

# THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

JEAN CAPELLE

## Étude de la génération des engrenages par la méthode des roulettes

*Thèses de l'entre-deux-guerres*, 1938

[http://www.numdam.org/item?id=THESE\\_1938\\_\\_216\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=THESE_1938__216__1_0)

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Thèse numérisée dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

SÉRIE A, N° 1 765  
N° D'ORDRE :  
2 631

# THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES  
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

**JEAN CAPELLE**

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE  
AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ



---

1<sup>re</sup> THÈSE

ÉTUDE DE LA GÉNÉRATION DES ENGRENAGES  
PAR LA MÉTHODE DES ROULETTES

2<sup>e</sup> THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

THÉORÈME ERGODIQUE

*Soutenues le*

*1938, devant la Commission d'Examen*

---

Jury. { MM. BÉGHIN      *Président.*  
          {    CHAZY        } *Examineurs.*  
          {    PÈRÈS       }

# FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

*Doyen honoraire* ..... M. MOLLIARD.  
*Doyen* ..... C. MAURAIN, *Professeur*, Physique du Globe.

<i>Professeurs honoraires</i> ..	H. LEBESGUE. A. FERNBACH. Émile PICARD. Léon BRILLOUIN. GUILLET. PÉCHARD. FREUNDLER. AUGER.	BLAISE. DANGEARD. LESPIEAU. MARCHIS. VESSIOT. PORTIER. MOLLIARD. LAPICQUE.	G. BERTRAND. H. ABRAHAM. Charles FABRY. Léon BERTRAND. P. WINTREBERT. O. DUBOSCO. BOHN
----------------------------------	--	---	--

## PROFESSEURS

M. CAULLERY ..... T Zoologie (Évolution des êtres organisés). G. URBAIN ..... T Chimie générale. Emile BOREL ..... T Calcul des probabilités et Physique mathématique. Jean PERRIN ..... T Chimie physique. E. CARTAN ..... T Géométrie supérieure. A. COTTON ..... T Recherches physiques. J. DRACH ..... T Analyse supérieure et algèbre supérieure. Charles PÉREZ ..... T Zoologie. E. RABAUD ..... T Biologie expérimentale. M. GUICHARD ..... Chimie minérale. Paul MONTEL ..... T Théorie des fonctions et théorie des transformations. L. BLARINGHEM ..... T Botanique. G. JULIA ..... T Mécanique analytique et mécanique céleste. C. MAUGUIN ..... T Minéralogie. A. MICHEL-LÉVY ..... T Pétrographie. H. BÉNARD ..... T Mécanique expérimentale des fluides. A. DENJOY ..... T Application de l'analyse à la géométrie. L. LUTAUD ..... T Géographie physique et géologie dynamique. Eugène BLOCH ..... T Physique. G. BRUHAT ..... Physique. E. DARMOIS ..... T Enseignement de physique. A. DEBIERNE ..... T Physique générale et radioactivité. A. DUFOUR ..... T Physique (P. C. B.). L. DUNOYER ..... Optique appliquée. A. GUILLIERMOND ..... T Botanique. M. JAVILLIER ..... T Chimie biologique. L. JOLEAUD ..... Paléontologie. ROBERT-LÉVY ..... T Physiologie comparée. F. PICARD ..... Zoologie (Évolution des êtres organisés). Henri VILLAT ..... T Mécanique des fluides et applications. Ch. JACOB ..... T Géologie. P. PASCAL ..... T Chimie minérale. M. FRÉCHET ..... T Calcul différentiel et calcul intégral. E. ESCLANGON ..... T Astronomie. M <sup>me</sup> RAMART-LUCAS. T Chimie organique.	H. BÉGHIN ..... T Mécanique physique et expérimentale. FOCH ..... Mécanique expérim. des fluides. PAUTHENIER ..... Physique (P. C. B.). DE BROGLIE ..... T Théories physiques. CHRÉTIEN ..... Optique appliquée. P. JOB ..... Chimie générale. LABROUSTE ..... Physique du Globe. PRENANT ..... T Anatomie et histologie comparées. VILLEY ..... Mécanique physique et expérimentale. COMBES ..... T Physiologie végétale GARNIER ..... T Mathématiques générales. PÉRÈS ..... Mécanique théorique des fluides. HACKSPILL ..... Chimie (P. C. B.). LAUGIER ..... T Physiologie générale. TOUSSAINT ..... Technique Aéronautique. M. CURIE ..... Physique (P. C. B.). G. RIBAUD ..... T Hautes températures. CHAZY ..... T Mécanique rationnelle. GAULT ..... Chimie (P. C. B.). CROZE ..... Recherches physiques. DUPONT ..... T Théories Chimiques. LANQUINE ..... T Géologie structurale et géologie appliquée. VALIRON ..... Mathématiques générales. BARRABÉ ..... Géologie structurale et géologie appliquée. MILLOT ..... Biologie animale (P. C. B.). F. PERRIN ..... Théories physiques. VAVON ..... Chimie organique. G. DARMOIS ..... Calcul des probabilités et Physique mathématique. CHATTON ..... T Biologie maritime. AUBEL ..... Chimie biologique. Jacques BOURCART. Géographie physique et Géologie dynamique. M <sup>me</sup> JOLIOT-CURIE .. Physique générale et radioactivité. PLANTEFOL ..... Biologie végétale (P. C. B.). CABANNES ..... Enseignement de physique. GRASSÉ ..... Biologie animale (P. C. B.). PRÉVOST ..... Chimie (P. C. B.).
---	---

*Secrétaire* ..... A. PACAUD.  
*Secrétaire honoraire* ... D. TOMBECK.

A M. Henri BÉGHIN,

Professeur à la Sorbonne,

Directeur du Laboratoire de Mécanique Physique

*Hommage respectueux et reconnaissant*





## AVANT - PROPOS

---

Ce travail a été exécuté sous la direction de M. le Professeur BEGHIN, qu'il veuille bien trouver ici l'expression de mon respectueux attachement et de ma plus vive reconnaissance pour la bienveillance qu'il m'a inlassablement témoignée et pour ses observations qui m'ont été si utiles dans le développement de ces recherches.

Mes sentiments de respectueuse gratitude vont aussi à M. Ch. MERLIN, Inspecteur Général de l'Aéronautique, Professeur à l'Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique, qui m'a fait profiter de ses études sur la question des engrenages.

Je dois encore de chaleureux remerciements à Messieurs les Ingénieurs qui m'ont fourni sur la technique du taillage, de précieux renseignements, et tout particulièrement à M. RENONDIN (des Etablissements Renondin et Losson à Suresnes) pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail et les explications toujours pertinentes qu'il m'a données au cours de mes nombreuses visites à son atelier.

---



# TABLE DES MATIÈRES

PAGES

<b>Introduction</b> .. .. .	<b>1</b>
-----------------------------	----------

## PREMIÈRE PARTIE

### CHAPITRE PREMIER

<b>Étude de quelques propriétés des enveloppes de surfaces.</b> .. .. .	<b>11</b>
---	-----------

### CHAPITRE II

<b>Conditions de génération des engrenages à roues cylindriques.</b> .. .. .	<b>14</b>
--	-----------

### CHAPITRE III

<b>Conditions de génération des engrenages à roues coniques</b> .. .. .	<b>26</b>
---	-----------

### CHAPITRE IV

<b>Méthode des roulettes généralisée.</b> .. .. .	<b>42</b>
---	-----------

Génération d'engrenages gauches à roues pseudo-coniques ou à roues hyperboloïdes. . . . .	42
---	----

I. — Roues pseudo-coniques. Engrenage hypoïd .. .. .	43
--	----

II. — Engrenages gauches à roues hyperboloïdes .. .. .	47
--	----

## DEUXIÈME PARTIE

### TAILLAGE des ROUES CYLINDRIQUES

Classification et définitions .. .. .	53
---------------------------------------	----

#### CHAPITRE PREMIER

<b>Assortiment des roues à dentures droites ou hélicoïdales dans le cas où la surface N est plane</b> .. .. .	<b>55</b>
---	-----------

#### CHAPITRE II

<b>Taillage successif par l'outil-crémaillère sur machine Sunderland.</b> .. .. .	<b>62</b>
---	-----------

#### CHAPITRE III

<b>Taillage successif par l'outil-pignon sur machine Fellows.</b> .. .. .	<b>66</b>
---	-----------

I. — Machine Fellows à taille droite. .. .. .	66
---	----

II. — Machine Fellows à taille hélicoïdale .. .. .	73
--	----

CHAPITRE IV

**Taillage progressif par la vis-mère sur machine Pfauter** . . . . . 76

CHAPITRE V

**Taillage progressif des dentures droites et hélicoïdales par outil-crémaillère** . 86  
 Projet A . . . . . 86

CHAPITRE VI

**Taillage des dentures à chevrons** . . . . . 93  
 I. — Denture réalisée sur machine Sunderland spéciale par outils-crémaillères (taillage successif) . . . . . 93  
 II. — Taillage successif de dentures à chevrons par la fraise-conique Gleason . . 94  
 III. — Denture Böttcher réalisée sur machine Reinecker (taillage progressif) . 95

---

TROISIÈME PARTIE

---

**TAILLAGE des ROUES CONIQUES et PSEUDO-CONIQUES**

Classification et définitions . . . . . 101

CHAPITRE PREMIER

**Taillage des dentures droites et hélicoïdales** . . . . . 104  
 I. — Denture droite et machine Gleason à couteaux (taillage successif) . . 104  
 II. — Denture hélicoïdale et machine Heidenreich et Harbeck (taillage successif) . . . . . 107  
 III. — Taillage de roues pseudo-coniques . . . . . 108

CHAPITRE II

**Taillage des dentures spirales** . . . . . 110  
 I. — Denture Brandenberger et machine Oerlikon (taillage progressif) . . 110  
 II. — Projet B : Taillage progressif de roues coniques pour engrenages concourants ou gauches . . . . . 114  
 III. — Taillage successif de la denture Gleason spirale sur machine à fraise-conique . . . . . 117

CHAPITRE III

**Taillage progressif des roues coniques à denture à chevrons sur machine Reinecker (système Böttcher)** . . . . . 127  
**Bibliographie** . . . . . 130

---

# INTRODUCTION

---

## 1. Définitions préliminaires.

Nous appellerons *engrenage* l'ensemble de deux solides pouvant tourner autour de deux axes fixes, et limités par des surfaces telles que si l'un d'eux est animé d'un mouvement de rotation uniforme, l'autre soit entraîné d'un mouvement de rotation également uniforme.

Chacun de ces deux solides sera appelé *roue*.

Les surfaces en contact, matérialisées et liées respectivement à chaque roue seront dites *dentures*.

Les deux dentures en contact et les deux roues correspondantes seront dites *conjuguées*.

L'axe d'une roue de  $n$  dents est un axe de répétition d'ordre  $n$  : nous appellerons faces *correspondantes* celles qui se déduisent de l'une d'elles par rotation d'un multiple de  $\frac{2\pi}{n}$ .

Nous désignerons par « flan » une roue en cours de taillage. On distingue théoriquement trois classes d'engrenages suivant la position relative de leurs axes :

- si les axes sont parallèles, l'engrenage sera dit *parallèle*;
- si les axes se coupent, l'engrenage sera dit *concourant*;
- si les axes sont quelconques, l'engrenage sera dit *gauche*.

## 2. Définition de la méthode des roulettes ordinaire (1).

Il est d'usage de définir comme suit la méthode des roulettes :

Deux cônes de révolution  $\mathcal{K}_1$  et  $\mathcal{K}_2$  sont en contact le long d'une génératrice commune  $\Delta$  (le sommet commun étant à distance finie ou à l'infini) et tournent autour de leurs axes fixes de façon à rouler sans glisser l'un sur l'autre. Soit alors une surface conique  $\mathcal{F}$  de même sommet et tangente le long de  $\Delta$  à  $\mathcal{K}_1$  et  $\mathcal{K}_2$  ; si  $\mathcal{F}$  roule sans glisser sur  $\mathcal{K}_1$  et  $\mathcal{K}_2$  une surface invariable  $\mathcal{N}$  liée à  $\mathcal{F}$  a pour enveloppes dans ses mouvements par rapport à ces deux cônes, deux surfaces  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ , respectivement liées à ceux-ci et qui sont les dentures conjuguées d'un engrenage.

Or, si l'on remplace  $\mathcal{F}$  par le plan  $P$  tangent aux cônes le long de  $\Delta$  et roulant sans glisser sur eux, et si on lie à  $P$  l'enveloppe  $N$  de  $\mathcal{N}$  dans son

---

(1) Cette définition sera généralisée plus loin. (I, Chap IV).

mouvement par rapport à  $P$ , la surface  $N$  a pour enveloppes par rapport à  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  les deux mêmes dentures  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  (car les quatre surfaces  $\mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_2$   $N - \mathcal{V}_b$  se raccordent le long de la courbe de  $\mathcal{V}_b$  lieu des pieds des normales rencontrant  $\Delta$ ). On ne perd donc pas en généralité en supposant que la surface roulante théorique  $\mathcal{F}$  est un plan.

