CHARLES-HENRI CHAMARD

Contribution à l'étude des machines à calculer. De l'extraction des racines. Annexe sur la division et la multiplication automatiques

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1942

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1942__247__1_0>

N° d'ordre :
86

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE D'INGÉNIEUR-DOCTEUR

PAR

Charles-Henri CHAMARD
Ingénieur des Arts et Manufactures

1re THÈSE. — Contribution a l'étude des machines a calculer. — De l'extraction des racines. — Annexe sur la division et la multiplication automatiques.

2e THÈSE. — Théorie des integrateurs mécaniques.

Soutenues le 1942, devant la Commission d'Examen.

MM. VILLAT *Président.*
PÉRÈS, BOULIGAND *Examinateurs.*

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ECOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1942

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

MM.

Doyens honoraires .... M. MOLLIARD. C. MAURAIN.

Doyen .... Paul MONTEL, *Professeur*, Théorie des fonctions.

Professeurs honoraires

H. LEBESGUE.	P. PORTIER.	WINTREBERT.	CARTAN.
Léon BRILLOUIN.	M. MOLLIARD.	DUBOSCQ.	É. BOREL.
AUGER.	L. LAPICQUE.	BOHN.	A. COTTON.
DANGEARD.	G. BERTRAND.	RABAUD.	J. DRACH.
LESPIEAU.	Ch. FABRY.	CAULLERY.	M. GUICHARD.
VESSIOT.	Léon BERTRAND.	J. PERRIN.	LABROUSTE.

PROFESSEURS

Charles PÉREZ ...	T	Zoologie.
L. BLARINGHEM...	T	Botanique.
G. JULIA	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
C. MAUGUIN	T	Minéralogie.
A. DENJOY	T	Géométrie supérieure.
L. LUTAUD	T	Géographie physique et Géologie dynamique.
G. BRUHAT	T	Physique.
E. DARMOIS	T	Enseignement de Physique.
A. DEBIERNE	T	Physique générale et Radioactivité.
A. DUFOUR	T	Physique (P. C. B.).
L. DUNOYER	T	Chimie physique.
M. JAVILLIER.....	T	Chimie biologique.
Henri VILLAT	T	Mécanique des fluides et applications.
Ch. JACOB	T	Géologie.
P. PASCAL	T	Chimie générale.
M. FRÉCHET... ..	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.
E. ESCLANGON ...	T	Astronomie.
H. BÉGHIN	T	Mécanique physique et expérimentale.
FOCH	T	Mécanique expérimentale des fluides.
PAUTHENIER		Physique (P. C. B.).
De BROGLIE	T	Théories physiques.
CHRÉTIEN		Optique appliquée.
PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparées.
VILLEY		Mécanique physique et expérimentale
COMBES	T	Physiologie végétale.
GARNIER	T	Application de l'Analyse à la Géométrie.
PÉRÈS		Mécanique rationnelle.
HACKSPILL	T	Chimie minérale.
TOUSSAINT		Technique Aéronautique.
M. CURIE		Physique (P. C. B.).
G. RIBAUD	T	Hautes températures.
CHAZY	T	Mécanique analytique.
GAULT		Chimie (P. C. B.).
CROZE		Recherches physiques.
DUPONT	T	Théories chimiques.
VALIRON	T	Calcul différentiel et Calcul intégral.
BARRABÉ		Géologie structurale et Géologie appliquée.
MILLOT		Biologie animale (P. C. B.).
F. PERRIN		Théories physiques.
VAVON	T	Analyse et mesures chimiques.
G. DARMOIS	T	Calcul des Probabilités et Physique-mathématique.
CHATTON	T	Biologie maritime.
AUBEL		Chimie biologique.
Jacques BOURCART		Géographie physique et Géologie dynamique.
Mme JOLIOT-CURIE.		Physique générale et Radioactivité.
PLANTEFOL		Biologie végétale (P.C.B.).
CABANNES	T	Recherches physiques.
GRASSÉ	T	Zoologie (évolution des êtres organisés).
PRÉVOST		Chimie (P.C.B.).
BOULIGAND		Mathématiques.
CHAUDRON		Chimie (P. C. B.).
WYART		Minéralogie.
TEISSIER		Zoologie.
MANGENOT		Biologie végétale (P. C. B.).
P. AUGER		Physique.
MONNIER		Physiologie générale.
PIVETEAU		Géologie.
ROCARD		Physique.
H. CARTAN		Calcul différentiel et intégral.

Secrétaire .... A. PACAUD.

Secrétaire honoraire .... D. TOMBECK.

A MES PARENTS

A MA FEMME

dont la tendre sollicitude envers leur prisonnier
a soutenu le labeur de ses huit mois d'exil.

PREMIÈRE THÈSE

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE

DES

MACHINES A CALCULER

DE L'EXTRACTION DES RACINES

INTRODUCTION

Au cours d'études personnelles sur les machines à calculer, en vue de rendre, par des solutions neuves, à la fois leurs rouages moins complexes et leur fonctionnement plus automatique, nous avons réussi à concevoir un dispositif simple pour l'extraction des racines carrées.

Comme il est fréquent en mécanique spéciale, cette simplicité résultait de variantes apportées au processus usuel de l'opération arithmétique, processus qui paraît bien le plus direct en théorie, mais dont la traduction littérale en organes et mouvements rencontre de réelles difficultés pratiques.

Dans un essai d'extension à la racine $n^{\text{ième}}$, nous nous sommes aperçu que de semblables variantes pouvaient, non seulement faciliter des projets de mécanisation, mais encore, tout compte fait, soulager, grâce à la suppression de fastidieux tâtonnements, le travail d'un calculateur simplement pourvu d'instruments semi-automatiques ou même complètement démuni d'outillage.

Pour extraire la racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre entier, on connaît la règle classique, généralisable à un nombre quelconque :

Le nombre est d'abord scindé en tranches de n chiffres à partir de la droite.

Le premier chiffre cherché n'est autre que la racine de la tranche de gauche.

On l'élève à la $n^{\text{ième}}$ puissance et on le soustrait de cette tranche.

Puis, à côté du reste, on abaisse un chiffre de la deuxième tranche, et l'on divise le reste ainsi prolongé par n fois la $(n-1)^{\text{ième}}$ puissance du début de racine.

D'où le deuxième chiffre cherché ou un chiffre trop fort.

Pour l'essayer, on le place à la suite du premier; on élève l'ensemble à la puissance $n^{\text{ième}}$, et le résultat doit pouvoir être soustrait des deux premières tranches.

Lorsqu'on a vérifié ce second chiffre et qu'on possède le reste, on abaisse à côté un chiffre de la troisième tranche, et l'on divise le reste ainsi prolongé par n fois la $(n-1)^{\text{ième}}$ puissance de la racine en formation.

D'où le troisième chiffre cherché ou un chiffre trop fort.

Pour l'essayer, on le place à la suite des deux premiers; on élève l'ensemble à la puissance $n^{\text{ième}}$ et le résultat doit pouvoir être soustrait des trois premières tranches.

Et l'on continue pareillement jusqu'à ce qu'on ait épuisé toutes les tranches.

A la différence de cette règle, la méthode qui fait l'objet du présent mémoire conduit sûrement au but, de façon progressive, sans tâtonnements improductifs.

Mais, pour nous, son principal intérêt réside dans une aptitude particulière à la mécanisation.

On trouvera donc, après la théorie, des éclaircissements sur le système préconisé en racine carrée, et aussi des indications sur un projet analogue en racine cubique.

Enfin, une annexe traitera de modalités relatives à la multiplication et à la division automatiques dans un cadre qui s'accorde avec les opérations précédentes et convienne également à l'addition et à la soustraction immédiates.

En captivité : Nüremberg, février 1941.

TABLE DES MATIÈRES

EXPOSÉ MATHÉMATIQUE

1° Soit un nombre N que nous supposerons d'abord entier, pour fixer les idées, et tel que $1 \leqq N < 10^n$.

Sa racine $n^{\text{ième}}$ entière a un seul chiffre que l'on peut trouver par tâtonnements.

On doit avoir

$$r^n \leqq N < (r+1)^n.$$

Ces tâtonnements seront évités en retranchant successivement de N les nombres (impairs)

$$1, \quad 2^n - 1, \quad 3^n - 2^n, \quad \ldots, \quad q^n - (q-1)^n,$$

série dont la somme des q premiers termes est q^n.

Supposons que l'opération devienne impossible à partir de $q+1$; alors

$$1 + (2^n - 1) + (3^n - 2^n) + \ldots + [q^n - (q-1)^n] \leqq N < 1 + (2^n - 1) + \ldots + [(q+1)^n - q^n].$$

Donc

$$r = q.$$

r est le nombre de soustractions possibles (toujours $\leqq 9$).

Et si $r^n < N$, la dernière soustraction donne le reste d

$$N - r^n = d.$$

2° Si le nombre N est tel que $10^n \leqq N < 100^n$, sa racine $n^{\text{ième}}$ entière a deux chiffres.

On le décomposera en deux tranches à partir de la droite : une tranche de n chiffres et une tranche pouvant comprendre n ou moins de n chiffres.

La racine est de la forme

$$10r + u,$$

r étant le chiffre des dizaines, u étant le chiffre des unités.

r est la racine à une unité près de la première tranche.

Pour obtenir u, on observera qu'il est le plus grand entier vérifiant la condition

$$(1)\qquad (10r+u)^n \leqq N.$$

Or, en appliquant la formule du binôme, on a

$$\begin{aligned}(10r+u)^n = 10^n r^n &+ C_n^1 10^{n-1} r^{n-1} u \\ &+ C_n^2 10^{n-2} r^{n-2} u^2 + \ldots \\ &+ C_n^p 10^{n-p} r^{n-p} u^p + \ldots + C_n^{n-1} 10 r u^{n-1} + u^n.\end{aligned}$$

D'où la condition suivante qui remplacera la condition (1)

$$\begin{aligned}(2)\quad C_n^1 10^{n-1} r^{n-1} u + C_n^2 10^{n-2} r^{n-2} u^2 + \ldots + C_n^p 10^{n-p} r^{n-p} u^p + \ldots \\ + C_n^{n-1} 10 r u^{n-1} + u^n \leqq N - 10^n r^n.\end{aligned}$$

La différence $N - 10^n r^n$ s'obtient en écrivant à droite du reste d, trouvé dans la recherche de r, la tranche de droite du nombre N.

u est le plus grand entier vérifiant la condition (2); or, on peut écrire

$$\begin{aligned}
u &= 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots + 1,\\
u^2 &= 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + [u^2 - (u-1)^2],\\
u^3 &= 1 + 7 + 19 + 37 + \ldots + [u^3 - (u-1)^3],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
u^{n-1} &= 1 + (2^{n-1} - 1) + (3^{n-1} - 2^{n-1}) + \ldots + [u^{n-1} - (u-1)^{n-1}],\\
u^n &= 1 + (2^n - 1) + (3^n - 2^n) + \ldots + [u^n - (u-1)^n].
\end{aligned}$$

Donc, le premier membre de l'inégalité (2) devient

$$\begin{array}{lll}
10^{n-1} r^{n-1} & C_n^1 & \{1 + 1 + 1 + \ldots + 1\}\\
+ 10^{n-2} r^{n-2} & C_n^2 & \{1 + 3 + 5 + \ldots + [u^2 - (u-1)^2]\}\\
+ 10^{n-3} r^{n-3} & C_n^3 & \{1 + 7 + 19 + \ldots + [u^3 - (u-1)^3]\}\\
+ \ldots\ldots\ldots & & \\
+ 10^{n-p} r^{n-p} & C_n^p & \{1 + (2^p - 1) + \ldots + [u^p - (u-1)^p]\}\\
+ \ldots\ldots\ldots & & \\
+ 10^2 r^2 & C_n^{n-2} & \{1 + (2^{n-2} - 1) + \ldots + [u^{n-2} - (u-1)^{n-2}]\}\\
+ 10 r & C_n^{n-1} & \{1 + (2^{n-1} - 1) + \ldots + [u^{n-1} - (u-1)^{n-1}]\}\\
+ 1 & C_n^n & \{1 + (2^n - 1) + \ldots + [u^n - (u-1)^n]\}.
\end{array}$$

$C_n^n = 1$ figure ici pour la symétrie.

Comme r précédemment, u est aussi un nombre de soustractions possibles, pour lesquelles on est conduit à opérer en colonnes; c'est-à-dire qu'on retranchera de $N - 10^n r^n$ les valeurs numériques que prend l'expression linéaire

$$10^{n-1}r^{n-1}C_n^1 x_1 + 10^{n-2}r^{n-2}C_n^2 x_2 + \dots$$
$$+ 10^{n-p}r^{n-p}C_n^p x_p + \dots + 10\,r\,C_n^{n-1}x_{n-1} + x_n,$$

quand on y remplace successivement les variables par

x_1	x_2	x_3	...	x_p	...	x_n
1	1	1	...	1	...	1
1	3	7	...	$2^p - 1$	...	$2^n - 1$
1	5	19	...	$3^p - 2^p$	...	$3^n - 2^n$
.	.	..	...	....	...	....
1	$u^2-(u-1)^2$	$u^3-(u-1)^3$	...	$u^p-(u-1)^p$	...	$u^n-(u-1)^n$.

