ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

PAUL APPELL

Formes des intégrales abéliennes des diverses espèces

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1re série, tome 7, nº 1 (1893), p. A5-A8

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1893_1_7_1_A5_0>

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE.

FORMES

DES

INTÉGRALES ABÉLIENNES DES DIVERSES ESPÈCES,

PAR M. PAUL APPELL,

Professeur à la Faculté des Sciences de Paris.

Dans la plupart des Traités, pour arriver à la forme classique des intégrales de première espèce relatives à une courbe algébrique donnée d'ordre m,

$$f(x, y) = 0, \tag{1}$$

avec m directions asymptotiques distinctes dont aucune n'est parallèle aux axes, on décompose l'intégrale abélienne la plus générale en un groupe de termes, algébriques et transcendants, parmi lesquels se trouve un terme de la forme

$$\int \frac{Q(x, y)}{f'_y(x, y)} dx, \tag{2}$$

$Q(x, y)$ désignant un polynôme en x et y de degré $m - 3$. On laisse alors de côté tous les autres termes qui, pris isolément, deviennent chacun infini en certains points de la courbe, et l'on cherche à déterminer les coefficients du polynôme Q de façon que l'intégrale (2) soit partout finie. On obtient ainsi des intégrales de première espèce; mais il n'est pas évident qu'on les obtient toutes, car, pour le montrer, il faudrait établir qu'il est impossible que, en ajoutant à une intégrale de la forme (2), devenant infinie en certains points, d'autres expressions rationnelles ou transcendantes choisies parmi celles qu'on a laissées de côté et devenant infinies aux mêmes points, on obtienne une somme partout finie.

Voici une méthode élémentaire permettant d'arriver directement à cette forme (2) et s'appliquant aussi à l'expression classique des intégrales de deuxième et de troisième espèce.

Intégrales de première espèce. — Soit

$$f(x, y) = a_0 y^m + a_1 y^{m-1} + \ldots + a_m = 0$$

le premier membre de l'équation de la courbe, où a_0 est une constante différente de zéro, a_i un polynôme en x de degré i. Il est évident que si

$$\int \varphi(x, y)\, dx$$

est une intégrale de première espèce, c'est-à-dire partout finie, la fonction rationnelle $\varphi(x, y)$ remplit les conditions suivantes :

1° Pour des valeurs infinies de x, $\varphi(x, y)$ est de l'ordre de $\frac{1}{x^2}$.

2° Si en un point x_0 à distance finie $\varphi(x, y)$ devient infinie, elle le devient d'un ordre *fractionnaire* par rapport à $\frac{1}{x - x_0}$; de sorte que x_0 est un point de ramification. La même propriété a lieu pour le produit $y^k \varphi(x, y)$, k étant un entier positif, car y ne devient pas infini pour des valeurs finies de x.

D'après cela, si l'on appelle $y_1, y_2, \ldots, y_m$ les m déterminations de y correspondant à une valeur de x, la somme

$$P_{k-2} = y_1^k \varphi(x, y_1) + y_2^k \varphi(x, y_2) + \ldots + y_m^k \varphi(x, y_m),$$

qui est une *fonction rationnelle* de x, *reste finie à distance finie*. En effet, chaque terme ne peut devenir infini à distance finie qu'en un point de ramification x_0, et cela d'un ordre fractionnaire : soit, par exemple,

$$\frac{\alpha_1}{(x - x_0)^{\frac{1}{n}}} + \frac{\alpha_2}{(x - x_0)^{\frac{2}{n}}} + \ldots + \frac{\alpha_{n-1}}{(x - x_0)^{\frac{n-1}{n}}}$$

la partie principale de $\varphi(x, y_1)$ au voisinage d'un point critique x_0 autour duquel se permutent n valeurs de y. Dans la somme P_{k-2}, les termes d'ordre $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$ en $\frac{1}{x-x_0}$ disparaissent, car ils sont multipliés respectivement par les sommes des puissances semblables $1, 2, \ldots, n-1$ d'une racine $n^{\text{ième}}$ primitive de l'unité : cela est d'ailleurs évident, car une fonction rationnelle en x ne peut pas avoir d'infinis d'ordre fractionnaire. La somme P_{k-2}, étant une fonction rationnelle de x finie à distance finie, est un polynôme. Pour avoir le degré de ce polynôme, il suffit de voir de quel ordre est cette fonction par rapport à x quand x est infini : or, $\varphi(x,y)$ étant de l'ordre de $\frac{1}{x^2}$ et y^k de l'ordre de x^k, le polynôme P_{k-2} est de l'ordre de x^{k-2}. Donc, si k est égal à zéro ou à 1, cette somme est *identiquement nulle,* car un polynôme en x ne saurait être d'un ordre négatif pour x très grand. Si $k \geqq 2$, la somme est un polynôme de degré $k-2$. On a ainsi, en faisant $k=0, 1, 2, \ldots, m-1$, les relations

