert par M. Darboux (*Leçons sur les surfaces*, n° 1056 et suiv.). Les formules obtenues par M. Darboux sont les suivantes :

$$x = R' + 2\rho \frac{R - \rho R' + R_1 - \rho_1 R_1' + R_2 - \rho_2 R_2'}{\rho^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2},$$

$$y = R_1' + 2\rho_1 \frac{R - \rho R' + R_1 - \rho_1 R_1' + R_2 - \rho_2 R_2'}{\rho^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2},$$

$$z = R_2' + 2\rho_2 \frac{R - \rho R' + R_1 - \rho_1 R_1' + R_2 - \rho_2 R_2'}{\rho^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2}.$$

Faisons dans notre système la transformation suivante de variables et de fonctions. Au lieu des variables u, v, w, nous introduisons les variables ρ, ρ_1, ρ_2.

Des relations

$$R(\rho) = \varphi(u)e^{-u},$$

$$\rho = e^{-u},$$

on déduit

$$R'_\rho = \varphi - \varphi'.$$

Des relations

$$R_1(\rho_1) = v\psi'_v - \psi(v),$$

$$\rho_1 = \psi'_v,$$

on déduit

$$R_1' = v.$$

Des relations

$$R_2(\rho_2) = w\psi'_w - \psi(w),$$

$$\rho_2 = \psi'(w),$$

on déduit, de même,

$$R'_2 = w.$$

Les formules (14) donnent alors les formules obtenues par M. Darboux.

58. Comme application simple, nous traiterons le cas où

$$\psi(v, w) = \tfrac{1}{2}(v^2 - w^2),$$
$$\varphi(u) = 0.$$

Le système triple est alors défini par les équations

$$\frac{x}{u} = \frac{y - v}{v} = \frac{z - w}{-w} = \frac{w^2 - v^2}{u^2 + v^2 + w^2}.$$

La famille de surfaces, $u =$ const. admettant pour lignes trajectoires des cercles, a pour équation

$$x(x^2 + y^2 + z^2) + u(z^2 - y^2) - u^2 x = 0.$$

En éliminant u, w, on trouve de même que la famille v a pour équation

$$(v - y)(x^2 + y^2 + z^2) + v(x^2 + 2y^2) - 2v^2 y = 0,$$

on trouverait une équation analogue pour la famille w.

On vérifiera qu'en coupant l'une des surfaces v par un plan

$$\frac{y - v}{v} = \frac{z - w}{-w},$$

on obtient un cercle, quel que soit w.

Le système triple est donc formé entièrement de surfaces cyclides du troisième degré. Les courbes trajectoires de chaque famille, ou, ce qui revient au même, toutes les lignes de courbure des trois familles, sont des cercles.

59. Plus généralement, on peut intégrer l'équation (21) des lignes de courbure toutes les fois que la fonction $\psi(v, w)$ satisfait à une équation de la forme

$$\frac{\psi_{11} - \psi_{22}}{\psi_{12}} = k.$$

La solution générale de cette équation est

$$\psi(v, w) = \mathcal{F}(v + \lambda w) + \mathcal{F}_1(v + \lambda_1 w),$$

λ et λ_1 étant les racines de l'équation

$$\frac{1-\lambda^2}{\lambda} = k.$$

Les lignes de courbure correspondent aux relations

$$w = \lambda v + \alpha, \qquad w = \lambda_1 v + \beta.$$

Mais on passe du premier cas que nous avons traité à ce cas général par un simple changement d'axes de coordonnées.

60. Enfin, nous donnerons une signification géométrique de l'équation des lignes de courbure

$$\frac{d\psi_1}{dv} = \frac{d\psi_2}{dw}. \tag{21}$$

Considérons une surface qui aurait pour équation

$$z = \psi(x, y).$$

En employant la notation habituelle p, q, au lieu de ψ_1, ψ_2, l'équation (21) s'écrira

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dy}. \tag{21'}$$

L'équation qui détermine les lignes de courbure de la surface que nous considérons est

$$\frac{dp}{dx + p\,dz} = \frac{dq}{dy + q\,dz}.$$

Si z est petit, c'est-à-dire si la surface est voisine du plan, on peut négliger $p\,dz$ $q\,dz$, et cette dernière équation se réduit à l'équation (21′).

Intégrer l'équation (21) revient donc à chercher les lignes de courbure d'une surface voisine du plan.

Sans faire aucune hypothèse, c'est *rechercher les lignes conjuguées de la surface qui se projettent sur le plan des xy suivant un réseau rectangulaire.*

61. Nous allons employer la même méthode pour déterminer les familles de surfaces admettant des trajectoires orthogonales planes, dans des plans passant par un point fixe, que nous prendrons pour origine des coordonnées, et susceptibles de faire partie d'un système triple.