En fait, dans la plupart des cas, l'arête vive de l'outil appartient à la surface  $N$  et le flan est alors taillé par l'ensemble  $[P, N]$ ; exceptionnellement, il se peut : soit que l'arête vive de l'outil appartienne à la surface  $\mathcal{V}_b$  et le flan est alors creusé par l'ensemble  $[\mathcal{F}, \mathcal{V}_b]$  (machine Fellows), soit que cette arête

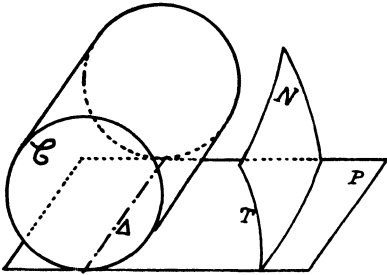


Fig. 1

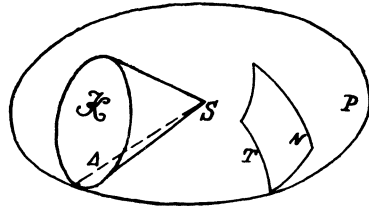


Fig. 2

vive n'appartienne ni à  $N$  ni à  $\mathcal{V}_b$  (machines Pfauter et Klingelnberg à fraises-mères).

De plus, la définition précédente ne rend pas compte de la possibilité de réaliser dans certains cas des engrenages gauches avec des roues dont les dentures sont conformes à cette définition.

C'est pourquoi j'ai été conduit à l'élargir en laissant indéterminée la position relative des axes des deux roues conjuguées, celles-ci étant toujours taillées séparément.

Nous dirons donc qu'un engrenage est taillé par la méthode des roulettes ordinaire si les dentures des roues qui le composent correspondent toutes les deux à l'une ou à l'autre des deux générations suivantes :

1° Un plan  $P$  muni d'une surface invariable  $N$  roule sans glisser sur un cylindre de révolution  $\mathcal{C}$  coaxial à la roue (fig. 1). La denture de la roue est alors l'enveloppe de  $N$ , et l'arête vive de l'outil est telle que dans son mouvement par rapport à  $P$ , elle taillerait  $N$ .

L'ensemble formé par le plan  $P$  muni de la surface  $N$  et par la roue peut être considéré comme un engrenage particulier, l'axe de la deuxième roue étant rejeté à l'infini.

$\mathcal{C}$  est le cylindre primitif de la roue. L'ensemble  $[P, N]$  sera dit *crémaillère*.  $P$  est le plan primitif de la crémaillère.

Nous appellerons *roues cylindriques* les roues ainsi engendrées.

2° Un plan  $P$  muni d'une surface invariable  $N$  roule sans glisser sur un cône de révolution  $\mathcal{K}$  coaxial à la roue (fig. 2). La denture de la roue est

alors l'enveloppe de  $N$ , et l'arête vive de l'outil est telle que dans son mouvement par rapport à  $P$  elle taillerait  $N$ .

L'ensemble formé par le plan  $P$  muni de la surface  $N$  et par la roue peut être considéré comme un engrenage particulier, l'axe de la deuxième roue étant la normale en  $S$  au plan  $P$ .

$\mathfrak{K}$  est le cône primitif de la roue. L'ensemble  $[P, N]$  sera dit *roue plate*;  $P$  est le plan primitif de la roue plate.

Nous appellerons *roues coniques* les roues ainsi engendrées.

REMARQUE. — Les machines taillant par la méthode des roulettes sont donc construites de façon à former avec la roue à réaliser un véritable engrenage : tout se passe comme si la machine portait une roue dentée matérielle qui moulerait dans le flan, supposé en matière plastique, les dents à réaliser.

Cette roue dentée fictive sera appelée pour cette raison : *roue équivalente à l'outil*.

Dans la plupart des cas, la roue équivalente à l'outil est une crémaillère ou une roue plate : je les appellerai *crémaillère matérielle équivalente à l'outil* ou *roue plate matérielle équivalente à l'outil* <sup>(2)</sup>, par opposition à la crémaillère ou à la roue plate théorique  $[P, N]$  envisagée plus haut.

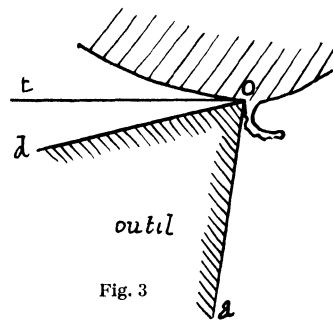
### 3. Définition pratique de la surface $N$ .

Les surfaces des dents de crémaillère ou de roue plate utilisées en pratique sont choisies eu égard aux considérations suivantes :

Imaginons que l'outil taille la surface  $N$  dans un bloc de matière lié au plan  $P$ . Son arête vive est le plus souvent rectiligne, et sa *surface de détalonnage* est plane : la *figure 3* représente la section par un plan normal à son arête d'un tel outil au travail;  $oa$  est la trace de la *face active* (plane),  $od$  celle de la surface de détalonnage, et soit  $ot$  la tangente à la courbe section de la surface taillée

L'expérience montre que les conditions optima de taillage sont les suivantes : l'angle  $\widehat{tod}$  (*angle de détalonnage*) doit être compris entre 5 et 10°; l'angle  $\widehat{toa}$ , inférieur ou égal à 90° (*angle de coupe*) doit rester constant; enfin, la vitesse d'un point quelconque de l'arête doit être normale à celle-ci.

Plaçons-nous alors dans les conditions idéales : la constance de l'angle de coupe exige que la surface taillée  $N$  ait un même plan tangent le long de



(2) Une telle roue plate n'est pas, en général, entièrement réalisable, car il faudrait pour cela qu'elle tournât d'une partie aliquote de  $2\pi$  quand une roue conjuguée de  $n$  dents tourne de l'angle  $\frac{2\pi}{n}$ ; mais on peut toujours supposer qu'on en a matérialisé un secteur comprenant plusieurs dents.



chacune de ses génératrices rectilignes : N doit donc être *développable*. De plus, le mouvement de l'arête coupante est en général tel qu'un de ses points reste dans le primitif P : cette arête doit donc être normale à la trace T de N sur P. Par suite, T est une ligne de courbure de N, et comme T est aussi ligne de courbure du cylindre qui l'admet pour section droite, ces deux surfaces se coupent tout le long de T sous un angle constant, d'après le théorème de JOACHIMSTHAL. (B. 25).. N est donc, relativement à P, une *surface d'égalé pente*.

Les tangentes à l'arête de rebroussement faisant un angle constant avec la normale à P, cette arête n'est autre qu'une hélice, géodésique d'un cylindre orthogonal à P. (Dans la suite, la surface N correspondante ne sera appelée hélicoïde développable que dans le cas où l'hélice de rebroussement est circulaire).

D'où la définition générale de la surface des dentures de crémaillères ou de roues plates effectivement utilisées :

*Soit T une courbe quelconque de P : N est la développable engendrée par une droite assujettie à couper T orthogonalement et à faire avec la normale à P un angle constant  $\varphi$  appelé angle de pression.*

Enfin, remarquons que l'épure de la caractéristique de N à chaque instant est très facile à réaliser : il suffit en effet d'associer à chaque génératrice G de N, le plan normal à T et qui la contient : ce plan coupe  $\Delta$  en un point dont la projection sur G appartient à la caractéristique.

#### 4. Historique du taillage par la méthode des roulettes.

Comme le fait remarquer M. R. BRICARD <sup>(3)</sup> « les horloges sont connues depuis un millier d'années au moins, et par conséquent les engrenages aussi ». Néanmoins, il faut bien aller jusqu'à la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle pour voir apparaître une conception correcte des dentures conjuguées. La méthode des roulettes — simple exercice de géométrie plane permettant de définir les profils conjugués de deux courbes roulantes — va servir à faire l'épure des profils conjugués d'engrenages parallèles à dentures droites; chose curieuse : le profil épicycloïdal précède le profil à développante de cercle, pourtant plus simple, mais il tombera en désuétude, au profit du second, avec l'apparition des machines à tailler par génération; elle sert également à déterminer les profils conjugués des roues d'engrenages concourants à denture droite, grâce au tracé approximatif de TREGOLD.

Le XIX<sup>e</sup> siècle ne connaît guère que ces deux catégories d'engrenages, que l'on ne sait exécuter que par le *moulage* ou le *taillage à la main*, procédés grossiers ou longs et coûteux, auxquels va s'ajouter le taillage par les *machines à gabarit*. Dans tout cela, le rôle de la méthode des roulettes se borne à inspirer *quelquefois* l'épure du profil, mais *jamais* l'opération du taillage. C'est si vrai, qu'on peut lire dans le Dictionnaire Encyclopédique de Lami (B. 12) paru vers

---

(3) Dans la préface d'un ouvrage de M. PÉRIGNON (B. 16).

1885, cette phrase aujourd'hui stupéfiante : « Nous ne ferons que signaler la « méthode des roulettes, car on n'y a presque jamais recours, en pratique, dans « le tracé des engrenages ».

Cependant, en marge des deux types précédents, on commence à réaliser toujours par les mêmes procédés, l'engrenage parallèle à denture hélicoïdale, considéré comme cas limite de l'engrenage à gradins échelonnés de Hooke, et l'engrenage concourant à denture spirale, dont l'invention est attribuée à James WHITE (1788).

La première machine reposant sur la méthode des roulettes remonte à une centaine d'années : elle était l'œuvre d'un précurseur remarquable Edward LANG (4). Celui-ci, dans une conférence publiée dans « A new General Theory of the Teeth of Wheels » (1837) indique déjà les avantages du profil à développante de cercle pour les roues cylindriques, puis dégagant la notion d'interchangeabilité des roues, il décrit sa machine : « Après avoir construit un « couteau avec cette crémaillère comme profil et l'avoir monté sur un chariot « soumis à un mouvement transversal et entraîné par une vis sans fin, le « couteau étant disposé de façon que sa ligne primitive passe à la distance « voulue de l'axe de la roue type, faisons une série de coupes autour de celle-ci. « Alors nous aurons une roue dont toutes les dents seront taillées exactement « pour engrener avec la crémaillère considérée; et toutes les roues ainsi obtenues engreneront correctement entre elles ».

Mais LANG ne parvient pas à lancer sa machine; il reste un isolé, et son idée sommeille jusqu'au jour où le développement prodigieux de l'industrie automobile, avec l'impérieuse nécessité de fabriquer *plus vite* des engrenages *plus précis*, fait surgir ces machines modernes qui sont, pour la plupart, une réalisation de la génération des dentures conjuguées par la méthode des roulettes : l'idée de LANG est reprise par SUNDERLAND dont la machine à outil-crémaillère connaît un vif succès, tandis que FELLOWS construit la machine à outil-pignon, l'une et l'autre pour le taillage des roues cylindriques. En ce qui concerne les roues coniques, les « Gleason Works » de Rochester (Etats-Unis) présentent une machine à tailler les dentures droites; un Français M. MONNERET fait breveter en 1899 une machine telle que les arêtes tranchantes de l'outil décrivent dans le primitif de la roue plate des spirales d'Archimède, mais il n'a pas de succès, et c'est en 1913 que la maison Gleason met en service, pour tailler les dentures spirales, la machine à fraise conique aujourd'hui universellement connue.

Ce développement pratique de la méthode des roulettes se complète par la mise au point d'un certain nombre de machines présentant sur les précédentes l'avantage d'un taillage progressif (§ 5) : ce sont d'abord les machines à fraises-mères Pfauter et Klingelnberg, puis, après la guerre, les machines Reinecker (denture Böttcher) en 1927, et Oerlikon (denture Brandenberger).

Enfin, en plus des engrenages parallèles ou concourants, l'industrie moderne à un besoin croissant d'engrenages gauches. La solution proposée en

---

(4) Cité par M. Francis SHAW dans l'introduction d'un ouvrage publié l'hiver dernier par la Maison Charles Churchill de Birmingham (Angleterre).

1864 par M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE (B. 10) paraîtrait aujourd'hui bien puérile, si l'on songe, par exemple, aux ponts arrière d'automobiles : « Il serait du reste à peu près inutile », écrit-il, « de se livrer à des recherches par trop « compliquées sur ce sujet [la réalisation d'engrenages gauches] car on peut « toujours éviter, dans la composition des machines, d'avoir à considérer des « axes non concourants; il suffit, pour cela, de les relier par un arbre intermé- « diaire qui les rencontre tous les deux et d'établir entre lui et chacun des « proposés deux répétitions de roues d'angles ». Le problème est assurément compliqué, mais non sans intérêt. On en connaît des solutions particulières : l'engrenage gauche formé de roues cylindriques à dentures hélicoïdales et l'engrenage hypoid obtenu, par exemple, sur les machines Gleason à fraise conique, grâce à une légère modification introduite en 1925. Il reste à généraliser la méthode des roulettes pour en déduire le principe de machines permettant le taillage systématique d'engrenages gauches.