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} \varphi(x,y_1)+\quad \varphi(x,y_2)+\ldots+\qquad \varphi(x,y_m)=0,\\ y_1\quad \varphi(x,y_1)+y_2\,\varphi(x,y_2)+\ldots+y_m\quad \varphi(x,y_m)=0,\\ y_1^2\quad \varphi(x,y_1)+y_2^2\,\varphi(x,y_2)+\ldots+y_m^2\quad \varphi(x,y_m)=P_0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ y_1^{m-1}\varphi(x,y_1)+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+y_m^{m-1}\varphi(x,y_m)=P_{m-3}. \end{array}\right.$$

Ces équations linéaires fournissent les m déterminations de $\varphi(x,y)$. Pour les résoudre, formons, par division, le polynôme en y

$$\frac{f(x,y)}{y-y_1}=b_0 y^{m-1}+b_1 y^{m-2}+\ldots+b_{m-1},$$

où $b_0=a_0$, $b_1=a_0 y_1+a_1$, $b_2=a_0 y_1^2+a_1 y_1+a_2$, $\ldots$, b_k étant un polynôme en x et y_1 de degré k. Le polynôme $\frac{f(x,y)}{y-y_1}$ s'annule pour $y=y_2, y_3, \ldots, y_m$; sa valeur, pour $y=y_1$, est $f'_{y_1}(x,y_1)$. Donc, en multipliant la première des équations (3) par b_{m-1}, la deuxième par b_{m-2}, $\ldots$, la dernière par b_0 et ajoutant, on aura l'équation

$$\varphi(x,y_1)\,f'_{y_1}(x,y_1)=Q(x,y_1),$$

où $Q(x,y_1)$ est un polynôme de degré $m-3$ en x et y_1

$$Q(x,y_1)=P_0\,b_{m-3}+P_1\,b_{m-2}+\ldots+P_{m-3}\,b_0.$$

La détermination $\varphi(x, y_2)$ s'obtiendra en remplaçant y_1 par y_2, ...; on a donc enfin, quelle que soit la valeur choisie de y,

$$\varphi(x,y) = \frac{Q(x,y)}{f'_y(x,y)}.$$

Intégrales de troisième espèce. — Soit

$$\int \varpi(x,y)\,dx$$

une intégrale de troisième espèce avec les deux pôles logarithmiques (x', y') et (x'', y''). Soit de plus $\delta(x,y) = ax + by + c = 0$ l'équation de la droite joignant les deux pôles. Considérons la somme

$$R_{k-1} = y_1^k\,\delta(x,y_1)\,\varpi(x,y_1) + y_2^k\,\delta(x,y_2)\,\varpi(x,y_2) + \ldots;$$

on voit, comme plus haut, que cette somme est un polynôme de degré $k-1$ en x et est égale à zéro si k est nul. On en conclut

$$\delta(x,y)\,\varpi(x,y) = \frac{S(x,y)}{f'_y(x,y)},$$

$$\varpi(x,y) = \frac{1}{\delta(x,y)}\,\frac{S(x,y)}{f'_y(x,y)},$$

S étant un polynôme de degré $m-2$.

Intégrales de deuxième espèce. — Une méthode toute semblable fournit la forme de l'expression d'une intégrale de deuxième espèce avec un pôle simple x', y',

$$Z = \int \psi(x,y)\,dx.$$

Il suffit pour cela de remplacer, dans le calcul précédent, la sécante $\delta(x,y)$ par la tangente

$$t(x,y) = x f'_{x'} + y f'_{y'} + f'_{z'}$$

au point (x', y') et de considérer les sommes

$$T_{k-1} = y_1^k\,t(x,y_1)\,\psi(x,y_1) + \ldots + y_m^k\,t(x,y_m)\,\psi(x,y_m)$$

qui sont des polynômes en x de degré $k-1$, sauf dans le cas $k=0$ où cette somme est identiquement nulle.