Pour qu'une famille de surfaces

$$u(x, y, z) = \rho$$

admette de telles trajectoires orthogonales planes, il faut et il suffit que la fonction $u(x, y, z)$ satisfasse à une équation que nous mettrons sous la forme

$$(22) \qquad H = \frac{1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}} = F(u, x^2 + y^2 + z^2) = F(u, \sigma)$$

Proposons-nous de chercher quelle doit être la forme de la fonction F, pour que la famille correspondante soit une famille de Lamé.

Si l'on transporte les valeurs des dérivées secondes de H dans l'équation des systèmes triples (2), on trouve, après des combinaisons de lignes faciles, que la condition peut s'écrire

$$F''_{\sigma^2} \Delta' = 0,$$

Δ' se déduisant de Δ par la substitution de

$$x^2, \quad y^2, \quad z^2, \qquad yz, \quad zx, \quad xy$$

aux éléments de la première ligne de Δ respectivement.

Par analogie avec ce qui se passe dans le cas où les plans des courbes trajectoires sont parallèles à une direction fixe, nous pouvons dire que l'équation $\Delta' = 0$ jointe à l'équation (22) définit les familles de surfaces moulures coniques.

Reste la solution $F''_{\sigma^2} = 0$. La fonction $F(u, \sigma)$ est de la forme $A\sigma + B$, A et B étant deux fonctions quelconques de u. On peut donc dire que :

Si l'on écarte les familles de surfaces moulures coniques, la condition nécessaire et suffisante pour que la famille de surfaces

$$u(x, y, z) = \rho$$

admette des trajectoires orthogonales planes, les plans des courbes passant par l'origine des coordonnées, et constitue une famille de Lamé, est que la fonction $u(x, y, z)$ satisfasse à une équation aux dérivées partielles de la forme

$$(23) \qquad H = \frac{1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}} = A\sigma + B,$$

A *et* B *désignant deux fonctions quelconques de* u.

62. Nous allons résoudre cette équation en cherchant une solution complète.

Nous pouvons supposer $A = \frac{1}{2}$. Nous résoudrons donc l'équation

$$(23') \qquad 2H = \sigma + \theta(u).$$

Soit

$$(24) \qquad F(x, y, z, u) = \lambda(x^2 + y^2 + z^2) + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$$

l'intégrale complète de cette équation, λ, a, b, c, d étant des fonctions de u à déterminer. La fonction $u(x, y, z)$, déterminée par l'équation (24), satisfait aux équations

$$2(\lambda x + a) + F'_u u_1 = 0, \qquad 2(\lambda y + b) + F'_u u_2 = 0, \qquad 2(\lambda z + c) + F'_u u_3 = 0$$

et, par suite, à l'équation

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{4}(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)F'^2_u &= \lambda^2(x^2 + y^2 + z^2) + 2\lambda(ax + by + cz) + a^2 + b^2 + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 - \lambda d.\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $u(x, y, z)$ satisfait à l'équation

$$(25) \qquad H = \frac{1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}} = \frac{\lambda'(x^2 + y^2 + z^2) + 2a'x + 2b'y + 2c'z + d'}{2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - \lambda d}}.$$

Pour que cette équation se confonde avec l'équation (23'), il faut poser

$$(26) \quad a' = 0, \quad b' = 0, \quad c' = 0, \quad \frac{\lambda'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - \lambda d}} = 1, \quad \frac{d'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - \lambda d}} = \theta(u),$$

a, b, c sont donc trois constantes arbitraires. Nous poserons

$$a^2 + b^2 + c^2 = k^2,$$

on aura alors, pour déterminer λ et d, les relations

$$(27) \qquad d = \frac{k^2 - \lambda'^2}{\lambda}, \qquad d' = \lambda' \theta(u).$$

Il est, dès lors, évident que λ et d et tous les coefficients de la solution contiendront k en facteur. On peut donc poser $k = 1$; λ et d sont alors déterminées par les relations

$$(28) \qquad \frac{d}{du} \frac{1 - \lambda'^2}{\lambda} = \lambda' \theta(u), \qquad d = \frac{1 - \lambda'^2}{\lambda}.$$

L'intégration des équations qui déterminent λ, d introduit deux constantes arbitraires. On aura donc une solution complète avec quatre constantes arbitraires.

Pour résoudre complètement le problème, il suffit d'avoir une solution avec *une constante arbitraire* de l'équation (28) qui détermine λ.