## 5. Objet de cette étude.

Je me suis proposé l'étude générale de la méthode des roulettes et de ses applications à la génération des engrenages <sup>(5)</sup>.

L'examen de cet engrenage particulier que constituent la roue à réaliser et la machine qui la taille m'a conduit à une généralisation de la méthode des roulettes (§ 2 et 36) et à une classification des roues dentées correspondantes : il en résultera une classification des machines existantes ou possibles.

A propos de l'association de deux roues pour former un engrenage, je préciserai en particulier les points suivants :

1° J'étudierai les conditions permettant de réaliser un engrenage avec deux roues cylindriques dont la denture est un hélicoïde développable, c'est-à-dire *l'assortiment* de ces roues. Il en résultera une justification du taillage à la vis-mère, pourvu que sa vis équivalente ait pour denture un hélicoïde développable : or c'est une opinion encore actuellement courante que cette vis doit présenter en section axiale le profil de l'outil-crémaillère Sunderland (§ 61) <sup>(6)</sup>. Cette même étude me permettra de déterminer très exactement les surfaces de détalonnage du couteau Fellows et de la vis-mère Pfauter : deux problèmes très importants au point de vue pratique et qu'on ne résoud encore que par des moyens empiriques (sauf dans le cas du couteau Fellows à taille droite).

2° J'étudierai à quelles conditions deux roues dentées cylindriques ou coniques peuvent former un engrenage gauche; dans les deux cas, les conditions imposées aux dentures sont considérablement restrictives : en particulier, je

---

(5) Cette méthode groupe d'ailleurs les procédés modernes du taillage de l'immense majorité des engrenages.

Dans cette étude, je me place au seul point de vue cinématique; en outre, je ne m'occupe que du taillage en *période de finition* (c'est-à-dire que je laisse de côté l'ébauchage, la rectification après trempe, la vérification, etc.).

(6) Dès 1932 M. PÉRIGNON avait protesté (B. 17, p. 2) contre cette idée fautive, et avait indiqué que l'hélicoïde développable était la denture exacte de la vis à tailler les engrenages cylindriques hélicoïdaux, mais il n'a pas, je crois, apporté d'autre précision à ce sujet, ce qui explique peut-être la survivance de l'erreur.

montrerai que les cas de réalisation d'engrenages gauches à roues coniques sont bien plus restreints qu'on ne l'a cru (7).

3° La généralisation de la méthode des roulettes permet de prévoir le taillage de toute une classe d'engrenages gauches non encore étudiés; en outre, elle conduit à envisager le cas de dégénérescence des surfaces primitives relatives à cet engrenage particulier que constituent le flan et la machine taillante, et cela sans que cet engrenage cesse d'être gauche. C'est par cette propriété que nous définirons les engrenages hypoids : la réalisation pratique des engrenages ainsi appelés industriellement et taillés sur machines ordinaires correspond sensiblement à ce cas.

4° J'aborderai la question si complexe des *interférences* : on dit qu'il y a interférence si deux roues conjuguées viennent se heurter en dehors des points de tangence des dentures et dont le lieu constitue par rapport au bâti la surface ou la ligne d'engrènement.

Considérons deux roues conjuguées A et B; relativement à la roue A nous distinguerons deux sortes d'interférences :

1° la dent de B heurte la roue A en un point n'appartenant pas à la denture de A : cela arrive lorsque l'entre-dents de la roue A n'a pas été suffisamment creusé. Nous appellerons cette interférence « *interférence de pied* ». Pour la supprimer, il suffit de dégager suffisamment les pieds des dents de A, ce qui n'est pas gênant au moins pour la conduite;

2° la dent de B heurte la roue A en un point de sa propre denture : nous appellerons cette interférence « *interférence de denture* ». Elle est beaucoup plus grave que la précédente, car, pour la supprimer, il faut réduire la surface de denture de A, ce qui évidemment diminue la longueur de conduite, et aussi la solidité.

Il y a lieu de distinguer encore : l'interférence qui a lieu entre deux roues dentées théoriquement conjuguées lorsqu'on ne peut les placer dans leur position relative correcte, et l'*interférence au taillage* : celle-ci peut se produire entre le flan et la roue taillante, et, dans ce cas, l'outil enlève dans le flan plus de matière qu'il ne faudrait.

Très généralement, il suffira d'éviter au moment du taillage l'interférence de denture pour être sûr qu'elle ne sera pas à redouter ultérieurement entre deux roues conjuguées (§ 19 et 29).

Cette étude des interférences a été faite dès 1913 d'une manière très complète par M. Pol RAVIGNEAUX (8) dans le cas des taillages Sunderland et Fellows. Je me propose de la faire dans le cas général du taillage des roues cylindriques ou coniques à partir d'une crémaillère ou d'une roue plate quelconques.

---

(7) M. PÉRIGNON ayant abordé ce sujet indique une solution très générale (B. 17, p. 9) mais inexacte car les dentures des deux roues que l'on se propose d'associer ne seraient pas tangentes (voir § 31); la solution particulière qu'il indique (B. 17, p. 81) est correcte, et c'est sans doute la seule pratiquement réalisable.

C'est pour cette raison encore que l'engrenage hypoïde ne peut être assimilé à un engrenage gauche formé de roues coniques (§ 41).

(8) B. 19.

Voir aussi sur ce sujet le cours de M. Ch. MERLIN (B. 13).

Il peut, dans certains cas, y avoir interférence entre deux dentures dont les surfaces ne sont pas en contact au cours du mouvement : je me limiterai au cas de l'interférence entre deux dentures dont les surfaces géométriques viennent en contact, et seulement dans le voisinage du contact : c'est ce que l'on pourrait appeler l'étude de l'*interférence locale* de denture.

Enfin, à la classification des machines d'après celle des roues dentées s'en superpose une autre, d'après le mode de taillage *successif* ou *progressif* (§ 7). Une étude schématique des machines modernes — auxquelles j'ajouterai deux projets de machines susceptibles d'être réalisées — illustreront les caractéristiques de ces deux modes de taillage.

La précision de plus en plus grande que l'on exige des engrenages nécessite dans l'étude de leur génération une rigueur croissante; mon but a été de contribuer à apporter à cette branche de la technique moderne l'appui d'une étude géométrique exacte, et souvent très simple. L'intérêt de cet appui, REULEAUX l'avait d'ailleurs souligné : « La Science des Machines, dit-il (B. 22), « doit être fondée sur la déduction : il s'agit pour cela de donner au système « d'enseignement de cette science une forme telle qu'il repose en définitive sur « un petit nombre de vérités fondamentales qui lui sont propres ».

## **6. Classification des engrenages taillés par la méthode des roulettes.**

La définition généralisée de la méthode des roulettes (§ 36) conduit à ajouter aux roues cylindriques et coniques, taillées dans un mouvement de roulement sans glissement, deux autres sortes de roues taillées dans un mouvement de viration : les *roues pseudo-coniques* et les *roues hyperboloïdes* (§ 37 et 42).

Au point de vue de la nature de la surface primitive du flan au cours du taillage, cela fait trois cas différents, suivant que cette surface est un cylindre, un cône ou un hyperboloïde.

Comme on n'a pas encore taillé d'engrenages gauches correspondant à ce dernier type de roues, nous sommes amenés à classer les engrenages industriels issus de la méthode des roulettes en deux catégories :

1° *les engrenages à roues cylindriques* : cette famille comprenant les engrenages parallèles et certains engrenages gauches. (L'étude de l'assortiment des engrenages hélicoïdaux montrera combien il serait artificiel de séparer l'étude des premiers de celle des seconds);

2° *les engrenages à roues coniques ou pseudo-coniques* : cette famille comprenant outre les engrenages concourants, certains engrenages gauches répartis eux-mêmes en deux groupes suivant que les deux roues conjuguées sont coniques ou que l'une est pseudo-conique.

## **7. Classification des machines correspondantes.**

Je la fais également reposer sur la nature de la surface primitive du flan au cours du taillage; l'intérêt de cette classification se trouve confirmé en

pratique par le fait que certaines machines peuvent tailler des engrenages parallèles ou gauches (Sunderland, Fellows, Pfauter) et que d'autres peuvent tailler des engrenages concourants ou gauches (projet B et machine Gleason à fraise conique).

Si l'on se place maintenant au point de vue de la manière dont s'effectue le taillage, on est amené à classer ces machines en deux autres groupes :

1<sup>o</sup> les unes sont construites de façon que l'outil taille complètement la face de dent attaquée, puis passe à la suivante, en sorte qu'après un tour du flan les faces correspondantes de toutes les dents se trouvent réalisées. Nous dirons alors que le taillage est *successif*.

Considérons l'ensemble [ $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{V}$ ] ( $\mathcal{F}$  étant un plan, sauf dans le cas du taillage Fellows) : l'arête vive de l'outil appartient toujours, dans ces machines, à la surface  $\mathcal{V}$  et son mouvement par rapport au flan résulte de la composition de deux mouvements bien distincts :

— *le mouvement de coupe* au cours duquel l'arête vive engendre la surface  $\mathcal{V}$  liée comme  $\mathcal{F}$  au support de l'outil;

— *le mouvement générateur* qui est le mouvement du chariot porte-outil réalisant le roulement de  $\mathcal{F}$  sur la surface primitive (cône ou cylindre) du flan, lui-même en rotation autour de son axe.

Ces deux mouvements sont indépendants, à cela près que le mouvement de coupe doit être très rapide par rapport au mouvement générateur (théoriquement la vitesse du mouvement de coupe devrait être infiniment plus grande que celle du mouvement générateur).

2<sup>o</sup> les autres machines sont telles que l'outil enlève un copeau à une dent, le copeau suivant à la (ou à une) prochaine, et ainsi de suite, de sorte qu'il faut un grand nombre de tours du flan pour que les faces correspondantes soient terminées. Nous dirons alors que le taillage est *progressif*.

Dans ce cas, le mouvement de l'outil par rapport au flan résulte encore de la composition de deux mouvements bien distincts, mais essentiellement différents des deux mouvements considérés dans le taillage successif, quoique désignés par les mêmes noms :

— *le mouvement de coupe* qui est le mouvement de l'outil par rapport au chariot : la surface que son arête vive engendre par rapport à celui-ci n'est pas tangente à la denture à réaliser. Ainsi dans le cas des machines Reinecker, par exemple, le mouvement de coupe est celui du couteau sur son chariot, mouvement au cours duquel la trace de ce couteau sur le primitif décrit une courbe fermée en forme de carré à coins arrondis (§ 92 et 121);

— *le mouvement générateur* qui est le mouvement du chariot porte-outil par rapport au flan, et au cours duquel un plan  $P'$  lié à ce chariot glisse sur le plan primitif  $P$  de la crémaillère (ou roue plate) associée au flan. Le fait que le plan  $P$  est désolidarisé du chariot est caractéristique de ce nouveau mode de taillage.

Dans le taillage successif, le mouvement de coupe doit être très rapide par rapport à la rotation du flan, mais à cela près arbitraire, tandis que le

mouvement générateur est lié à la rotation du flan par la condition de roulement sans glissement des surfaces primitives.

Dans le taillage progressif, au contraire, le mouvement de coupe s'effectue à une vitesse exactement déterminée par la rotation du flan, alors que le mouvement générateur doit être très lent par rapport au précédent (en théorie infiniment lent), mais à cela près, quelconque.

On reconnaît tout de suite une machine à taillage successif au fait que le chariot porte-outil a un mouvement discontinu (excepté dans le taillage Fellows où l'emploi d'une roue taillante complète élimine cette discontinuité) et que le flan tourne lentement : dans la machine à taillage progressif, le chariot progresse *très lentement*, sans aucun à-coup, et le flan *tourne vite*.

Remarquons que le taillage progressif a l'avantage d'éviter l'échauffement inégal du flan qui est à redouter (car il peut provoquer des erreurs de division) dans le taillage successif.

En outre, ce taillage supprime le temps mort correspondant au retour de l'outil à sa position initiale, évite l'emploi d'un diviseur et, bien qu'il soit encore assez peu utilisé, permet de réaliser une assez grande diversité de dentures.

Inversement, les machines à taillage successif ordinaires permettent le taillage de roues pseudo-coniques, alors que les machines à taillage progressif ne le permettent généralement pas.

D'où, finalement, quatre catégories distinctes de machines dont nous étudierons, en particulier, les suivantes :

1° <i>Taillage des roues cylindriques . . . . .</i>	}	a) Taillage successif.	{	Machines : Sunderland, Fellows.
		b) Taillage progressif.	{	Machines : Pfafter, projet A, Reinecker.
2° <i>Taillage des roues coniques et pseudo-coniques . . . . .</i>	}	a) Taillage successif (roues coniques ou pseudo-coniques)..	{	Machines : Gleason-Couteaux, Heidenreich et Harbeck, Gleason-spirale.
		b) Taillage progressif (roues coniques) ..	{	Machines : CERlikon, projet B, Reinecker.

