OUDH UPADHYAYA

Sur les sections cyclotomiques

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1939

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1939__232__3_0>

N° D'ORDRE :
28

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE MONTPELLIER

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER
(mention Sciences)

PAR

OUDH UPADHYAYA

1re THÈSE. — Sur les sections cyclotomiques.

2me THÈSE — Mouvements tautochrones.

Soutenues le 1939 devant la Commission d'examens

MM. HUMBERT	....	*Président.*
TURRIÈRE	....	*Assesseurs.*
SOULA	....	

MONTPELLIER
IMPRIMERIE DE LA CHARITÉ
(Pierre-Rouge)

1939

FACULTE DES SCIENCES
DE
L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

MM.

Doyen .... M. GODECHOT, Correspondant de l'Institut, Professeur de Chimie.

Doyen honoraire ... S. DAUTHEVILLE.

Professeurs honoraires ... E. FABRY, O. DUBOSQ J. CURIE, F BEAULARD DE LENAIZAN, E. BATAILLON, R. JACQUES, J PAVILLARD, J. CABANNES et E. CHATTON.

Maîtres de Conférences honoraires .... F. MOURGUES et L. MAURY.

MM.

Professeurs

G. REBOUL	Physique.
E. TURRIERE	Mécanique rationnelle.
P. HUMBERT	Mathématiques pures.
L. GAY	Chimie.
J. SOULA	Mathématiques.
E. CARRIERE	Chimie.
J DURAND	Chimie.
L EMBERGER	Botanique.
Ch. BOUHET	Physique.
P. MATHIAS	Zoologie et Biologie générale.
M. THORAL	Géologie

MM.

Maîtres de Conférences.

F. VASILESCO	Mathématiques.
O. TUZET (Mlle)	Zoologie
P. CHATELAIN	Minéralogie.

MM.

Secrétaire .... A. BABY.

Secrétaire honoraire... L. DUBOIS.

Membres du Jury :

MM. HUMBERT .... *Président.*
TURRIERE
SOULA } *Assesseurs.*

PRÉFACE

Le problème des sections cyclotomiques a attiré, ces derniers temps, l'attention de plusieurs mathématiciens qui en ont obtenu la solution dans certains cas particuliers.

Dès 1880 le problème bi- et tri-cyclotomique fut complètement élucidé. Mentionnons parmi ceux qui le traitèrent A. Cayley (Comptes rendus de la *London Mathematical Society*, vol. XI, p. 4-17) et C.B. Mathews (*Théorie des Nombres*, 1887).

Le problème de la section quartique a été résolu par V.S. Le Besgue, comme il ressort de la remarque suivante faite par W. Burnside dans *The Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, vol. XXII, p. 405.

« La solution complète du problème quartique a été fournie, pour la première fois, par V.S. Le Besgue dans les comptes rendus, vol. II, p. 18. Il énonça le résultat sans démonstration sous la forme suivante : Si λ est la somme de $\frac{p-1}{4}$ racines pièmes, primitives et distinctes, de l'unité, somme qui prend quatre et seulement quatre valeurs distinctes, alors $1+4\lambda$ est racine de l'équation

$$\left| y^2 + \{ 1 - 2(-1)^{\frac{p-1}{4}} \} p \right|^2 - 4p(y-L)^2 = 0$$

où $p = L^2 + 4m^2$ et $L \equiv 1 \pmod{4}$. La seule démonstration que je connaisse a été donnée par P. Bachman. »

Le même problème a été traité par A. Cayley (*loc. cit.*). Sa démonstration est due à W. Burnside.

A. Cayley s'est attaqué au problème de la section quintique (comptes rendus de la *London Mathematical Society*, vol. XII, p. 15-16 ; vol. XVI, p. 61-63), mais il n'a pu résoudre le problème complètement. Vinrent ensuite H.W. Lloyd, L.J. Rogers et W. Burnside (Comptes rendus de la *London Mathematical Society*, vol. XVIII, p. 214-239 ; XXXII (anciennes séries) et 1915 respectivement). A la fin de son exposé, W. Burnside fait la remarque suivante :

« J'ai poussé l'étude du cas $q=7$ suffisamment loin pour m'assurer qu'il n'est pas tout à fait analogue au cas $q=5$. On y rencontre bien un système de trois équations Diophantiennes, mais elles ne suffisent pas pour affirmer que les équations exprimant les produits des A forment une table de multiplication acceptable. »

Il est ainsi clair qu'il existe très peu de littérature sur la section hepta-cyclotomique, et l'on peut affirmer que sa forme générale n'a été donnée par aucun auteur.

Le but de notre exposé est donc de résoudre entièrement le problème général de la section hepta-cyclotomique.

L'équation aux périodes correspondant à la section hepta-cyclotomique est la suivante :

$$\begin{aligned}
&\eta^7 + \eta^6 - \frac{3p-1}{7}\eta^5 + [5\lambda^2 - (9+h+i+k+j)p]\eta^4 \\
&+ [(m_1+m_2+m_3+m_4+m_5)p - 5\lambda^3]\eta^3 + [3\lambda^4 \\
&- (n_1+n_2+n_3)p]\eta^2 + [(an_2+fn_2+gn_4+hn_5+in_6+kn_7+gn_1)p \\
&- \lambda^0]\eta + 1\,[7\lambda^6 - (as_1+fs_1+gs_2+hs_3+is_4+ks_5+gs_6)p] = 0
\end{aligned}$$

Les équations fondamentales de cette section ont été entièrement déterminées, ainsi que tous les termes des coefficients de l'équation aux périodes pour tous les nombres premiers jusqu'à 500. On a établi aussi l'équation aux périodes pour ces mêmes nombres.

Les équations fondamentales :

Le problème de la détermination des équations fondamentales prime tout autre dans la théorie des sections cyclotomiques. Malheureusement, cette branche des mathématiques a été beaucoup négligée, et aucun auteur n'a jamais traité le problème général. Nous nous en occuperons dans ce qui suit.

On sait que le problème de la trisection dépend de la solution de l'équation $p = a^2 + 3b^2$, et que, si λ est la somme de $\frac{1}{4}(p-1)$ racines pièmes, primitives et distinctes de l'unité, somme qui prend seulement quatre valeurs distinctes, alors $1+4\lambda$ est racine de l'équation

$$\left[y^2 + \left\{ 1 - 2(-1)^{\frac{p-1}{4}} \right\} p \right]^2 - 4p(y-L)^2 = 0$$

où $p = L^2 + 4m^2$ et $L = 1 \pmod{4}$.

Telles sont les équations dont le problème dépend.

Quant aux équations de la section quintique, elles ont été données par L.-J. Rogers dans les comptes rendus de la *London Mathematical Society* en 32, page 207, comme suit :

$$1 = A^2 + nB^2 - 2n(C^2 + B^2) \qquad (1)$$

$$AB = a(D^2 - C^2) - \,-2bCD \qquad (2)$$

pour $n = a^2 + b^2$ premier ou non.

W. Burnside a fourni les équations fondamentales de la section sixtique dans les comptes rendus (Londres, 1915). Elles sont :

$$12^2 p = [4p - 16 - 25(A+B)]^2 + 1125(A-B)^2 + 450(C^2 + D^2) \qquad (1)$$

$$O = [4p - 16 - 25(A+B)](A-B) + 3(C^2 + 4CD - D^2) \qquad (2)$$

Finalement, il a été montré que les équations fondamentales du second degré de la section heptique sont les suivantes :

(1) $ak + fg + ga + hf + ig + kh + gi = bh + gb + eg + kl + jk + ji + hj$
$= cg + ha + kf + dg + ih + ji + ik$

(2) $aj+fh+gb+hg+ie+k+gj=bi+gc+eh+k^2+jd+ji+hj$
$=ch+hi+k^2+dg+ia+jf+ig$

(3) $aj+fi+gc+h+ik+kd+gi=bk+gd+ei+kj+ji+jc+h^2+$
$bi+gk+eg+ka+jf+jg+h^2$

(4) $aj+fj+gh+hb+ig+ke+gk=ck+hd+ki+dj+i+jc+ih$
$+bj+gj+eh+kb+jg+je$
$+hk$

(5) $ai+fk+g+ha+if+kg+gh=ci+hc+kh+dk+id+ji+ij$
$ck+hj+kj+dh+ib+jg+ie$

(6) $ab+fg+ge+hk+ij+kj+gh=\alpha g+a^2+bf+cg+dh+ei+fk$

(7) $ag+fa+gf+hg+ih+ki+gk=fb+\alpha g+ae+bk+cj+dj+eh$

(8) $bg+ga+ef+kg+jh+ji+hk=ea+f^2+\alpha g+ah+bi+ck+dg$

(9) $ac+fh+gk+hd+i+kj+gi=\alpha h+ab+bg+ce+dk+ej+fj$

(10 $ah+fb+g+he+ik+kj+gj=fc+\alpha h+ak+bd+ci+dj+ei$

(11) $ch+hb+kg+de+ik+j+ij=da+ef+fg+\alpha h+ai+bk+cg$

(12) $ad+fi+gj+hi+ic+kh+gk+\alpha i+ac+bh+ck+d^2+ei+fj$

(13) $ai+fc+gh+hk+id+ki+gj=fd+\alpha i+aj+bi+c^2+dh+ek$

(14) $cd+hi+kj+di+ic+jh+ik=ca+df+eg+fh+\alpha i+ak+bg$

(15) $ae+fk+gj+hj+ih+kb+g=\alpha k+ad+bi+cj+di+ec+fh$

(16) $ak+fd+gi+hj+i+kc+gh=\alpha k+aj+bj+ch+db+eg+fe$

(17) $bc+gh+ek+kd+ji+j+hi=ba+cf+dg+eh+fi+\alpha k+ag$

(18) $be+gk+ej+kj+jh+jb+hg=\alpha j+ai+bc+ch+dk+ed+fi$

(19) $bj+gi+ec+kh+jk+jd+hi=e^2+fk+\alpha j+aj+bh+cf+dg$

(20) $bd+gi+ej+ki+jc+jh+hk=b^2+cg+de+ek+fj+\alpha j+ah$

Sur la mise en défaut d'un théorème dans le cas de l'identité algébrique $4X=Y^2-(-1)^{\frac{p-1}{2}}pZ^2$, où p est un nombre premier impair, $X=(x-1)(x^p-1)$; Y et Z sont des polynômes en x.

Soit p un nombre premier quelconque, et soit

$$X=(x^p-1)(-1).$$

Il existe une identité algébrique de la forme

$$4X=Y^2-(-1)^{\frac{p-1}{2}}pZ^2$$

où Y et Z sont des polynômes. Legendre, dans sa *Théorie des Nombres*, a donné une règle générale pour la détermination de Y et Z. Il annonça dans la suite que sa règle n'était pas générale. Gauss a fait le calcul jusqu'à la valeur 23 de p. Legendre considéra le cas $p=29$, et G.B. Mathews s'occupa du cas $p=31$. Ce dernier a considéré aussi le cas $p=37$ dans le *Nature* du 9 juin 1921.

La règle générale pour déterminer Y et Z est la suivante :

« Y s'obtient en développant $2(x-1)^{\frac{p-1}{2}}$ par la formule du binôme, et en réduisant chaque terme à son plus petit résidu (mod. p). Quand la valeur de Y est ainsi déterminée, celle de Z s'obtient en s'appuyant sur l'identité

$$4X=Y^2-(-1)^{\frac{p-1}{2}}pZ^2. »$$

Cette règle est certainement en défaut pour le nombre premier 61, mais on ne sait pas si elle est fausse pour tout autre nombre premier compris entre 37 et 61. A l'égard de ceci, G.B. Mathews fait la remarque suivante : « Il serait intéressant de connaître la plus petite valeur de p pour laquelle cette règle n'est pas vérifiée. » (*Nature* du 9 juin 1921.)

J'ai montré ailleurs que la plus petite valeur en question est 41. Je voudrais montrer ici que la règle est en défaut dans le cas du nombre premier 43.

En appliquant la méthode pour la détermination de Y on trouve pour les coefficients les valeurs suivantes : 21, 210, 1330, 5985, 20349, 54264, 11, 6280, 203490, 293930, 352716, 352716, 293930, 203490, 116280, 54264, 20349, 5985, 1330, 210, 21, 1. En les réduisant à leur plus petit résidu absolu, il vient :

$$\begin{aligned}Y=2x^{21}+x^{20}-10x^{19}+6x^{18}+16x^{17}-20x^{16}-4x^{15}-16x^{14}\\ -15x^{13}-7x^{12}+17x^{11}-17x^{10}+7x^9+15x^8+16x^7+4x^6\\ +20x^5-16x^4-6x^3+10x^2-x-2\end{aligned}$$

En substituant la valeur de Y dans l'identité

$$4X=Y^2-(-1)^{\frac{p-1}{2}}pZ^2,$$

on trouve :

$$\begin{aligned} Z^2 = {} & x^{42} - 4x^{38} + 4x^{37} + 8x^{36} - 12x^{35} + 10x^{33} - 10x^{32} + 10x^{31} \\ & + 6x^{30} - 26x^{29} - 22x^{28} + 20x^{27} - 27x^{26} - 2x^{25} + 11x^{24} \\ & - 3x^{23} + 76x^{21} - 3x^{20} + 11x^{18} - 2x^{17} - 27x^{16} + 20x^{15} \\ & - 22x^{14} - 26x^{13} - 6x^{12} + 10x^{11} - 10x^{10} + 10x^{9} - 12x^{7} \\ & + 8x^{6} + 4x^{5} - 4x^{4} + x^{2} \end{aligned}$$

En extrayant la racine carrée de Z^2, on voit que la règle générale donnée par GB.. Mathews dans sa *Théorie des Nombres*, p. 216, ne s'applique pas dans ce cas. En outre, on remarque que l'expression de Z^2 n'est pas un carré parfait. Il est clair ainsi que la règle donnant les valeurs de Y et Z n'est pas valable pour $p=43$.