D'ailleurs, $\theta(u)$ étant une fonction quelconque, on peut la supposer mise sous la forme

$$\theta(u) = \frac{1}{\varphi'(u)} \frac{d}{du} \frac{1 - \varphi'^2}{\varphi(u)},$$

ce qui permet d'avoir deux solutions $\lambda = \pm \varphi$ de l'équation

$$\frac{\lambda'^2 - 2\lambda\lambda'' - 1}{\lambda^2} = \frac{\varphi'^2 - 2\varphi\varphi'' - 1}{\varphi^2}. \tag{29}$$

Le problème peut, enfin, être ramené à l'intégration d'un système linéaire. Il suffit de poser

$$1 - \lambda d = \mu^2$$

pour avoir le système

$$\begin{aligned} \lambda' &= \mu, \\ d' &= \mu\,\theta(u), \\ 2\mu' + \lambda\,\theta(u) + d &= 0. \end{aligned}$$

63. Soit

$$\lambda = \psi(u, \lambda_0), \qquad d = \chi(u, \lambda_0)$$

la solution avec une constante arbitraire du système (28).

Pour terminer le problème et avoir la solution générale, on posera

$$\lambda_0 = \mathrm{F}(a, b, c) \tag{30}$$

et l'on éliminera λ_0, a, b, c entre les équations (24), (30) et

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

$$\frac{(x^2 + y^2 + z^2)\psi'_{\lambda_0} + \chi'_{\lambda_0}}{1} = \frac{bx - ay}{b\mathrm{F}'_a - a\mathrm{F}'_b} = \frac{cx - az}{c\mathrm{F}'_a - a\mathrm{F}'_c}$$

ou plutôt on considérera ces équations comme donnant x, y, z en fonction de a, b, c et de u $(a^2 + b^2 + c^2 = 1)$.

On obtiendra une surface de la famille en laissant u constant. On obtiendra une courbe trajectoire en laissant a, b, c constants.

En particulier, l'équation du plan de la courbe est

$$\frac{bx - ay}{b\mathrm{F}'_a - a\mathrm{F}'_b} = \frac{cx - az}{c\mathrm{F}'_a - a\mathrm{F}'_c}$$

ou

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ \mathrm{F}'_a & \mathrm{F}'_b & \mathrm{F}'_c \end{vmatrix} = 0. \tag{31}$$

64. Sans avoir cette solution générale, il semble qu'on aurait une solution assez vaste en prenant

$$\lambda = \varphi(u), \qquad d = \frac{1 - \varphi'^2}{\varphi};$$

a, b, c étant trois constantes liées par la relation

$$a^2+b^2+c^2=1,$$

nous poserons

$$(32)\qquad \begin{cases} a=\cos\psi\cos\theta,\\ b=\cos\psi\sin\theta,\\ c=\sin\psi.\end{cases}$$

La solution complète sera représentée par

$$(33)\quad (x^2+y^2+z^2)\,\varphi(u)+2x\cos\psi\cos\theta+2y\cos\psi\sin\theta+2z\sin\psi+\frac{1-\varphi'^2}{\varphi}=0.$$

Nous devons établir, pour avoir la solution générale, une relation entre ψ et θ et prendre l'enveloppe de la famille de sphères correspondante. A chaque valeur de u correspondra une surface.

Or, pour une même valeur de u, les sphères représentées par l'équation (33) ont leur centre sur la sphère

$$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{\varphi^2(u)}.$$

Le lieu de ce centre est donc une courbe sphérique qui dépend de la relation établie entre ψ et θ. Le rayon de la sphère est d'ailleurs égal à $\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}$. Il est constant. Une surface de la famille peut donc être considérée comme l'enveloppe de sphères de rayon constant dont le centre décrit une courbe sphérique. Elle est donc engendrée par des cercles de rayon constant ayant leur centre sur une courbe sphérique, le plan du cercle étant à chaque instant normal à la courbe en ce point, passant donc constamment par le centre de la sphère.

On en déduit aisément que la famille de surfaces est composée de surfaces moulures coniques.

QUATRIÈME PARTIE.

MÉTHODE PÉRIMORPHIQUE DE RIBAUCOUR.

---

65. Enfin, nous allons traiter le problème dans certains cas particuliers, en nous appuyant sur les résultats obtenus par Ribaucour dans sa *Théorie générale des surfaces courbes* (*Journal de Liouville,* 1891).

Il est nécessaire, tout d'abord, de rappeler et de résumer brièvement la méthode. Nous prendrons les notations de M. Darboux.

Ribaucour fait dépendre les éléments successifs d'une figure des éléments d'une *surface de référence.*

Il cherche comment une figure $F(\xi, \eta, \zeta, u, v) = 0$ se déplace en se déformant lorsque u, v varient (u, v définissant, sur la surface de référence, un réseau rectangulaire), ξ, η, ζ étant les coordonnées d'un point par rapport à des axes comprenant les tangentes aux courbes u, v et la normale à la surface au point (u, v).