**8. Division adoptée dans cette étude.**

PREMIÈRE PARTIE. — Etablissement de quelques propriétés des enveloppes de surfaces.

Etude générale des engrenages taillés par la méthode des roulettes ordinaire.

Méthode des roulettes généralisée et application au taillage d'engrenages gauches.

DEUXIÈME PARTIE. — Taillage industriel des roues cylindriques.

TROISIÈME PARTIE. — Taillage industriel des roues coniques et pseudo-coniques.

## PREMIÈRE PARTIE

---

### CHAPITRE PREMIER

---

## ÉTUDE de QUELQUES PROPRIÉTÉS des ENVELOPPES de SURFACES

---

**9.** Considérons une surface invariable  $S$  en mouvement par rapport à deux repères  $R_1$  et  $R_2$ ; elle enveloppe par rapport à ces repères respectifs deux surfaces  $S_2$  et  $S_1$ . Le repère  $R_1$  est en mouvement par rapport à  $R_2$  et, dans ce mouvement,  $S_1$  enveloppe une surface  $\Sigma$ .

Soient, à l'instant  $t$ ,  $C_1$  et  $C_2$  les caractéristiques de  $S$  dans ses mouvements par rapport à  $R_1$  et  $R_2$ , et  $C$  la caractéristique de  $S_1$ , au même instant, dans son mouvement par rapport à  $S_2$ .

Désignons par  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  les complexes des normales attachés à l'instant  $t$  aux virations  $S/R_1$  et  $S/R_2$  et par  $\Gamma$  le complexe également attaché à la vibration  $S_1/R_2$ .

Nous allons établir la propriété suivante :

*Les surfaces  $\Sigma$  et  $S_2$  sont généralement distinctes, mais se raccordent le long de la courbe lieu des points communs à  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C$ .*

Soient, en effet,  $\vec{\Omega}_1$  et  $\vec{\Theta}_1$  les éléments (rotation et translation) de la vibration  $S/R_1$ ;  $[\vec{\Omega}_2, \vec{\Theta}_2]$  et  $[\vec{\Omega}, \vec{\Theta}]$  ceux des virations  $S/R_2$  et  $R_1/R_2$ . Le théorème de la composition des vitesses montre que le système de vecteurs  $[\vec{\Omega}_2, \vec{\Theta}_2]$  est équivalent au système  $[\vec{\Omega}_1, \vec{\Theta}_1] + [\vec{\Omega}, \vec{\Theta}]$ .

Par suite, le complexe  $\Gamma_2$  appartient au faisceau de complexes défini par  $\Gamma_1$  et  $\Gamma$ . Donc en un point commun à  $C_1$  et  $C$  la normale commune à  $S$ ,  $S_1$  et  $\Sigma$  appartient à  $\Gamma$  et, par conséquent, est normale à  $S_2$ . Autrement dit, les trois caractéristiques  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C$  sont bien, à chaque instant, concourantes.

Nous utiliserons cette propriété dans l'étude générale des engrenages gauches formés soit de roues cylindriques, soit de roues coniques.

**10.** Un cas particulier très important est le suivant :

*Si les caractéristiques  $C_1$  et  $C$  sont confondues à chaque instant, les surfaces  $S_2$  et  $\Sigma$  coïncident.*



En effet, les normales communes à  $S$ ,  $S_1$  et  $\Sigma$  le long de  $C_1$  et  $C$  supposées confondues appartiennent alors aux complexes  $\Gamma_1$  et  $\Gamma$ , donc aussi au complexe  $\Gamma_2$ . Alors  $C_2$  est confondue avec  $C_1$  et  $C$ .

Ce cas particulier s'applique, comme nous le verrons plus loin, aux engrenages parallèles ou concourants.

REMARQUES. — 1° Il se peut que  $S_2$  et  $\Sigma$  coïncident sans que  $C_1$  et  $C$  soient confondues : soient, par exemple, trois cylindres de révolution tangents entre eux deux à deux (*fig. 4*) et animés autour de leurs axes, supposés fixes, de mouvements quelconques; les caractéristiques  $C_1$  et  $C_2$  sont les génératrices de contact de  $S$  avec  $S_1$  et de  $S_1$  avec  $\Sigma$  : elles sont bien distinctes, et pourtant  $\Sigma$  coïncide avec l'enveloppe de  $S$ .

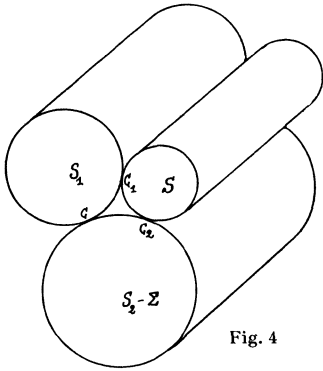


Fig. 4

2° Cependant, on peut affirmer que pour que  $\Sigma$  coïncide avec  $S_2$ , il est nécessaire que  $C_1$  et  $C$  soient confondues, dans les conditions suivantes : supposons que  $S$ ,  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $\Sigma$  soient des portions de surfaces sans singularité, chacune étant coupée en un seul point par l'une quelconques de ses normales; chacune d'elles peut être considérée comme partageant en deux régions l'ensemble des points de l'espace embrassés par ses normales. Supposons alors que  $S$  et  $S_2$  soient de part et d'autre de  $S_1$  :

les points de contact de  $S$  et  $\Sigma$  ne peuvent être que les points communs à  $C_1$  et  $C$ , mais si  $S_2$  coïncide avec  $\Sigma$ , ces points forment la ligne  $C_2$ , par suite  $C_1$  et  $C$  sont confondues.

3° Les surfaces  $S$  et  $S_1$  coïncident si toutes les normales à  $S$  appartiennent au complexe  $\Gamma_1$ , et réciproquement.

Il en est ainsi lorsque :

- $S$  est un cylindre animé d'un mouvement de translation parallèle aux génératrices;
- $S$  est une surface de révolution en rotation autour de son axe;
- $S$  est un hélicoïde (défini comme engendré par une courbe invariable animée d'un mouvement hélicoïdal  $\mathcal{A}$ ) animé lui-même du mouvement  $\mathcal{A}$ .

Exemple. — Un cylindre de révolution  $\mathcal{C}$  tangent à un plan fixe  $Q$  tourne autour de son axe fixe (*fig. 5*).

D'autre part, un plan  $P$ , muni d'un plan  $N$ , glisse sur  $Q$ . Soit  $\vec{\tau}$  la vitesse de translation de  $P$ ,  $\vec{\tau}_1$  et  $\vec{\tau}_2$  ses composantes suivant la perpendiculaire à la génératrice de contact  $\Delta$  et suivant la trace de  $N$  sur  $P$ .

Pourvu que  $\vec{\tau}_1$  soit la vitesse qui assurerait le roulement sans glissement de  $P$  sur  $\mathcal{C}$ , le plan  $N$  enveloppe par rapport à  $\mathcal{C}$ , et cela quelle que soit la vitesse  $\vec{\tau}_2$ , le même hélicoïde développable. Désignons par  $[P', N']$  la crémaillère

qui serait constamment en coïncidence avec  $[P, N]$  et qui aurait par rapport à  $Q$  la vitesse  $\vec{\tau}_1$  : les repères  $R_1$  et  $R_2$  sont ici  $P$  et  $\mathcal{C}$  ; les surfaces  $S$  et  $S_1$  sont respectivement  $N$  et  $N'$ .

**11.** Considérons maintenant une courbe  $C$  de grandeur invariable, en mouvement par rapport à deux repères  $R_1$  et  $R_2$  ; elle engendre par rapport à ces repères respectifs deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$ . Soit enfin  $\Sigma$  l'enveloppe de  $S_1$  dans son mouvement par rapport au repère  $R_2$ . Appelons  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  et  $\Gamma$  les trois complexes envisagés plus haut, à l'instant  $t$ .

Les normales à  $S_1$  le long de  $C$  appartiennent à  $\Gamma_1$  ; en un point commun à  $C$  et à la caractéristique de  $S_1$  dans le mouvement  $S_1/R_2$ , la normale à  $S_1$

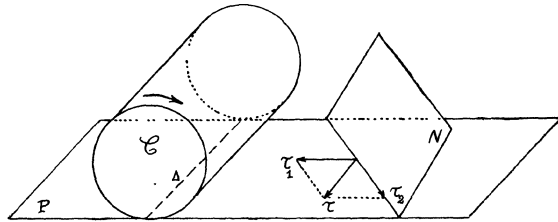


Fig. 5

appartient à  $\Gamma_1$  et  $\Gamma$ , donc à  $\Gamma_2$ . Par suite, en ce point, la normale considérée est aussi normale à  $S_2$ . D'où la propriété :

*Les surfaces  $\Sigma$  et  $S_2$  sont généralement distinctes, mais se raccordent.*

**12.** Un cas particulier est le suivant :

*Si la courbe  $C$  est précisément la caractéristique de  $S_1$  dans son mouvement par rapport à  $R_2$ , les surfaces  $\Sigma$  et  $S_2$  coïncident.*

En effet, dans ce cas, la normale à  $S_1$  le long de  $C$  appartient aux complexes  $\Gamma_1$  et  $\Gamma$ , donc à  $\Gamma_2$ . Par suite,  $\Sigma$  et  $S_2$  se raccordent le long de  $C$ , et cela pour toute position de la courbe génératrice  $C$  et, par conséquent, coïncident.

CONDITIONS de GÉNÉRATION des ENGRENAGES  
à ROUES CYLINDRIQUES

---

**13.** Il ne suffit pas que les surfaces des dentures conjuguées géométriquement définies soient théoriquement en contact; comme ces surfaces sont nécessairement matérialisées d'un certain côté, nous sommes conduits à étudier les conditions de *courbure* permettant de les amener effectivement en contact.

Je me bornerai au cas où la roue est taillée directement par la crémaillère correspondante, c'est-à-dire au cas où l'arête vive de l'outil appartient à la surface N. (Le taillage par machines Fellows et Pfauter échappe à cette étude : le fait que les dentures correspondantes sont susceptibles de prendre un mouvement les faisant glisser sur elles-mêmes et forment un assortiment, a suggéré de prendre une des roues de l'assortiment pour tailler les autres, en sorte que la crémaillère n'est pas matérialisée; il sera indispensable, dans ce cas particulier, de procéder à une étude directe).

**14. Conditions de taillage permettant d'éviter l'interférence locale de denture.**

Coupons la figure formée par la roue et la crémaillère par un plan normal à l'axe de la roue (*fig. 6*). La denture N de la crémaillère est coupée suivant un arc de courbe  $\nu$  que nous supposerons sans singularité.

Soient I la trace, sur le plan de figure, de la génératrice de contact de P et  $\mathcal{C}$ , M le pied d'une normale à  $\nu$  issue de I (M est un point de la caractéristique de N), et R le rayon de  $\mathcal{C}$ .

Prenons comme axes : IX la trace de P, IY dirigé vers le centre O de  $\mathcal{C}$ ; nous supposerons l'arc  $\nu$  tel que la normale en un quelconque de ses points fasse avec IX un angle aigu  $\phi$  gardant un signe constant au cours de l'engrènement.

Désignons par  $\mu$  et  $\mu'$  les centres de courbure de  $\nu$  et de son enveloppe au point M et soient  $l$  et  $m$  les mesures algébriques de  $\vec{IM}$  et  $\vec{I\mu}$  sur l'axe Ix ( $\widehat{IX, Ix} = \phi$ ).

Le théorème de Bobillier (B. 9) appliqué au cas présent donne la construction de  $\mu'$  : si l'on appelle U le point d'intersection de la normale en I à Ix

avec la droite qui joint  $\mu$  au centre de courbure de la roulante, le point  $\mu'$  est à l'intersection de  $l\alpha$  avec OU.

Cela posé, l'arc utile de  $\nu$  doit satisfaire aux conditions suivantes : *cet arc doit traverser le plan P; si  $\nu$  est matérialisé du côté convexe,  $\mu'$  doit être situé entre M et  $\mu$ , sinon  $\mu'$  doit être à l'extérieur du segment  $M\mu$ .*

Dans le système d'axes  $Ixy$  (fig. 6), l'équation de la droite OU s'obtient à partir des coordonnées de O et U; on en déduit :

$$\overline{I\mu'} = \frac{m R \sin \psi}{m + R \sin \psi}.$$

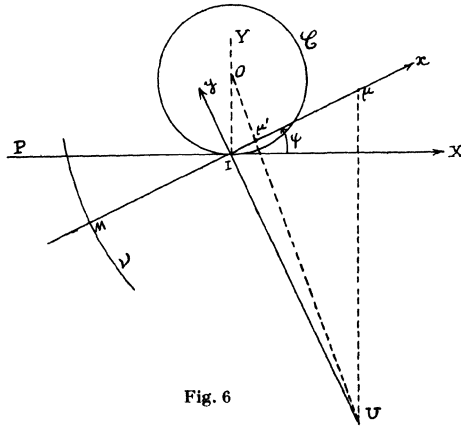
Or l'équation aux abscisses des points M et  $\mu$  est :

$$f(x) \equiv (x - l)(x - m) = 0.$$

On en tire :

$$f(\overline{I\mu'}) = - \left( \frac{m}{m + R \sin \psi} \right)^2 [R(m - l) \sin \psi - ml].$$

Donc  $f(\overline{I\mu'})$  a le signe contraire de celui de l'expression entre crochets.