II

L'Equation aux périodes.

Pour commencer, notons qu'il y a 28 lettres, mais qu'elles ne sont pas indépendantes. En raison des relations existant entre elles, leur nombre se réduit à onze. On pourrait réduire davantage ce nombre, mais alors les coefficients de l'équation aux périodes ne seraient plus cycliques, de sorte que j'ai préféré leur conserver le caractère cyclique.

Soient $\eta_0, \eta_1, \ldots \eta_5$, les racines de l'équation aux périodes. Chaque η_i ($i=0, 1 \ldots 6$) comporte $1\ 7(p-1)$ racines pièmes distinctes et primitives de l'unité, et chaque racine primitive figure une seule fois dans chaque η_i.

Le choix de la racine primitive n'est fixé par aucune règle. Nous pourrions utiliser celle que nous voudrions, mais les périodes dépendent, du point de vue arrangement, de la racine particulière utilisée pour leur formation. Il ne se produira aucune modification dans η_0, et quant à η_1, η_2, ... η_5, elles s'échangeront circulairement, sans qu'un terme isolé appartenant à une d'elles passe chez une autre. C'est à dire que chaque η_i contiendra les mêmes termes, quels que soient les termes primitifs choisis.

Soit :

$$\begin{aligned}
\eta_0^2 &= [\alpha abcdef][\eta_0\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4\eta_5\eta_6] \\
\eta_0\eta_1 &= [ghijklm][\eta_0\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4\eta_5\eta_6] \\
\eta_0\eta_2 &= [nopqrst][\eta_0\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4\eta_5\eta_6] \\
\eta_0\eta_3 &= [uvwxyzA][\eta_0\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4\eta_5\eta_6]
\end{aligned}$$

Les entiers α, a, b ... A, satisfont aux équations linéaires suivantes :

$$\begin{aligned}
&\alpha+a+b+c+d+e+f=\lambda-1 \\
&g+h+i+j+k+l+m=\lambda \\
&n+o+p+q+r+s+t=\lambda \\
&u+v+w+x+y+z+A=\lambda
\end{aligned}$$

où $\lambda = 1/7(p-1)$ et p est un nombre premier de la forme $14n+1$, n étant un entier positif.

Donc $\quad \Sigma g = \Sigma n = \Sigma u = \lambda \qquad$ (A)

$\qquad\quad \Sigma\alpha = \lambda - 1$

On démontre aisément que

$$\Sigma\eta_0\eta_1 = \Sigma\eta_0\eta_2 = \Sigma\eta_0\eta_3 = -\lambda \qquad \text{(B)}$$

et que

$$\Sigma\eta_0^2 = 6\lambda + 1 \qquad \text{(B)}$$

On sait que les groupes des équations cyclotomiques sont cycliques, de sorte que toutes leurs opérations sont commutatives. On a, ainsi :

$$\eta_0(\eta_1\eta_2) = \eta_1(\eta_0\eta_2) = \eta_2(\eta_1\eta_0)$$

En tenant compte de la première, il vient :

$$\Sigma\eta_0(\eta_1\eta_2) = \Sigma\eta_0(mghijkl) = -\lambda^2 + mp$$

De même, en tenant compte de $\eta_1(\eta_0\eta_2)$, il vient :

$$\Sigma\eta_1(\eta_0\eta_2) = \Sigma\eta_1(nopqrst) = -\lambda^2 + op.$$

Finalement, en considérant $\eta_2(\eta_1\eta_0)$, on a

$$\Sigma\eta_2(\eta_1\eta_0) = \Sigma\eta_2(ghijklm) = -\lambda^2 + ip.$$

Comme on doit obtenir la même valeur dans chaque cas, on a

$$-\lambda^2 + mp = -\lambda^2 + op = -\lambda^2 + ip, \quad \text{d'où} \quad m = o = i.$$

Tenons compte de $\eta_0\eta_1\eta_3$, on obtient

$$t = v = j$$

La considération de $\eta_0\eta_1\eta_4$ fournit

$$A = y = k$$

Le terme $\eta_0\eta_1\eta_5$ mène à

$$w = q = i$$

Et à partir de $\eta_0\eta_2\eta_5$ on obtient

$$z = r = s$$

Le terme $\eta_0^2\eta_1$ nous donne

$$g = a$$

De même, le terme $\eta_0^2\eta_2$ fournit

$$b = n$$

$\eta_0^2\eta_3$ donne

$$c = u$$

$\eta_0^2\eta_4$ donne

$$\alpha = x$$

$\eta^2\eta_5$ fournit

$$e = p$$

et finalement $\eta_0^2\eta_6$ mène à

$$f = h$$

Au moyen de ces relations, les 28 lettres se réduisent à onze seulement, et ces onze lettres ne sont pas indépendantes.

Les quatre équations primitives, contenant 28 lettres, prennent la forme suivante, qui n'en contient que onze :

$$
\begin{aligned}
\eta_0^2 &= [\alpha abcdef][\eta_0\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4\eta_5\eta_6] \\
\eta_0\eta_1 &= [afghikg][\eta_0\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4\eta_5\eta_6] \\
\eta_0\eta_2 &= [bgekjjh][\eta_0\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4\eta_5\eta_6] \\
\eta_0\eta_3 &= [chkdiji][\eta_0\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4\eta_5\eta_6]
\end{aligned}
$$

III

La détermination de l'équation aux péripdes.

On sait que le coefficient de η^7 est l'unité.

Celui de η^6 est $-(\eta_0+\eta_1+\eta_2+\eta_3+\eta_4+\eta_5+\eta_6)=-(-1)=1$

Pour trouver le coefficient de η^5, on doit considérer 21 termes, dont trois seulement sont indépendants, tous les autres s'obtenant circulairement. Les trois termes indépendants sont $\eta_0\eta_1$, $\eta_0\eta_2$, $\eta_0\eta_3$. En vertu de (A) il vient

$$
\begin{aligned}
\Sigma\eta_0\eta_1 = \Sigma\eta_0\eta_2 = \Sigma\eta_0\eta_3 &= -\lambda \\
\Sigma\eta_0\eta_1 + \Sigma\eta_0\eta_2 + \Sigma\eta_0\eta_3 &= -3\lambda
\end{aligned}
$$

donc le coefficient de η^5 est -3λ.

Pour déterminer le coefficient de η^4, notons que parmi les 35 termes à considérer, cinq seulement, soit $\eta_0\eta_1\eta_2$, $\eta_0\eta_1\eta_3$, $\eta_0\eta_1\eta_4$, $\eta_0\eta_1\eta_5$, $\eta_1\eta_2\eta_5$, sont indépendants, les autres s'obtenant circulairement.

$$
\begin{aligned}
\text{Or}\quad \Sigma\eta_0\eta_1\eta_2 = a\,\Sigma\eta_0\eta_2 + f\,\Sigma\eta_1\eta_2 + g\,\Sigma_2^2 + h\,\Sigma\eta_2\eta_3 + i\,\Sigma\eta_2\eta_4 \\
+ k\,\Sigma\eta_2\eta_5 + g\,\Sigma\eta_2\eta_6
\end{aligned}
$$

$$=a(-\lambda)+f(-\lambda)+g(6\lambda+1)+h(-\lambda)+k(-\lambda)$$
$$+g(-\lambda)$$
$$=-\lambda^2+gp$$

On a ensuite

$$\Sigma\eta_0\eta_1\eta_3=a\,\Sigma\eta_0\eta_3+f\,\Sigma\eta_1\eta_3+g\,\Sigma\eta_2\eta_3+h\,\Sigma\eta_3{}^2+i\,\Sigma\eta_3\eta_4$$
$$+k\,\Sigma\eta_3\eta_5+g\,\Sigma\eta_3\eta_6$$
$$=a(-\lambda)+f(-\lambda)+gx(-\lambda)+h(6\lambda+1)+i(-\lambda)$$
$$+k(-\lambda)+g(-\lambda)$$
$$=-\lambda^2+hp.$$

De même

$$\Sigma\eta_0\eta_1\eta_4=-\lambda^2+ip,$$
$$\Sigma\eta_0\eta_1\eta_5=-\lambda^2+kp,$$
$$\Sigma\eta_0\eta_2\eta_5=-\lambda^2+jp.$$

Donc le coefficient de $\eta^4=5\lambda^2-(g+i+h+k+g)p$

IV

Le coefficient de η^3

Les seuls cinq termes indépendants qui interviennent dans le calcul du coefficient de η^3 sont :

$$\eta_3\eta_4\eta_5\eta_6,\ \eta_5\eta_6\eta_2\eta_3,\ \eta_1\eta_2\eta_4\eta_5,\ \eta_0\eta_1\eta_2\eta_5,\ \text{et}\ \eta_0\eta_1\eta_2\eta_4.$$

Or

$$\Sigma\eta_3\eta_4\eta_5\eta_6=a\,\Sigma\eta_5\eta_6\eta_3+f\,\Sigma\eta_5\eta_6\eta_4+g\,\Sigma\eta_5^2\eta_6+h\,\Sigma\eta_5\eta_6^2$$
$$+i\,\Sigma\eta_5\eta_6\eta_0+k\,\Sigma\eta_5\eta_6\eta_2+g\,\Sigma\eta_5\eta_6\eta_2$$

Les valeurs de $\Sigma\eta_5\eta_6\eta_3$, $\Sigma\eta_5\eta_6\eta_4$, $\Sigma\eta_5\eta_6\eta_0$, $\Sigma\eta_5\eta_6\eta_1$, $\Sigma\eta_5\eta_6\eta_2$ ont déjà été calculées dans la recherche du coefficient de η^4. Restent les termes $\Sigma\eta_5^2\eta_6$ et $\Sigma\eta_5\eta_6^2$, qu'on peut calculer de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\Sigma\eta_5^2\eta_6 &= a\,\Sigma\eta_5^2+f\,\Sigma\eta_5\eta_6+g\,\Sigma\eta_5\eta_0+h\,\Sigma\eta_5\eta_1+i\,\Sigma\eta_5\eta_2\\ &\quad +k\,\Sigma\eta_5\eta_3+g\,\Sigma\eta_5\eta_4\\ &= a(6\lambda+1)+f(-\lambda)+g(-\lambda)+h(-\lambda)+i(-\lambda)\\ &\quad +k(-\lambda)+g(-\lambda)\\ &= -\lambda^2+ap\end{aligned}$$

De même, on a

$$\Sigma\eta_5\eta_6^2=-\lambda^2+fp. \text{ D'où}$$

$$\begin{aligned}\Sigma\eta_3\eta_4\eta_5\eta_6 &= a(-\lambda^2+kp)+f(-\lambda^2+gp)+g(-\lambda^2+ap)\\ &\quad +h(-\lambda^2+fp)+i(-\lambda^2+gp)+k(-\lambda^2+hp)\\ &\quad +g(-\lambda^2+ip)\\ &= -\lambda^3+(ak+fg+ga+hf+2gi+kh)p\\ &= -\lambda^3+m_1p\\ &\quad \text{où } m_1=ak+fg+ga+hf+2gi+kh\end{aligned}$$

On a encore

$$\begin{aligned}\Sigma\eta_5\eta_6\eta_1\eta_3 &= -\lambda^3+m_2p\\ &\quad \text{où } m_2=aj+fj+gh+hb+ig+kl+gk\\ \Sigma\eta_1\eta_2\eta_4\eta_5 &= -\lambda^3+m_3p\\ &\quad \text{où } m_3=ai+fk+g^2+ha+if+kg+gh\\ \Sigma\eta_0\eta_1\eta_2\eta_5 &= -\lambda^3+m_4p\\ &\quad \text{où } m_4=aj+fi+gc+h^2+1k+kd+gi\\ \Sigma\eta_0\eta_1\eta_2\eta_4 &= -\lambda^3+m_5p\\ &\quad \text{où } m_5=aj+fh+gb+hg+ie+k^2+gj\end{aligned}$$

Donc le coefficient de

$$\begin{aligned}\eta^3 &= -[5\lambda^3-(m_1+m_2+m_3+m_4+m_5)p]\\ &= -5\lambda^3+(m_1+m_2+m_3+m_4+m_5)p\end{aligned}$$