M. Darboux a établi (*Leçons sur les surfaces,* t. II, p. 385, formules A, B) les formules donnant les projections, sur des axes fixes, du déplacement d'un point. Ces formules fondamentales introduisent des fonctions A, C, p, q, r, p_1, q_1, r_1, liées par les formules de Codazzi, les fonctions A, C étant immédiatement définies par la relation

$$ds^2 = A^2\,du^2 + C^2\,dv^2,$$

ds désignant l'arc élémentaire sur la surface de référence.

Ribaucour étudie d'abord les faisceaux de droites situées dans les plans tangents de la surface de référence. Il recherche le plan tangent en un point d'une de ces droites lorsqu'on fait varier u, v suivant une direction déterminée.

La condition que le plan tangent ainsi trouvé soit indépendant de la direction suivie, donne les points principaux sur chacune des droites et, en écrivant que les deux plans tangents correspondants sont rectangulaires, il obtient la condition pour que les droites soient des normales à une surface.

Généralisant cette étude, Ribaucour considère ensuite des courbes C situées dans les plans tangents de la surface de référence et dont l'équation est $p = f(u, v, \varphi)$, p étant la distance du point O de contact du plan tangent à une tangente, φ l'angle que la perpendiculaire à la tangente fait avec l'axe des x; u, v les paramètres définissant toujours le point O sur la surface. S'appuyant sur les formules, Ribaucour cherche d'abord l'angle que le plan tangent, en un point M de la courbe, fait avec le plan xOy initial, quand on donne à u, v les accroissements du, dv et qu'on considère la surface formée par les courbes C.

Il établit ensuite la variation du plan tangent en un point de la tangente en M, considérée comme faisant partie du pinceau des tangentes infiniment voisines aux courbes C′ et dont les points de contact sont tous situés dans le plan normal en M à C. Cette étude introduit quatre fonctions $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, G, H,

$$\mathcal{A} = p\cos\varphi - \frac{\partial p}{\partial\varphi}\sin\varphi, \qquad \mathrm{G} = \mathrm{A}\cos\varphi - r\,\frac{\partial p}{\partial\varphi} + \frac{\partial p}{\partial u},$$

$$\mathcal{B} = p\sin\varphi + \frac{\partial p}{\partial\varphi}\cos\varphi, \qquad \mathrm{H} = \mathrm{C}\sin\varphi - r_1\frac{\partial p}{\partial\varphi} + \frac{\partial p}{\partial v},$$

et les dérivées G'_φ, H'_φ.

Il cherche les points M pour lesquels ce plan tangent est indépendant des variations du, dv et, en écrivant que les deux plans tangents ainsi obtenus sont rectangulaires, il obtient la condition pour que la surface trajectoire des courbes C passant par M existe. Cette condition est la suivante :

$$\mathrm{HG}' - \mathrm{GH}' = \frac{p\,\mathrm{RAC}}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}, \tag{1}$$

R désignant le rayon de courbure de la courbe C en M, $\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2$ les rayons de courbure principaux de la surface au point O. Si l'équation ci-dessus a lieu pour tous les points de C, les courbes telles que C sont les trajectoires d'une famille de surfaces.

Comment obtient-on alors la surface passant par M? En écrivant que, aux variations du, dv, correspond une variation $d\varphi$ telle que le point de contact de la tangente correspondante soit situé dans le plan normal en M à la courbe C. On trouve ainsi

$$-d\varphi = du\left(r + \frac{\mathrm{G}'}{\mathrm{R}}\right) - dv\left(r_1 + \frac{\mathrm{H}'}{\mathrm{R}}\right).$$

Ribaucour fait remarquer d'ailleurs que, si la surface trajectoire existe, φ est une fonction de u, v et, par suite, $d\varphi$ est une différentielle exacte. Réciproquement, en écrivant cette condition et tenant compte des équations de Codazzi, on trouve la relation (1).

66. Ribaucour fait enfin remarquer que l'équation (1) dépend uniquement de A, C, en vertu de la relation

$$\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2 = \frac{\mathrm{AC}}{\dfrac{\partial r}{\partial v} - \dfrac{\partial r_1}{\partial u}}.$$

Il en résulte que, si l'on a une solution $p = f(u, v, \varphi)$, on peut déformer la surface O comme on voudra, *chaque plan tangent entraînant la courbe située dans son plan, et les nouvelles positions des courbes seront encore les trajectoires d'une famille de surfaces.*

Cette remarque montre qu'il suffit d'avoir des solutions très particulières de l'équation (1) pour en déduire une infinité d'autres en déformant la surface de référence.

67. Nous donnerons la solution générale de l'équation (1), dans le cas où la surface de référence est une surface développable quelconque, et nous trouverons des systèmes cycliques dépendant de constantes arbitraires dans le cas où la surface de référence est à courbure totale constante.