Pour  $l=0$ , cette expression se réduit à :  $R\rho \sin \psi$  ( $\rho$  étant la mesure algébrique du rayon de courbure  $\overline{M\mu}$ ), qui a le signe de  $\rho\psi$ .

Si  $\nu$  est matérialisé du côté convexe, on doit avoir :

$$f(\overline{I\mu'}) < 0, \text{ cad : } R(m - l) \sin \psi - ml > 0$$

et cette condition devra être remplie pour  $l=0$ , puisque la portion utile de  $\nu$  doit couper le plan primitif.

*Conclusion.*

- |   |                                |
|---|--------------------------------|
| Si $\rho\psi$ est $> 0$ , $\nu$ doit être matérialisé du côté convexe et vérifier : | $R(m - l) \sin \psi - ml > 0;$ |
| Si $\rho\psi$ est $< 0$ , $\nu$ doit être matérialisé du côté concave et vérifier : | $R(m - l) \sin \psi - ml < 0.$ |

*Exemple.* — Supposons que  $\nu$  soit un arc de cercle dont le centre est à une distance de P égale à R et dont le rayon est  $\rho = \frac{8}{5} R$ ; supposons  $\psi > 0$  (fig. 7). Alors  $\rho\psi$  est positif : par suite,  $\nu$  devra être matérialisé du côté convexe, et sa portion utile est définie par la condition :

$$R(m - l) \sin \psi - ml > 0$$

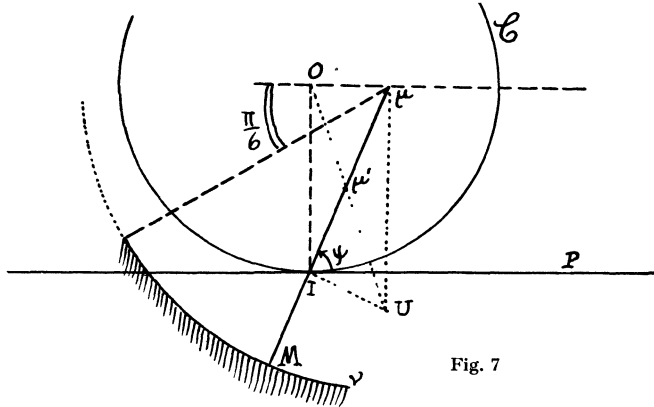


Fig. 7

qui devient ici :

$$\sin^3 \psi + \sin \psi - \frac{5}{8} > 0.$$

C'est-à-dire enfin :  $\psi > \frac{\pi}{6}$ . On en déduit la limitation de l'arc utile de  $\nu$ .

**15. Cas où  $\nu$  est rectiligne (fig. 8).**

La construction précédente montre qu'alors le centre de courbure  $\mu'$  de la développante enveloppée par  $\nu$  est la projection de O sur MI.

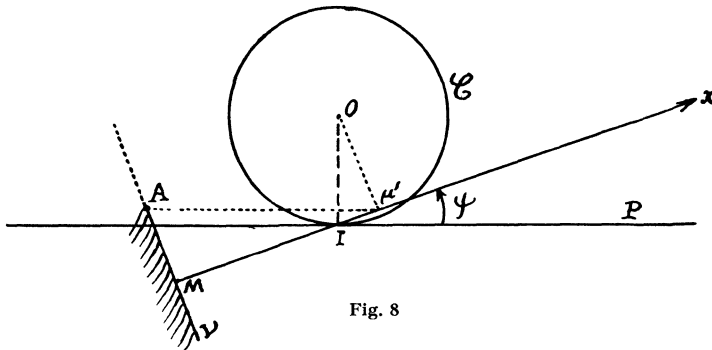


Fig. 8

Ce point  $\mu'$  doit être situé du côté de  $\nu$  qui n'est pas matérialisé : or,  $\psi$  étant constant,  $\mu'$  est fixe et la parallèle à la trace de P menée par  $\mu'$  coupe  $\nu$  en un point A qui limite la portion utile de  $\nu$ , c'est-à-dire celle qui coupe P.

Si  $\psi$  est positif, cette portion doit être matérialisée du côté du sens négatif de  $Ix$  (*fig.* 8); conclusion contraire si  $\psi$  est négatif.

**16. N étant toujours supposée sans singularité, son enveloppe a, en général, une arête de rebroussement.**

Reprenons les notations de la *figure* 6. Soit  $\vec{n}$  le vecteur unité de l'axe  $Ix$ ,  $\vec{t}$  celui de la tangente en M à  $v$  (avec  $\widehat{\vec{t}, \vec{n}} = +\frac{\pi}{2}$ ). Soit  $dM$  le déplacement élémentaire de M sur  $v$  et  $dM_1$  son déplacement élémentaire correspondant par rapport à  $\mathcal{C}$ .

Le théorème relatif à la composition des vitesses donne :

$$(1) \quad dM_1 = \vec{t} d\sigma - l \frac{du}{R} \vec{t}$$

$\sigma$  étant l'abscisse curviligne de M sur  $v$  et  $u$  l'abscisse de I sur IX.

Or, en différentiant la relation :

$$M = I + l\vec{n}$$

on a :

$$(2) \quad \vec{t} d\sigma = dI + \vec{n} dl + l d\vec{n}.$$

Or  $\frac{d\vec{n}}{d\sigma} = -\frac{\vec{t}}{\rho}$ , et en multipliant, scalairement les deux membres de (2) par  $\vec{t}$  il vient :

$$d\sigma = \sin \psi du - \frac{l}{\rho} d\sigma$$

et en remplaçant  $du$  dans la formule (1), on a :

$$(3) \quad dM_1 = \left[ 1 - \frac{l}{R \sin \psi} \left( 1 + \frac{l}{\rho} \right) \right] \vec{t} d\sigma.$$

L'enveloppe admet un point de rebroussement si  $dM_1 = 0$ , c'est-à-dire si la quantité entre crochets est nulle, ce qui donne la condition :

$$(4) \quad R \rho \sin \psi - l(\rho + l) = 0,$$

ou :

$$(4') \quad R(m - l) \sin \psi - ml = 0.$$

Si l'on compare cette relation aux conditions d'inégalité précédemment trouvées (§ 14), on voit que celles-ci expriment que l'on doit limiter N à une portion n'engendrant qu'une nappe de la surface enveloppée.

**17. Cas où la denture de la crémaillère est une surface d'égale pente.**

Les résultats précédents ont été obtenus sans apporter de restriction à la nature de la surface N : pratiquement, N est une surface d'égale pente (§ 3). Proposons-nous donc de compléter dans ce cas l'étude présente en cherchant

directement sur chaque génératrice le point où doit être limitée sa réalisation matérielle.

Soit  $\mathcal{C}$ , d'axe fixe, le primitif de la roue à tailler : il est tangent à un plan fixe  $Q$  le long de  $\Delta$  que nous prenons comme axe des  $X$  du trièdre fixe  $O(XYZ)$ , le plan  $Q$  étant le plan des  $XY$  (*fig. 9*). Soient  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , les vecteurs unités relatifs à ces trois axes. Le primitif  $P$  de la crémaillère glisse sur  $Q$  : soit  $A$  l'un de ses points, et lions lui un trièdre  $A(xyz)$  déduit de  $O(XYZ)$  par la translation  $\vec{O}\vec{A}$  parallèle à  $OY$ ; soit  $u$  la mesure algébrique de cette translation.

La surface  $N$  a pour trace sur  $P$  une courbe  $T$  pour laquelle nous désignerons par  $\vec{t}$  et  $\vec{n}$  les vecteurs unités de la tangente et de la normale en

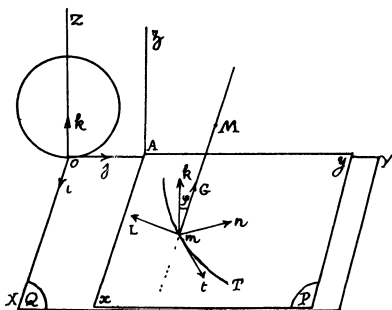


Fig. 9

un point  $m$  ( $\widehat{\vec{t}, \vec{n}} = +\frac{\pi}{2}$ ). Appelons  $\beta$  l'angle  $\widehat{\vec{i}, \vec{t}}$ , et  $s$  l'abscisse curviligne de  $m$  sur  $T$ .

Soit enfin  $\vec{G}$  le vecteur unité de la génératrice qui passe par  $m$ ,  $\vec{L}$  le vecteur unité tel que le trièdre trirectangle  $m(t, G, L)$  soit direct, et  $\varphi$  l'angle  $\widehat{\vec{G}, \vec{k}}$  ( $|\varphi|$  est l'angle de pression).

Un point  $M$  de  $N$  est alors défini par la relation :

$$(5) \quad M = m + g \vec{G},$$

$g$  étant la mesure algébrique de  $\vec{m}\vec{M}$ . Le point  $M$  appartiendra à la caractéristique de  $N$ , pour la valeur  $u$  considérée, si l'on a :

$$(\vec{i}, \vec{OM}, \vec{L}) = 0.$$

c'est-à-dire :

$$(6) \quad (u + y) \sin \varphi + g \cos \beta = 0,$$

$y$  étant l'ordonnée de  $m$  par rapport aux axes  $A(xyz)$ .

Cherchons sur chaque génératrice le point qui, au cours du mouvement, rencontrera l'arête de rebroussement de la surface développée par  $N$ .

Soit  $dM$  un déplacement élémentaire de  $M$  par rapport à  $N$  au voisinage de la caractéristique à l'instant  $(u)$ ,  $dM_1$  le déplacement correspondant par rapport à  $\mathcal{C}$ ; le théorème relatif à la composition des vitesses donne :

$$dM_1 = dM - \frac{du}{R} \vec{t} \wedge \vec{OM},$$

Or, en différentiant (5), par rapport à  $N$  et posant :  $\frac{ds}{d\beta} = \rho$ , on a :

$$(7) \quad dM = \left(1 - \frac{g \sin \varphi}{\rho}\right) ds \vec{t} + dg \vec{G}.$$

De plus :

$$-\vec{t} \wedge \vec{OM} = g \cos \varphi \sin \beta \vec{t} + g \cos \varphi \cos \beta \vec{n} - (u + y + g \sin \varphi \cos \beta) \vec{k}.$$

En tirant  $u$  et  $du$  de (6), on a finalement :

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} dM_1 = \left(1 - \frac{g \sin \varphi}{\rho}\right) ds \vec{t} + dg \vec{G} - \frac{g \cos \varphi}{R} \\ \left[ \sin \beta \left(1 - \frac{g}{\rho \sin \varphi}\right) ds + \frac{\cos \beta}{\sin \varphi} dg \right] \left( \sin \beta \vec{t} + \frac{\cos \beta}{\sin \varphi} \vec{G} \right). \end{array} \right.$$

Le point considéré sera sur l'arête de rebroussement de l'enveloppe  $\mathcal{Q}$  de  $N$  si l'on peut choisir  $\frac{dg}{ds}$  de manière que  $dM_1 = 0$ , ce qui donne en éliminant  $ds$  et  $dg$  entre les deux relations linéaires et homogènes obtenues :

$$(9) \quad \boxed{1 - \frac{g \sin \varphi}{\rho} - \frac{g \cos \varphi}{R} \left(1 - \frac{g}{\rho \sin \varphi} + \cos^2 \beta \cot^2 \varphi\right) = 0}.$$

La relation (7) montre que l'arête de rebroussement de  $N$  est définie par  $g = \frac{\rho}{\sin \varphi}$ ; or, si l'on désigne par  $f(g)$  le produit du premier membre de (9) par  $\rho \operatorname{tg} \varphi$ , le coefficient de  $g^2$  dans  $f(g)$  est  $> 0$ , et l'on a :

$$f\left(\frac{\rho}{\sin \varphi}\right) = \frac{\rho^2}{R} \cot^2 \varphi \sin^2 \beta > 0,$$

par suite,  $\frac{\rho}{\sin \varphi}$  est extérieur aux racines de (9), et comme la partie utile de la génératrice de  $N$  ne peut excéder la demi-droite limitée à l'arête de rebroussement et coupant  $P$ , on a les conclusions suivantes :

Si l'arête de rebroussement de  $N$  est du même côté que  $\mathcal{C}$  par rapport à  $P$ , les racines de (9) sont positives ou imaginaires, et  $g$  doit être inférieur à  $\frac{\rho}{\sin \varphi}$  et à la plus petite racine.

Si l'arête de rebroussement et  $\mathcal{C}$  sont de part et d'autre de  $P$ , les racines de (9) sont de signe contraire, et, dans ce cas, la génératrice doit être limitée aux deux points correspondants (car  $\frac{\rho}{\sin \varphi}$  est extérieur aux racines).