V

Le coefficient de η^2

Il n'entre que trois termes indépendants dans le calcul du coefficient de η^2. Ce sont :

$$\eta_0\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4,\ \eta_0\eta_1\eta_2\eta_3\eta_5 \text{ et } \eta_4\eta_5\eta_6\eta_1\eta_2$$

$$\begin{aligned}\text{Or}\quad \Sigma\eta_0\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4 &= a\,\Sigma\eta_2\eta_3\eta_4\eta_0 + f\,\Sigma\eta_2\eta_3\eta_4\eta_1 + g\,\Sigma\eta_2^2\eta_3\eta_4 \\ &+ h\,\Sigma\eta_2\eta_3{}^2\eta_4 + i\,\Sigma\eta_2\eta_3\eta_4{}^2 + k\,\Sigma\eta_2\eta_3\eta_4\eta_5 \\ &+ g\,\Sigma\eta_2\eta_3\eta_4\eta_6\end{aligned}$$

Au cours de la recherche du coefficient de η^3 on a déterminé $\Sigma\eta_2\eta_3\eta_4\eta_0$, $\eta_2\eta_3\eta_4\eta_1$, $\Sigma\eta_2\eta_3\eta_4\eta_5$ et $\Sigma\eta_2\eta_3\eta_4\eta_6$. Il n'y a donc qu'à évaluer trois termes, c'est-à-dire $\Sigma\eta_2^2\eta_3\eta_4$, $\Sigma\eta_2\eta_3^2\eta_4$ et $\Sigma\eta_2\eta_3\eta_4^2$.

$$\begin{aligned}\text{Or}\quad \Sigma\eta_2^2\eta_3\eta_4 &= a\,\Sigma\eta_2^2\eta_4 + f\,\Sigma\eta_2\eta_3\eta_4 + g\,\Sigma\eta_2\eta_4^2 + h\,\Sigma\eta_2\eta_4\eta_5 \\ &\quad + i\,\Sigma\eta_2\eta_4\eta_6 + k\,\Sigma\eta_2\eta_4\eta_0 + g\,\Sigma\eta_2\eta_4\eta_1 \\ &= a(-\lambda^2+bp) + f(-\lambda^2+gp) + g(-\lambda^2+ep) \\ &\quad + h(-\lambda^2+kp) + i(-\lambda^2+jp) + k(-\lambda^2+jp) \\ &\quad + g(-\lambda^2+hp) \\ &= -\lambda^3 + (af+fg+ge+hk+ij+kj+gh)p \\ &= -\lambda^3 + m_6 p\end{aligned}$$

$$\text{où}\quad m_6 = ab+fg+ge+hk+ij+kj+gh$$

$$\begin{aligned}\text{De même}\quad \Sigma\eta_2\eta_3^2\eta_4 &= -\lambda^3 + (ag+fa+gf+hg+ih+ki)p \\ &= \lambda^3 + m_7 p\end{aligned}$$

$$\text{où}\quad m_7 = ag+fa+gf+hg+ih+ki$$

On a encore

$$\Sigma\eta_2\eta_3\eta_4^2 = -\lambda^3 + (ag+fe+gk+hj+ij+kh+gb)p$$
$$= -\lambda^3 + m_8 p$$

$$\text{où } m_8 = ag+fe+gk+hj+ij+kh+gb$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}\Sigma\eta_0\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4 &= a(-\lambda^3+m_3p)+f(-\lambda^3+m_1p)+g(-\lambda^3+m_6p)\\ &\quad +h(-\lambda^3+m_7p)+i(-\lambda^3+m_8p)\\ &\quad +k(-\lambda^3+m_1p)+g(-\lambda^3+m_2p)\\ &= -\lambda^4+(am_3+fm_1+gm_6+hm_7+im_8+km_1\\ &\qquad\qquad +gm_2)p\\ &= -\lambda^4+n_1p\end{aligned}$$

$$\text{où } n_1 = am_3+fm_1+gm_6+hm_7+im_8+km_1+gm_2$$

Considérons, maintenant, le terme $\eta_0\eta_1\eta_2\eta_3\eta_5$:

$$\begin{aligned}\Sigma\eta_0\eta_1\eta_2\eta_3\eta_5 &= a\,\Sigma\eta_2\eta_3\eta_5\eta_0+f\,\Sigma\eta_2\eta_3\eta_5\eta_1+g\,\Sigma\eta_2^2\eta_3\eta_5\\ &\quad +h\,\Sigma\eta_2\eta_3^2\eta_5+i\,\Sigma\eta_2\eta_3\eta_5\eta_4+k\,\Sigma\eta_2\eta_3\eta_5^2\\ &\quad +g\,\Sigma\eta_2\eta_3\eta_5\eta_6\end{aligned}$$

On a à évaluer ici trois termes seulement :

$$\Sigma\eta_2^2\eta_3\eta_5,\quad \Sigma\eta_2\eta_3^2\eta_5 \quad\text{et}\quad \Sigma\eta_2\eta_3\eta_5^2,$$

qu'on peut calculer ainsi que suit :

$$\begin{aligned}\Sigma\eta_2^2\eta_3\eta_5 &= a\,\Sigma\eta_2\eta_5+f\,\Sigma\eta_2\eta_5\eta_3+g\,\Sigma\eta_2\eta_5\eta_4+h\,\Sigma\eta_2\eta_5^2\\ &\quad +i\,\Sigma\eta_2\eta_5\eta_6+k\,\Sigma\eta_2\eta_5\eta_0+g\,\Sigma\eta_2\eta_5\eta_1\\ &= a(-\lambda^2+cp)+f(-\lambda^2+hp)+g(-\lambda^2+kp)\\ &\quad +h(-\lambda^2+dp)+i(-\lambda^2+ip)+k(-\lambda^2+jp)\\ &\quad +g(-\lambda^2+ip)\\ &= -\lambda^3+(ac+fh+gk+hd+i^2+kj+gi)p\\ &= -\lambda^3+m_9p\end{aligned}$$

$$\text{où } m_9 = ac+fh+gk+hd+i^2+kj+gi$$

$$\Sigma\eta_2\eta_3^2\eta_5 = a\,\Sigma\eta_3\eta_5\eta_2 + f\,\Sigma\eta_3^2\eta_5 + g\,\Sigma\eta_3\eta_5\eta_4 + h\,\Sigma\eta_3\eta_5^2$$
$$+ i\,\Sigma\eta_3\eta_5\eta_6 + k\,\Sigma\eta_3\eta_5\eta_0 + g\,\Sigma\eta_3\eta_5\eta_1$$
$$= a(-\lambda^2+hp) + f(-\lambda^2+bp) + g(-\lambda^2+gp)$$
$$+ h(-\lambda^2+ep) + i(-\lambda^2+kp) + k(-\lambda^2+jp)$$
$$+ g(-\lambda^2+jp)$$
$$= -\lambda^3 + (ah+fb+g^2+he+ik+kj+gj)p$$
$$= -\lambda^3 + m_{10}p$$

où $m_{10} = ah+fb+g^2+he+ik+kj+gj$

$$\Sigma\eta_2\eta_3\eta_5^2 = b\,\Sigma\eta_2\eta_3\eta_5 + g\,\Sigma\eta_2\eta_5\eta_4 + e\,\Sigma\eta_2\eta_5^2 + k\,\Sigma\eta_2\eta_5\eta_6$$
$$+ f\,\Sigma\eta_2\eta_5\eta_0 + j\,\Sigma\eta_2\eta_5\eta_1 + h\,\Sigma\eta_2^2\eta_5$$
$$= b(-\lambda^2+hp) + g(-\lambda^2+kp) + e(-\lambda^2+dp)$$
$$+ k(-\lambda^2+ip) + j(-\lambda^2+jp) + j(-\lambda^2+ip)$$
$$+ h(-\lambda^2+cp)$$
$$= -\lambda^3 + (bh+gk+ed+ki+j^2+ji+hc)p$$
$$= -\lambda^3 + m_{11}p$$

où $m_{11} = bh+gk+ed+ki+j^2+ji+hc$

Donc $\Sigma\eta_0\eta_1\eta_2\eta_3\eta_5 = a(-\lambda^3+m_4p) + f(-\lambda^3+m_2p)$
$$+ g(-\lambda^3+m_9p) + h(-\lambda^3+m_{10}p)$$
$$+ i(-\lambda^3+m_1p) + k(-\lambda^2+m_{11}p)$$
$$+ g(-\lambda^3+m_5p)$$
$$= -\lambda^4 + (am_4+fm_2+gm_9+hm_{10}+im_1$$
$$+ km_{11}+gm_5)p$$
$$= -\lambda^4 + n_2p$$

où $n_2 = am_4+fm_2+gm_9+hm_{10}+im_1$
$+ km_{11}+gm_5$

On a, de même :

$$\Sigma\eta_4\eta_5\eta_6\eta_1\eta_2 = a\,\Sigma\eta_6\eta_1\eta_2\eta_4 + f\,\Sigma\eta_6\eta_1\eta_2\eta_5 + g\,\Sigma\eta_6^2\eta_1\eta_2$$
$$+ h\,\Sigma\eta_6\eta_0\eta_1\eta_2 + i\,\Sigma\eta_6\eta_1^2\eta_2 + k\,\Sigma\eta_6\eta_1\eta_2^2$$
$$+ g\,\Sigma\eta_6\eta_1\eta_2\eta_3$$

Les seuls termes qu'il reste à évaluer sont :

$$\Sigma\eta^2\eta_1\eta_2,\quad \Sigma\eta_6\eta_1^2\eta_2,\quad \text{et}\quad \Sigma\eta_6\eta_1\eta_2^2$$

Or,

$$\begin{aligned}
\Sigma\eta_6^2\eta_1\eta_2 &= b\,\Sigma\eta_6^2\eta_2+g\,\Sigma\eta_6\eta_2\eta_0+e\,\Sigma\eta_6\eta_2\eta_1+k\,\Sigma\eta_6\eta_2^2\\
&\quad +j\,\Sigma\eta_6\eta_2\eta_3+j\,\Sigma\eta_6\eta_2\eta_4+h\,\Sigma\eta_6\eta_2\eta_3\\
&\quad =b(-\lambda^2+cp)+g(-\lambda^2+hp)+e(-\lambda^2+kp)\\
&\quad +k(-\lambda^2+dp)+j(-\lambda^2+ip)+j(-\lambda^2+jp)\\
&\quad +h(-\lambda^2+ip)\\
&=-\lambda^3+(bc+gh+ek+kd+ji+j^2+hi)p\\
&=-\lambda^3+m_{12}p
\end{aligned}$$

$$\text{où}\quad m_{12}=bc+gh+ek+kd+ji+j^2+hi$$

Puis

$$\begin{aligned}
\Sigma\eta_6\eta_1^2\eta_2 &= a\,\Sigma\eta_6\eta_1^2+f\,\Sigma\eta_6\eta_1\eta_2+g\,\Sigma\eta_6\eta_1\eta_3+h\,\Sigma\eta_6\eta_1\eta_4\\
&\quad +i\,\Sigma\eta_6\eta_1\eta_5+k\,\Sigma\eta_6^2\eta_1+g\,\Sigma\eta_6\eta_1\eta_0\\
&=a(-\lambda^2+ep)+f(-\lambda^2+kp)+g(-\lambda^2+j)p\\
&\quad +h(-\lambda^2+jp)+i(-\lambda^2+hp)+(k-\lambda^2+bp)\\
&\quad +g(-\lambda^2+gp)\\
&=-\lambda^3+(ae+fk+gj+hj+ih+kb+g^2)p\\
&=-\lambda^3+m_{13}p
\end{aligned}$$

$$\text{où}\quad m_{13}=\ ae+fk+gj+hj+ih+kb+g^2$$

$$\begin{aligned}
\Sigma\eta_6\eta_1\eta_2^2 &= a\,\Sigma\eta_6\eta_2\eta_1+f\,\Sigma\eta_6\eta_2^2+g\,\Sigma\eta_6\eta_2\eta_3+h\,\Sigma\eta_6\eta_2\eta_4\\
&\quad +i\,\Sigma\eta_6\eta_2\eta_5+k\,\Sigma\eta_6^2\eta_2+g\,\Sigma\eta_6\eta_2\eta_0\\
&=a(-\lambda^2+kp)+f(-\lambda^2+dp)+g(-\lambda^2+ip)\\
&\quad +h(-\lambda^2+jp)+i(-\lambda^2+ip)+k(-\lambda^2+cp)\\
&\quad +g(-\lambda^2+hp)\\
&=-\lambda^3+(ak+fd+gi+hj+i^2+kc+gh)p\\
&=-\lambda^3+m_{14}p
\end{aligned}$$

$$\text{où}\quad m_{14}=ak+fd+gi+hj+i^2+kc+gh$$

$$\begin{aligned}\text{Donc } \Sigma\eta_4\eta_5\eta_6\eta_1\eta_2 &= a(-\lambda^3+m_4p)+f(-\lambda^3+m_5p)\\ &\quad +g(-\lambda^3+m_{12}p)+h(-\lambda^3+m_1p)\\ &\quad +i(-\lambda^3+m_{13}p)+k(-\lambda^3+m_{14}p)\\ &\quad +g(-\lambda^3+m_3p)\\ &= -\lambda^4+n_3p\end{aligned}$$

$$\text{où } n_3=am_4+fm_5+gm_{12}+hm_1+im_{13}+km_{14}+gm_3$$

Ainsi, le coefficient de η^2 est $3\lambda^4-(n_1+n_2+\eta_3)p$

VI

Coefficient de η.