68. Supposons que la surface de référence soit telle que A soit seulement fonction de u et C fonction de v. Alors, l'un des rayons de courbure principaux est constamment infini. *La surface est développable.*

Dans ce cas, l'équation (1) qui définit la fonction $p = f(u, v, \varphi)$ se réduit à

$$\mathrm{HG}'_\varphi - \mathrm{GH}'_\varphi = 0.$$

Par suite,

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{G}} = 0, \qquad \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{G}} = \theta(u, v),$$

θ désignant une fonction quelconque de u, v. Cette équation s'écrit

$$\frac{\mathrm{C}\sin\varphi + \dfrac{\partial p}{\partial v}}{\mathrm{A}\cos\varphi + \dfrac{\partial p}{\partial u}} = \theta(u, v).$$

Posons

$$p = -\sin\varphi\int \mathrm{C}\,dv - \cos\varphi\int \mathrm{A}\,du + p_1,$$

il viendra simplement

$$\frac{\dfrac{\partial p_1}{\partial v}}{\dfrac{\partial p_1}{\partial u}} = \theta(u, v)$$

et, en intégrant,

$$p_1 = \mathcal{F}[\varphi, \theta_1(u, v)],$$

$\mathcal{F}$ désignant ainsi que θ_1 une autre fonction quelconque de deux variables.

Ainsi, la solution générale de l'équation qui détermine p est

$$p = -\cos\varphi\int \mathrm{A}\,du - \sin\varphi\int \mathrm{C}\,dv + \mathcal{F}[\varphi, \theta(u, v)].$$

Cette solution est, comme on le voit, d'une très grande généralité, *puisqu'elle dépend de deux fonctions arbitraires de deux variables.*

Si l'on transporte l'origine au point

$$x_0 = -\int_{u_0}^{u} \mathrm{A}\, du, \qquad y_0 = -\int_{v_0}^{v} \mathrm{C}\, dv,$$

l'équation de la courbe se réduit à

$$p_1 = \mathcal{F}[\varphi, \theta(u, v)].$$

Supposons, comme cas particulier, que $\mathcal{F}$ soit indépendant de u, v.

Partons d'un point M_0, correspondant aux valeurs u_0, v_0 des paramètres u, v. L'équation de la courbe est

$$p = \mathcal{F}(\varphi).$$

Donnons à u, v des accroissements du, dv. On obtient un point M. Si l'on transportait les axes parallèlement à eux-mêmes au point M_0, l'équation de la courbe serait encore

$$p = \mathcal{F}(\varphi).$$

On en déduit donc que toutes les courbes trajectoires sont superposables et que les positions de toutes ces courbes résultent du simple roulement du plan de la courbe sur la surface développable. On a donc le résultat suivant qui est d'ailleurs évident géométriquement et qui est bien connu. Considérons dans un plan une courbe quelconque. Enroulons le plan sur une développable quelconque. Les positions de toutes ces courbes seront les trajectoires orthogonales d'une famille de surfaces. Les surfaces engendrées par les courbes sont des surfaces moulures générales.

69. Cette solution générale nous fournit une infinité de systèmes cycliques toutes les fois que $\mathcal{F}(\varphi, \theta)$ est de la forme

$$\mathrm{A}\cos\varphi + \mathrm{B}\sin\varphi + \mathrm{C},$$

A, B, C étant trois fonctions quelconques d'une même fonction quelconque de deux variables $\theta(u, v)$.

Ces systèmes cycliques, ainsi rattachés à une surface développable quelconque, dépendent encore d'une fonction arbitraire de deux variables et de deux fonctions arbitraires d'une variable.

La solution est donc beaucoup plus générale que ne l'indique Ribaucour (n^{os} 130, 131, 132). En étudiant particulièrement les systèmes cycliques, nous expliquerons d'où provient l'erreur de Ribaucour (*voir* n° 71).

On peut, en particulier, obtenir des systèmes cycliques où les cercles ont un rayon constant. Il suffit que C soit constant.

Enfin, supposons que le point se déplace sur la surface de telle façon que $\theta(u, v)$ soit constant. Par un raisonnement fait plus haut, on verra que toutes les positions correspondantes des courbes trajectoires résultent du simple roulement du plan de la courbe sur la surface développable, le point de contact du plan tangent décrivant la courbe $\theta = \text{const.}$

Toutes les courbes trajectoires ne dépendent que d'un seul paramètre $k = \theta(u, v)$.

70. *Recherche générale des systèmes cycliques.* — L'équation de Ribaucour

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{H}\mathrm{G}'_\varphi - \mathrm{G}\mathrm{H}'_\varphi = +p\mathrm{R}\left(\frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u}\right)$$

se prête admirablement à la recherche des systèmes cycliques. Cette étude a été déjà faite par Ribaucour. Ayant trouvé de nouveaux cas d'intégration, nous croyons devoir l'exposer en changeant les notations peu commodes de Ribaucour. Nous montrerons, de plus, d'où provient l'erreur commise par lui dans l'application aux surfaces développables.