Il résulte de cette étude que la limitation de la surface N est moins simple que ne l'a indiqué M. PÉRIGNON à propos du taillage de la denture Böttcher (B. 16. t. I).

Remarquons que si N est un plan parallèle à Δ, l'équation (9) se réduit à :

$$(10) \quad g = R \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi},$$

ce qui confirme un résultat déjà obtenu (§ 15).

Enfin, si N est un plan dont la trace T fait l'angle β avec  $ox$ , l'équation générale donne :

$$(11) \quad g = R \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi (\sin^2 \varphi + \cos^2 \beta \cos^2 \varphi)}.$$

### 18. Evidement du pied au cours du taillage.

Soit un cylindre de révolution fixe  $\mathcal{C}$ , un plan P roulant sans glisser sur  $\mathcal{C}$ , M un point lié à P et  $m$  sa projection sur P (fig. 10).

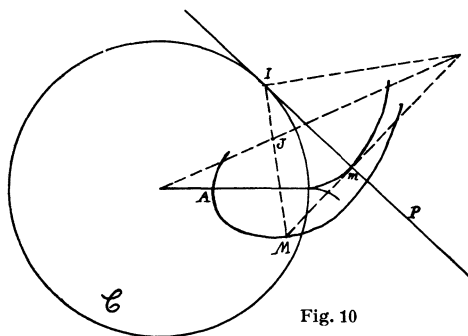


Fig. 10

Nous appellerons la courbe décrite par M « *développante allongée* » ou « *développante raccourcie* » suivant que M est du même côté que  $\mathcal{C}$  par rapport à P ou non.

La développante décrite par  $m$  sera dite « *développante correspondante* ».

La construction d'Euler-Savary donne le centre de courbure J de la courbe décrite par M.

Supposons maintenant que M soit l'extrémité, située du même côté de P que  $\mathcal{C}$ , de l'arc utile  $\nu$  suivant lequel la surface N de la dent de crémaillère est coupée par un plan normal à l'axe de  $\mathcal{C}$ . On sait que l'enveloppe de la courbe  $\nu$  par rapport à  $\mathcal{C}$  est l'enveloppe des trajectoires des différents points de  $\nu$ . Prenons comme cas de figure celui où  $\nu$  est tangente en M à son enveloppe  $\delta$  (fig. 11).

La développante allongée décrite par  $M$  est, en vertu de la propriété précédente, tangente en  $M$  à  $\delta$ , dans le cas de figure considéré : soit  $A$  son sommet. Chaque point de la portion rectiligne  $MM'$  de la tête de la dent de crémaillère décrit, par rapport à  $\mathcal{C}$ , une développante allongée déduite de celle décrite par  $M$  par une rotation autour de l'axe  $\mathcal{C}$ . Considérons en particulier la courbe décrite par  $M'$ , et soit  $A'$  son sommet; on voit que le profil qui raccorde les pieds des arcs des dentures se faisant vis-à-vis est constitué par deux arcs de développantes allongées raccordés par un arc de cercle  $\overline{AA'}$ .

**19. Réalisation d'un engrenage à axes parallèles.**

Considérons deux roues correspondant à deux crémaillères identiques  $[P_1, N_1]$  et  $[P_2, N_2]$ ; ces crémaillères étant en coïncidence, les cylindres primitifs  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  des deux roues se raccordent le long d'une génératrice ayant pour trace le point  $I$  sur le plan de figure normal aux axes (fig. 12). Enfin, bornons-nous au cas où  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sont de part et d'autre de  $(P_1 P_2)$  (engrenage extérieur).

Soit  $\nu$  la trace de  $(N_1 N_2)$  sur le plan de figure,  $\rho$  le rayon de courbure de  $\nu$  en  $M$ , et soient  $R_1$  et  $R_2$  les rayons de  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ . Pour la roue  $\mathcal{C}_1$ ,  $(M\mu, \phi)$

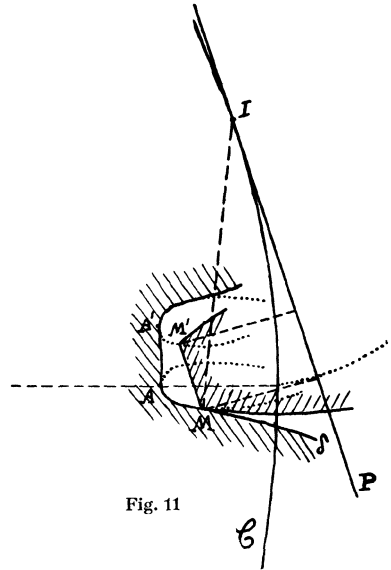


Fig. 11

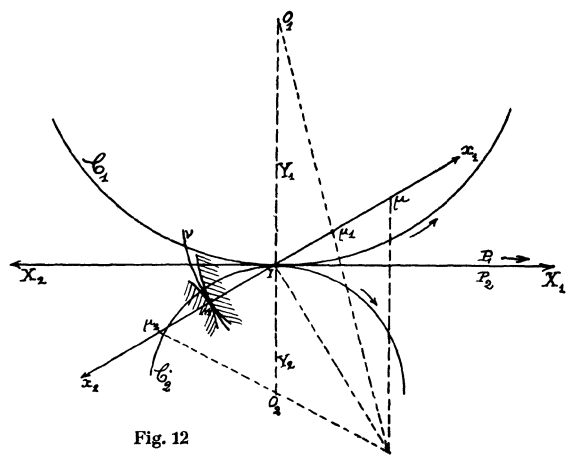


Fig. 12

est positif, donc  $\nu$  doit être matérialisé du côté convexe, et doit être limité de manière à satisfaire à la condition :

$$(12) \quad R_1 \rho \sin \psi - l(\rho + l) > 0.$$

Pour la roue  $\mathcal{C}_2$  ( $\overline{M\rho}$ ,  $\psi$ ) est négatif, donc  $\nu$  doit être matérialisé du côté concave. De plus, on doit avoir :

$$(13) \quad -R_2 \rho \sin \psi - l(\rho + l) < 0.$$

(le premier membre se déduit de celui de (12) en remplaçant  $R_1$  par  $R_2$  et en changeant  $\rho$  en  $-\rho$  et  $l$  en  $-l$ ).

Les conditions (12) et (13) doivent être simultanément remplies, et limitent  $\nu$  à une portion d'arc coupant le plan  $(P_1 P_2)$  (Remarquons qu'elles sont satisfaites l'une et l'autre pour  $l=0$ ).

Cela posé, imaginons la crémaillère matérielle équivalente à l'outil qui a taillé la roue  $\mathcal{C}_1$ ; elle est limitée par une surface  $\mathcal{G}$  formée par les dentures et par les portions de plans parallèles au primitif qui relie les dentures par leurs pieds et par leurs têtes. La surface qui limite pareillement la crémaillère matérielle relative à  $\mathcal{C}_2$  est égale à  $\mathcal{G}$ , mais ces deux crémaillères sont respectivement matérialisées des deux côtés de  $\mathcal{G}$ . Par suite, on pourra associer l'une quelconque des roues taillées par la première avec l'une quelconque de celles taillées par la seconde : il ne peut y avoir interférence d'aucune sorte, car, si l'on imagine les deux roues en prise, elles sont entièrement situées de part et d'autre de  $\mathcal{G}$ .

A la condition d'*emboîtement* des deux crémaillères matérielles, nous devons en ajouter une autre, également très importante : comme c'est une même machine qui doit réaliser les deux crémaillères, la modification de réglage nécessaire pour passer de l'une à l'autre exige, pour être aussi simple que possible, qu'elles soient *symétriques* (au sens de la symétrie par rapport à un plan).

Je dirai que l'engrenage est *parfait* si les deux roues qui le composent ont été engendrées à partir de deux crémaillères matérielles *emboîtables* et *symétriques* <sup>(9)</sup>.

L'engrenage parfait à axes parallèles a les propriétés suivantes :

1° Si T et T' sont les traces sur le primitif P des deux faces N et N' d'une dent de crémaillère, on passe de T à T' par une translation parallèle au sens de progression de la crémaillère, et ayant pour mesure  $\frac{p}{2}$ , p étant le pas (c'est l'égalité des pleins et des creux dans le primitif).

2° Dans le cas où une crémaillère matérielle admet un plan de *symétrie*, les deux crémaillères précédentes sont rigoureusement identiques, et deux roues quelconques ainsi taillées sont conjuguées : je dirai alors que l'assortiment de ces roues est *bilatéral*. Dans le cas général où l'on ne peut associer que deux roues correspondant aux deux crémaillères distinctes, je dirai que l'assortiment est *unilatéral*.

---

(9) Ces deux conditions doivent être regardées comme suffisantes ; cependant la condition d'emboîtement est, en pratique, toujours vérifiée ; quant à la seconde, si on ne la réalise parfois que d'une manière approximative, c'est pour tailler les roues en une seule passe : c'est le cas du taillage de la denture Bottcher à chevrons (§ 92).



suffit que  $(N_1 N_2)$  soit un cylindre de génératrices parallèles à  $\vec{\tau}$ . Supposons qu'il en soit ainsi : on a bien défini un engrenage gauche.

Les caractéristiques de  $N_1$  et  $N_2$  dans leurs mouvements relatifs à  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sont en général distinctes, par suite, l'engrenage gauche que nous venons de définir est, en général, à contact ponctuel.

Un cas particulier très important est celui où  $(N_1 N_2)$  se réduit à un plan (fig. 14). Dans ce cas, la *courbe d'engrènement* est la perpendiculaire à  $(N_1 N_2)$  menée du point de rencontre I des génératrices de raccordement de  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  avec leur plan tangent commun.

Désignons par  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  les dentures enveloppées respectivement par  $N_1$  et  $N_2$  :  $\mathcal{D}_2$  n'est pas en général l'enveloppe de  $\mathcal{D}_1$  dans son mouvement par

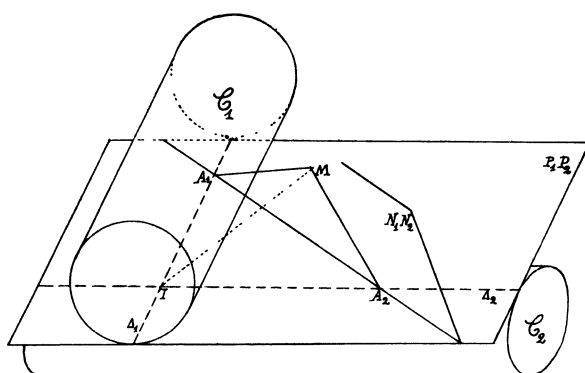


Fig. 14

rapport à  $\mathcal{C}_2$  mais cette enveloppe se raccorde avec  $\mathcal{D}_2$  le long du lieu par rapport à  $\mathcal{D}_2$  du point de contact des dentures conjuguées (§ 9).

Enfin, la portion utile de la surface cylindrique  $(N_1 N_2)$  est définie par les deux mêmes conditions que dans le cas de l'engrenage à axes parallèles : de même, si l'on considère les deux crémaillères matérielles équivalentes aux outils qui taillent deux roues conjuguées, celles-ci seront entièrement situées de part et d'autre de la surface  $\mathcal{G}$  précédemment définie (§ 19), et, par conséquent, toute interférence est impossible.

## 22. Remarques.

1° L'engrenage gauche ainsi défini peut être à contact linéaire : il faut et il suffit pour cela qu'il existe sur  $(N_1 N_2)$  une courbe le long de laquelle les normales à cette surface rencontrent à la fois  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  : c'est le cas où  $N_1$  coupe  $P_1$  orthogonalement. Alors l'enveloppe de  $N_1$  est la même que celle de son plan tangent le long de sa trace sur  $P_1$ , c'est-à-dire un hélicoïde développable. Un tel engrenage n'est pas réalisable pratiquement à cause des interférences considérables qui sont inévitables (§ 57).

2° La définition précédente d'un engrenage gauche peut être généralisée : soient en effet  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  les lieux du point de contact de  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  par rapport aux surfaces cylindriques  $N_1$  et  $N_2$ . On pourrait remplacer la surface  $N_1$  de la crémaillère  $[P_1, N_1]$  par une surface arbitraire se raccordant avec  $N_1$  le long de  $\gamma_1$ ; de même, on pourrait remplacer  $N_2$  par une autre surface tangente à  $N_2$  le long de  $\gamma_2$ .

A partir des crémaillères ainsi définies, on réaliserait un engrenage gauche ayant même ligne d'engrènement que celui qui provient des crémaillères  $[P_1, N_1]$  et  $[P_2, N_2]$ .

---

CONDITIONS de GÉNÉRATION  
des ENGRENAGES à ROUES CONIQUES

**23.** Comme dans le cas des engrenages à roues cylindriques, nous allons étudier les conditions imposées à la surface de la dent de roue plate taillante pour que les dentures conjuguées, géométriquement définies, puissent effectivement être amenées en contact quand elles sont matérialisées.