Calculons l'unique terme indépendant, soit $\eta_0\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4\eta_4\eta_5$, qui intervient dans le coefficient de η de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\Sigma\eta_0\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4\eta_5 &= a\,\Sigma\eta_2\eta_3\eta_4\eta_5\eta_0+f\,\Sigma\eta_2\eta_3\eta_4\eta_5\eta_1+g\,\Sigma\eta_2^2\eta_3\eta_4\eta_5\\ &\quad +h\,\Sigma\eta_2\eta_3^2\eta_4\eta_5+i\,\Sigma\eta_2\eta_3\eta_4^2\eta_5\\ &\quad +k\,\Sigma\eta_2\eta_3\eta_4\eta_5^2+g\,\Sigma\eta_2\eta_3\eta_4\eta_5\eta_6\end{aligned}$$

On a déterminé antérieurement les valeurs de $\Sigma\eta_2\eta_3\eta_4\eta_5\eta_0$, $\Sigma\eta_2\eta_3\eta_4\eta_5\eta_1$, $\Sigma\eta_2\eta_3\eta_4\eta_5\eta_6$. Il nous reste donc à trouver $\Sigma\eta_2^2\eta_3\eta_4\eta_5$, $\Sigma\eta_2\eta_3^2\eta_4\eta_5$, $\eta_2\eta_3\eta_4^2\eta_5$ et $\Sigma\eta_2\eta_3\eta_4\eta_5^2$.

$$\begin{aligned}\text{Or } \Sigma\eta_2\eta_3\eta_4\eta_5\eta_6 &= a\,\Sigma\eta_0\eta_2\eta_3\eta_4+f\,\Sigma\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4+g\,\Sigma\eta_2^2\eta_3\eta_4\\ &\quad +h\,\Sigma\eta_3^2\eta_2\eta_4+i\,\Sigma\eta_2\eta_3\eta_4^2+k\,\Sigma\eta_2\eta_3\eta_4\eta_5\\ &\quad +g\,\Sigma\eta_2\eta_3\eta_4\eta_5\\ &= -\lambda^4+(am_3+fm_1+gm_6+hm_7+im_8+km_1\\ &\quad +gm_2)p\\ &= -\lambda^4+n_1p\end{aligned}$$

$$\text{où } n_1=am_3+fm_1+gm_6+hm_7+im_8+km_1+gm_2$$

De même, nous savons que

$$n_2 = am_4 + fm_2 + gm_9 + hm_{10} + im_1 + km_{11} + gm_5$$

et l'on peut démontrer que

$$\Sigma \eta_2^2 \eta_3 \eta_4 \eta_5 = -\lambda^4 + cm_6 + hm_7 + km_6 + dm_1 + cm_2 + jm_3 + im_1$$
$$= -\lambda^4 + n_4 p$$

$$\text{où } n_4 = cm_6 + hm_7 + km_6 + dm_1 + cm_2 + jm_3 + im_1$$

$$\Sigma \eta_2^2 \eta_3 \eta_4 \eta_5 = -\lambda^4 + (am_1 fm_6 + gm_7 + hm_8 + im_1 + gm_3 + km_2)$$
$$= -\lambda^4 + n_5 p$$

$$\text{où } n_5 = am_1 + fm_6 + gm_7 + hm_8 + im_1 + gm_3 + km_2$$

On a, encore :

$$\Sigma \eta_2 \eta_3 \eta_4 \eta_5^2 = -\lambda^4 + (cm_1 + hm_6 + km_7 + dm_8 + im_1 + jm_2 + im_3)p$$
$$= -\lambda^4 + n_7 p$$

$$\text{où } n_7 = cm_1 + hm_6 + km_7 + dm_8 + im_1 + jm_2 + im_3$$

$$\Sigma \eta_0 \eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4 \eta_5 = an_2 + fn_1 + gn_4 + hn_5 + in_6 + kn_7 + gn_1$$

Il en résulte que le coefficient de η est

$$[(an_2 + fn_1 + gn_4 + hn_5 + in_6 + kn_7 + gn_1)p - \lambda^5]$$

VII

Détermination du terme constant.

Il n'existe qu'un seul terme constant indépendant, soit $\eta_0\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4\eta_5\eta_6$, les autres pouvant être trouvés circulairement. Une permutation circulaire nous donne le même terme, doué néanmoins d'un ordre différent. En tout, il existe sept termes, mais nous ne cherchons ici que la valeur d'un seul terme, de sorte qu'il faudra diviser le résultat par sept.

$$\begin{aligned}\text{Or}\quad \Sigma\eta_0\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4\eta_5\eta_6 = {} & a\,\Sigma\eta_0\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4\eta_5 + f\,\Sigma\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4\eta_5\eta_6 \\ & + g\,\Sigma\eta_2^2\eta_3\eta_4\eta_5\eta_6 + h\,\Sigma\eta_3^2\eta_2\eta_4\eta_5\eta_6 + i\,\Sigma\eta_4^2\eta_2\eta_3\eta_5\eta_6 \\ & + k\,\Sigma\eta_5^2\eta_2\eta_3\eta_4\eta_6 + g\,\Sigma\eta_6^2\eta_2\eta_3\eta_4\eta_5\end{aligned}$$

On connaît déjà les valeurs de $\Sigma\eta_0\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4\eta_5$, $\Sigma\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4\eta_5\eta_6$. Quant aux cinq autres termes, je me contenterai, pour abréger, de donner les résultats, sans effectuer tout le calcul :

$$\begin{aligned} S_1 &= an_2+fn_1{}^4+gn_4+hn_5+in_6+kn_7+gn_1 \\ S_2 &= cn_1+hn_2+kn_1+dn_4+in_5+jn_6+in_7 \\ S_3 &= an_1+fn_4+gn_5+hn_6+in_7+kn_1+gn_2 \\ S_4 &= bn_6+gn_7+en_1+kn_2+jn_1+jn_4+hn_5, \\ S_5 &= in_4+kn_5+gn_6+an_7+fn_1+gn_2+hn_1, \\ S_6 &= cn_7+hn_1+kn_2+dn_1+in_4+fn_5+in_6 \end{aligned}$$

Donc, le terme constant est donné par

$$1/7[\lambda^6-(as_1+fs_1+gs_2+hs_3+is_4+ks_5+gs_6)p]$$

VIII

et l'équation aux périodes s'écrit

$$\begin{aligned} & \eta^7+\eta^6-3/7(p-1)\eta^5+[5\lambda^2-(9+h+i+k+j)p]\eta^4 \\ & +[(m_1+m_2+m_3+m_4+m_5)p-5\lambda^3]\eta^3 \\ & +[3\lambda^4-(n_1+n_2+n_3)p]\eta^2 \\ & +[(an_2+fn_1+gn_4+hn_5+in_6+kn_7+gn_1)p-\lambda^5]\eta \\ & +1/7[\lambda^6-(as_1+fs_1+gs_2+hs_3+is_4+ks_5+gs_6)p]=0 \end{aligned}$$

IX

On sait que les douze lettres

satisfont aux équations linéaires suivantes :

$$\alpha+a+b+c+d+e+f=\lambda-1 \qquad (1)$$
$$a+f+g+h+i+k+g=\lambda \qquad (2)$$
$$b+g+e+k+j+j+h=\lambda \qquad (3)$$
$$c+h+k+d+i+j+i=\lambda \qquad (4)$$

Tenons compte des équations du second degré, relatives au problème de la section heptique.

Considérons la valeur du terme $\Sigma\eta_0\eta_1\eta_2\eta_3$. Avant d'effectuer la sommation, notons qu'on peut évaluer $\eta_0\eta_1\eta_2\eta_3$ de trois manières, soit : $(\eta_0\eta_1)$ $(\eta_2\eta_3)$, $(\eta_0\eta_2)$ $(\eta_1\eta_3)$ et $(\eta_0\eta_3)$ $(\eta_1\eta_2)$.

Il est clair, qu'après sommation, ces trois valeurs doivent être égales, puisqu'elles représentent la même chose.

Or $\eta_0\eta_1=a\eta_0+f\eta_1+g\eta_2+h\eta_3+i\eta_4+kn_5+gn_6$, donc

$$\begin{aligned}\eta_0\eta_1\eta_2\eta_3&=(a\eta_0+f\eta_1+gn_2+h\eta_3+i\eta_4+k\eta_5+g\eta_6)\eta_2\eta_3\\&=a\eta_0\eta_2\eta_3+f\eta_1\eta_2\eta_3+g\eta_2^2\eta_3+h\eta_2\eta_3^2+i\eta_4\eta_2\eta_3\\&\quad+k\eta_5\eta_2\eta_3+g\eta_6\eta_2\eta_3\end{aligned}$$

et
$$\begin{aligned}\Sigma\eta_0\eta_1\eta_2\eta_3&=a\,\Sigma\eta_0\eta_2\eta_3+f\,\Sigma\eta_1\eta_2\eta_3+g\,\Sigma\eta_2^2\eta_3+h\,\Sigma\eta_2\eta_3^2\\&\quad+i\,\Sigma\eta_4\eta_2\eta_3+k\,\Sigma\eta_5\eta_2\eta_3+g\,\Sigma\eta_6\eta_2\eta_3\\&=a(-\lambda^2+kp)+f(-\lambda^2+gp)+g(-\lambda^2+ap)\\&\quad+h(-\lambda^2+fp)+i(-\lambda^2+gp)+k(-\lambda^2+hp)\\&\quad+g(-\lambda^2+ip)\\&=-\lambda^3+(ak+fg+ga+hf+ig+kh+gi)p\end{aligned}$$

Si nous écrivons la valeur de $\eta_1\eta_2$ et que nous calculons $\Sigma\eta_0\eta_1\eta_2\eta_3$, nous trouvons :

$$\Sigma\eta_0\eta_1\eta_2\eta_3 = -\lambda^3 + (bh+gb+eg+ke+jk+j^2+hj)p$$

Puis $\eta_0\eta_3 = c\eta_0 + h\eta_1 + k\eta_2 + d\eta_3 + i\eta_4 + j\eta_5 + i\eta_6$

et l'on a encore

$$\Sigma\eta_0\eta_1\eta_2\eta_3 = -\lambda^3 + (cg+ha+kf+dg+ih+ji+ik)p$$

En comparant ces trois résultats identiques, on déduit que

$$\begin{aligned} ak+fg+ga+hf+ig+kh+gi &= bh+bg+eg+ke+jk+j^2+hj \\ &= cg+ha+kf+dg+ih+ji+ik \end{aligned}$$

X

(2) $\eta_0\eta_1\eta_2\eta_4$

De même, en prenant le terme $\eta_0\eta_1\eta_2\eta_4$, on trouve

$$\begin{aligned} aj+fh+gb+hg+ie+k^2+gj &= bi+gc+eh+k^2+jd+ji+hj \\ &= ch+hi+k^2+dg+ia+jf+ig \end{aligned}$$

(3) $\eta_0\eta_1\eta_2\eta_5$

On trouve, en tenant compte du terme $\eta_0\eta_1\eta_2\eta_5$

$$\begin{aligned} aj+fi+gc+h^2+ik+kd+gi &= bk+gd+ei+kj+ji+jc+h^2 \\ &= bi+gk+eg+ka+jf+jg+h^2 \end{aligned}$$

(4) $\eta_0\eta_1\eta_3\eta_5$

On trouve dans ce cas :

$$aj+fj+gh+hb+ig+ke+gk=ck+hd+ki+dj+i^2+jc+ih$$
$$=bj+gj+eh+kb+jg+je+hk$$

(5) $\eta_0\eta_1\eta_3\eta_4$

Il vient, en considérant $\eta_0\eta_1\eta_3\eta_4$

$$ai+fk+g^2+ha+if+kg+gh=ci+hc+kh+dk+id+ji+ij$$
$$=ck+hj+kj+dh+ib+jg+ie$$

Or, le nombre de sept objets pris quatre à quatre $=7c_4=7c_3=35$ Parmi ces 35 termes, il n'y en a que cinq qui soient indépendants, les autres pouvant être obtenus par permutation circulaire. Donc on ne peut obtenir d'autres relations de cette façon. Les cinq termes indépendants fournissent dix équations du second degré, car chaque terme donne deux relations indépendantes. Ainsi, les onze lettres du problème satisfont à dix équations du second degré.