Quant aux coefficients C_n^1, C_n^2, ..., C_n^p, ..., C_n^{n-1}, C_n^n ou 1 de l'expression linéaire précédente, on peut les déterminer par la formule connue

$$C_n^p = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}{p!}.$$

Considérons le tableau suivant, dans lequel ces coefficients correspondent horizontalement aux racines 2^e, 3^e, ..., 11^e, etc., et verticalement aux facteurs 1, $10\,r$, ..., $10^{10}r^{10}$, etc.

	$10^{10}r^{10}$.	10^9r^9.	10^8r^8.	10^7r^7.	10^6r^6.	10^5r^5.	10^4r^4.	10^3r^3.	10^2r^2.	$10\,r$.	1.
$n=2$										2	1
3									3	3	1
4								4	6	4	1
5							5	10	10	5	1
6						6	15	20	15	6	1
7					7	21	35	35	21	7	1
8				8	28	56	70	56	28	8	1
9			9	36	84	126	126	84	36	9	1
10		10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
11	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

$C_n^1 = n$ C_n^2 ... ... C_n^{n-2} C_n^{n-1}

On reconnaît le triangle arithmétique de Pascal légèrement modifié, en ce sens qu'il y manque la première diagonale 1, 1, 1, ... et l'on sait s'en servir pour calculer C_n^p de proche en proche plus aisément que par la formule ci-dessus.

On aura dans un triangle élémentaire

$$C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}.$$

Par exemple

$$462 = 252 + 210.$$

3° Si le nombre N est $\geqq 100^n$, on le décomposera en tranches de n chiffres à partir de la droite. On opérera d'abord sur les deux premières tranches de gauche, comme il vient d'être indiqué.

Ayant obtenu le reste correspondant

$$N - (10r + u)^n,$$

on posera $10r + u = r'$ et l'on abaissera la tranche suivante. On continuera d'opérer de la même façon sur le nouveau nombre trouvé.

D'où le chiffre suivant u' et un autre reste.

En posant alors $10r' + u' = r''$ et abaissant encore une tranche, on détermine pareillement u'' et ainsi jusqu'à la dernière tranche.

De tout ce qui précède, nous retiendrons comme règle générale :

Si on appelle R_m le nombre formé par les m premiers chiffres d'une racine en élaboration et D_m l'ensemble du reste trouvé à ce moment et d'une nouvelle tranche abaissée, il suffira de soustraire de D_m une suite d'expressions de la forme

$$(3) \qquad C_n^1 10^{n-1} R_m^{n-1} + C_n^2 10^{n-2} R_m^{n-2} x_2 + \ldots \\ + C_n^p 10^{n-p} R_m^{n-p} x_p + \ldots + C_n^{n-1} 10 R_m x_{n-1} + x_n,$$

où $x_2, \ldots, x_p, \ldots, x_n$ prennent successivement des valeurs numériques connues, pour obtenir, par le nombre de soustractions possibles, un autre chiffre de la racine.

x_1 n'est plus explicité, car ce facteur est toujours 1.

La loi s'applique dès le départ où $R_m = 0$.

Les colonnes de valeurs successives à attribuer à $x_2, x_3, \ldots, x_{11}$, etc., colonnes dont chacune est limitée à 9 quantités, fourniront le tableau ci-contre, étendu jusqu'aux besoins de la racine 11[e] :

	x_2.	x_3.	x_4.	x_5.	x_6.	x_7.	x_8.	x_9.	x_{10}.	x_{11}.		x_n.
1°	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...	1
2°	3	7	15	31	63	127	255	511	1·023	2·047	...	$2^n - 1$
3°	5	19	65	211	665	2·059	6·305	19·171	58·025	175·099	...	$3^n - 2^n$
4°	7	37	175	781	3·367	14·197	58·975	242·461	989·527	4·017·157	...	$4^n - 3^n$
5°	9	61	369	2·101	11·529	61·741	325·089	1·690·981	8·717·049	44·633·821	...	$5^n - 4^n$
6°	11	91	671	4·651	31·031	201·811	1·288·991	8·124 571	50·700·551	313·968·931	...	$6^n - 5^n$
7°	13	127	1·105	9·031	70·993	543·607	4·085·185	30·275·911	222·009·073	1·614·529·687	...	$7^n - 6^n$
8°	15	169	1·695	15·961	144·495	1·273·609	11·012·415	93·864·121	791·266·575	6·612·607·849	...	$8^n - 7^n$
9°	17	217	2·465	26·281	269·297	2·685·817	26·269·505	253·202·761	2·413·042·577	22·791·125·017	...	$9^n - 8^n$

Les colonnes telles que $p > n$ seront à négliger; ce qui revient alors à poser

$$C_n^p = 0.$$

On observera que, pour un n déterminé, les calculs seront abrégés, si l'on possède un tableau analogue où les différentes valeurs numériques se trouveront d'avance multipliées par C_n^p.

Nous verrons plus loin (5°) d'autres modes d'allégement.

4° Si l'on veut traiter un nombre quelconque et obtenir une racine donnant par décimale une certaine approximation, la méthode se généralise dans les mêmes conditions que le procédé classique.

C'est-à-dire que, pour extraire la racine n^{ieme} d'un nombre N avec une approximation de $\frac{1}{10^a}$, on multipliera N par 10^{an}, on extraira la racine n^{ieme} du produit à une unité près, et l'on divisera cette racine par 10^a.

5° On peut chercher à alléger les opérations au moyen de formules de récurrence; d'abord, dans un alignement. pour déterminer une expression soustractive en fonction de la précédente; ensuite, entre deux alignements, pour déterminer à partir d'une dernière expression en R_m la première en R_{m+1}.

Désignons par T_q une q^{ieme} expression en R_m.

$$(4)\quad T_q = C_n^1\, 10^{n-1} R_m^{n-1} + C_n^2\, 10^{n-2} R_m^{n-2} [q^2 - (q-1)^2] + \dots$$
$$+ C_n^p\, 10^{n-p} R_m^{n-p} [q^p - (q-1)^p] + \dots + q^n - (q-1)^n.$$

On aura

$$
(5)\qquad \begin{aligned}
T_{q+1} = T_q &+ C_n^2\,10^{n-2}\,R_m^{n-2}\,[(q+1)^2 - 2q^2 + (q-1)^2] + \ldots \\
&+ C_n^p\,10^{n-p}\,R_m^{n-p}\,[(q+1)^p - 2q^p + (q-1)^p] + \ldots \\
&+ (q+1)^n - 2q^n + (q-1)^n.
\end{aligned}
$$

C'est-à-dire pour les racines successives

$$
\begin{aligned}
&\sqrt[2]{} \qquad T_{q+1} = T_q + 2, \\
&\sqrt[3]{} \qquad\qquad\ \ = T_q + 30\,R_m.\,2 + 6q, \\
&\sqrt[4]{} \qquad\qquad\ \ = T_q + 600\,R_m^2.\,2 + 40\,R_m.\,6q + 12q^2 + 2, \\
&\sqrt[5]{} \qquad\qquad\ \ = T_q + 10{\cdot}000\,R_m^3.\,2 + 1\,000\,R_m^2.\,6q + 50\,R_m(12q^2 + 2),
\end{aligned}
$$

etc. (Après $12q^2 + 2$, on a $20q^3 + 10q$, puis $30q^4 + 30q^2$, puis $42q^5 + 70q^3 + 14q$, etc.)

Désignons par T'_1 une première expression en R_{m+1}.

$$
(6)\qquad T'_1 = C_n^1\,10^{n-1}\,R_{m+1}^{n-1} + C_n^2\,10^{n-2}\,R_{m+1}^{n-2} + \ldots + C_n^p\,10^{n-p}\,R_{m+1}^{n-p} + \ldots + 1.
$$

$$
\begin{aligned}
&\sqrt[2]{} \qquad T'_1 = 20\,R_{m+1} + 1, \\
&\sqrt[3]{} \qquad\quad\ = 300\,R_{m+1}^2 + 30\,R_{m+1} + 1, \\
&\sqrt[4]{} \qquad\quad\ = 4{\cdot}000\,R_{m+1}^3 + 600\,R_{m+1}^2 + 40\,R_{m+1} + 1, \\
&\sqrt[5]{} \qquad\quad\ = 50{\cdot}000\,R_{m+1}^4 + 10{\cdot}000\,R_{m+1}^3 + 1{\cdot}000\,R_{m+1}^2 + 50\,R_{m+1} + 1.
\end{aligned}
$$

Supposons que les expressions en R_m aient conduit à un nouveau chiffre z de la racine.

$$
(7)\qquad R_{m+1} = 10\,R_m + z.
$$

Si l'on calcule, par les formules (4), (5) et (7), T_{z+1}, T_z, $\dfrac{T_{z+1} + T_z}{2}$ et $\dfrac{T_{z+1} - T_z}{2}$ en fonction de R_{m+1}, on constate que z disparaît, de sorte qu'il reste

$$
(8)\qquad T_{z+1} = C_n^1\,R_{m+1}^{n-1} + C_n^2\,R_{m+1}^{n-2} + \ldots + C_n^p\,R_{m+1}^{n-p} + \ldots + 1.
$$

$$
\begin{aligned}
&\sqrt[2]{} \qquad T_{z+1} = 2\,R_{m+1} + 1, \\
&\sqrt[3]{} \qquad\qquad\ = 3\,R_{m+1}^2 + 3\,R_{m+1} + 1, \\
&\sqrt[4]{} \qquad\qquad\ = 4\,R_{m+1}^3 + 6\,R_{m+1}^2 + 4\,R_{m+1} + 1, \\
&\sqrt[5]{} \qquad\qquad\ = 5\,R_{m+1}^4 + 10\,R_{m+1}^3 + 10\,R_{m+1}^2 + 5\,R_{m+1} + 1.
\end{aligned}
$$

$$
(9)\qquad \begin{aligned}
T_z = C_n^1\,R_{m+1}^{n-1} - C_n^2\,R_{m+1}^{n-2} + \ldots \pm C_n^p\,R_{m+1}^{n-p} \mp \ldots &+ C_n^{n-1}R_{m+1} - 1 \ (n \text{ pair}) \\
\text{ou } &- C_n^{n-1}R_{m+1} + 1 \ (n \text{ impair}).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sqrt[2]{} \qquad T_z = 2\,R_{m+1} - 1, \\
&\sqrt[3]{} \qquad\quad = 3\,R_{m+1}^2 - 3\,R_{m+1} + 1, \\
&\sqrt[4]{} \qquad\quad = 4\,R_{m+1}^3 - 6\,R_{m+1}^2 + 4\,R_{m+1} - 1, \\
&\sqrt[5]{} \qquad\quad = 5\,R_{m+1}^4 - 10\,R_{m+1}^3 + 10\,R_{m+1}^2 - 5\,R_{m+1} + 1.
\end{aligned}
$$

$$(10)\quad \frac{T_{z+1}+T_z}{2} = C_n^1 R_{m+1}^{n-1} + C_n^3 R_{m+1}^{n-3} + C_n^5 R_{m+1}^{n-5} + \ldots + \begin{array}{l} C_n^{n-1} R_{m+1} \quad (n \text{ pair}) \\ \text{ou} \quad 1 \quad (n \text{ impair}). \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \sqrt[2]{\ } & \dfrac{T_{z+1}+T_z}{2} = 2R_{m+1}, \\ \sqrt[3]{\ } & \qquad = 3R_{m+1}^2 + 1, \\ \sqrt[4]{\ } & \qquad = 4R_{m+1}^3 + 4R_{m+1}, \\ \sqrt[5]{\ } & \qquad = 5R_{m+1}^4 + 10R_{m+1}^2 + 1. \end{array}$$

$$(11)\quad \frac{T_{z+1}-T_z}{2} = C_n^2 R_{m+1}^{n-2} + C_n^4 R_{m+1}^{n-4} + C_n^6 R_{m+1}^{n-6} + \ldots + \begin{array}{l} 1 \quad (n \text{ pair}) \\ \text{ou} \quad C_n^{n-1} R_{m+1} \quad (n \text{ impair}). \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \sqrt[2]{\ } & \dfrac{T_{z+1}-T_z}{2} = 1, \\ \sqrt[3]{\ } & \qquad = 3R_{m+1}, \\ \sqrt[4]{\ } & \qquad = 6R_{m+1}^2 + 1, \\ \sqrt[5]{\ } & \qquad = 10R_{m+1}^3 + 5R_{m+1}. \end{array}$$

On saisit tout l'intérêt de relations-telles que (8), (9), (10), (11) pour obtenir, sans fastidieux calculs, des élévations aux différentes puissances, par simples opérations additives ou soustractives.

Prenons l'exemple, déjà malaisé, de la racine 5ième et proposons-nous de déterminer la première expression en R_{m+1} à partir de R_m et de z.

R_{m+1} est immédiatement connu par la formule (7)

$$R_{m+1} = 10R_m + z.$$

R_{m+1}^2 s'en déduit rapidement

$$R_{m+1}^2 = 100R_m^2 + 20R_m z + z^2.$$

R_{m+1}^3 est donné par la formule (11)

$$10R_{m+1}^3 = \frac{T_{z+1}-T_z}{2} - 5R_{m+1}.$$

R_{m+1}^4, enfin, se tire de la formule (10)

$$5R_{m+1}^4 = \frac{T_{z+1}+T_z}{2} - 10R_{m+1}^2 - 1.$$

Automatiquement, seront introduits les coefficients convenables 10 et 5 (c'est-à-dire les C_n^p dans le cas général).