Soit

$$\text{(2)} \qquad p = a\cos\varphi + b\sin\varphi + c$$

l'équation du cercle situé dans le plan tangent à la surface de référence au point u, v, a, b, c étant trois fonctions à déterminer de u, v. Si, dans l'équation (1), on remplace p par cette valeur, on obtient une équation du second degré en $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, dans laquelle les coefficients de $\sin^2\varphi$, $\cos^2\varphi$ sont égaux et le coefficient de $\sin\varphi\cos\varphi$ nul. Le résultat de la substitution est donc de la forme

$$\text{(3)} \qquad \mathcal{A}\cos\varphi + \mathcal{B}\sin\varphi + \mathcal{C}$$

et, pour que ce résultat soit nul, quel que soit φ, il faut que l'on ait

$$\text{(4)} \qquad \left\{\begin{aligned} &c'_u(\mathrm{C} + ar_1 + b'_v) + c'_v(ar + b'_u) &&= ac\lambda,\\ &c'_u(br_1 - a'_v) \qquad + c'_v(\mathrm{A} - br + a'_u) &&= bc\lambda,\\ &(\mathrm{A} - br + a'_u)(\mathrm{C} + ar_1 + b'_v) + (br_1 - a'_v)(ar + b'_u) &&= c^2\lambda,\end{aligned}\right.$$

en posant

$$\lambda = \frac{\partial r_1}{\partial u} - \frac{\partial r}{\partial v}.$$

Des équations (4) on déduira facilement

$$\frac{D}{c\lambda} = \frac{bC + bb'_v + aa_v}{c'_v} = \frac{aA + bb'_u + aa_u}{c'_u} = c \tag{5}$$

en posant

$$D = (A - br + a'_u)(C + ar_1 + b'_v) + (br_1 - a'_v)(ar + b'_u).$$

En intégrant les équations formées par l'égalité des trois derniers rapports, on trouve

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}(c^2 - a^2 - b^2) = bC,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}(c^2 - a^2 - b^2) = aA.$$

Posons donc

$$c^2 - a^2 - b^2 = \rho, \tag{6}$$

il viendra

$$bC = \frac{1}{2}\frac{\partial\rho}{\partial v}, \qquad aA = \frac{1}{2}\frac{\partial\rho}{\partial u}. \tag{7}$$

Ces équations (6), (7) *sont toutes résolues en a, b, c par rapport à ρ; — ρ est la puissance du point de contact du plan tangent par rapport au cercle. En remplaçant a, b, c et leurs dérivées par leurs valeurs dans la troisième équation*

$$D = c^2\lambda,$$

on obtient une équation différentielle du second ordre en ρ, équation qui régit tout le problème.

Remarquons encore que, lorsqu'on suit sur la surface une courbe $v = \text{const.}$, on a, ds désignant l'arc élémentaire,

$$ds = A\,du.$$

D'autre part, en vertu des relations ci-dessus,

$$d\rho = 2aA\,du.$$

Il en résulte que

$$d\rho = 2a\,ds,$$

— $2a$ est donc la dérivée par rapport à l'arc de la puissance du point de contact, par rapport au cercle, quand on suit sur la surface un chemin $v = \text{const.}$

71. Lorsque la surface est développable, $\lambda = 0$.

Les équations du système (4) *se réduisent alors à deux,*

$$c'_u(C + b'_v) - c'_v b'_u = 0,$$
$$c'_v(A + a'_u) - a'_v c'_u = 0,$$

qui donnent, en posant

$$a_1 = a + \int A\, du, \qquad b_1 = b + \int C\, dv,$$

$$\frac{a'_{1u}}{a'_{1v}} = \frac{b'_{1u}}{b'_{1v}} = \frac{c'_u}{c'_v},$$

ce qui indique que a_1, b_1, c sont trois fonctions d'une même fonction quelconque $\theta(u, v)$.

C'est le résultat que nous avions trouvé.

Ribaucour ne s'est pas rendu compte de ce fait. Il fait (p. 258, § **127**) une combinaison d'équations en supprimant le facteur λ *qui est nul dans le cas des surfaces développables,* et il applique ensuite les équations qu'il obtient ainsi, au cas des surfaces développables.

72. On sait que, si les cercles ont un rayon constant, la surface de référence est à courbure totale constante.

Comme cas analogue, cherchons s'il existe des systèmes cycliques tels que la puissance, par rapport au cercle, du point de contact du plan tangent soit constante.

Si ρ est constant, b et a sont nuls : alors c est constant.

La troisième équation du système (4) donne alors

$$AC = c^2\left(\frac{\partial r_1}{\partial u} - \frac{\partial r}{\partial v}\right)$$

et, par suite,

$$R_1 R_2 = -c^2.$$

La surface est aussi à courbure constante égale à la puissance du point de contact.