Déterminons ensuite d'autres équations du second degré vérifiées par les douzes lettres du problème en considérant des termes tels que $\eta_0^2\eta_1\eta_2$, $\eta_0\eta_1^2\eta_2$, $\eta_0\eta_1\eta_2^2$, etc.

(6) $\eta_0^2\eta_1\eta_2$

Avant d'effectuer la sommation, notons que l'on peut évaluer $\eta_0^2\eta_1\eta_2$ de deux manières, soit :

$$(\eta_0^2)\ (\eta_1\eta_2),\quad (\eta_0\eta_1)\ (\eta_0\eta_2)$$

Même remarque qu'antérieurement. Or

$$\eta_0^2=\alpha\eta_0+a\eta_1+b\eta_2+c\eta_3+d\eta_4+e\eta_5+f\eta_6$$

D'où

$$\eta_0^2\eta_1\eta_2=\alpha\eta_0\eta_1\eta_2+a\eta_1^2\eta_2+b\eta_1\eta_2^2+c\eta_3\eta_1\eta_2+d\eta_4\eta_1\eta_2$$
$$+f\eta_6\eta_1\eta_2$$

De sorte que

$$\begin{aligned}\Sigma\eta_0^2\eta_1\eta_2&=\alpha\,\Sigma\eta_0\eta_1\eta_2+a\,\Sigma\eta_1^2\eta_2+b\,\Sigma\eta_1\eta_2{}^2+c\,\Sigma\eta_3\eta_1\eta_2\\&\quad+d\,\Sigma\eta_4\eta_1\eta_2+f\,\Sigma\eta_6\eta_1\eta_2\\&=\alpha(-\lambda^2+gp)+a(-\lambda^2+ap)+b(-\lambda^2+fp)\\&\quad+c(-\lambda^2+gp)+d(-\lambda^2+hp)\\&\quad+e(-\lambda^2+ip)+f(-\lambda^2+kp)\\&=-\lambda^3+(\alpha g+a^2+bf+cg+dh+ei+fk)p\end{aligned}$$

De même, $\eta_0\eta_1=a\eta_0+f\eta_1+g\eta_2+h\eta_3+i\eta_4+k\eta_5+g\eta_6$

d'où $(\eta_0\eta_1)(\eta_2\eta_0)=a\eta_0^2\eta_2+f\eta_1\eta_0\eta_2+g\eta_0\eta_2^2+h\eta_3\eta_0\eta_2$
$+i\eta_4\eta_0\eta_2+k\eta_5\eta_0\eta_2+g\eta_6\eta_0\eta_2$

De sorte que

$$\begin{aligned}\Sigma\eta_0^2\eta_1\eta_2&=a\,\Sigma\eta_0^2\eta_2+f\,\Sigma\eta_1\eta_0\eta_2+g\,\Sigma\eta_0\eta_2^2+h\,\Sigma\eta_3\eta_0\eta_2+i\,\Sigma\eta_4\eta_0\eta_2\\&\quad+k\,\Sigma\eta_5\eta_0\eta_2+g\,\Sigma\eta_6\eta_0\eta_2\\&=a(-\lambda^2+bp)+f(-\lambda^2+gp)+g(-\lambda^2+ep)\\&\quad+h(-\lambda^2+kp)+i(-\lambda^2+jp)+k(-\lambda^2+jp)\\&\quad+g(-\lambda^2+hp)\\&=-\lambda^3+(ab+fg+ge+hk+ij+kj+gh)p\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$ab+fg+ge+hk+ij+kj+gh=\alpha g+a^2+bf+cg+dh+ei+kf$$

(7) $\eta_0\eta_1^2\eta_2$

En tenant compte de $\eta_0\eta_1^2\eta_2$, il vient :

$$ag+fa+gf+hg+ih+ki+gk=fb+\alpha g+ae+bk+cj+dj+eh$$

(8) $\eta_0\eta_1\eta_2^2$

En considérant le terme $\eta_0\eta_1\eta_2^2$ on a :

$$bg+ga+ef+kg+jh+ji+hk=ea+f^2+\alpha g+ah+bi+ck+dg$$

(9) $\eta_0^2\eta_1\eta_3$

On a ensuite

$$ac+fh+gk+hd+i^2+kj+gi=\alpha h+ab+bg+ce+dk+ej+fj$$

(10) $\eta_0\eta_1^2\eta_3$

Puis

$$ah+fb+g^2+he+ik+kj+gj=fc+\alpha h+ak+bd+ci+dj+ei$$

(11) $\eta_0\eta_1\eta_3^2$

On trouve, ici :

$$ch+hb+kg+de+ik+j^2+ij=da+ef+fg+\alpha h+ai+bk+cg$$

(12) $\eta_0\eta_1^2\eta_4$

Ce terme mène à

$$ad+fi+gj+hi+ic+kh+gk=\alpha i+ac+bh+ck+d^2+ei+fj$$

(13) $\eta_0\eta_1^2\eta_4$

et celui-ci à

$$ai+fc+gh+hk+id+ki+gj=fd+\alpha i+aj+bi+c^2+dh+ek$$

$$(14) \quad \eta_0 \eta_1 \eta_4^2$$

Ce terme conduit à

$$cd+hi+kj+di+ic+jh+ik=ca+df+eg+fh+\alpha i+ak+bg$$

$$(15) \quad \eta_0^2 \eta_1 \eta_5$$

On obtient

$$ae+fk+gj+hj+ih+kb+g^2=\alpha k+ad+bi+cj+di+ec+fh$$

$$(16) \quad \eta_0 \eta_1^2 \eta_5$$

Ce terme fournit

$$ak+fd+gi+hj+i^2+kc+gh=\alpha k+aj+bj+ch+db+eg+fe$$

$$(17) \quad \eta_0 \eta_1 \eta_5^2$$

Tandis que celui-ci donne

$$bc+gh+ek+kd+ji+j^2+h=ba+cf+dg+eh+fi+\alpha k+ag$$

$$(18) \quad \eta_0^2 \eta_2 \eta_5$$

On a

$$be+gk+ej+kj+jh+jb+hg+\alpha j+ai+bc+ch+dk+ed+fi$$

$$(19) \quad \eta_0 \eta_2^2 \eta_5$$

Il vient

$$bj+gi+ec+kh+jk+jd+hi=e^2+fk+\alpha j$$

$$(20) \quad \eta_0 \eta_2 \eta_5^2$$

Et finalement

$$bd+gi+ej+ki+jc+jh+hk=b^2+cg+de+ek+fj+\alpha i+ah$$

XI

Solution des équations. L'équation aux périodes :

Pour le nombre premier 29 :

$k=g=a=j=o$, $d=2$, $\alpha=i=e=f=b=c=h=O$
$m_1=2$, $m_2=3$, $m_3=3$, $m_4=2=m_5$, $m_6=1$, $m_7=2$, $m_8=2$, $m_9=2$
$m_{10}=3$, $m_{11}=2$, $m_{12}=3$, $m_{13}=2$, $m_{14}=1$.
$n_1=9$, $n_2=8$, $n_3=9$, $n_4=9$, $n_5=10$, $n_6=8$, $n_7=9$.
$S_1=35$, $S_2=35$, $S_3=36$, $S_4=35$, $S_6=36$.

La valeur commune des coefficients de η_7 et η_6 est 1.

Le coefficient de $\eta^5=3\lambda=-3\ /7(29-1)=-12$

Celui de $\eta^4=5\lambda^2-(g+i+h+k+g)p=5.4^2-3\times 29=-7$.

Celui de $\eta^3=$
$-5\lambda^3+(m_1+m_2+m_3+m_4+m_5)p=-5\times 4^3+12\times 29=28$

Celui de $\eta^2=14$

Celui de $\eta=-9$

et le terme constant $=-1$

de sorte que l'équation aux périodes est

$$\eta^7+\eta^6-12\eta^5-7\eta^4+28\eta^3+14\eta^2-9\eta-1=0.$$

Pour le nombre premier 43 :

$m_1=4$, $m_2=7$, $m_3=5$, $m_4=4$, $m_5=6$, $m_6=6$, $m_7=4$,
$m_8=5$, $m_9=7$, $m_{10}=4$, $m_{11}=3$, $m_{12}=6$, $m_{13}=5$, $m_{14}=4$.
$n_1=29$, $n_2=30$, $n_3=29$, $n_4=27$, $n_5=34$, $n_6=32$, $n_7=31$
$S_1=181$, $S_2=174$, $S_3=181$, $S_5=188$, $S_6=181$

Ainsi, l'équation aux périodes est

$$\eta^7+\eta^6-18\eta^5-35\eta^4+38\eta^3+104\eta^2+7\eta-49=0$$

Pour le nombre premier 71 :

$a=2, b=1, \ c=2, d=2, \ e=0, \ f=2, \ g=2, \ h=0, \ i=1, \ j=3, \ k=1$
$m_1=14, \ m_2=15, \ m_3=17, \ m_4=16, \ m_5=12, \ m_6=12,$
$m_7=15, \ m_8=11, \ m_9=12, \ m_{10}=16, \ m_{11}=15, \ m_{12}=16,$
$m_{13}=13, \ m_{14}=11.$
$n_1=141, \ n_2=139, \ n_3=146, \ n_4=143, \ n_5=146, \ n_6=136, \ n_7=141.$
$S_1=1404, \ S_2=1403, \ S_3=1418, \ S_4=1409, \ S_5=1402, \ S_6=1417.$

La valeur commune des coefficients de η^7 et η^6 est 1.

Le coefficient de η^5 $-3(p-1)=-3\times 10=-30$

Celui de $\eta^4=5\times 10^2=71\times 7=500-497=3.$

Celui de $\eta^3=74\times 71-5000=254.$

Celui de $\eta^2=3\times 10^3-426\times 71=3000-30246=-27246$

Celui de $\eta=1405\times 71-19^5=99755-100000=-245.$

Le terme constant $=1/7(19^6-1014071\times 71)$
$=1/7(1000000-999041)=137.$

Donc l'équation aux périodes est la suivante :

$$\eta^7+\eta^6-30\eta^5+3\eta^4+254\eta^3-27246\eta^2-245\eta+137=0$$

Pour le nombre premier 113 :

$a=0, i=1, b=d=e=j=k=2, g=h=3, f=4, c=5, p=113, \lambda=16$
$m_1=36, \ m_2=39, \ m_3=37, \ m_4=36, \ m_5=36, \ m_6=39, \ m_7=32,$
$m_8=34, \ m_9=32, \ m_{10}=35, \ m_{11}=39, \ m_{12}=36, \ m_{13}=36, \ m_{14}=37$
$n_1=580, \ n_2=579, \ n_3=581, \ n_4=580, \ n_5=579, \ n_6=582, \ n_7=580,$
$S_1=9279, \ S_2=9280, \ S_3=9280, \ S_4=9279, \ S_4=9281, \ S_5=9278.$

Le coefficient de $\eta^5-3/7(113-1)=-48.$

Celui de $\eta^4=5\times 16^2-11\times 113=1280-1243=37.$

Celui de $\eta^3=190\times 113-5+16^3=312.$

Celui de $\eta^2 = 3 \times 16^4 - 1740 \times 13 = -12$.

Celui de $\eta = 5279 \times 113 - 16^5 = -49$.

Le terme constant $= 1/7(16^6 - 148471) = -1$.

L'équation aux périodes est ainsi :

$$\eta^7 + \eta^6 - 48\eta^5 + 37\eta^4 + 312\eta^3 - 12\eta^2 - 49\eta - 1 = 0.$$

Pour le nombre premier 127 :

$a = j = 4$, $c = 0$, $k = 1$, $b = e = g = h = 2$, $g = i = 3$, $d = 5$, $p = 127$, $\lambda = 18$
$m_1 = 46$, $m_2 = 51$, $m_3 = 43$, $m_4 = 48$, $m_5 = 46$, $m_6 = 44$, $m_7 = 44$,
$m_8 = 47$, $m_9 = 39$, $m_{10} = 44$, $m_{11} = 48$, $m_{12} = 47$, $m_{13} = 47$, $m_{14} = 46$.
$n_1 = 824$, $n_2 = 823$, $n_3 = 833$, $n_4 = 828$, $n_5 = 816$, $n_6 = 833$, $n_7 = 838$.
$S_1 = 14865$, $S_2 = 14904$, $S_3 = 14873$, $S_4 = 14891$, $S_5 = 14916$, $S_6 = 14838$

Le coefficient de $\eta^5 = -3/7(127 - 1) = -54$.

Celui de $\eta^4 = 5 \times 18^2 - 13 \times 127 = -31$.

Celui de $\eta^3 = 234 \times 127 - 5 \times 18^3 = 558$.

Celui de $\eta^2 = 3 \times 18^4 - 2480 \times 127 = -32$.

Celui de $\eta = 14865 - 18^5 = -1713$.

Le terme constant $= 1/7(18^6 - 267751 \times 127) = 1121$.