De même, pour passer d'une expression T_q à la suivante T_{q+1}, il sera souvent plus expéditif d'appliquer la formule de récurrence (5) plutôt que de s'appuyer sur un tableau des $C_n^p x_p$.

RACINE CARRÉE

Calcul arithmétique.

L'expression (3) s'écrit

$$20 R_m + x_2.$$

$x_2 =$ successivement

1
3
5
7
9
11
13
15
17

1er Exemple. — Soit à extraire la racine entière de 7·524·091.

$$\begin{array}{l}
7.5\ 2.4\ 0.9\ 1 \\
-\ 1 \\
\hline
6 \\
-\ 3 \\
\hline
3.5\ 2. \\
-\ 4\ 1 \\
\hline
3.1\ 1. \\
-\ 4\ 3 \\
\hline
2.6\ 8. \\
-\ 4\ 5 \\
\hline
2.2\ 3. \\
-\ 4\ 7 \\
\hline
1.7\ 6. \\
-\ 4\ 9 \\
\hline
\end{array}$$

— 5 imposs. 2 soustractions.
$R_1 = 2$ $20 R_1 = 40$

1.2 7	
— 5 1	
7 6.	
— 5 3	— 55 imposs. 7 soustractions.
2 3.4 0.	$R_2 = 27$ $\quad 20 R_2 = 540$
— 5 4 1	
1 7.9 9.	
— 5 4 3	
1 2.5 6.	
— 5 4 5	
7.1 1.	
— 5 4 7	— 549 imposs. 4 soustractions.
1.6 4.9 1	$R_3 = 274$ $\quad 20 R_3 = 5480$
— 5 4 8 1	
1.1 0.1 0	
— 5 4 8 3	
5 5.2 7	
— 5 4 8 5	—5487 imposs. 3 soustractions.
4 2	

La racine entière est $R_4 = 2743$ et le reste 42.

2^e^ Exemple. — Soit à extraire la racine à 0,01 près de 643,59179.

6.4 3,5 9.1 7.9	
— 1	
5.	
— 3	— 5 imposs. 2 soustractions.
2.4 3,	$R_1 = 2$ $\quad 20 R_1 = 40$
— 4 1	
2.0 2,	
— 4 3	
1.5 9,	
— 4 5	
1.1 4,	
— 4 7	

67,	
— 49	— 51 imposs. 5 soustractions.
18,59.	$R_2 = 25$ $\quad 20 R_2 = 500$
— 501	
13,58.	
— 503	
8.55.	
— 505	— 507 imposs. 3 soustractions.
3,50.17.	$R_3 = 25,3$ $\quad 20 R_3 = 5060$
— 5061	
2,99.56.	
— 5063	
2,48.93.	
— 5065	
1,98.28.	
— 5067	
1,47.61.	
— 5069	
0,96.92.	
— 5071	— 5073 imposs. 6 soustractions.
0,46.21.9	

La racine à 0,01 près est $R_4 = 25,36$ et le reste 0,46219.

RACINE CARRÉE

Mécanisation.

Le processus utilisé jusqu'ici offre beaucoup de caractères communs avec la division par soustractions répétées. On peut donc envisager de le traduire mécaniquement dans le cadre des machines à calculer qui se réclament de cette modalité.

Au surplus. une machine autonome pour l'extraction des racines carrées aurait peu d'intérêt pratique.

Une première idée directrice implique donc la recherche d'un dispositif dont le service puisse s'étendre à l'addition, la soustraction, la multiplication et la division.

Une autre idée implique l'étude des combinaisons spécialisées conduite dans un sens qui simplifie les organes et les mouvements correspondants. Et l'on n'hésitera pas à retoucher le processus initial en fonction de cette nécessité, quitte même à le rendre d'apparence moins direct.

1° Pour se rapprocher des instruments usuels, on commencera par adopter leur schéma d'ensemble, comportant :

Inscription. Entraînement. Comptage-Totalisation.

Le « Combinateur » sera la partie où se prépareront les diverses expressions soustractives, ou d'épuisement.

Il correspond à l'*Inscription*, avec son clavier et ses organes chiffrants.

Le « Transmetteur » sera la partie où s'exercera la liaison vers l'étage suivant.

Il correspond à l'*Entraînement*, avec ses organes d'action intermédiaire et leur source de mouvement.

Le « Récepteur » sera la partie où s'enregistreront les stades successifs de l'épuisement jusqu'au résultat final.

Il correspond à l'étage de *Comptage-Totalisation* avec ses organes chiffrés (viseurs) et leur report de retenues.

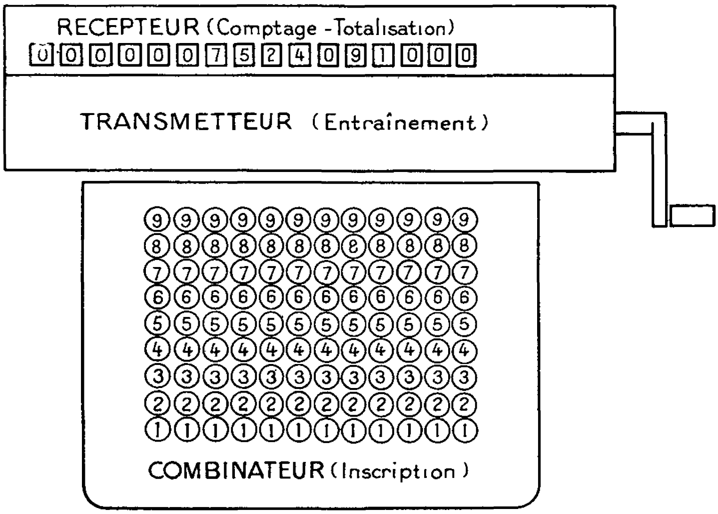

Fig. 1.

Pour aboutir à une sobre réalisation mécanique, on reconsidérera les expressions soustractives.

La suite des 9 premiers nombres impairs 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, manque d'homogénéité; d'abord un chiffre, puis deux.

Par contre, leurs moitiés 0,5, 1,5, 2,5, 3,5, 4,5, 5,5, 6,5, 7,5, 8,5 gardent un même aspect : partie entière présentant la gamme des chiffres de 0 à 8; partie décimale 5 commune.

Il sera donc plus commode d'utiliser ces moitiés, sauf à les redoubler par répétition.

Mais la répétition est encore avantageuse par ailleurs :

Forme transitoire. — Écrivons en effet les soustractives adéquates :

1re tranche .... $\left|\frac{x_2}{2}\right.$

2e » .... $|\, r \left|\frac{x_2}{2}\right.$

3e » .... $|\, r \,|\, u \left|\frac{x_2}{2}\right.$

4e » .... $|\, r \,|\, u \,|\, u' \left|\frac{x_2}{2}\right.$ etc.

Et imaginons que, dans leur mise en jeu, elles soient comptées seulement une fois sur deux.

Première conséquence. — Les quantités à faire figurer devant les $\frac{x_2}{2}$ sont les débuts progressifs de la racine elle-même, et la répétition les doublera aussi d'office à chaque changement de x_2, comme le veut la théorie.

Quant au comptage, il permettra de recueillir, à la fin d'un épuisement, le nouveau chiffre qui en résulte pour la racine.

Deuxième conséquence. — Comme les expressions soustractives finales sont

1re tranche......	$\mid r - 1 \mid 5$	c'est-à-dire	$R_1 - 1 \mid 5$
2e »	$\mid r \mid u - 1 \mid 5$		$R_2 - 1 \mid 5$
3e »	$\mid r \mid u \mid u' - 1 \mid 5$		$R_3 - 1 \mid 5$
4e »	$\mid r \mid u \mid u' \mid u'' - 1 \mid 5$		$R_4 - 1 \mid 5$
	etc.		etc.

Et comme les expressions initiales qui leur font respectivement suite sont

$R_1 \mid 0 \mid 5$
$R_2 \mid 0 \mid 5$
$R_3 \mid 0 \mid 5$
$R_4 \mid 0 \mid 5$
etc.

On voit qu'il suffit d'ajouter 1 aux unités d'une expression finale pour former le chiffre des dizaines de l'expression initiale ultérieure, de telle sorte que, si les différents chiffres ainsi majorés peuvent être fixés à demeure au fur et à mesure de leur apparition, les débuts de racine se formeront de proche en proche, et les $\frac{x_2}{2}$ se trouveront constamment précédés des quantités appropriées.

Exemple (*Forme transitoire*). — Reprenons l'opération $\sqrt{7{\cdot}524{\cdot}091}$

7.5 2.4 0.9 1		
— 0,5		
— 0,5		
6.5 2.4 0.9 1		
— 1,5		
— 1,5	—2,5	imposs. 2 fois 2 soustr.
3.5 2.4 0.9 1	—2,5	$R_1 = 2$
— 2 0,5		
— 2 0,5		
3.1 1.4 0.9 1		

— 2 1,5
— 2 1,5

2.6 8.4 0.9 1
— 2 2,5
— 2 2,5

2.2 3.4 0.9 1
— 2 3,5
— 2 3,5

1.7 6.4 0.9 1
— 2 4;5
— 2 4,5

1.2 7.4 0.9 1
— 2 5,5
— 2 5,5

---

7 6.4 0.9 1
— 2 6,5
— 2 6,5

—27,5
—27,5 | imposs. 7 fois 2 soustr.
$R_2 = 27$

---

2 3.4 0.9 1
— 2 7 0,5
— 2 7 0,5

---

1 7.9 9.9 1
— 2 7 1,5
— 2 7 1,5

---

1 2.5 6.9 1
— 2 7 2,5
— 2 7 2,5

7.1 1.9 1
— 2 7 3,5
— 2 7 3,5

—274,5
—274,5 | imposs. 4 fois 2 soustr.
$R_3 = 274$

1.6 4.9 1
— 2 7 4 0,5
— 2 7 4 0,5

1.1 0.1 0
— 2 7 4 1,5
— 2 7 4 1,5

---

5 5.2 7
— 2 7 4 2,5
— 2 7 4 2,5

—2743,5
—2743,5 | imposs. 3 fois 2 soustr.
$R_4 = 2743$

---

4 2

Conditions d'automaticité. — Cela ne montre pas encore comment, à chaque série de soustractions, se concrétisera l'impossibilité de les poursuivre, ni comment s'effectuera opportunément le changement de tranche.

Nous avons parlé d'un « Combinateur » et d'un « Récepteur » des expressions soustractives, ou d'épuisement. Pour passer d'une tranche à une autre, on est donc amené à envisager la translation relative de ces deux parties mécaniques.

Un critère d'impossibilité auquel il sera commode de lier cette translation, va maintenant ressortir de la mutation des opérations soustractives en opérations additives.

Et l'on verra se réaliser du même coup la majoration d'une unité dont il a été question plus haut.

Forme parachevée. — On sait que cette mutation s'obtient en substituant aux chiffres du nombre à soustraire, zéros qui le précèdent ou le suivent supposés explicités, leurs compléments avec 9, à condition de porter un 10 à la place du dernier 9 résultant de la substitution.

Ainsi

$$
\begin{array}{r}
3\ 5\ 2\ 4\ 0\ 9\ 1 \\
-\ 2\ 0\ 5\ 0\ 0\ 0 \\
\hline
3\ 3\ 1\ 9\ 0\ 9\ 1
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l}
\qquad\quad 3\ 5\ 2\ 4\ 0\ 9\ 1 \\
+ \cdots 9\ 9\ 9\ 7\ 9\ 4\ 9\ 9\ 9\ 9 \cdots (10) \\
\hline
\qquad\quad 3\ 3\ 1\ 9\ 0\ 9\ 1
\end{array}
$$

Imaginons de plus que, pour chaque expression d'épuisement ayant subi cette transformation, on modifie encore la partie non significative de gauche, de telle sorte que

$$\cdots 9\ 9\ 9 \quad \text{devienne} \quad \cdots 0\ 4\ 9$$

Et observons ce qui va résulter de ces nouvelles dispositions sur notre exemple $\sqrt{7\cdot 524\cdot 091}$

$$
\begin{array}{r}
7.5\ 2.4\ 0.9\ 1\qquad\quad \\
+ \cdots 0\ 4\ 9\ 9\ 4\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9 \cdots (10) \\
+ \cdots 0\ 4\ 9\ 9\ 4\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9 \cdots (10) \\
\hline
1\ 0\ 0\ 6.5\ 2.4\ 0.9\ 1\qquad\quad \\
+ \cdots 0\ 4\ 9\ 8\ 4\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9 \cdots (10) \\
+ \cdots 0\ 4\ 9\ 8\ 4\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9 \cdots (10) \\
\hline
2\ 0\ 0\ 3.5\ 2.4\ 0.9\ 1\qquad\quad \\
+ \cdots 0\ 4\ 9\ 7\ 4\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9 \cdots (10) \\
+ \cdots 0\ 4\ 9\ 7\ 4\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9 \cdots (10)\cdot \\
\hline
2\ \boxed{9}\ 9\ 8.5\ 2.4\ 0.9\ 1\qquad\quad
\end{array}
$$

Représentons-nous ici le « Récepteur » comme un simple totalisateur de machine usuelle, dans lequel on aura pu faire figurer au début 7·524·091.