73. Nous allons maintenant chercher des solutions particulières du système (4) dans le cas où l'on a

$$A = R \sin v, \qquad C = R.$$

D'après la formule,

$$R_1 R_2 = \frac{-AC}{\dfrac{\partial}{\partial v}\dfrac{1}{C}\dfrac{\partial A}{\partial v} + \dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{1}{A}\dfrac{\partial C}{\partial u}}.$$

Si on l'applique aux valeurs données de A, C, on trouve

$$R_1 R_2 = R^2.$$

Les surfaces de référence que nous considérons sont donc les surfaces à courbure totale constante. Elles sont applicables sur la sphère et sur la surface de révolution ayant pour méridienne la tractrice.

Nous supposerons $R = 1$ et nous porterons les valeurs

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &A = \sin v, \qquad C = 1, \qquad a \sin v = \frac{1}{2}\rho_1, \qquad b = \frac{1}{2}\rho_2,\\ &c = \rho + \frac{1}{4}\frac{\rho_1^2}{\sin^2 v} + \frac{1}{4}\rho_2^2 \end{aligned}\right.$$

dans la dernière équation du système (4), il viendra

$$(9)\qquad \begin{aligned} &\left(2\sin v + \rho_2 \cos v + \frac{\rho_{11}}{\sin v}\right)(2 + \rho_{22})\\ &\quad - \frac{1}{\sin^3 v}(\rho_1 \cos v - \rho_{12}\sin v)^2 + \left(4\rho + \rho_2^2 + \frac{\rho_1^2}{\sin^2 v}\right)\sin v = 0. \end{aligned}$$

Comme nous l'avons dit, c'est cette équation aux dérivées partielles du second ordre qui régit tout le problème.

Nous chercherons, s'il y en a, les solutions qui satisfont en même temps à l'équation

$$\rho_1 \cos v - \rho_{12}\sin v = 0.$$

La solution générale de cette dernière est

$$(10)\qquad \rho = \varphi(u)\sin v + \psi(v),$$

$\varphi(u)$, $\psi(v)$ désignant deux fonctions quelconques, l'une de v, l'autre de u.

En portant cette valeur de ρ dans l'équation (9) on trouve

$$(11)\qquad \begin{aligned} &2(\varphi + \varphi'') + \sin v(\varphi'^2 + 4 - \varphi\varphi'') + \varphi(\psi''\cos^2 v + \psi'\sin v\cos v)\\ &\quad + \varphi''\psi'' + \psi''(2\sin v + \psi'\cos v) + 2\psi'\cos v + (4\psi + \psi'^2)\sin v = 0. \end{aligned}$$

Supposons d'abord $\psi(v) = 0$. Alors la fonction $\varphi(u)$ doit satisfaire aux deux équations

$$\varphi + \varphi'' = 0, \qquad \varphi'^2 - \varphi\varphi'' + 4 = 0$$

qui déterminent une fonction

$$\varphi(u) = 2i\cos(u - \alpha),$$

α désignant une constante quelconque. Elle donne, pour les fonctions a, b, c qui définissent les cercles,

$$p = a\cos\varphi + b\sin\varphi + c,$$

les valeurs suivantes

$$a = -i\sin(u-\alpha), \qquad b = i\cos v\cos(u-\alpha), \qquad c = i + \sin v\sin(u-\alpha).$$

Supposons $\varphi(u) = 0$. Alors a est nul; b et c sont uniquement fonctions de v, satisfaisant aux relations

$$(12) \qquad \begin{cases} c'_v(\mathrm{R}\sin v + b\cos v) + bc\sin v = 0, \\ (\mathrm{R} + b')(\mathrm{R}\sin v + b\cos v) + c^2\sin v = 0. \end{cases}$$

Elles admettent la solution immédiate

$$b = 0, \qquad c = \mathrm{R}i$$

déjà indiquée.

La première des équations (12) donne

$$b = -\frac{\mathrm{R}c'\sin v}{c\sin v + c'\cos v}$$

et, en transportant cette valeur dans la seconde, on obtient

$$(c\sin v + c'\cos v)^3 + \mathrm{R}^2\sin^2 v(c\sin v + 2c'\cos v - c''\sin v) = 0,$$

dont on trouvera facilement la solution générale

$$(13) \qquad c = \mathrm{R}\sqrt{2}\cos v\int\frac{\mathrm{tang}^2 v}{\sqrt{k+\cos 2v}}\,dv,$$

k désignant une constante arbitraire. L'intégrale peut d'ailleurs se calculer au moyen des fonctions elliptiques. On en déduit

$$(14) \qquad b = \mathrm{R}\left(\sqrt{k+\cos 2v}\int\frac{\mathrm{tang}^2 v}{\sqrt{k+\cos 2v}}\,dv - \mathrm{tang}\,v\right).$$

Pour avoir des points d'une même surface trajectoire quelle est, pour le cercle correspondant aux valeurs u, v, la valeur de φ?