Donc l'équation aux périodes est :

$$\eta^7 + \eta^6 - 54\eta^5 - 31\eta^4 + 558\eta^3 - 32\eta^2 - 1713\eta + 1121 = 0.$$

Pour le nombre premier 197 :

$a = b = d = 4$, $e = 1$, $c = g = 2$, $i = 3$, $j = h = 5$, $f = k = 6$.
$m = 116$, $m_2 = 117$, $m_3 = 115$, $m_4 = 104$, $m_5 = 112$, $m_6 = 115$, $m_7 = 99$
$m_8 = 104$, $m_9 = 115$, $m_{10} = 111$, $m_{11} = 104$, $m_{12} = 103$, $m_{13} = 118$,
$m_{14} = 110$.

$n_1=3123$, $n_2=3099$, $n_4=3087$, $n_5=3152$, $n_6=3157$, $n_7=3095$
$S_1=87355$, $S_2=87353$, $S_3=87324$, $S_4=87345$, $S_5=87418$,
$S_6=87383$.

L'équation aux périodes est donc :

$$\eta^7+\eta^6-84\eta^5-217\eta^4+1348\eta^3+3988\eta^2-1433\eta-1163=0$$

Pour le nombre premier 211 :

$a=5$, $b=8$, $c=2$, $d=6$, $e=2$, $f=4$, $g=3$, $h=6$, $i=4$, $j=3$, $k=5$,
$m_1=130$, $m_2=123$, $m_3=135$, $m_4=130$, $m_5=128$, $m_6=133$,
$m_7=124$, $m_8=122$, $m_9=128$, $m_{10}=127$, $m_{11}=128$, $m_{12}=119$,
$m_{13}=130$, $m_{14}=123$.
$n_1=3845$, $n_2=3832$, $n_3=3839$, $n_4=3817$, $n_5=3826$, $n_6=3866$,
$n_7=3839$.
$S_1=115141$, $S_2=115067$, $S_3=115244$, $S_4=115237$, $S_5=113137$,
$S_6=115188$.

Donc l'équation aux périodes est

$$\eta^7+\eta^6-90\eta^5+69\eta^4+1306\eta^3+124\eta^2-5249\eta-4663=0$$

Pour le nombre premier 239 :

$a=5$, $b=8$, $c=4$, $d=6$, $e=2$, $f=2$, $g=7$, $h=4$, $i=6$, $k=3$, $j=5$.
$m_1=168$, $m_2=173$, $m_3=159$, $m_4=164$, $m_5=166$, $m_6=153$,
$m_7=150$, $m_8=178$, $m_9=166$, $m_{10}=161$, $m_{11}=154$, $m_{12}=163$,
$m_{13}=168$, $m_{14}=165$.
$n_1=5585$, $n_2=5604$, $n_3=5581$, $n_4=5595$, $n_5=5548$, $n_6=5590$,
$n_7=5629$.
$S_1=190069$, $S_2=190093$, $S_3=190068$, $S_4=190197$, $S_5=190227$,
$S_6=190028$,

de sorte que l'équation aux périodes est

$$\eta^7+\eta^6-102\eta^5+-195\eta^4+1850\eta^3+978\eta^2-8933\eta+5183=0$$

Pour le nombre premier 281 :

$a=4$, $b=5$, $c=2$, $d=8$, $e=2$, $f=6$, $i=5$, $g=6$, $h=6$, $k=7$, $j=7$.
$m_1=226$, $m_2=231$, $m_3=227$, $m_4=222$, $m_5=230$, $m_6=230$, $m_7=227$, $m_8=227$, $m_9=238$, $m_{10}=228$, $m_{11}=219$, $m_{12}=230$, $m_{13}=235$, $m_{14}=223$.
$n_1=9019$, $n_2=9113$, $n_3=9102$, $n_4=9093$, $n_5=9117$, $n_6=9114$, $n_7=9119$.
$S_1=364423$, $S_2=364381$, $S_3=364416$, $S_4=364409$, $S_5=364430$, $S_6=364409$.

Donc, l'équation aux périodes est :

$$\eta^7+\eta^6-120\eta^5-711\eta^4-784\eta^3+1956\eta^2+2863\eta-343=0$$

Pour le nombre premier 337 :

$a=10$, $b=8$, $c=9$, $d=8$, $f=2$, $g=9$, $h=5$, $i=7$, $j=6$, $k=6$.
$m_1=334$, $m_2=333$, $m_3=333$, $m_4=322$, $m_5=326$, $m_6=323$, $m_7=304$. m_8 334, $m_9=342$, $m_{10}=319$, $m_{11}=323$, $m_{12}=326$, $m_{13}=340$, $m_{14}=317$.
$n_1=15764$, $n_2=15769$, $n_3=15755$, $n_4=15770$, $n_5=15725$, $n_6=15682$, $n_7=15784$.
$S_1=756127$, $S_2=756120$, $S_3=756108$, $S_4=756067$, $S_5=755987$, $S_6=756116$.

Donc, l'équation aux périodes est :

$$\eta^7+\eta^6-144\eta^5+399\eta^4+2416\eta^3-10808\eta^2+10831\eta-1237=0$$

Pour le nombre premier 379 :

$a=8$, $b=10$, $c=5$, $d=8$, $f=6$, $e=8$, $g=7$, $h=5$, $i=9$, $j=6$, $k=12$.
$m_1=410$, $m_2=441$, $m_3=429$, $m_4=412$, $m_5=406$, $m_6=399$, $m_7=418$, $m_8=402$, $m_9=410$, $m_{10}=411$, $m_{11}=421$, $m_{12}=412$, $m_{13}=422$, $m_{14}=413$.

$n_1=22400$, $n_2=22451$, $n_3=22423$, $n_4=22422$, $n_5=22595$, $n_6=22312$, $n_7=22474$.
$S_1=1211230$, $S_2=1211924$, $S_3=1211680$, $S_4=1210957$, $S_5=1212470$, $S_6=1211158$.

L'équation, aux périodes, est ainsi :

$$\eta^7+\eta^6-162\eta^5-201\eta^4+7822\eta^3+11322\eta^2-107717\eta-193369=0$$

Pour le nombre premier 421 :

$a=8$, $b=6$, $c=10$, $d=5$, $e=14$, $f=8$, $g=7$, $h=10$, $i=9$, $j=6$, $k=11$.
$m_1=516$, $m_2=529$, $m_3=507$, $m_4=520$, $m_5=508$, $m_6=502$, $m_7=512$, $m_8=511$, $m_9=497$, $m_{10}=524$, $m_{11}=496$, $m_{12}=519$, $m_{13}=507$, $m_{14}=512$.
$n_1=30642$, $n_2=30767$, $n_3=30761$, $n_4=30788$, $n_5=30850$, $n_6=30739$, $n_7=30748$.
$S_1=1844661$, $S_2=1843908$, $S_3=1843943$, $S_4=1844175$, $S_5=1844524$, $S_6=1844390$.

de sorte que l'équation aux périodes est :

$$\eta^7+\eta^6-180\eta^5+103\eta^4+6180\eta^3+76430\eta^2-997719\eta+9768507=0$$

Pour le nombre premier 449 :

$a=6$, $b=9$, $c=16$, $d=6$, $e=8$, $f=12$, $g=10$, $h=10$, $i=7$, $j=9$, $k=9$.
$m_1=584$, $m_2=591$, $m_3=585$, $m_4=584$, $m_6=588$, $m_7=575$, $m_8=579$, $m_9=566$, $m_{10}=582$, $m_{11}=595$, $m_{12}=584$, $m_{13}=587$, $m_{14}=579$.
$n_1=37367$, $n_2=37359$, $n_3=37362$, $n_4=37363$, $n_5=37357$, $n_6=37372$, $n_7=37375$.
$S_1=2391407$, $S_2=2391415$, $S_3=2391366$, $S_4=2391405$, $S_5=2391388$, $S_6=2391461$.

L'équation aux périodes est ainsi :

$$\eta^7+\eta^6-192\eta^5+275\eta^4+3952\eta^3+4136\eta^2-81\eta-863=0.$$

Pour le nombre premier 463 :

$a=4$, $k=6$, $c=8$, $e=9$, $f=12=d$, $g=10$, $h=11$, $i=7$, $j=9$, $k=12$.
$m_1=612$, $m_2=635$, $m_3=619$, $m_4=618$, $m_5=630$, $m_6=647$, $m_7=599$, $m_8=622$, $m_9=643$, $m_{10}=597$, $m_{11}=610$, $m_{12}=631$, $m_{13}=618$, $m_{14}=616$.
$n_1=40927$, $n_2=40993$, $n_3=40982$, $n_4=40873$, $n_5=41138$, $n_6=41029$, $n_7=40997$.
$S_1=2704781$, $S_2=2704145$, $S_3=2704916$, $S_4=2705121$, $S_5=2705296$, $S_6=2704769$.

Donc, l'équation aux périodes est la suivante :

$$\eta^7+\eta^6-198\eta^5-907\eta^4+4302\eta^3+20582\eta^2-18973\eta-56911=0$$

Pour le nombre premier 491 :

$a=12$, $b=8$, $c=8$, $d=14$, $f=13$, $g=9$, $h=9$, $i=10$, $j=11$, $k=8$.
$m_1=690$, $m_2=705$, $m_3=697$, $m_4=702$, $m_5=696$, $m_6=690$, $m_7=704$, $m_8=715$, $m_9=689$, $m_{10}=686$, $m_{11}=723$, $m_{12}=690$, $m_{13}=705$, $m_{14}=712$.
$n_1=48895$, $n_2=48912$, $n_3=48911$, $n_4=48853$, $n_5=48834$, $n_6=48924$, $n_7=48997$.
$S_1=3423033$, $S_2=3422944$, $S_4=3422925$, $S_5=3423380$, $S_3=3422989$, $S_6=3422801$.

Donc, l'équation aux périodes est :

$$\eta^7+\eta^6-210\eta^5+1423\eta^4-1410\eta^3-8538\eta^2+9203\eta+19427=0$$

XII

Un Théorème général sur la représentation du polynôme X

où X est $\frac{x^p-1}{x-1}$

On sait que, p étant un entier impair et X le polynôme $\frac{x^p-1}{x-1}$, il existe une transformation remarquable qui s'exprime au moyen de l'identité

$$4X=Y^2-(-1)^{\frac{p-1}{2}}pZ^2,$$

où Y et Z sont des polynômes en x à coefficients entiers. Cette identité, due à Gauss, a fait l'objet des recherches de Gauss, Legendre, L.J. Rogers et G.B. Mathews.

Il existe une autre identité, due à Eisenstein, de la forme

$$27X=f(U, V, W)$$

où U, V, W, sont des polynômes en x, à coefficients entiers.

Le but de notre exposé est d'indiquer une méthode générale permettant d'obtenir des formules analogues aux précédentes. Ainsi l'identité de Gauss, et l'identité cubique n'en seront que des cas particuliers.

Cette méthode ne pourra être appliquée qu'aux valeurs de q, dont la section cyclotomique a été complètement résolue.

Je me suis conformé aux notations de M. Burnside (Comptes rendus de *The London Mathematical Society*, 1915).

XIII

Soient X_1, X_2, ... Xq, les valeurs **périodiques** (X_1 ... Xq ont le même sens que leur attribue G.B. Mathews dans sa démonstration de l'identité de Gauss), et soient η_0, η_1 ... η_{q-1} les racines de l'équation aux périodes.

J'ai emprunté à M. Burnside les notations suivantes :

p est un entier impair,

q est un facteur premier impair, et $p-1=qt$,

ω est une racine pième primitive déterminée de l'unité,

a est une racine primitive de $a^{p-1}=1 \pmod{p}$

β est une racine primitive de $\beta^{q-1}=1 \pmod{q}$.

Chacune des $p-1$ racines pièmes de l'unité est comprise une seule fois dans la forme

$$\omega^{a^{i+xq}} (i=0,1, \ldots q-1) \quad (x=0, 1, \ldots t-1)$$

Posons

$$A_i = \sum_{x=0}^{x=t-1} \omega^{a^{i+xq}} (i=0, \ldots q-1)$$

Chaque A_i est la somme de t racines pièmes, distinctes et primitives, de l'unité et chaque racine pième primitive figure une seule fois dans chaque A_i. Quand on remplace ω par ω^{a^2} chaque A_i ne change pas. Quand ω est remplacé par ω^a, les A_i subissent la substitution circulaire

$$(A_0, A_1, \ldots A_{q-1})$$

Si ω' est une racine quelconque figurant dans A_i on a

$$A_i = \sum_{x=0}^{x=t-1} \omega'^{a^{xq}}$$

En particulier, puisque t est pair, si A_i contient ω', il contient aussi ω^{-1}.

Quand on remplace i par βi, les A subissent la substitution

$$\begin{pmatrix} A_0 & A_1 & A_2 \ldots\ldots\ldots A_{q-1} \\ A_0 & A_\beta & A_{2\beta} \ldots\ldots\ldots A_{(q-1)\beta} \end{pmatrix}$$

où les indices sont réduits (mod. q). Ceci, ne change pas A_0 et soumet les autres A_i à une substitution circulaire.