On voit qu'après les deux premières additions élémentaires, ce totalisateur aura enregistré le premier reste et, sur la gauche, le chiffre 1; qu'après les deux suivantes, il aura enregistré le second reste et le chiffre 2.

Or 2 est le premier chiffre de la racine. Donc, la majoration cherchée s'y trouve implicitement contenue et, de ce fait, le totalisateur jouera en même temps le rôle de compteur.

On voit en outre qu'une fois acquis le premier chiffre de la racine, une double addition de trop s'est manifestée par l'apparition d'un 9 à la place du zéro qui bordait ce chiffre à droite.

Nous possédons de la sorte un critère d'impossibilité. Mais le but étant dépassé, nous sommes conduits à effacer la double addition superflue.

Pour cela, supposons que dans le « Combinateur » les expressions d'épuisement avec leurs têtes particulières soient traduites simultanément en chiffres directs et en chiffres complémentaires, et que, par une inversion quelconque, on puisse transmettre les unes ou les autres au Totalisateur-Compteur.

Supposons aussi que le critère 9 soit utilisé :

1° A provoquer, pour l'opération d'effacement, l'inversion des chiffres complémentaires en chiffres directs.

2° A préparer la translation ultérieure.

Dès lors, l'automaticité va se poursuivre de bout à bout.

Suite de l'exemple (*Forme parachevée*)

2 9 9 8.5 2.4 0.9 1	
+ ... 9 5 0 2 5	
+ ... 9 5 0 2 5	Effac. par inversion.
2 0 0 3.5 2.4 0.9 1	$R_1 = 2$ Translation.
+ ... 0 4 9 7 9 4 9 9 9 9 ... (10)	
+ ... 0 4 9 7 9 4 9 9 9 9 ... (10)	
2 1 0 3.1 1.4 0.9 1	
+ ... 0 4 9 7 8 4 9 9 9 9 ... (10)	
+ ... 0 4 9 7 8 4 9 9 9 9 ... (10)	
2 2 0 2.6 8.4 0.9 1	
+ ... 0 4 9 7 7 4 9 9 9 9 ... (10)	
+ ... 0 4 9 7 7 4 9 9 9 9 ... (10)	

2 3 0 2.2 3.4 0.9 1
+ ... 0 4 9 7 6 4 9 9 9 9 ... (10)
+ ... 0 4 9 7 6 4 9 9 9 9 ... (10)

---

2 4 0 1.7 6.4 0.9 1
+ ... 0 4 9 7 5 4 9 9 9 9 ... (10)
+ ... 0 4 9 7 5 4 9 9 9 9 ... (10)

---

2 5 0 1.2 7.4 0.9 1
+ ... 0 4 9 7 4 4 9 9 9 9 ... (10)
+ ... 0 4 9 7 4 4 9 9 9 9 ... (10)

---

2 6 0 0 7 6.4 0.9 1
+ ... 0 4 9 7 3 4 9 9 9 9 ... (10)
+ ... 0 4 9 7 3 4 9 9 9 9 ... (10)

---

2 7 0 0 2 3.4 0.9 1
+ ... 0 4 9 7 2 4 9 9 9 9 ... (10)
+ ... 0 4 9 7 2 4 9 9 9 9 ... (10)

---

2 7 $\boxed{9}$ 9 6 7.4 0.9 1
+ ... 9 5 0 2 7 5
+ ... 9 5 0 2 7 5 Effac. par inversion.

---

2 7 0 0 2 3.4 0.9 1 $R_2 = 27$ Translation.
+ ... 0 4 9 7 2 9 4 9 9 9 ... (10)
+ ... 0 4 9 7 2 9 4 9 9 9 ... (10)

---

2 7 1 0 1 7.9 9.9 1
+ ... 0 4 9 7 2 8 4 9 9 9 ... (10)
+ ... 0 4 9 7 2 8 4 9 9 9 ... (10)

---

2 7 2 0 1 2.5 6.9 1
+ ... 0 4 9 7 2 7 4 9 9 9 ... (10)
+ ... 0 4 9 7 2 7 4 9 9 9 ... (10)

---

2 7 3 0 0 7.1 1.9 1
+ ... 0 4 9 7 2 6 4 9 9 9 ... (10)
+ ... 0 4 9 7 2 6 4 9 9 9 ... (10)

---

2 7 4 0 0 1.6 4.9 1
+ ... 0 4 9 7 2 5 4 9 9 9 ... (10)
+ ... 0 4 9 7 2 5 4 9 9 9 ... (10)

---

2 7 4 $\boxed{9}$ 9 6.1 5.9 1
+ ... 9 5 0 2 7 4 5
+ ... 9 5 0 2 7 4 5 Effac. par inversion.

---

2 7 4 0 0 1.6 4.9 1 $R_3 = 274$ Translation.
+ ... 0 4 9 7 2 5 9 4 9 9 ... (10)
+ ... 0 4 9 7 2 5 9 4 9 9 ... (10)

---

2 7 4 1 0 1.1 0.1 0
+ ... 0 4 9 7 2 5 8 4 9 9 ... (10)
+ ... 0 4 9 7 2 5 8 4 9 9 ... (10)

$$
\begin{array}{lll}
2\,7\,4\,2\,0\,0\,5\,5.2\,7 & & \\
+\ldots 0\,4\,9\,7\,2\,5\,7\,4\,9\,9\ldots\ (10) & & \\
+\ldots 0\,4\,9\,7\,2\,5\,7\,4\,9\,9\ldots\ (10) & & \\
\hline
2\,7\,4\,3\,0\,0\,0\,0.4\,2 & & \\
+\ldots 0\,4\,9\,7\,2\,5\,6\,4\,9\,9\ldots\ (10) & & \\
+\ldots 0\,4\,9\,7\,2\,5\,6\,4\,9\,9\ldots\ (10) & & \\
\hline
2\,7\,4\,3\,\boxed{9}\,9\,4\,5.5\,5 & & \\
+\ldots 9\,5\,0\,2\,7\,4\,3\,5 & & \\
+\ldots 9\,5\,0\,2\,7\,4\,3\,5 & & \text{Effac. par inversion.} \\
\hline
2\,7\,4\,3\,0\,0\,0\,0.4\,2 & & R_4 = 2743
\end{array}
$$

Au delà, l'opération se continuera en fournissant les chiffres décimaux de la racine et les restes correspondants jusqu'à la limite compatible avec le champ de la machine.

Remarque. — La mutation des opérations soustractives en opérations additives n'est pas intéressante seulement quant au critère d'impossibilité.

Elle est de pratique courante pour conserver au compteur des rotations toujours de même sens, quelle que soit la nature des calculs à effectuer, et pour faciliter le report des retenues.

Aperçu de Combinateur. — Pour la Totalisation, le Comptage, l'Entraînement, l'Inversion et la Translation, ainsi que pour les Liaisons diverses, rien n'empêche d'emprunter les solutions au domaine classique.

Pour le Combinateur (Inscription), on pourra s'en faire l'idée suivante :

Aux parties entières de 0,5, 1,5, 2,5, etc., seront affectées, par exemple, comme organes représentatifs, les tiges d'un clavier qui formeront butées devant les éléments du Transmetteur (Entraînement).

Dans la colonne correspondant à la droite d'une tranche, une manœuvre de ratissage abaissera successivement les tiges 0, 1, 2, etc., tandis que, dans la colonne suivante, la tige 5 aura été enfoncée pour ne se relever qu'à la prochaine translation.

Si, par contre, la dernière tige abaissée reste bloquée, pendant que s'effectueront de nouveaux ratissages, on conçoit que les différentes expressions d'épuisement s'étendront sous le clavier, progressivement, avec tous leurs chiffres appropriés, et que ceux-ci seront cueillis simultanément par les éléments respectifs du Transmetteur.

Bien entendu, il faudra prévoir pour chaque tige la fonction directe et la fonction complémentaire, et s'inquiéter aussi des combinaisons particulières de tête. d'où découlera l'automaticité.

RACINE CUBIQUE

Calcul arithmétique.

L'expression (3) s'écrit

$$300\,R_m^2 + 30\,R_m x_2 + x_3.$$

$30x_2 =$	$x =$
30	1
90	7
150	19
210	37
270	61
330	91
390	127
450	169
510	217

Mais pour le calcul des expressions successives, il est plus simple ici de procéder par récurrence.

1° Passage d'une expression à la suivante de même alignement.

$$T_{q+1} = T_q + 60\,R_m + 6\,q.$$

Donc, il suffit d'ajouter chaque fois : d'abord $60\,R_m$, puis les compléments variables 6, 12, 18, 24, etc., dont le Δ est 6.

2° Passage d'un alignement à l'alignement suivant.

La première expression soustractive cherchée est

$$T'_1 = 300\,R_{m+1}^2 + 30\,R_{m+1} + 1.$$

Or

$$3\,R_{m+1}^2 = \frac{T_{z+1} + T_z}{2} = 1.$$

Posons

$$\frac{T_{z+1} + T_z}{2} - 1 + T.$$

$$300\,R_{m+1}^2 = 100\,T.$$

Exemple. — Soit à extraire la racine cubique de 43·874·924·183

43.874.924.183
— 1

42
— 1
— 6

35
$-T_3 = \left|\begin{array}{l} -7 \\ -12 \end{array}\right.$

$-T_4 = \left|\begin{array}{l} -19 \\ -18 \end{array}\right.$ imposs. $R_1 = 3$ $T = 27$

$300 R_1^2 = 2·700$ $30 R_1 = 90$

16.874
— 2791

14.083
— 2791
$-60R_1 =$ — 180
— 6

11.106
— 2977
— 180
— 12

7.937
— 3169
— 180
— 18

4.570
$-T'_5 = \left|\begin{array}{l} -3367 \\ -180 \\ -24 \end{array}\right.$

$-T'_6 = \left|\begin{array}{l} -3·571 \\ -180 \\ -30 \end{array}\right.$ imposs. $R_2 = 35$ $T = 3·675$

$300 R_2^2 = 367·500$ $30 R_2 = 1·050$

999.924
— 368551

631.373
$-T''_2 = \left|\begin{array}{l} -368551 \\ -2100 \\ -6 \end{array}\right.$

$-T''_3 = \left|\begin{array}{l} -370·657 \\ -2·100 \\ -12 \end{array}\right.$ imposs. $R_3 = 352$ $T = 371·712$

$300 R_3^2 = 37·171·200$ $30 R_3 = 10·560$

260.716.183
— 37181761

223.534.422
— 37181761
— 21120
— 6

```
  186.331.535
— 37202887
      — 21120
          — 12
-------------
  149.107.516
— 37224019
      — 21120
         — 18
-------------
  111.862.359
— 37245157
      — 21120
         — 24
-------------
   74.596.058
— 37266301
      — 21120
         — 30
-------------
   37.308.607
— 37287451
      — 21120
         — 36
-------------
    00000000
```

$R_1 = 3527$

Le nombre proposé était un cube parfait.

RACINE CUBIQUE

Essai de mécanisation.

En racine carrée, la forme des quantités $T_{q+1} - T_q = 2$ et $20\,R_{m+1}$, divisibles par 2, a permis le dédoublement des expressions soustractives.

Si nous considérons maintenant les quantités correspondantes en racine cubique, $T_{q+1} - T_q = 60\,R_m + 6q$ et $300\,R^2_{m+1} + 30\,R_{m+1}$, divisibles par 6, l'analogie nous incite ici à un fractionnement en sixièmes.

Les $\frac{x_3}{6}$, exprimés en chiffres complémentaires, présentent la suite illimitée 8333. . . ., tandis que la combinaison de comptage et de critère 9, provenant du quotient $\frac{1}{6}$, offre la suite 1666. . . ., décalée sur la gauche.

La somme de ces deux suites donne la terminaison 4999. . . . (10), identique à celle de la racine carrée (résultat susceptible d'extension à une racine quelconque).

Cependant, la tête caractéristique ne sera plus ici 049, mais 016.