**24. Conditions de taillage d'une roue conique.**

Considérons une roue plate  $[P, N]$  et soit  $S$  le sommet du cône primitif  $\mathfrak{K}$  de la roue qu'elle taille. Coupons l'ensemble par une sphère de centre  $S$  et de

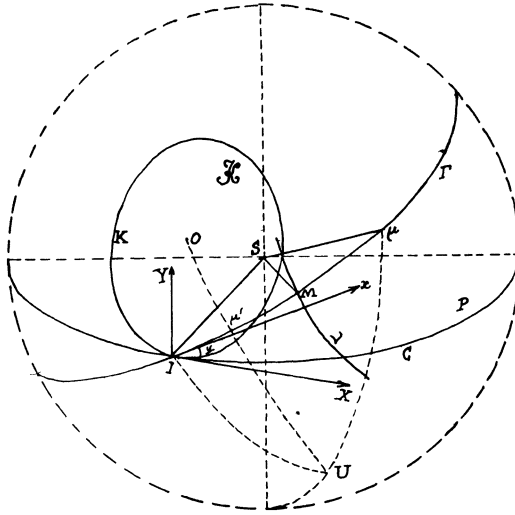


Fig. 15

rayon arbitraire  $r$  : le cône  $\mathfrak{K}$  est coupé suivant un cercle  $K$  tangent en un point  $I$  au grand cercle  $C$  section de  $P$  ; enfin,  $N$  est coupée suivant un arc de courbe  $v$  (*fig. 15*).

Nous supposons que lorsque  $N$  est réellement en contact avec la denture enveloppée, le point caractéristique  $M$  sur  $v$  est situé sur l'hémisphère d'axe  $SI$  et contenant  $I$ .

On appelle habituellement *centre de courbure sphérique de  $\nu$  en M* l'un des deux points où la sphère est coupée par la droite polaire associée à M. Pour éviter toute confusion, je conviendrai d'appeler ainsi celui  $\mu$  de ces deux points qui est tel que l'angle  $\widehat{MS\mu}$  soit inférieur à  $\frac{\pi}{2}$ . Ainsi, à tout point M de  $\nu$  correspond un centre de courbure sphérique qui est unique pourvu que le plan osculateur en M ne passe pas par S.

Au cours de l'engrènement du cône  $\mathfrak{K}$  et de la roue plate, la courbe  $\nu$  enveloppe une courbe cosphérique et liée à  $\mathfrak{K}$  : le point caractéristique M de  $\nu$  est tel que le grand cercle  $\Gamma$  passant par I et M soit orthogonal à  $\nu$ .

Prenons comme axes : IX tangente à C IY perpendiculaire à P et située par rapport à P dans la même région que  $\mathfrak{K}$ . Nous supposerons l'arc  $\nu$  tel que la tangente Ix à  $\Gamma$  fasse avec IX un angle aigu  $\psi$  gardant un signe constant pendant toute la durée de l'engrènement de  $\nu$ .

Soit O le centre de courbure sphérique du cercle K, et  $\mu'$  le centre de courbure sphérique en M de l'enveloppe de  $\nu$  : le théorème de Bobillier relatif aux enveloppes des courbes sphériques donne la construction de  $\mu'$  : soit U un point commun au grand cercle passant par I et normal à  $\Gamma$  et au grand cercle passant par  $\mu$  et normal à C (*fig. 15*); le grand cercle passant par U et O coupe au point  $\mu'$  le demi-cercle  $\Gamma$  qui est partagé par M en deux arcs égaux.

Remarquons que si l'on désigne par  $O_1, M_1, \mu_1, U_1, \mu'_1$ , les perspectives des points O, M,  $\mu$ , U,  $\mu'$ , effectuées sur le plan XIY de S comme point de vue, les grands cercles ont pour perspectives des droites; par suite, la construction sphérique de  $\mu'$  a pour perspective une construction plane qui est précisément (*fig. 16*) celle qui a été déduite du théorème de Bobillier dans le plan.

La recherche de la portion utile de la courbe  $\nu$  et du côté de cet arc à matérialiser pourra, grâce à cette remarque, être déduite des calculs correspondants faits à propos du taillage d'une roue cylindrique par crémaillère.

Appelons *côté concave* de l'arc  $\nu$  en M la portion de surface sphérique qui se trouve du même côté que  $\mu$  par rapport au plan du grand cercle tangent à  $\nu$  en M, l'autre côté étant dit *convexe*.

L'arc utile de  $\nu$  doit alors satisfaire aux conditions suivantes : *il doit traverser le plan P; si  $\nu$  est matérialisé du côté convexe,  $\mu'$  doit être situé entre M et  $\mu$ , sinon  $\mu'$  doit être situé en dehors de l'arc de grand cercle  $\widehat{M\mu}$ .*

Le cercle  $\Gamma$  étant orienté comme la tangente Ix, posons :

$$\widehat{SI}, \widehat{SM} = \lambda; \widehat{SI}, \widehat{S\mu} = \theta; \overline{IM}_1 = l_1; \overline{I\mu}_1 = m_1; IO_1 = R_1$$

(*fig. 17*), et soit  $\alpha$  le demi-angle au sommet du cône  $\mathfrak{K}$ .

On a alors :

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{l_1}{r}; \operatorname{tg} \theta = \frac{m_1}{r}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{R_1}{r}.$$

Supposons, par exemple, que  $\nu$  soit matérialisé du côté convexe : alors  $\mu'$  doit être situé sur le petit arc  $\widehat{M\mu}$ . La parallèle à Ix menée par S partage  $\Gamma$



en deux demi-cercles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ ;  $M$  étant supposé sur  $\Gamma_1$ , si  $\mu$  est aussi sur  $\Gamma_1$ , pour que  $\mu'$  soit sur le petit arc  $\widehat{M\mu}$ , il faut et il suffit que sa perspective  $\mu'$  soit sur le vecteur  $\overrightarrow{M_1\mu_1}$ , c'est-à-dire que l'on ait, d'après le résultat obtenu au Chapitre II (§ 14) :

$$R_1 (m_1 - l_1) \sin \psi - m_1 l_1 > 0.$$

c'est-à-dire :

$$\operatorname{tg} \alpha (\operatorname{tg} \theta - \operatorname{tg} \lambda) \sin \psi - \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \lambda > 0.$$

Si  $\mu$  est sur  $\Gamma_2$ ,  $\mu'_1$  doit être extérieur au vecteur  $\overrightarrow{M_1\mu_1}$ , par suite, le premier

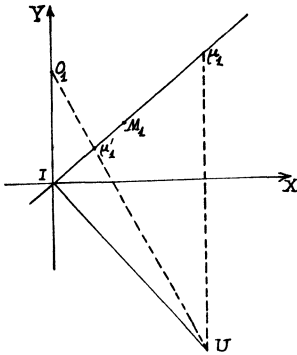


Fig. 16

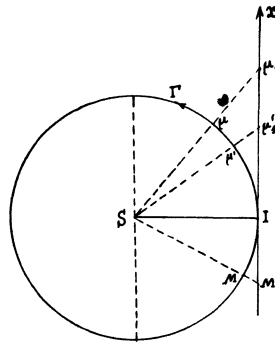


Fig. 17

membre de la dernière condition doit être négatif. Mais il suffit de multiplier les deux membres par  $\cos \theta$  pour avoir finalement la condition unique :

$$\operatorname{tg} \alpha \sin (\theta - \lambda) \sin \psi - \sin \theta \sin \lambda > 0.$$

De plus, la portion utile de  $N$  devant couper  $P$ , cette inégalité doit être vérifiée pour  $\lambda = 0$ , ce qui exige que l'on ait alors  $\theta\psi > 0$ , c'est-à-dire  $\rho\psi > 0$  (en posant  $\widehat{SM}, S^\mu = \rho$ ).

*Conclusion.*

Si $\rho\psi$ est $> 0$ , $\nu$ doit être matérialisé du côté convexe et vérifier :	$\operatorname{tg} \alpha \sin (\theta - \lambda) \sin \psi - \sin \theta \sin \lambda > 0;$
Si $\rho\psi$ est $< 0$ , $\nu$ doit être matérialisé du côté concave et vérifier :	$\operatorname{tg} \alpha \sin (\theta - \lambda) \sin \psi - \sin \theta \sin \lambda < 0.$

### 25. Cas où $\nu$ est un arc de grand cercle.

Les notions de côté concave et de côté convexe de  $\nu$  disparaissent. Mais la construction déduite du théorème de Bobillier est toujours valable (*fig. 15*). Appelons  $\mu$  celui des deux centres de courbure sphériques de  $\nu$  en  $M$  qui est tel

que sur le cercle  $\Gamma$  supposé orienté comme précédemment, on ait  $\widehat{SM}, \widehat{S\mu} = +\frac{\pi}{2}$ .  
Supposons encore que  $\nu$  soit matérialisé du côté situé par rapport à  $M$  dans le sens négatif de  $\Gamma$ . Nous sommes alors ramenés aux conditions du cas général avec la seule particularité :

$$\rho = \theta - \lambda = \frac{\pi}{2}.$$

L'arc  $\nu$  doit vérifier la condition :

$$\operatorname{tg} \alpha \sin \psi - \sin \lambda \cos \lambda > 0,$$

laquelle doit être satisfaite, en particulier, lorsque  $\lambda = 0$  : elle suppose donc  $\psi > 0$ .

*Conclusion.*

Si  $\psi$  est  $> 0$ ,  $\nu$  doit être matérialisé du côté situé par rapport à  $\mu$  dans le sens négatif de  $\Gamma$ , et vérifier :

$$\operatorname{tg} \alpha \sin \psi - \sin \lambda \cos \lambda > 0;$$

Si  $\psi$  est  $< 0$ ,  $\nu$  doit être matérialisé de l'autre côté, et vérifier :

$$\operatorname{tg} \alpha \sin \psi - \sin \lambda \cos \lambda < 0.$$

*Exemple.* — Supposons que la surface  $N$  soit un plan passant par  $O$  (dentures droites taillées aux couteaux Gleason), et soit  $\frac{\pi}{2} - \varphi$  l'angle aigu sous lequel il coupe  $P$  ( $\varphi$  est donc l'angle de pression). Enfin, supposons  $\psi$  positif,

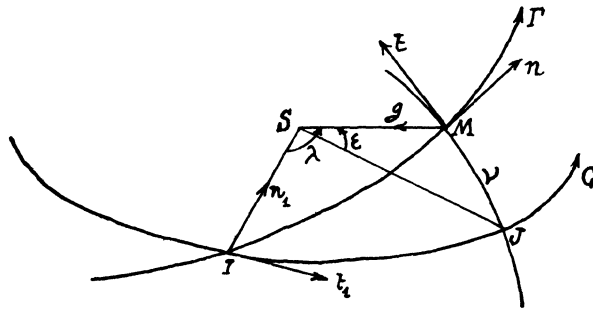


Fig. 18

par exemple. La condition à laquelle  $\nu$  doit satisfaire ( $\operatorname{tg} \alpha \sin \psi - \sin \lambda \cos \lambda > 0$ ) est évidemment remplie si  $\lambda$  est  $< 0$ ; supposons donc  $\lambda > 0$  et cherchons sa limite.

Soit  $J$  le point où le cercle  $C$  est coupé par l'arc de grand cercle  $\nu$  (fig. 18). Dans le triangle sphérique  $IMJ$ , on a :

$$(1) \quad \sin \varphi = \sin \psi \cos \lambda.$$

En remplaçant  $\psi$  par sa valeur dans l'inégalité précédente, celle-ci devient :

$$(2) \quad \sin^3 \lambda - \sin \lambda + \operatorname{tg} \alpha \sin \varphi > 0.$$

La formule (1) montre que  $\lambda$  reste  $\leq \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ .

Etudions les variations de la fonction :

$$y = x^3 - x + \operatorname{tg} \alpha \sin \varphi.$$

quand  $x$  varie de 0 à  $\cos \varphi$ . La dérivée  $\frac{dy}{dx}$  s'annule pour  $\sin \lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , c'est-à-dire pour  $\lambda_0 = 35^\circ 16'$ , valeur qui appartient toujours à l'intervalle  $0, \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ , car  $\varphi$  n'excède guère  $20^\circ$ .

Donc, si le minimum de la fonction  $y$  est positif, c'est-à-dire si l'on a :

$$\operatorname{tg} \alpha > \frac{2}{3\sqrt{3} \sin \varphi}$$

la condition (2) est toujours satisfaite.