La condition de Ribaucour nous la donne :

$$-d\varphi = du\left(r + \frac{\mathrm{G}'}{c}\right) - dv\left(r_1 + \frac{\mathrm{H}'}{c}\right),$$

c désignant le rayon du cercle. Cette condition devient

$$d\varphi = du\left[\cos v + \frac{\sin\varphi(\mathrm{R}\sin v + b\cos v)}{c}\right] - dv\,\frac{\mathrm{R}+b'}{c}\cos\varphi;$$

on peut l'écrire

$$du = \frac{1}{\cos v + \dfrac{\sin\varphi(\mathrm{R}\sin v + b\cos v)}{c}}\,d\varphi + \frac{(\mathrm{R}+b')\cos\varphi}{c\cos v + \sin\varphi(\mathrm{R}\sin v + b\cos v)}\,dv.$$

Cette expression de du, que nous écrivons

$$du = \mathrm{M}(v, \varphi)\,d\varphi + \mathrm{N}(v, \varphi)\,dv,$$

est bien une différentielle exacte. On vérifie que

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial v} = \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial \varphi}$$

en tenant compte des valeurs de b, c.

On a alors

$$u = \int_\varphi \frac{c}{c\cos v + \sin\varphi(\mathrm{R}\sin v + b\cos v)}\,d\varphi$$

et, en intégrant, on trouve

$$u = \frac{\operatorname{tang}\theta}{\cos v}\,\mathrm{L}\,\frac{\operatorname{tang}\dfrac{\varphi}{2} + \operatorname{tang}\dfrac{\theta}{2}}{1 + \operatorname{tang}\dfrac{\varphi}{2}\operatorname{tang}\dfrac{\theta}{2}} + k', \tag{15}$$

en posant

$$\sin\theta = \sqrt{2}\,\frac{\cos v}{\sqrt{k + \cos 2v}},$$

k' désignant une constante arbitraire.

Cette équation donne, pour chaque système de valeurs u, v, l'angle φ qui détermine le point sur la courbe trajectoire. On obtiendra toutes les surfaces de la famille en faisant varier k'.

Supposons, par exemple, $k = 1$. L'équation des cercles trajectoires est

$$p = \frac{\mathrm{R}}{2}\left[\operatorname{tang} v + \cos v\,\mathrm{L}\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{v}{2}\right)\right] + \frac{\mathrm{R}}{2}\left[-\operatorname{tang} v + \cos v\,\mathrm{L}\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{v}{2}\right)\right]\sin\varphi.$$

Quant à la valeur de φ, elle est donnée par l'équation

$$\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} = 1 + (u - k')\cos v.$$

74. Enfin, si, dans l'équation (11) qui détermine la fonction ρ, aucune des fonctions $\varphi(u)$, $\psi(v)$ n'est identiquement nulle, il faut poser

$$\left\{\begin{aligned} &\varphi + \varphi'' = 0,\\ &\varphi'^2 - \varphi\varphi'' = \lambda^2,\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &\psi'' \cos^2 v + \psi' \sin v \cos v = \psi'',\\ &\psi''(2\sin v + \psi' \cos v) + 2\psi' \cos v + (4\psi + \psi'^2)\sin v + (4+\lambda^2)\sin v = 0\end{aligned}\right.$$

pour que cette équation puisse avoir lieu, λ désignant une constante quelconque.

Les deux premières équations déterminent $\varphi(u)$,

$$\varphi(u) = \lambda \cos(u - \alpha).$$

Les deux dernières déterminent $\psi(v)$,

$$\psi(v) = \text{A} \cos v - \frac{\text{A}^2 + \lambda^2 + 4}{4},$$

A et α désignant deux nouvelles constantes arbitraires. Ainsi, en posant

$$\rho = \lambda \cos(u - \alpha) + \text{A} \cos v - \frac{\text{A}^2 + \lambda^2 + 4}{4},$$

puis

$$\left\{\begin{aligned} a \sin v &= -\frac{\lambda}{2} \sin(u - \alpha),\\ b &= -\tfrac{1}{2} \sin v,\\ c &= a^2 + b^2 + \rho,\end{aligned}\right.$$

on aura la famille de cercles trajectoires

$$p = a \cos\varphi + b \sin\varphi + c.$$

Nous remarquerons à nouveau que tous ces résultats ont un assez grand caractère de généralité, puisqu'ils s'appliquent à toutes les surfaces à courbure totale constante.

Nous terminons là ces applications de la méthode de Ribaucour et, avec elles, l'étude des familles de surfaces à trajectoires orthogonales planes.