Dans ces conditions, et tout en réservant les modalités pratiques de passage d'une expression soustractive à la suivante, les divers stades de l'opération mécanisée doivent se dérouler comme ci-après :

0 4 3 8 7 4 9 2 4 1 8 3	
+ … 0 1 6 **6 6** 4 9 9 9 9 9 9 9 … (10)	⟶ 6 fois
1 0 **0 4 2** 8 7 4 9 2 4 1 8 3	
+ … 0 1 6 **6 5** 4 9 9 9 9 9 9 9 … (10)	Id.
2 0 **0 3 5** 8 7 4 9 2 4 1 8 3	
+ … 0 1 6 **6 3** 4 9 9 9 9 9 9 9 … (10)	Id.
3 0 **0 1 6** 8 7 4 9 2 4 1 8 3	
+ … 0 1 6 **6 0** 4 9 9 9 9 9 9 9 … (10)	Id.
3 $\boxed{9}$ 9 7 9 8 7 4 9 2 4 1 8 3	Critère 9
+ … 9 8 3 3 9 5	6 fois (Effac. par inversion)
3 0 0 **1 6 8 7 4** 9 2 4 1 8 3	$R_1 = 3$ Translation
+ … 0 1 6 **6 2 0 1** 4 9 9 9 9 9 9 … (10)	⟶ 6 fois

3 1 0 1 4 0 8 3 9 2 4 1 8 3	
+ ... 0 1 6 6 1 7 0 4 9 9 9 9 9 9 ... (10)	Id.
3 2 0 1 1 0 6 9 2 4 1 8 3	
+ ... 0 1 6 6 1 3 8 4 9 9 9 9 9 9 ... (10)	Id.
3 3 0 0 7 9 3 7 9 2 4 1 8 3	
+ ... 0 1 6 6 1 0 5 4 9 9 9 9 9 9 ... (10)	Id.
3 4 0 0 4 5 7 0 9 2 4 1 8 3	
+ ... 0 1 6 6 0 7 1 4 9 9 9 9 9 9 ... (10)	Id.
3 5 0 0 0 9 9 9 9 2 4 1 8 3	
+ ... 0 1 6 6 0 3 6 4 9 9 9 9 9 9 ... (10)	Id.
3 5 $\boxed{9}$ 9 7 2 1 8 9 2 4 1 8 3	Critère 9
+ ... 9 8 3 3 9 6 3 5	6 fois (Effac. par inversion)
3 5 0 0 0 9 9 9 9 2 4 1 8 3	$R_2 = 35$ Translation
+ ... 0 1 6 6 0 5 2 4 1 4 9 9 9 9 ... (10)	⟶ 6 fois
3 5 1 0 0 6 3 1 3 7 3 1 8 3	
+ ... 0 1 6 6 0 4 8 9 0 4 9 9 9 9 ... (10)	Id.
3 5 2 0 0 2 6 0 7 1 6 1 8 3	
+ ... 0 1 6 6 0 4 5 3 8 4 9 9 9 9 ... (10)	Id.
3 5 2 $\boxed{9}$ 9 8 8 7 9 4 7 1 8 3	Critère 9
+ ... 9 8 3 3 9 5 4 6 1 5	6 fois (Effac. par inversion)
3 5 2 0 0 2 6 0 7 1 6 1 8 3	$R_3 = 352$ Translation
+ ... 0 1 6 6 0 4 6 9 7 0 6 4 9 9 ... (10)	⟶ 6 fois
3 5 2 1 0 2 2 3 5 3 4 4 2 2	
+ ... 0 1 6 6 0 4 6 6 1 8 5 4 9 9 ... (10)	Id.
3 5 2 2 0 1 8 6 3 3 1 5 3 5	
+ ... 0 1 6 6 0 4 6 2 6 6 3 4 9 9 ... (10)	Id.
3 5 2 3 0 1 4 9 1 0 7 5 1 6	
+ ... 0 1 6 6 0 4 5 9 1 4 0 4 9 9 ... (10)	Id.
3 5 2 4 0 1 1 1 8 6 2 3 5 9	
+ ... 0 1 6 6 0 4 5 5 6 1 6 4 9 9 ... (10)	Id.
3 5 2 5 0 0 7 4 5 9 6 0 5 8	
+ ... 0 1 6 6 0 4 5 2 0 9 1 4 9 9 ... (10)	Id.
3 5 2 6 0 0 3 7 3 0 8 6 0 7	
+ ... 0 1 6 6 0 4 4 8 5 6 5 4 9 9 ... (10)	Id.
3 5 2 7 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	

En continuant, les criteres 9 apparaîtront successivement à la place de tous les zéros, et la translation se poursuivra régulièrement vers la droite tant que le dispositif s'y prêtera.

Pour résoudre entièrement le problème, il reste encore à trouver les moyens simples de former :

1° Les premières expressions soustractives correspondant aux différents alignements.

2° Les expressions courantes, de proche en proche, dans un alignement déterminé.

On a bien vu les formules de récurrence qui satisfont théoriquement à cette simplicité ; mais, pratiquement, de nouvelles adaptations s'imposent.

Imaginons qu'à la machine déjà schématisée pour la racine carrée (et les autres opérations usuelles), on ajoute un intermédiaire comportant relais et transmetteur auxiliaire, de telle sorte que le relais puisse accumuler au fur et à mesure les données du combinateur et en présenter constamment le total au transmetteur principal.

Nous appellerons ce relais « Accumulateur ».

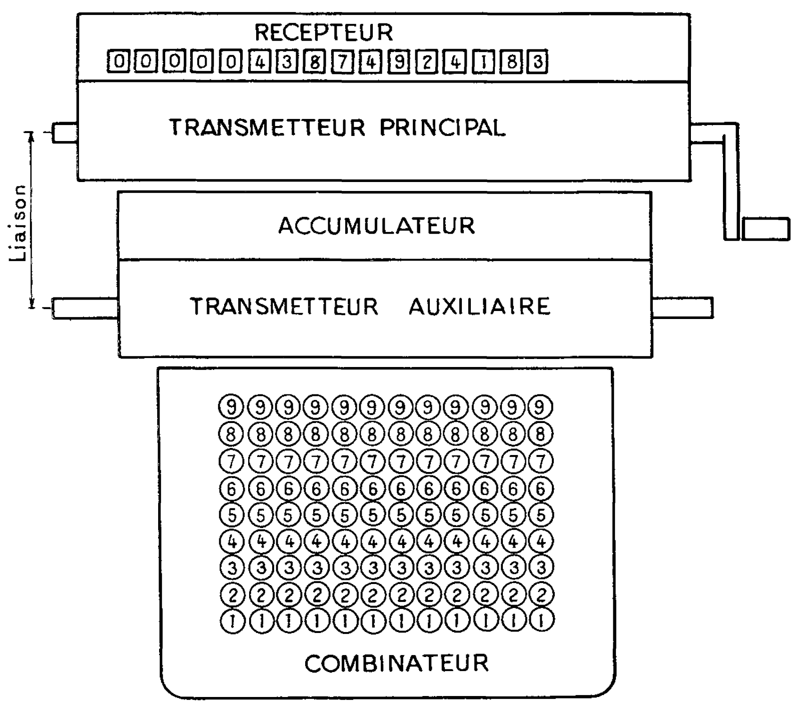

Fig. 2.

Reprenons sur notre exemple les diverses suites d'expressions

	$\Delta =$		$\Delta =$		$\Delta =$		$\Delta =$
6 6		6 2 0 1		6 0 5 2 4 1		6 0 4 6 9 7 0 6	
6 5	1	6 1 7 0	31	6 0 4 8 9 0	351	6 0 4 6 6 1 8 5	3521
6 3	2	6 1 3 8	32	6 0 4 5 3 8	352	6 0 4 6 2 6 6 3	3522
6 0	3	6 1 0 5	33			6 0 4 5 9 1 4 0	3523
		6 0 7 1	34			6 0 4 5 5 6 1 6	3524
		6 0 3 6	35			6 0 4 5 2 0 9 1	3525
						6 0 4 4 8 5 6 5	3526
						6 0 4 4 5 0 3 8	3527

On a noté les différences; elles ont comme dizaines la racine en formation et comme unités 1, 2, 3, 4, etc.

Nous nous appuierons sur cette propriété pour le passage d'une expression à la suivante de même alignement. Ainsi nous réaliserons une véritable machine à différences poussée jusqu'à l'étage précédant les différences constantes (égales à l'unité).

Quant au passage d'une expression finale à l'expression initiale d'alignement suivant, nous remarquerons que

$$\begin{aligned} 6201 &= 60 \times 100 + 66 + 45 \times 3 \\ 605241 &= 6036 \times 100 + 66 + 45 \times 35 \\ 60469706 &= 604538 \times 100 + 66 + 45 \times 352 \end{aligned}$$

C'est-à-dire :

Exp. initiale = Exp. finale précédente $\times 100 + 66 + 45$ fois la racine en formation.

Imaginons : 1° Que le nombre à traiter soit préalablement introduit dans le récepteur.

2° Que par l'effet permanent d'une touche $\sqrt[3]{}$, l'accumulateur puisse, en cours d'opération, retenir, outre les expressions déjà acquises et les nombres qui lui viennent du combinateur, d'autres nombres particuliers :

Au début	0 1 6 6 6 4 9 9 9 9 9 9 9 9 9 . . .
Après 1$^{\text{er}}$ épuisement	0 0 1 6 0 0 6 6 4 9 9 9 9 9 9 . . .
» 2$^{\text{e}}$ »	0 0 0 1 6 0 0 0 0 6 6 4 9 9 9 9 . . .
» 3$^{\text{e}}$ »	0 0 0 0 1 6 0 0 0 0 0 0 0 6 6 4 9 . . . . etc.

(L'accumulateur devra posséder ses dispositifs propres de report de retenues, de translation et, en ce qui concerne le changement des nombres particuliers à chaque épuisement, d'annulation partielle depuis le 4 jusqu'à l'extrême droite).

3° Que le combinateur soit susceptible d'un ratissage identique à celui de la racine carrée.

4° Que les transmetteurs aient des mouvements conjugués et remplacent par (10) les derniers 9 des quantités mises en jeu.

Dans ces conditions, l'automatisme ne rencontre pas de sérieuses difficultés. Détaillons ci-dessous le processus préconisé :

COMBINATEUR.	ACCUMULATEUR.	RÉCEPTEUR.	
0000000000000000		043874924183	
	0166649999999999	0166649999999999(10)	6 fois.
		1004287492 4183	
0000100000000000	9999899999999999(10)		
	0166549999999999	0166549999999999(10)	Id.
		2003587492 4183	
0000200000000000	9999799999999999(10)		
	0166349999999999	0166349999999999(10)	Id.
		3001687492 4183	
0000300000000000	9999699999999999(10)		
	0166049999999999	0166049999999999(10)	Id.
		3$\boxed{9}$97987492 4183 983395	Inversion.
		3001687492 4183	Translation.

Le début de racine reste dans le combinateur comme pour la racine carrée.

De même, l'expression finale correspondante reste dans l'accumulateur.

La translation sera pour l'accumulateur de un chiffre vers la droite. Pour le combinateur, elle doit être de trois chiffres et, comme nous le verrons ci-dessous, par deux et un.

Quant à l'inversion par le transmetteur auxiliaire, il faut qu'elle subsiste jusqu'à ce que la nouvelle expression initiale soit formée.

COMBINATEUR.	ACCUMULATEUR.	
	(Déplacem^t de 1 chiffre →) 0166000000000000 Annulation 66499999999	
(Déplacem^t de 2 chiffres →) 0000300000000000	0166066499999999 3	4 fois
(Déplacem^t de 1 chiffre →) 0000300000000000	0166186499999999 3	5 fois
	0166201499999999	

L'expression initiale de second alignement vient d'apparaître dans l'accumulateur.

Le deuxième épuisement est donc prêt à s'effectuer, et l'achèvement de l'opération découle maintenant de ce qui précède.

Cette étude, nous le répétons, n'est qu'un essai. Sans doute, en l'approfondissant, trouverait-on des simplifications. Telle, elle montre néanmoins que la solution du problème est possible dans un cadre mécanique relativement peu complexe.

La longueur du processus décrit ne paraît cependant pas prohibitive. Dans l'exemple analysé, si l'on admet qu'un mouvement de transmetteur exigera une seconde, les temps se décomposeront comme suit :

Inscription du nombre à traiter............	Environ..........	10″	$\times 1 = 13''$
Frappe $\sqrt[?]{\ }$ déclenchant le moteur.........	»	1″	
Préparation de l'accumulateur.............	»	2″	
Inversions par transmetteur principal......	6 mouvements...	6″	$\times 3 = 66''$
Translations..............................	Environ.....	3″	
Annulations partielles de l'accumulateur.. .	»	1″	
Préparations de l'accumulateur............	»	2″	
Transmetteur auxiliaire...................	9 mouvements...	9″	
1er Épuisement : Ratissage................	Environ..........	1″	$\times 1 = 28''$
Transmetteur auxiliaire...	3 mouvements...	3″	
» principal....	24 » ...	24″	
2^e Épuisement : Ratissage................	Environ..........	1″	$\times 1 = 42''$
Transmetteur auxiliaire...	5 mouvements...	5″	
» principal....	36 » ...	36″	

3e Épuisement :	Ratissage................	Environ..........	1″	× 1 = 21″
	Transmetteur auxiliaire...	2 mouvements...	2″	
	» principal....	18 » ...	18″	
4e Épuisement :	Ratissage................	Environ..........	1″	× 1 = 56″
	Transmetteur auxiliaire...	7 mouvements...	7″	
	» principal....	48 » ...	48″	
				226″

Soit au total 3′46″ pour une racine à quatre chiffres dans la moyenne.

Aperçu d'accumulateur. — Ce dispositif intermédiaire peut être imaginé comme un totalisateur dont les tambours chiffrés sont remplacés par des moyeux à dix rais inégaux.

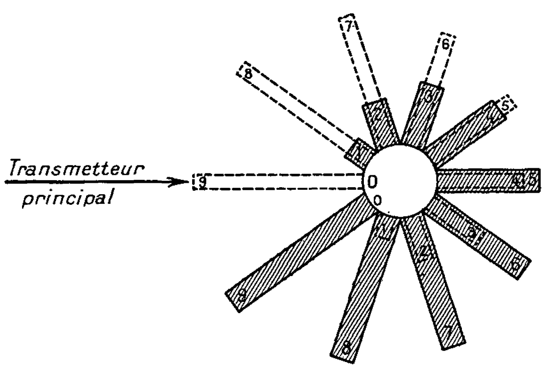

Fig. 3.