Si l'on forme le produit A_iA_j ($i=j$) sans réduction, c'est-à-dire sans tenir compte de la relation

$$1 + \omega + \omega^2 + \ldots\ldots + \omega^{p-1} = 0$$

on obtient le produit de t^2 racines primitives, pièmes, car ω' figurant dans A_i, ω^{-1} ne figure pas dans A_j. En outre, puisque A_iA_j est inaltéré quand ω se change en ω^{a^2}, on peut écrire le produit sous la forme de la somme d'un certain nombre des A.

Donc $$A_iA_j = \sum_{k=1}^{k=t} C_{ijk}A_k$$

où les C sont nuls ou des entiers positifs tels que

$$\sum_{k=1}^{k=t} C_{ijk} = t-1$$

En particulier, le carré, le cube, ... des A peuvent être mis sous la forme d'une somme des A.

Il en résulte qu'il est toujours possible de représenter le carré, le cube ... de $\eta_0, \eta_2, \ldots \eta_{q-1}$ par la somme d'un certain nombre de $\eta_0, \eta_1 \ldots \eta_{q-1}$.

Ainsi nous pouvons former q équations linéaires simultanées en $\eta_0, \eta_1 \ldots \eta_{q-1}$.

Donc les X_i peuvent toujours s'exprimer par

$$U+V\eta_0+W\eta_0^2+ \ldots\ldots +M\eta_0{}^{q-1}$$

où U, V, W, ..., sont des polynômes en x à coefficients entiers.

Ceci montre que l'on peut toujours effectuer l'opération suivante :

$$X_1=U+V\eta_0+W\eta_0^2+\ldots\ldots M\eta_0{}^{q-1}$$
$$X_2=U+V\eta_1+W\eta_1^2+\ldots\ldots M\eta_1{}^{q-1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Xq=U+V\eta_{q-1}+\ldots\ldots M\eta_{q-1}^{q-1}$$

Or
$$X=X_1X_2X_3\ldots\ldots X_q$$
$$X=\pi_{i=0}^{i=q-1}(U+V\eta_i+W\eta_i{}^2+\ldots\ldots M\eta_i{}^{q-1})$$
$$=U^q+V^q\eta_0\eta_1\eta_2\ldots\eta_{q-1}+W^q\eta_0^2\eta_1^2\ldots\eta^2{}_{q-1}+\ldots$$
$$M^q(\eta_0\eta_1\ldots\eta_{q-1})^{q-1} \qquad \text{(A)}$$

Les fonctions symétriques figurant dans l'équation (A) peuvent être calculées d'après la méthode générale indiquée dans un traité quelconque sur la théorie des équations.

Appliquons la formule générale aux cas suivants :

q=2. On a :

$$X=X_1=X_2=(U+V\eta_0)\ (U+V\eta_1)=U^2+V^2\eta_0\eta_1+(\eta_0+\eta_1)UV$$

En substituant les valeurs de $\eta_0\eta_1$ et de $\eta_0+\eta_1$ données par la théorie de la section bicyclotomique, on obtient l'identité bien connue de Gauss.

XIV

Afin de démontrer le théorème dans le cas où $q=3$, mettons en évidence les valeurs de X_1, X_2, X_3 correspondant aux périodes cyclotomiques. Supposons que η_0, η_1 et η_2 sont les racines de l'équation aux périodes

$$\eta^3+\eta^2-[(p-1)/3]\,\eta-\tfrac{1}{9}(pa'+\tfrac{1}{3}p-1)=0$$

où p est un nombre premier de la forme $6n+1$. X_1 est alors un polynôme dont les coefficients sont des fonctions symétriques des racines de $X=O$, dont la somme est $\eta_0=O$. De même, on a des énoncés analogues pour X_2 et X_3.

Supposons pour l'instant que η_0, η_1 et η_2 sont assujettis aux mêmes conditions que η_0 et η_1 dans la recherche de la formule de transformation

$$4X=Y^2-(-1)^{\frac{p-1}{2}}pZ^2$$

Il est clair que les coefficients de X_1 peuvent tous être réduits à la forme $a+b\eta_0$. De même pour les coefficients de X_2 et X_3
Nous avons ainsi, identiquement :

$$X_1=U+V\eta_0,$$
$$X_2=U+V\eta_1,$$
$$X_3=U+V\eta_2.$$

où U et V sont des polynômes en x, à coefficients entiers, et η_0, η_1, η_2, sont les racines de l'équation aux périodes

$$\eta^3+\eta^2-\frac{p-}{3}\eta-\frac{1}{9}(pa'+\frac{p-1}{3})=0$$

Donc $X = X_1X_2X_3 = (U+V\eta_0)\ (U+V\eta_1)\ (U+V\eta_2)$
$= U^3 + \Sigma\eta_0 U^2V + \Sigma\eta_0\eta_1 UV^2 + \eta_0\eta_1\eta_2 V^3$
$= (3U-V)^3 - pV^2(9U - 3a'V - V)$ (1)

Levons maintenant les restrictions énoncées plus haut et supposons que 3 soit un facteur de p—1, ce qui est toujours possible, puisque p est un nombre premier de la forme 6n+1, et en outre que ω est une racine primitive pième de l'unité et une racine primitive de la congruence $a^{p-1} \equiv 1$ (mod. p). Posons encore t=p—1. Alors, chacun des p—1 racines primitives de l'unité est comprise une seule fois dans l'expression

$$\omega^{a^{i+3x}} \quad (i=0,\ 1,\ 2.\ x=0,\ 1,\ \ldots\ t-1)$$

Posons

$$A_i = \sum_{n=0}^{n=t'-1} \omega^{a^{i+3x}} \quad (i=0,\ 1,\ 2)$$

Chaque A est la somme de t racines pièmes, distinctes et primitives, de l'unité, et chacune de ces racines y figure une seule fois. On sait que le produit des A peut être représenté par la somme de certains A. Donc, il est toujours possible de représenter η_0^2 par une fonction linéaire de η_0, η_1 et η_2.

$$\eta_0^2 = m + a\eta_0 + b\eta_1 + c\eta_2 \qquad \text{(B)}$$

où m, a, b et c sont des entiers, dont quelques-uns peuvent être nuls.

D'après la théorie des sections tri-cyclotomiques, il est évident que les racines η_0, η_1, η_2 sont liées par la relation

$$\eta_0 + \eta_1 + \eta_2 = -1 \qquad \text{(C)}$$

X_1 peut donc se mettre sous la forme $U + V\eta_0 + W\eta_0^2$ où U, V et W sont des polynômes en x à coefficients entiers.

On a, de même,

$$X_2 = U + V\eta_1 + W\eta_1^2,$$
$$X_3 = U + V\eta_2 + W\eta_2^2,$$

de sorte que

$$\begin{aligned} X &= X_1X_2X_3 \\ &= (U+V\eta_0+W\eta_0^2)\ (U+V\eta_1+W\eta_1^2)\ (U+V\eta_2+W\eta_2^2) \\ &= U^3+U^2V\,\Sigma\eta_0+U^2W\,\Sigma\eta_0^2+UV^2\,\Sigma\eta_0\eta_1+UW^2\,\Sigma\eta_0^2\eta_1^2 \\ &\qquad +UVW\,\Sigma\eta_0\eta_1^2+V^3\eta_0\eta_1\eta_2+V^2W\,\Sigma\eta_0^2\eta_1\eta_2 \\ &\qquad +VW^2\,\Sigma\eta_0\eta_1^2\eta_2^2+W^3\eta_0^2\eta_1\eta_2^2 \end{aligned}$$

En calculant les fonctions symétriques $\Sigma\eta_0$, $\Sigma\eta_0\eta_1$, $\Sigma\eta_0^2$ ..., en substituant leurs valeurs dans l'équation ci-dessus, et en simplifiant, il vient :

$$\begin{aligned} 27X = {} & 27U^2 - 27U^2V + (18p+9)U^2W - (9p-9)UV^2 - 9 \\ & (pa' - \tfrac{2p-2}{3})UVW + 3[(p-1)^2 + 2pa' + \tfrac{2p-2}{3}]UW^2 \\ & + 3(pa' + \tfrac{p-1}{3})V^3 - 3(pa' + \tfrac{p-1}{3})V^2W - (p-1) \\ & (pa' + \tfrac{p-1}{3})VW^2 + \tfrac{1}{3}(pa' + \tfrac{p-1}{3})^2W^3 \end{aligned}$$

Si, dans cette équation, W s'annule, la formule se réduit à la formule (1). Il est clair que la valeur de U doit être différente de zéro, quel que soit le nombre premier, de sorte que nous n'obtenons aucune formule si l'on fait l'hypothèse U=O. Il est de même clair que toutes les fois que W n'est pas nul, V peut être nul.

XV

Pour établir le théorème dans le cas où $q=4$, substituons à X_1, X_2. X_3, X_4 leurs valeurs correspondant aux périodes cyclotomiques. Soient η_0, η_1. η_2, η_3 les racines de l'équation aux périodes, relative à la section quadri-cyclotomique. X_1 est un polynôme dont les coefficients sont des fonctions symétriques des racines de $X=O$, racines dont la somme est $\eta_0=o$. Conclusions analogues pour X_2, X_3, X_4.

Il est possible, comme antérieurement, de représenter η_0 par une fonction linéaire de η_0, η_1, η_2, η_3.

$$\eta_0^2=m+a\eta_0+b\eta_1+c\eta_2+d\eta_3 \qquad \text{(D)}$$

$$\text{et } \eta_0^3=m'+a'\eta_0+b'\eta_1+c'\eta_2+d'\eta_3 \qquad \text{(E)}$$

où m, m', a, a', b, b', c, c', d, d', sont des entiers non tous nuls.

D'après la théorie des sections quadri-cyclotomiques, il est clair que les racines η_0, η_1, η_2. η_3 sont liées par la relation linéaire

$$\eta_0+\eta_1+\eta_2+\eta_3=-1 \qquad \text{(F)}$$

Au moyen des équations (D), (E) et (F) il est toujours possible de représenter η_1 et η_2 en fonction de η_0^3, η_0^2, η^o et de quelques entiers. Donc X_1 peut s'écrire $U+V\eta_1+W\eta_1^2+Y\eta_1^3$, où U, V, W et Y sont des polynômes en x, à coefficients entiers.

On a, de la même façon,

$$X_i=U+V\eta_{i-1}+W\eta^2_{i-1}+Y\eta^3_{i-1} \qquad i=2,\ 3,\ 4.$$

De sorte que

$$X = X_1 X_2 X_3 X_4 = \prod_{i=o}^{i=4} (U + V\eta_i + W\eta^2_i + Y\eta^3_i)$$

$$\begin{aligned}
= U^4 &+ U^3V\,\Sigma\eta_0 + U^3W\,\Sigma\eta_0^2 + U^3Y\,\Sigma\eta_0^3 + U^2V^2\,\Sigma\eta_0\eta_1 \\
&+ U^2W^2\,\Sigma\eta_0^2\eta_1^2 + U^2Y^2\,\Sigma\eta_0^3\eta_1^3 + U^2YW\,\Sigma\eta_0\eta_1^2 \\
&+ U^2VY\,\Sigma\eta_0\eta_1^3 + U^2WY\,\Sigma\eta_0^2\eta_1^3 + UV^3\,\Sigma\eta_0\eta_1\eta_2 \\
&+ UV^2W\,\Sigma\eta_0\eta_1\eta_2^3 + UV^2Y\,\Sigma\eta_0\eta_1\eta_2^3 + UVW^2\,\Sigma\eta_0\eta_1^2\eta_2^2 \\
&+ UVY^2\,\Sigma\eta_0\eta_1^3\eta_2^3 + UVWY\,\Sigma\eta_0\eta_1^2\eta_2^3 + UW^3\,\Sigma\eta_0^2\eta_1^2\eta_2^2 \\
&+ UW^2\,\Sigma\eta_0^2\eta_1^2\eta_2^3 + UWY^2\,\Sigma\eta_0^3\eta_1^3\eta_2^2 + UY^3\,\Sigma\eta_0^3\eta_1^3\eta_2^3 \\
&+ V^4\eta_0\eta_1\eta_2\eta_3 + V^3W\,\Sigma\eta_0\eta_1\eta_2\eta_3^2 + V^3Y\,\Sigma\eta_0\eta_1\eta_2\eta_3^3 \\
&+ V^2W^2\,\Sigma\eta_0\eta_1\eta_2^2\eta_3^2 + V^2Y^2\,\Sigma\eta_0\eta_1\eta_2^3\eta_3^3 \\
&+ V^2WY\,\Sigma\eta_0\eta_1\eta_2^2\eta_3^3 + VW^3\,\Sigma\eta_0\eta_1^2\eta_2^2\eta_3^2 \\
&+ VW^2Y\,\Sigma\eta_0\eta_1^2\eta_2^3\eta_3^3 + VY^3\,\Sigma\eta_0\eta_1^3\eta_2^3\eta_3^3 \\
&+ W^4\eta_0^2\eta_1^2\eta_2^2\eta_3^2 + W^3Y\,\Sigma\eta_0^2\eta_1^2\eta_2^2\eta_3^2 \\
&+ W^2Y^2\,\Sigma\eta_0^2\eta_1^2\eta_2^3\eta_3^3 + WY^3\,\Sigma\eta_0^2\eta_1^3\eta_3^2\eta_3^3 \\
&+ Y^4\eta_0^3\eta_1^3\eta_2^3\eta_\varepsilon^3.
\end{aligned}$$