Les éléments qu'actionnent différentiellement le transmetteur auxiliaire et un report de retenues, présentent ainsi des butées au transmetteur principal, qui recueille le nombre correspondant et le passe dans le récepteur.

De même qu'on l'a vu pour les tiges du combinateur, les rais de l'accumulateur doivent également se prêter à la fonction directe et à la fonction complémentaire.

RACINE QUATRIÈME DIRECTE

L'expression (3) s'écrit

$$4000\,R_m^3 + \quad 600\,R_m^2 x_2 \quad + \quad 40\,R_m x_3 \quad + \quad x_4$$

$600\,x_2 =$		$40\,x_3 =$		$x_4 =$	
	600		40		1
	1800		280		15
	3000		760		65
	4200		1480		175
	5400		2440		369
	6600		3640		671
	7800		5080		1105
	9000		6760		1695
	10200		8680		2465

1° Passage d'une expression à la suivante de même alignement.
On peut se servir du tableau ci-dessus ou de la forme récurrente

$$T_{q+1} = T_q + 1200\,R_m^2 + 240\,R_m\,q + 12\,q^2 + 2.$$

2° Passage d'un alignement à l'alignement suivant.
La première expression soustractive cherchée est

$$T_1' = 4000\,R_{m+1}^3 + 600\,R_{m+1}^2 + 40\,R_{m+1} + 1.$$

Or

$$4\,R_{m+1}^3 = \frac{T_{z+1} + T_z}{2} - 4\,R_{m+1} \qquad \text{et} \qquad 6\,R_{m+1}^2 = \frac{T_{z+1} - T_z}{2} - 1.$$

Exemple. — Soit à extraire la racine quatrième de 21·743·271

2 1 7.4 3 2 7.1 9 3 6		
— 1		
2 1 6		
— 1 5		
2 0 1		
— 6 5	— 175 imposs.	$R_1 = 3$
1 3 6.4 3 2 7	$4'000\,R_1^3$	108'000
— 1 1 3 5 2 1	$600\,R_1^2$	5'400
	$40\,R_1$	120
1 2 5.0 8 0 6		1
— 1 1 3 5 2 1		113'521

$1200 R_1^2$	-10800	
$240 R_1 q$	-720	
$12 q^2 + 2$	-14	
	112.5751	
	-125055	
	-10800	
	-1440	
	-50	
	98.8406	
	-137345	
	-10800	
	-2160	
	-110	
	83.7991	
	-150415	
	-10800	
	-2880	
	-194	
	67.3702	
	-164289	
	-10800	
	-3600	
	-302	
	49.4711	
	-178991	
	-10800	
	-4320	
	-434	
	30.0166	
	-194545	
	-10800	
	-5040	
	-590	
	8.9191.1936	
	-220355921	
	6.7155.6015	
	-220355921	
	-1732800	
	-9120	
	-14	
	4.4945.8160	
	-222097855	
	-1732800	

$$\left.\begin{array}{r} -210{\cdot}975 \\ -10{\cdot}800 \\ -5{\cdot}760 \\ -770 \end{array}\right| = -228{\cdot}305 \text{ imposs. } R_2 = 38$$

$4{\cdot}000 R_2^3$	219·488·000
$600 R_2^2$	866·400
$40 R_2$	1·520
	1
	220·355·921

$$
\begin{array}{r}
-\,18240 \\
-\,50 \\
\hline
2.2560.9215 \\
-\,223848945 \\
-\,17328 00 \\
-\,27360 \\
-\,110 \\
\hline
0000000000
\end{array}
\qquad R_3 = 384
$$

RACINE D'ORDRE QUELCONQUE

Exemple de racine 11^e.

L'expression (3) s'écrit

$$11.10^{10} R_m^{10} + 55.10^9 R_m^9 x_2 + 165.10^8 R_m^8 x_3 + 330.10^7 R_m^7 x_4$$
$$+ 462.10^6 R_m^6 x_5 + 462.10^5 R_m^5 x_6 + 330.10^4 R_m^4 x_7$$
$$+ 165.10^3 R_m^3 x_8 + 55.10^2 R_m^2 x_9 + 110 R_m x_{10} + x_{11}.$$

	11.	$55 x_2$.	$165 x_3$.	$330 x_4$.	$462 x_5$.	$462 x_6$.	$330 x_7$.	$165 x_8$.	$55 x_9$.	$11 x_{10}$.	x_{11}.
1°	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1
2°	11	165	1·155	4·950	14·322	29·106	41·910	42·075	28·105	11·253	2·047
3°	11	275	3·135	21·450	97·482	307·230	679·470	1·040·325	1·054·405	638·275	175·099
4°	11	385	6·105	57 750	360·822	1·555·554	4·685·010	9·730·875	13·335·355	10·884·797	4·017·157
5°	11	495	10·065	121·770	970·662	5·326·398	20·374·530	53·639·685	93·003·955	95·887·539	44·633·821
6°	11	605	15·015	221·430	2·148·762	14·336·322	66·597·630	212·683·515	446·851·405	557·706·061	313·968·931
7°	11	715	20·955	364.650	4·172·322	32·798·766	179·390·310	674·055·525	1·665·175·105	2·442.099·803	1·614·529·687
8°	11	825	27·885	559·350	7·373·982	66·756·690	420·290·970	1·817·048·475	5·162·526·655	8·703·932·325	6·612·607·849
9°	11	935	35·805	813·450	12·141·822	124·415·214	886·319·610	4·334·468·325	13·926·151·853	26·543·468·347	22·791·125·017

Soit à extraire la racine 11^e de 18·982·985·583·354·248·390·656.

1.898298558833.542483906656
—1

89829855833 —2047 imposs. $R_1=1$

11
55
165
330
462
462
330
165
55
11
1

8982985583354248390656 —18531167061 1 imposs. $R_2=10$

11
55
165
330
462
462
330
165
55
11
01

—1156683466653165551101 1156683466653165551101

7826302116701082839555

11
165
1155
4950
14322
29106
41910
42075
28105
11253
2047

—1277059617293357177347 1277059617293357177347

6549242499407725662208

11
275
3135
21450
97482
307230
679470
1040325
1054405
638275
175099

—14085956232979330525 99 1408595623297933052599

—1408595623297933052599

5140646876109792609609

11
385
6105
57750
360822
1555554
4685010
9730875
13333355
10884797
4017157

1552201855906321046857

—1552201855906321046857

3588445020203471562752

11
495
10065
121770
970662
5326398
20374530
53639685
93003955
95887539
44633821

1708853018012257937721

—1708853018012257937721

1879592002191213625031

11
605
15015
221430
2148762
14336322
66597630
212683515
446851405
557706061
313968931

1879592002191213625031

—1879592002191213625031

0000000000000000000000

$R_3=106$

ANNEXE

CONSIDÉRATIONS

SUR

LA DIVISION ET LA MULTIPLICATION AUTOMATIQUES

I

UNE MACHINE POUR LABORATOIRES ET BUREAUX D'ÉTUDES

C'est un fait que, jusqu'ici, les perfectionnements apportés aux machines à calculer ont surtout été inspirés par les sujétions qu'imposent la comptabilité des entreprises industrielles ou commerciales et les opérations de banques ou de compagnies d'assurances.

Pour les laboratoires et les bureaux d'études, rares sont les outillages mieux adaptés à leurs besoins.

Nous avons vu, au sujet de la racine carrée, comment le récepteur, agencé en totalisateur, pouvait jouer du même coup le rôle de compteur, c'est-à-dire comment le processus adopté permettait de substituer progressivement au nombre proposé, d'une part les restes successifs, d'autre part, sur leur gauche, les différents chiffres de la racine. Il y a là, comme nous en reparlerons plus loin, un principe utile à retenir pour résoudre le problème des enchaînements.

Nous avons vu également la façon de faire apparaître dans le récepteur, à l'endroit et au moment opportuns, un neuf caractéristique, pour déceler le dépassement d'une série soustractive, provoquer la rétrogression nécessaire et déclencher ensuite le passage à un nouvel alignement.

Nous nous proposons de montrer que des conceptions analogues, appliquées à la division et à la multiplication par soustractions ou additions répétées, conduisent à une extrême simplicité dans la mécanisation de l'une et de l'autre.

Mais, auparavant, pour mieux associer la pratique à la théorie, nous esquisserons les grandes lignes d'une machine, inédite en plusieurs points essentiels, telle que nous l'imaginons et en poussons la réalisation, afin que les cinq opérations, addition, soustraction, multiplication, division, extraction de racine carrée, puissent s'y effectuer avec une très grande automaticité.

L'aspect extérieur en sera presque classique (*fig.* 4).

Toutefois. nous avons adopté délibérément un clavier complet à petites touches, sensibilisables au moyen d'un style.

Clavier complet, parce qu'on n'a pas à y inscrire de zéros.

Petites touches pour différentes raisons :

1° L'expérience prouve que fort peu de mécanographes, devant un clavier complet, plaquent réellement des accords. Beaucoup, par contre, et des plus habiles, enfoncent les touches successivement avec le dos d'un crayon; ils atteignent ainsi une étonnante rapidité.

Or l'étalement du clavier ne favorise pas, tant s'en faut, cette rapidité.

2° Un clavier ramassé se prête au rapprochement des roues chiffrées, plus conforme à l'écriture, et facilite une impression dans les mêmes plans, sans largeur de papier prohibitive.

Il en résulte que tout le mécanisme peut alors se grouper rationnellement dans un espace restreint.

3° Nous avons essentiellement en vue un outillage pour techniciens. Ceux-ci réclament des machines plus spécifiquement calculatrices que comptables, et l'orthodoxie de l'inscription ne doit pas primer l'harmonie de l'ensemble pour un usage où l'épreuve de vitesse portera moins sur l'expression des données que sur le déroulement d'opérations souvent complexes.

Au surplus, en admettant des touches encore distantes d'environ 10^{mm}, elles s'accommoderont aussi d'une manœuvre directe au doigt.

Une bonne capacité sera :

16 chiffres au compteur-totalisateur;
12 chiffres au clavier.

Un encombrement convenable sera, grâce au clavier à petites touches et à la minceur du type d'entraîneur que nous préconiserons :

Profondeur : 250^{mm};
Largeur (translation comprise) : 370^{mm};
Hauteur : 125^{mm}.

On se fixera, comme autres caractéristiques :

Double ligne de viseurs : Ligne supérieure, contrôle.
Ligne inférieure, comptage-totalisation.

Récepteur fixe et clavier mobile.

Impression apparente derrière les viseurs.

Touches d'opérations (+) (−) (×) (:) (√) dont l'enfoncement purge le combinateur et le clavier des inscriptions antérieures, dispose s'il y a lieu les combinaisons de tête appropriées, prépare les jeux nécessaires à chaque calcul (inversion, translation, ratissage, etc.) et provoque l'impression des signes.

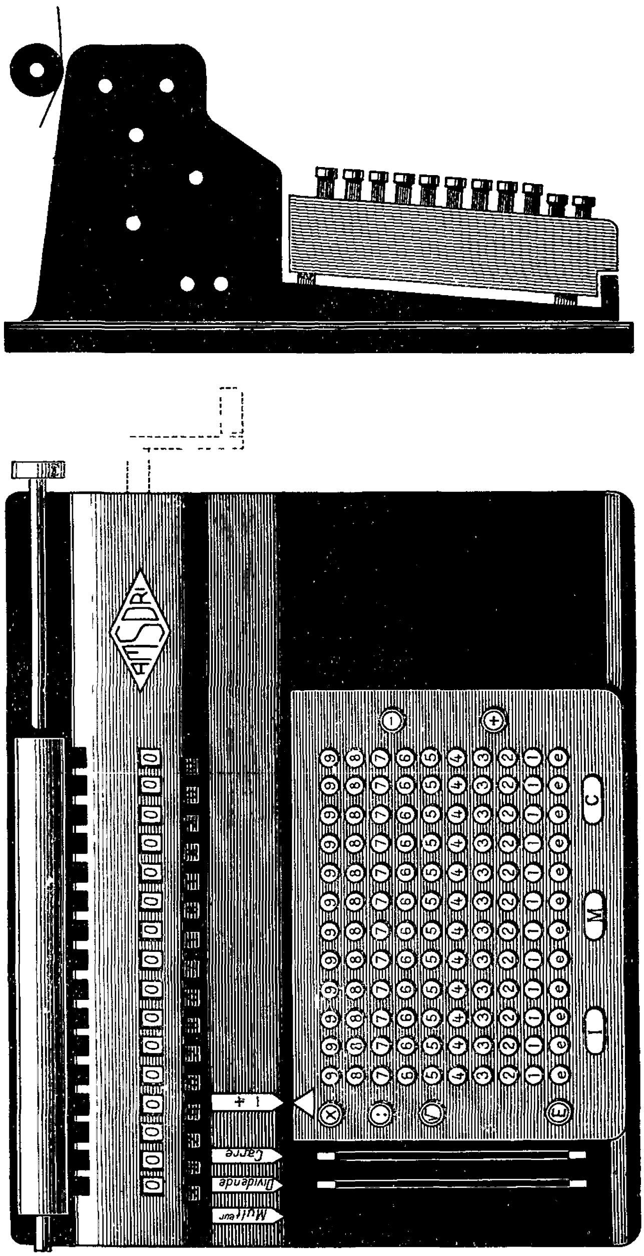

Fig. 4.

Touches de manœuvre :

(c) Correction individuelle aux divers alignements du clavier.

(E) Effacement d'ensemble des inscriptions.

(C) Contrôle par abaissement; impression des données par relèvement (avec purge du clavier dans l'addition et la soustraction).

(M) Mise en marche du calcul dans les cas de multiplication et de division. Pour la racine, la touche $\sqrt{\ }$ suffit au lancement.

A chaque impulsion le contrôle se vide au profit du totalisateur.

(I) Impression du résultat.

Manette de retour global à zéro (compteur-totalisateur et clavier).

Manette de retour partiel (compteur-totalisateur seul).

Commande de déplacement du clavier.

Jeux actionnés par moteur électrique (manivelle éventuellement).

Entraîneur-chiffreur. — Bien qu'on se soit attaché à généraliser des courses circulaires qui permettent une disposition compacte et une grande sobriété organique, la compréhension sera facilitée avec un schéma d'aspect plus rectiligne mais équivalent, allégé par ailleurs des accessoires d'impression.

Figurons ainsi, en position d'attente additive, un des seize éléments identiques, et en regard une des douze colonnes du clavier (*fig.* 5).

L'entraîneur est un système différentiel, constitué par six organes principaux :

Un pignon p dont l'axe est susceptible d'un mouvement de navette.

Deux crémaillères, l'une d dite directe, l'autre c dite complémentaire. La somme de leurs déplacements demeurera constante.

Un second pignon P à axe fixe. Il sert de renvoi à la crémaillère complémentaire.

Une troisième crémaillère i dite complémentaire inverse.

Un troisième pignon π d'axe oscillant. Suivant l'opportunité, ce pignon peut être rapproché soit de la crémaillère d, soit de la crémaillère i.

On voit que si le mouvement de navette est d'amplitude convenable, les crémaillères d et i viendront, en fin de course aller, pincer exactement toute touche enfoncée, de sorte que leurs déplacements seront respectivement proportionnels au chiffre de la touche et à son complément avec 9.

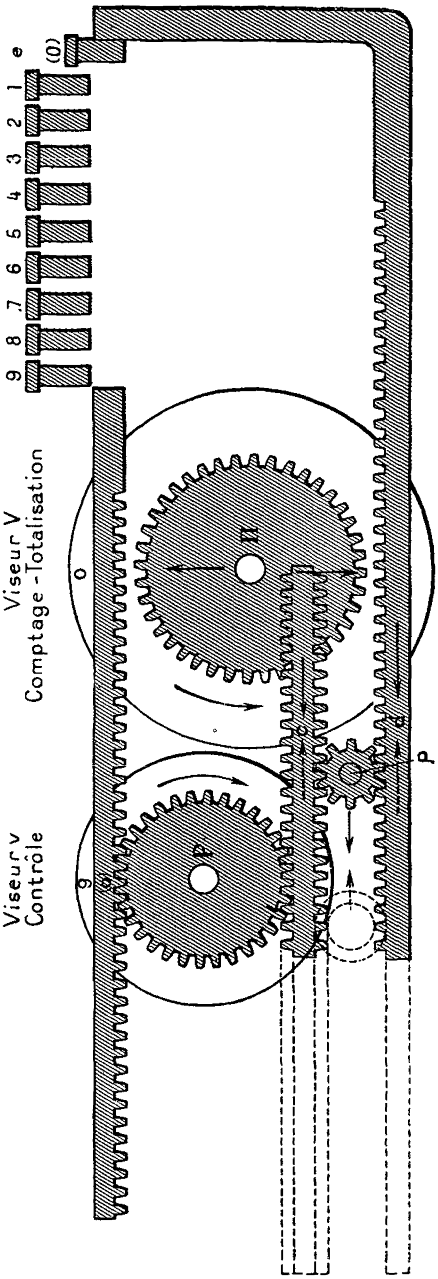
Viseur V
Comptage -Totalisation
Viseur v
Contrôle
e
(0)
1
2
3
4
5
6
7
8
9
o
9
II
P
c
d
p

Fig. 5.

Viseurs. — Le récepteur comporte d'une part roue de contrôle (viseur v), d'autre part roue de comptage-totalisation (viseur V), celui-là solidaire du pignon P, celui-ci solidaire du pignon π.

On voit que si les pignons sont appropriés et les roues correctement chiffrées, la fin de la course aller donnera bien le contrôle et que, selon le rapprochement choisi à ce moment pour le pignon π, la course retour apportera au comptage-totalisation ou le chiffre direct de l'inscription ou son complément, tandis que le contrôle se videra.

En résumé, pour une inscription déterminée, on disposera constamment des deux chiffres complémentaires dont la sélection et le captage s'effectueront d'après le sens additif ou soustractif du calcul.

Cependant, en dehors du clavier, il est nécessaire de présenter aux entraîneurs des butées représentatives 0-9 ou 9-0 ou encore, comme on l'a vu en racine carrée, 5-4 pour l'élément qui précède.

Reporteur. — Nous ne ferons qu'esquisser le report de retenues, inspiré de types connus.

En réalité, la roue de comptage-totalisation n'est pas directement solidaire du pignon π. Ces deux organes sont respectivement l'un des

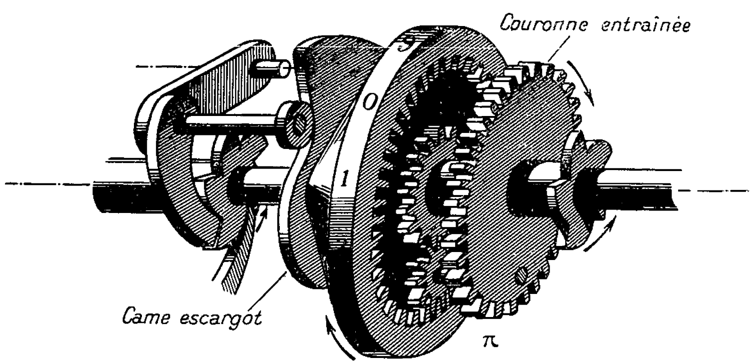

Fig. 6.

planétaires et la couronne d'un différentiel dont l'autre planétaire se meut chaque fois qu'un galet tombe dans le creux d'une came en escargot portée par la roue voisine de droite.

Ainsi chaque roue peut récolter simultanément un chiffre de son ordre et la retenue éventuelle d'ordre précédent.

Commandes. — Une troisième utilisation d'organes différentiels se rapporte aux commandes : navette, inversion, translation du clavier, ratissage pour la racine carrée.

Le moteur attaque une couronne porte-satellites.

L'un des planétaires agit sur la navette.

L'autre entraîne dans sa rotation deux cames juxtaposées, la première affectée à l'inversion éventuelle, la seconde à la translation du clavier et, le cas échéant, au ratissage.

Normalement, ce dernier planétaire est bloqué et le côté navette recueille seul le mouvement.

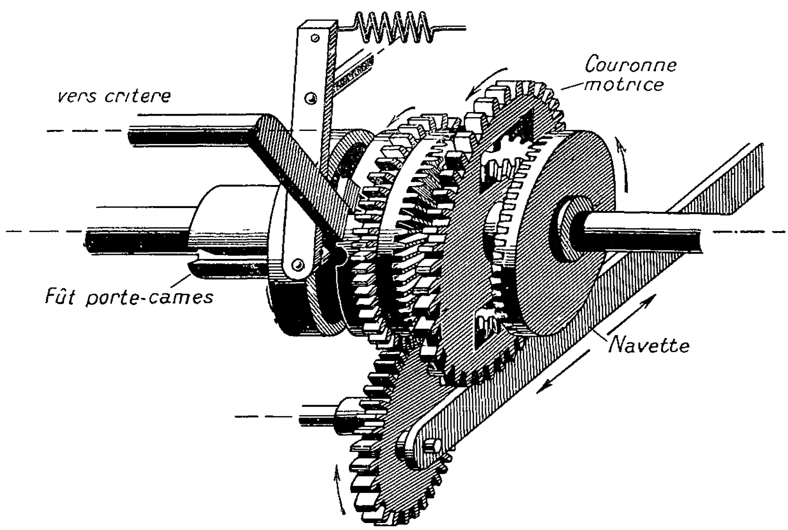

Fig. 7.

Mais lorsqu'un chiffre de critère est apparu au compteur-totalisateur devant la marge du clavier (ou à gauche de cette marge, comme on le verra plus loin pour la multiplication), le planétaire de navette se bloque à son tour, tandis que le côté cames se libère.

Réciproquement, après chaque rotation du planétaire de cames, la navette entre à nouveau en fonction, sauf persistance d'un chiffre de critère.

Nous n'insisterons pas davantage, nous bornant à des aperçus qui permettent de saisir comment la multiplication et la division vont rentrer dans le cadre tracé.

II

DIVISION AUTOMATIQUE

La machine étant parée au début pour l'addition (touche (+)), on amène la marge du clavier devant le premier élément du récepteur; on inscrit le dividende le plus à gauche possible et l'on actionne la touche (C). Le dividende apparaît dans le contrôle, s'imprime et se transmet au récepteur.

On pare alors la machine pour la division (touche (:) purgeant le clavier, préparant des 9 à gauche de la marge et disposant les jeux d'entraînement complémentaires, d'inversion, de translation →, et imprimant le signe).

On inscrit ensuite le diviseur le plus à gauche possible et l'on actionne la touche (C). Le diviseur apparaît dans le contrôle, s'imprime et se transmet au récepteur, où il se retranche une première fois du dividende. (Dans le cas d'impossibilité arithmétique, il y a cependant fonctionnement mécanique.)

Puis, en appuyant sur la touche (M), l'opération se poursuit et s'oriente correctement.

L'automaticité résultera en effet de ce qu'une inversion suivie d'une translation sera déclenchée chaque fois qu'un 9, décelant après coup l'impossibilité arithmétique, apparaîtra à l'élément du récepteur situé en regard de la marge.

De proche en proche, le quotient et le reste prendront la place occupée initialement par le dividende, le quotient à gauche de la marge, le reste à droite.

Lorsqu'en fin d'opération la machine se bloque, le résultat s'imprime.

Exemple. — Soit à effectuer la division 17.808.774 : 5873.

MARGE.																	
0	1	7	8	0	8	7	7	4,	0	0	0	0	0	0	0		
9	4	1	2	6	9	9	9	9	9	9	9	9 |	9	9	9	(10)	Soustraction imposs.
9	5	9	0	7	8	7	7	4,	0	0	0	0	0	0	0		
0	5	8	7	3	0	0	0	0	0	0	0	0 |	0	0	0		Inversion.
0	1	7	8	0	8	7	7	4,	0	0	0	0	0	0	0		
0	9	4	1	2	6	9	9	9	9	9	9	9	9 |	9	9	(10)	Translation.
1	1	1	9	3	5	7	7	4,	0	0	0	0	0	0	0		
0	9	4	1	2	6	9	9	9	9	9	9	9	9 |	9	9	(10)	
2	0	6	0	6	2	7	7	4,	0	0	0	0	0	0	0		3 soustractions.
0	9	4	1	2	6	9	9	9	9	9	9	9	9 |	9	9	(10)	
3	0	0	1	8	9	7	7	4,	0	0	0	0	0	0	0		
0	9	4	1	2	6	9	9	9	9	9	9	9	9 |	9	9	(10)	Soustraction imposs.
3	9	4	3	1	6	7	7	4,	0	0	0	0	0	0	0		
9	0	5	8	7	3	0	0	0	0	0	0	0	0 |	0	0		Inversion.
3	0	0	1	8	9	7	7	4,	0	0	0	0	0	0	0		
0	0	9	4	1	2	6	9	9	9	9	9	9	9	9 |	9	(10)	Translation. Soustraction imposs.
3	0	9	6	0	2	4	7	4,	0	0	0	0	0	0	0		
9	9	0	5	8	7	3	0	0	0	0	0	0	0	0 |	0		Inversion.
3	0	0	1	8	9	7	7	4,	0	0	0	0	0	0	0		
0	0	0	9	4	1	2	6	9	9	9	9	9	9	9	9 |	(10)	Translation.
3	0	1	1	3	1	0	4	4,	0	0	0	0	0	0	0		
0	0	0	9	4	1	2	6	9	9	9	9	9	9	9	9 |	(10)	
3	0	2	0	7	2	3	1	4,	0	0	0.	0	0	0	0		3 soustractions.
0	0	0	9	4	1	2	6	9	9	9	9	9	9	9	9 |	(10)	
3	0	3	0	1	3	5	8	4,	0	0	0	0	0	0	0		
0	0	0	9	4	1	2	6	9	9	9	9	9	9	9	9 |	(10)	Soustraction imposs.
3	0	3	9	5	4	8	5	4,	0	0	0	0	0	0	0		
9	9	9	0	5	8	7	3	0	0	0	0	0	0	0	0 |		Inversion.
3	0	3	0	1	3	5	8	4,	0	0	0	0	0	0	0		

3	0	3	0	1	3	5	8	4,	0	0	0	0	0	0	0		
0	0	0	0	9	4	1	2	6	9	9	9	9	9	9	9	(10)	Translation
3	0	3	1	0	7	7	1	1,	0	0	0	0	0	0	0		
0	0	0	0	9	4	1	2	6	9	9	9	9	9	9	9	(10)	2 soustractions
3	0	3	2	0	1	8	3	8,	0	0	0	0	0	0	0		
0	0	0	0	9	4	1	2	6	9	9	9	9	9	9	9	(10)	Soustraction imposs.
3	0	3	2	9	5	9	6	5,	0	0	0	0	0	0	0		
9	9	9	9	0	5	8	7	3	0	0	0	0	0	0	0		Inversion
3	0	3	2	0	1	8	3	8,	0	0	0	0	0	0	0		
0	0	0	0	0	9	4	1	2	6	9	9	9	9	9	9	(10)	Translation
3	0	3	2	1	1	2	5	0,	7	0	0	0	0	0	0		
0	0	0	0	0	9	4	1	2	6	9	9	9	9	9	9	(10)	
3	0	3	2	2	0	6	6	3,	4	0	0	0	0	0	0		3 soustractions
0	0	0	0	0	9	4	1	2	6	9	9	9	9	9	9	(10)	
3	0	3	2	3	0	0	7	6,	1	0	0	0	0	0	0		
0	0	0	0	0	9	4	1	2	6	9	9	9	9	9	9	(10)	Soustr. imposs.
3	0	3	2	3	9	4	8	8,	8	0	0	0	0	0	0		
9	9	9	9	9	0	5	8	7	3	0	0	0	0	0	0		ersion
3	0	3	2,	3	0	0	7	6,	1	0	0	0	0	0	0		

A ce degré d'avancement, le quotient est 3032,3 et le reste 76,1/5873. L'opération se poursuivra de la même manière dans la recherche des autres décimales, tant que la translation du clavier restera libre.