En opérant comme plus haut, il vient :

$$\begin{aligned}
X = U^4 &- U^3V + (1 - 2q)U^3W + (3q - 3r - 1)U^3Y + qU^2V^2 \\
&+ (q^2 - 2r + 2s)U^2W^2 + (3s + q^3 + 3r^2 - 3qr - 3qs)U^2i^2 \\
&+ (3r - q)U^2VW + (q - 2q^2 - r + 4s)U^2VY \\
&+ (2r - q^2 + qr - 5s)U^2WY - rUV^2 + (r^2 - 2qs)UW^3 \\
&+ (3qrs - r^3 - 3s^2)UY^3 + (4qs + qr - 3s - 3r^2)UVWY \\
&+ (r - 4s)UV^2W + (2qr - r + s)UV^2Y + (3s - qr)UW^2V \\
&+ (2r^2 + qs - q^2r - 5sr)UVY^2 + (2qs + sr - r^2)UW^2Y \\
&+ (qr^2 - 2q^2s - sr + 4s^2)UWY^2 + sV^4 - sV^3W \\
&+ (s - 2qs)V^3Y + qsV^2W^2 + s(q^2 - 2r + 2s)V^2Y^2 \\
&+ (3sr - qs)V^2WY - srVW^3 + (sr - 4s^2)VW^2Y \\
&+ (3s^2 - qrs)VWY^2 + (sr^2 - 3qs^2)VY^3 + s^2W^4 - s^2W^3Y \\
&+ s^2qW^2Y^2 - s^2rWY^3 + s^3Y^4
\end{aligned}$$

$$256X = f(U,\ V,\ W,\ Y)$$

Il faudrait noter que l'équation aux périodes de la section quadri-cyclotomique est censée être

$$\eta^4+\eta^3+q\eta^2+r\eta+s=0$$

et que toutes les fonctions symétriques figurant dans l'identité quartique ont été exprimées au moyen des coefficients de l'équation aux périodes. Ces coefficients peuvent être, toutefois, déterminés au moyen des formules données par A. Cayley, V.S. Le Resque, Charlotte Angas Scott, et W. Burnside.

XVI

En faisant successivement $q=5, 6, 7$ .., on peut obtenir autant d'identités que l'on désire, mais le calcul des fonctions symétriques impliquées se complique rapidement.

J'ai calculé les valeurs de U, V, W pour les nombres premiers 13 et 31 dans l'identité cubique précédente.

Cas du nombre premier 13.

On sait que

$$\eta_0=\omega+\omega^8+\omega^{12}+\omega^5$$
$$\eta_1=\omega^6+\omega^9+\omega^7+\omega^4$$
$$\eta_2=\omega^{10}+\omega^2+\omega^{11}$$

On pourrait choisir indifféremment une de ces relations. Prenons la première. On a :

$$(x-\omega)\ (x-\omega^8)\ (x-\omega^{12})\ (x-\omega^5)=0$$
$$x^4-\eta_0x^3+(\eta_1+2)x^2-\eta_0x+1=0$$
$$\eta_0+\eta_1+\eta_2=-1 \qquad (1)$$
$$\eta_0^2=\eta_2+2\eta_1+4 \qquad (2)$$

En résolvant (1) et (2) il vient :

$$\eta_1 = \eta_0^2 + \eta_0 - 3,$$
$$\eta_2 = -\eta_0^2 - 2\eta_0 + 2.$$

Donc

$$x^4 - \eta_0 x^3 + (\eta_0^2 + \eta_0 - 1)x^2 - \eta_0 x + 1 = 0$$

Dans ce cas, il n'est pas nécessaire de connaître la valeur de η_2.

Ainsi, on obtient :

$$U = x^4 - x^2 + 1,$$
$$V = x^3 + x^2 - x,$$
$$W = x^2.$$

Si nous portons ces valeurs dans l'identité cubique, nous constatons qu'elle est vérifiée. Car en faisant $x=1$, il vient

$$U = 1, \quad V = -1, \quad W = 1.$$

Portons dans l'identité, on obtient

$$27 \times 13 = 27(1+1+9-4-7+14+1+1-4+1)$$

Cas du nombre premier 31 :

On a :

$$\eta_0 = \omega + \omega^{27} + \omega^{16} + \omega^{29} + \omega^8 + \omega^{30} + \omega^4 + \omega^{15} + \omega^2 + \omega^{23},$$
$$\eta_1 = \omega^3 + \omega^{19} + \omega^{17} + \omega^{25} + \omega^{24} + \omega^{28} + \omega^{12} + \omega^{14} + \omega^6 + \omega^7$$
$$\eta_2 = \omega^9 + \omega^{26} + \omega^{20} + \omega^{13} + \omega^{10} + \omega^{22} + \omega^5 + \omega^{11} + \omega^{18} + \omega^{21}$$

On a, ensuite,

$$(x-\omega)\ (x-\omega^{27})\ (x-\omega^{16})\ (x-\omega^{29})\ (x-\omega^{8})\ (x-\omega^{30})$$
$$(x-\omega^{4})\ (x-\omega^{15})\ (x-\omega^{2})\ \times(x-\omega^{23})=0$$

Il en résulte :

$$\begin{aligned}
&x^{10}-\eta_0 x^3+(\eta_0+2\eta_1+\eta_2+5)x^8-(5\eta_0+3\eta_1+4\eta_2)x^7\\
&\quad+(10+5\eta_0+8\eta_1+7\eta_2)x^6-(9\eta_0+7\eta_1+9\eta_2+2)x^5\\
&\quad+(10+5\eta_0+8\eta_1+7\eta_2)x^4-(5\eta_0+3\eta_1+4\eta_2)x^3\\
&\quad+(5+\eta_0+2\eta_1+\eta_2)x^2-\eta_0 x+1=0
\end{aligned}$$

$$\eta_0+\eta_1+\eta_2=-1 \qquad (1)$$

$$\eta_0^2=10+4\eta_1+3\eta_0+2\eta_2 \qquad (2)$$

La résolution de (1) et (2) donne

$$\eta_1=\frac{\eta_0^2-\eta_0-8}{2}$$

$$\eta_2=\frac{6-\eta_0^2-\eta_0}{2}$$

Après substitution de ces valeurs, il vient :

$$\begin{aligned}
&2x^{10}-2\eta_0 x^9+(\eta_0^2-\eta_0)x^8+(\eta_0^2-\eta_0)x^7+(\eta_0^2-5\eta_0-2)x^6\\
&\quad+(2\eta_0^2-2\eta_0-2)x^5+(\eta_0^2-5\eta_0-2)x^4(\eta_0^2-3\eta_0)x^3\\
&\quad+(\eta_0^2-\eta_0)x^2+-2\eta_0 x+2=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&U=2x^{10}-2x^6-2x^5-2x^4+2,\\
&V=-2x^9-x^8-3x^7-5x^6-2x^5-5x^4-3x^3-x^2-2x,\\
&W=x^8+x^7+x^6+2x^5+x^4+x^3+x^2.
\end{aligned}$$

Faisons $x=1$, il vient : $U=-2$, $V=-24$, $W=8$.

Portons ces valeurs dans l'identité cubique, il vient :

$$\begin{aligned}
27\times 31=27\times 1\ \ 8(&-8+96+672+11520-5376-14848\\
&-110592-36864+32768+122880)
\end{aligned}$$

On voit donc que l'identité est encore vérifiée.

XVII

L'identité quartique :

J'ai calculé les valeurs de U, V, W, Y dans les cas des nombres premiers 13 et 17.

Pour le nombre premier 13 :

L'équation aux périodes de la section quadri-cyclotomique est $\eta^4+\eta_3+2\eta_2-4\eta+3=O$

La valeur de l'équation aux périodes pour tout nombre premier inférieur à 100 a été donnée par Cayley dans les comptes rendus de la *Mathematical Society*. Pour les autres nombres premiers, Miss Scott a donné la formule suivante (*American Journal of Mathematics*, VIII) :

$$\eta^4+\eta^3-(1/4(p-1)+l+m)\eta^2+1/2(p(l-m)l+m)\eta$$
$$-1/4[p(l-m)^2-(l+m)^2]=O$$

Mais dans l'identité quartique précédente, nous avons supposé que l'équation aux périodes était

$$\eta^4+\eta^3+q\eta^2+r\eta+s=O$$

Il en résulte que

$$q=-[1/4(p-1)+l+m]$$
$$r=-1/2[p(l-m)^2-(l+m)],$$
$$s=-1/4[p(l-m)^2-(l+m)^2]$$

Or, on sait que

$$\eta_0 = \omega + \omega^3 + \omega^9,$$

$$\eta_1 = \omega^2 + \omega^6 + \omega^5,$$

$$\eta_2 = \omega^4 + \omega^{12} + \omega^{10},$$

$$\eta_3 = \omega^8 + \omega^{11} + \omega^7.$$

En outre,

$$(x - \omega)\ (x - \omega^3)\ (x - \omega^9) = 0$$

$$x^3 - \eta_0 x^2 + \eta_2 x - 1 = 0$$

$$\eta_0 + \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = -1 \qquad (1)$$

$$\eta_1 + 2\eta_2 - \eta_0^2 = 0 \qquad (2)$$

$$\eta_0 + 3\eta_1 + 3\eta_3 + 6 - \eta_0^3 = 0 \qquad (3)$$

On tire de (1), (2), (3),

$$\eta_2 = 3 - 2\eta_0 - \eta_0^3$$

Ainsi, nous n'avons pas besoin de connaître η_1 et η_2.

Donc, $x^3 - \eta_0 x^2 + \eta_2 x - 1 = 0$ devient

$$3x^3 - 3\eta_0 x^2 + (3 - 2\eta_0 - \eta_0^3)x - 3 = 0$$

De sorte que

$$U = 3x^3 + 3x - 3$$

$$V = -(3x^2 + 2x),\quad W = 0,\quad Y = -x.$$

Cas du nombre premier 17.

L'équation aux périodes de la section quadri-cyclotomique pour le nombre entier 17 est :

$$\eta^4+\eta^3-6\eta^2-\eta+1=0$$

et l'on a :

$$\eta_0=\omega+\omega^{13}+\omega^{16}+\omega^4,$$
$$\eta_1=\omega^3+\omega^5+\omega^{14}+\omega^{12},$$
$$\eta_2=\omega^9+\omega^{15}+\omega^8+\omega^2,$$
$$\eta_3=\omega^{10}+\omega^{11}+\omega^7+\omega^6.$$

Puis :

$$(x-\omega)\ (x-\omega^{13})\ (x-\omega^{16})\ (x-\omega^4)=0,$$
$$x^4-\eta_0x^3+(2+\eta_1)x^2-\eta_0x+1=0,$$
$$\eta_0+\eta_1+\eta_2+\eta_3=-1 \qquad (1)$$
$$\eta_0^2=\eta_2+2\eta_1+4 \qquad (2)$$
$$\eta_0^3=9\eta_0+\eta_1+3\eta_2+3\eta_3 \qquad (3)$$

On tire de (1), (2), (3) :

$$\eta_1=1\ /2(6\eta_0-3-\eta_0^3)$$

Il n'est pas nécessaire de connaître les valeurs de η_2. η_3. On a, alors :

$$x^4-\eta_0x^3+1\ /2(6\eta_0+1-\eta_0^3)x^2-\eta_0x+1=0.$$
$$2x^4-2\eta_0x^3+(6\eta_0+1-\eta_0^3)x^2-2\eta_0x+2=0.$$
$$U=2x^4+x^2+2.$$
$$V=-2x^3+6x^2-2x,$$
$$W=0,$$
$$Y=-x^2.$$

Si nous portons ces valeurs dans l'identité quartique, nous constatons qu'elle est satisfaite :

Faisons $U=5$, $V=2$, $W=0$, $Y=-1$ (pour $x=1$) il vient, en portant dans l'identité :

$$17=1/16(625-250+0+2000-600+0-5250+0+3650+0$$
$$+40+0-80+0+0-280+0+370+0+0+16+0$$
$$-104+0+160+0+0+0+0-26+0+0+0+0+1)$$

On peut aussi considérer l'identité quartique comme étant une formule générale de la théorie des formes quartiques, car elle permet de représenter un nombre quelconque de nombres premiers de la forme $4n+1$, où n est un entier positif, par une forme quartique, ainsi qu'on l'a montré plus haut.

Vu et approuvé :

Montpellier, le 21 Novembre 1938.

Le Doyen de la Faculté des Sciences
Marcel GODECHOT

VU ET PERMIS D'IMPRIMER :

Montpellier, le 22 Novembre 1938.

Le Recteur d'Académie de Montpellier :
PARISELLE.