III

MULTIPLICATION AUTOMATIQUE

La machine étant parée au début pour l'addition (touche (+)), on amène la marge du clavier en bordure du premier élément du récepteur; on inscrit un des facteurs le plus à gauche possible (de préférence le plus petit, pour abréger l'opération) et l'on actionne la touche (C). Ce facteur apparaît dans le contrôle, s'imprime et se transmet au récepteur.

On pare alors la machine pour la multiplication (touche ⊗ purgeant le clavier, préparant des 9 à gauche de la marge, comme pour la division, et disposant les jeux d'entraînement direct et de translation ←, et imprimant le signe.)

Ensuite, on pousse le clavier vers la droite de telle sorte que sa marge dépasse d'un élément le chiffre terminal du premier facteur; on inscrit le deuxième facteur en commençant par l'extrême gauche du clavier et l'on actionne la touche Ⓒ. Ce deuxième facteur apparaît dans le contrôle, s'imprime et se transmet au récepteur, où il prend position à droite du premier qui diminue d'une unité.

Puis, en appuyant sur la touche Ⓜ, l'opération se poursuit.

L'automaticité résultera en effet de ce qu'une translation sera déclenchée chaque fois qu'un O apparaîtra à l'élément du récepteur situé immédiatement à gauche de la marge.

De proche en proche, le produit se développera, tandis que le premier facteur s'épuisera.

Lorsqu'en fin d'opération la machine se bloque, le résultat s'imprime.

Exemple. — Soit à effectuer la multiplication 203×9476.

			MARGE												
2	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	9	9	0	9	4	7	6,	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	2	0	9	4	7	6	0	0	0	0	0	0	0	0
9	9	9	0	9	4	7	6,	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	8	9	5	2	0	0	0	0	0	0	0	0
9	9	9	0	9	4	7	6,	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	2	8	4	2	8	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	9	4	7	6	0	0,	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	9	7	6	0	2	8	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	9	4	7	6	0	0,	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	9	2	3	6	2	8,	0	0	0	0	0	0	0	0

Après la première translation, un autre zéro apparaît, d'où deuxieme translation consécutive.

Le produit est 1·923·628.

IV

REMARQUE SUR LES ENCHAINEMENTS

La propriété qu'offre le récepteur de servir à la fois de compteur et de totalisateur sur une même ligne, se prête immédiatement à des enchaînements de calculs (pouvant, nous l'avons dit, comporter des extractions de racines) sans réinscription des résultats intermédiaires, problème déjà étudié sous des formes différentes par Babbage, par Torres y Quevedo, et récemment par M. Couffignal dont, en particulier, la machine à numération binaire, surtout dirigée vers les calculs de l'astronomie, est un chef-d'œuvre de science et d'ingéniosité.

Des méthodes que nous avons exposées en numération décimale, se dégage une solution simple et pratiquement complète, tout au moins pour les cinq opérations essentielles, puisqu'il suffit, pour obvier aux décalages possibles des calculs enchaînés, d'augmenter en conséquence le nombre des éléments calculateurs.

On doit même concevoir, sans difficulté, d'adjoindre au dispositif un réceptable à carte préalablement perforée d'après l'énoncé d'un calcul complexe, de telle sorte que le seul fait d'appuyer sur une touche de lancement conduirait au résultat final sans autre intervention de l'opérateur.

BIBLIOGRAPHIE

I

Documentation générale sur le calcul mécanique.

Revue scientifique, 18 octobre 1884. Article sur le calcul et les machines à calculer (Communication à l'Association française pour l'Avancement des Sciences), par Ed. LUCAS.

Die Rechenmaschine, par C. DIETSCHOLD. Leipzig, 1886.

Revue du Génie militaire. Tome XIV, 1897. Article sur les machines à calculer du type Odhner, par L. BERTRAND.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 19 février 1900. Extrait d'une note sur les machines à calculer, par L. TORRES Y QUEVEDO.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 2 avril 1900. Rapport sur le même sujet, par APPELL.

Mémoires de l'Institut. Tome XXXII, Imprimerie Nationale, 1902. Machines à calculer, par L. TORRES Y QUEVEDO.

La Nature, 27 août 1904. Article sur les machines à calculer, par Maurice d'OCAGNE.

Appareils et machines pour le calcul mécanique (ouvrage russe), par W. von BOHL. Moscou, 1906.

Revue de Mécanique, juin 1906. Article sur les machines à calculer, d'après K. LENTZ.

Génie civil, 3 avril 1909. Article sur les machines à calculer de construction allemande, d'après une étude de M. FAERBER dans la *Werkstattstechnik*, janvier-février 1909.

Le Calcul mécanique, par l'Ingénieur général L. JACOB. Doin, 1911.

Handbook of the Exhibition of Napier Relics (Manuel de l'Exposition du Tricentenaire de Napier, Méthodes et instruments modernes de calcul), par E.-M. HORSBURGH. Londres, G. Belland Sons Ltd, 1914.

Die Rechenmaschinen und das Maschinenrechnen, par K. LENTZ. Leipzig, Teubner, 1915.

Zeitung des Mathem. und Naturwiss. Unterr. XLIX, 1918. Ueber Rechenmaschinen und Rechenunterricht, par W. FINKE.

Mon Bureau, 15 juin 1920. Article sur les machines à calculer et leurs principales caractéristiques, par JACOB; Article sur le calcul simplifié, par HELLER.

Bulletin de la Société d'Encouragement pour l'Industrie nationale, sept. et oct. 1920 (Numéro commémoratif du Centenaire de l'invention, par THOMAS de Colmar, de la première machine à calculer industrielle).

Origin of modern calculating machines, par J.-A.-V. TURCK. Chicago, West Soc. of Eng., 1921.

Das Rechnen in des Technik und seine Hilfsmittel, par J.-E. MAYER, n° 405 de la Collection Göschen. Berlin et Leipzig.

Vue d'ensemble sur les machines à calculer, par Maurice d'OCAGNE. Gauthier-Villars, 1922.

Revue industrielle, sept. et oct. 1924. Article sur les machines à calculer, par Pierre DEVAUX.

The Amer. Mathem. Monthly, XXXI, 1924. The history of modern calculating machines, an American contribution, par L.-L. LOCKE.

Die Rechenmaschinen und ihre Entwicklungs Geschichte, par MARTIN. Pappenheim, J. Meyer, 1925.

La Science et la Vie, mars 1925. Article sur les machines à calculer, par Lucien FOURNIER.

Le Calcul simplifié par les procédés mécaniques et graphiques. Esquisse générale, par Maurice d'OCAGNE. Gauthier-Villars, 1928.

Die Rechen und Buchungsmaschinen, par H. LENZ. Leipzig, Teubner, 1932.

Les Machines à calculer. Leurs principes, leur évolution, par Louis COUFFIGNAL. Gauthier-Villars, 1933.

Thèse sur l'Analyse mécanique. Application aux machines à calculer et aux calculs de la Mécanique céleste, par Louis COUFFIGNAL. Gauthier-Villars, 1938.

Supplément technique à la *Frankfurter Zeitung* du 24 octobre 1940. Die Büromaschinen-Industrie in Krieg und Frieden. Rechnende Maschinen.

L'Usine, 16 avril 1942. Article sur le Tricentenaire de l'Invention de la machine à calculer par PASCAL.

II

Documentation particulière sur l'automatisme et les enchaînements.

Bibliothèque universelle de Genève. Tome XLI, 1842. Article sur la machine analytique de Charles Babbage, par le capitaine du génie sarde (depuis général) L.-F. MENABREA.

Scientific Memoirs. Vol. III, 1843. Traduction en anglais de l'article précédent et notes mathématiques, par Lady Ada LOVELACE (fille de Lord Byron).

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 8 octobre 1855 et 28 avril 1856. Note sur la machine suédoise de MM. Scheutz pour calculer les tables mathématiques par la méthode des différences et en imprimer les résultats sur des planches stéréotypées, par Charles BABBAGE.

Polytechniches Journal de Dingler. Tome CLVI, 1860. Description complète de la machine à différences de Scheutz.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 1er semestre 1863, p. 330. Note sur la machine à différences de Wiberg, par l'astronome DELAUNAY.

Revue scientifique, 23 septembre 1882. Article sur une machine arithmétique à mouvement continu (Communication à l'Association française pour l'Avancement des Sciences), par P. TCHEBICHEF.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 28 juillet 1884. Note sur la machine analytique de Charles Babbage, par le général L.-F. MENABREA.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 11 août 1884. Observation sur le même sujet, par Léon LALANNE.

La Nature, 23 octobre 1886. Article sur les machines à calculer. Le multiplicateur automatique, par Arthur GOOD.

Calculating Engines. Recueil de notes manuscrites laissées par BABBAGE et publiées par son fils. Londres et Spa, 1889.

La Nature, 10 mai 1890. Article sur la machine à calculer de Léon Bollée.

Génie civil, 18 mai 1912. Article sur les machines à calculer Hollerith et leur emploi dans la comptabilité des chemins de fer, d'après une étude de M. Neil WILLIAMS dans la *Zeit. des Ver. deutscher Eisenbahnv.*, 14 et 17 février 1912.

Revue générale des Sciences, 15 novembre 1915. Essais sur l'Automatique, par Leonardo TORRES Y QUEVEDO.

Comptes rendus de l'Académie royale de Stockholm. Tome 174. Sur une machine automatique à multiplier, par A. SÉGUIN.

La Nature, 7 août 1920. Article sur l'arithmomètre de Torres y Quevedo, par H. VIGNERON.

Bulletin de la Société d'Encouragement pour l'Industrie nationale, sept.-oct. 1920 (*Op. cit.*). L'arithmomètre électromécanique de Leonardo Torres y Quevedo (p. 588 à 599), par l'inventeur. — Les machines à calculer de Léon Bollée (p. 728 à 738), par le général SEBERT.

Allg. Vermess. Nachr., n° 45. Ein Beitrag zum Problem des Quadratwurzelausziehens mittels der Rechenmaschine, par KERL.

Annuaire de la Société scientifique de Bruxelles, 1926. Extraction des racines au moyen de la machine à calculer, par J. SCHUL.

The Amer. Mathem. Monthly, XXXIII, 1926. A cross division process and its application to the extraction of roots.

Le Calcul simplifié, par Maurice d'OCAGNE (*Op. cit.*).

Pages 52 et 53 : Division automatique.
» 67 à 71 : Machine à table de Pythagore de Léon Bollée.
» 74 à 81 : Machines à opérations complexes.

Le Calcul simplifié, par Maurice d'OCAGNE (*Op. cit.*). Note annexe sur la machine de Tchebichef, p. 171 à 182. — Note annexe sur la machine à différences Scheutz, d'après une description due au colonel du génie BERTRAND.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences. Tome 191, 1930. Sur une nouvelle machine à calculer, par Louis COUFFIGNAL.

Les Machines à calculer, par Louis COUFFIGNAL (*Op. cit.*).

Pages 37 : Multiplication automatique.
» 44 et 45 : Division automatique.
» 51 à 63 : Enchaînements; machines complexes et à statistiques.
» 64 à 66 : Machines à différences.
» 74 à 79 : Problème de Babbage et solution apportée par l'auteur.

Thèse de Louis COUFFIGNAL (*Op. cit.*). Machines à enchaînements plus spécialement destinées aux calculs de la Mécanique céleste.

Pages 65 à 83 · Machine décimale.
» 83 à 112 : Machine binaire.

Vu et approuvé :

Paris, le 15 mai 1942.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

PAUL MONTEL.

Vu et permis d'imprimer :

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

GILBERT GIDEL.