Au contraire, si l'on a  $\operatorname{tg} \alpha < \frac{2}{3\sqrt{3} \sin \varphi}$ , la courbe représentative de  $y$  a la forme indiquée à la *figure 19*, et la condition (2) devient :

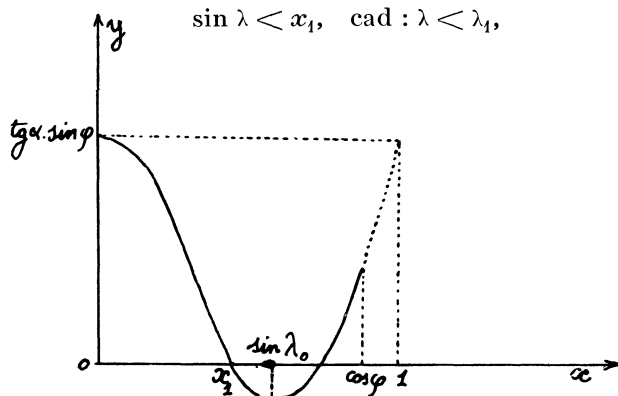


Fig. 19

$x_1$  étant l'abscisse du point le plus proche de 0 où la courbe coupe  $ox$ , et  $\lambda_1$  l'angle aigu dont le sinus est  $x_1$ .

Appelons  $\varepsilon$  l'angle  $\widehat{JSM}$  (*fig. 18*). La condition imposée à  $\lambda$  se traduit simplement en fonction de  $\varepsilon$ ; on a en effet dans le triangle sphérique  $IJM$  :

$$(3) \quad \frac{\sin \varepsilon}{\sin \psi} = \frac{\sin \lambda}{\cos \varphi},$$

soit, en tenant compte de (1) :

$$(4) \quad \sin \varepsilon = \operatorname{tg} \lambda \operatorname{tg} \varphi.$$

La relation (4) transforme la condition :  $\lambda < \lambda_1$  en :

$$\sin \varepsilon < \operatorname{tg} \lambda_1 \operatorname{tg} \varphi,$$

qui définit la portion utile de la surface N.

Application numérique :

Supposons :  $\varphi = 20^\circ$  et  $\alpha$  tel que :  $\operatorname{tg} \alpha \sin \varphi = \frac{3}{8}$  ( $\alpha = 21^\circ 45'$ ).

On a alors :  $x_1 = \frac{1}{2}$  et donc  $\lambda_1 = \frac{\pi}{6}$ .

On devra avoir :  $\sin \varepsilon < \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{3}}$ , soit  $\varepsilon < 11^\circ 52'$ .

**26. N étant supposée sans singularité, son enveloppe a en général une arête de rebroussement.**

Considérons la *figure 18* dans laquelle nous supposerons maintenant  $\nu$  quelconque. Soit  $M(tng)$  un trièdre trirectangle direct tel que les vecteurs  $\vec{t}, \vec{n}, \vec{g}$  aient pour longueur l'unité,  $\vec{n}$  étant tangent à  $\Gamma$  et orienté comme  $\Gamma$ ,  $\vec{g}$  dirigé de  $M$  vers  $S$ .

Soit de même  $\vec{I}t_1$  le vecteur unité relatif au cercle  $C$  orienté, et  $\vec{I}n_1$  le vecteur unité dirigé de  $I$  vers  $S$ . Soit enfin  $\sigma$  l'abscisse curviligne de  $M$  sur  $\nu$ , et  $ru$  celle de  $I$  sur  $C$ .

Soit  $dM_1$  le déplacement élémentaire de  $M$  sur l'enveloppe de  $\nu$  correspondant à son déplacement :  $dM = \vec{t} d\sigma$  sur  $\nu$ .

Le théorème relatif à la composition des vitesses donne :

$$(5) \quad dM_1 = \vec{t} d\sigma + \vec{t} \cdot r \sin \lambda \cot \alpha du.$$

Nous aurons la relation entre  $d\sigma$  et  $du$  en différentiant :  $\vec{t} \cdot \vec{n}_1 = 0$ , d'où :

$$\vec{t} d\vec{n}_1 + \vec{n}_1 d\vec{t} = 0$$

Or :

$$d\vec{n}_1 = -\vec{t}_1 du \quad \text{et} \quad d\vec{t} = \frac{\vec{n}_2}{R} d\sigma.$$

$\vec{n}_2$  étant le vecteur unité relatif à la normale principale à  $\nu$  en  $M$ ,  $R$  le rayon de courbure correspondant.

En remplaçant  $d\vec{n}_1$  et  $d\vec{t}$  par leur valeur, il vient :

$$\vec{t} \cdot \vec{t}_1 du = \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 \frac{d\sigma}{R}.$$

Or,  $\vec{t} \cdot \vec{t}_1$  s'évalue sur la *figure 18* : on a  $\vec{t} \cdot \vec{t}_1 = -\sin \phi$ . D'autre part, si l'on prend comme plan de figure le plan de  $\Gamma$  (*fig. 20*), on a en conservant les notations déjà introduites :

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = \sin \theta \quad \text{et} \quad R = r \sin(\theta - \lambda).$$

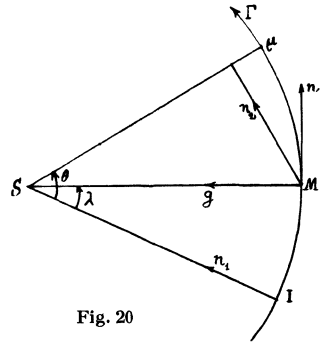


Fig. 20

La relation entre  $du$  et  $d\sigma$  est donc finalement :

$$-\sin \psi \, du = \frac{\sin \theta}{r \sin (\theta - \lambda)} \, d\sigma,$$

d'où, en portant dans (5) :

$$(6) \quad dM_1 = \vec{t} \, d\sigma \left[ 1 - \frac{\sin \lambda \cot \alpha \sin \theta}{\sin \psi \sin (\theta - \lambda)} \right].$$

L'enveloppe de  $v$  admet un point de rebroussement si  $dM_1 = 0$ , c'est-à-dire si l'on a :

$$(7) \quad \operatorname{tg} \alpha \sin (\theta - \lambda) \sin \psi - \sin \theta \sin \lambda = 0.$$

Si l'on compare cette relation aux conditions qui limitent la courbe  $v$ , celles-ci expriment que l'on doit limiter  $N$  à une portion n'engendrant qu'une seule nappe de la surface enveloppée.

### 27. Cas où la denture de la roue plate est une surface d'égalé pente.

Dans ce cas, nous pouvons compléter l'étude précédente en cherchant

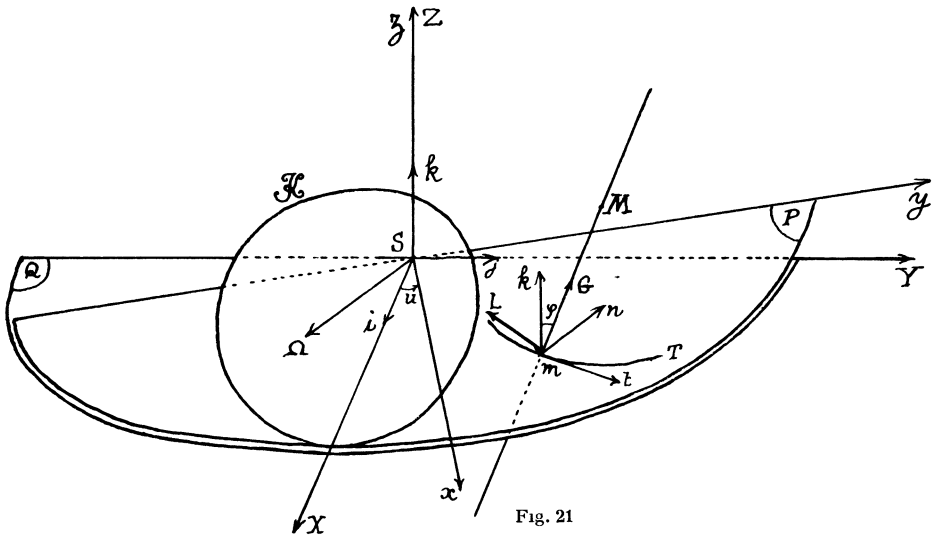


Fig. 21

directement sur chaque génératrice le point qui correspond à l'arête de rebroussement de l'enveloppe de  $N$ .

Soit  $\mathcal{K}$  le cône primitif d'axe fixe, de demi-angle  $\alpha$  et tangent au plan fixe  $Q$  le long de  $SX$ . Au plan primitif  $P$  de la roue plate lions les axes  $S(xyz)$  déduits par une rotation d'angle  $u$  des axes fixes  $S(XYZ)$  (fig. 21).

Soient  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , les vecteurs unités relatifs aux axes fixes,  $\vec{t}$  et  $\vec{n}$  les vecteurs unités de la tangente et de la normale à la trace  $T$  de  $N$  sur  $P$  ( $\widehat{\vec{t}, \vec{n}} = +\frac{\pi}{2}$ ),  $(r, \theta)$  les coordonnées polaires d'un point  $m$  de  $T$ , et  $s$  l'abscisse curviligne de ce point.

Posons :  $\widehat{ox, \vec{i}} = \theta + \beta$ ; désignons par  $\vec{G}$  le vecteur unité de la génératrice de  $m$ , et par  $\vec{L}$  un vecteur unité tel que le trièdre  $m(\vec{i}, \vec{G}, \vec{L})$  soit direct et trirectangle.

Soit enfin :  $\varphi = \widehat{\vec{G}, \vec{k}}$  ( $|\varphi|$  est l'angle de pression).

Un point M de N est alors défini par la relation :

$$(8) \quad M = m + g \vec{G},$$

$g$  étant la mesure algébrique de  $\vec{mM}$ . Le point M appartiendra à la caractéristique de N, pour la valeur  $u$  considérée, pourvu que l'on ait :

$$(\vec{i}, \vec{OM}, \vec{L}) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$(9) \quad g \cos(u + \theta + \beta) + r \sin \varphi \sin(u + \theta) = 0.$$

Soit  $dM$  un déplacement élémentaire de M par rapport à N au voisinage de la caractéristique à l'instant ( $u$ ),  $dM_1$  le déplacement correspondant par rapport à  $\mathfrak{K}$ .

Le théorème relatif à la composition des vitesses donne :

$$dM_1 = dM - du \cot \alpha \cdot \vec{i} \wedge \vec{OM}.$$

En différentiant la relation (8), on a :

$$(10) \quad dM = \left(1 - \frac{g \sin \varphi}{\rho}\right) ds \vec{i} + dg \vec{G}.$$

$\rho$  étant le rayon de courbure de T au point  $m$  :

$$\rho = \frac{ds}{d(\theta + \beta)}.$$

Enfin :

$$\vec{i} \wedge \vec{OM} = -g \cos \varphi \sin(u + \theta + \beta) \vec{i} + r \cos \varphi \sin(u + \theta) \vec{G}.$$

Par suite, l'expression de  $dM_1$  devient :

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} dM_1 = \left(1 - \frac{g \sin \varphi}{\rho}\right) ds \vec{i} + dg \vec{G} + du \cot \alpha \cos \varphi \\ [g \sin(u + \theta + \beta) \cdot \vec{i} - r \sin(u + \theta) \cdot \vec{G}]. \end{array} \right.$$

En égalant à zéro le vecteur  $dM_1$ , on obtient deux relations linéaires et homogènes entre  $ds$ ,  $dg$  et  $du$  : en éliminant  $ds$ ,  $dg$ ,  $du$  et  $u$  entre ces deux relations, l'équation (9) et l'équation obtenue en différentiant celle-ci, on a la relation cherchée :

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} (g - r \sin \varphi \sin \beta)^2 \frac{1 - \frac{g}{\rho \sin \varphi}}{1 - \frac{g \sin \varphi}{\rho}} + r^2 \cos^2 \beta \\ = \frac{[(g - r \sin \varphi \sin \beta)^2 + r^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \beta]^{3/2}}{g \cot \alpha \cdot \cos \varphi \cdot |\sin \varphi|} \end{array} \right.$$

(l'élimination a été faite en supposant que tant que la surface utile N est en contact avec la denture de la roue, l'angle  $u + \theta + \beta$  reste compris entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $+\frac{\pi}{2}$ ).

En particulier, si N est un plan passant par S ( $\frac{1}{\rho} = 0$  et  $\beta = 0$ ), l'équation (12) se réduit à :

$$(13) \quad (g^2 + r^2) g \cot \alpha \cos \varphi \cdot |\sin \varphi| = (g^2 + r^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}.$$

On voit qu'une racine  $g_0$  de cette équation est forcément positive.

Si l'on revient aux conditions du § 25, en supposant  $\varphi > 0$  et posant successivement :  $\frac{g}{r} = \operatorname{tg} \varepsilon$  et  $\sin \varepsilon = \operatorname{tg} \lambda \operatorname{tg} \varphi$ , on retrouve bien, pour déterminer  $\lambda$ , l'équation obtenue en égalant à zéro le premier membre de (2).

### 28. Évidement du pied au cours du taillage.

Considérons un cône de révolution fixe  $\mathfrak{K}$  et un plan P roulant sans glisser sur  $\mathfrak{K}$ ; soit M un point lié à P. La trajectoire de M est une courbe tracée sur une sphère  $\Sigma$  ayant pour centre le sommet S de  $\mathfrak{K}$  et que nous appellerons « *développante sphérique allongée* » ou « *développante sphérique raccourcie* » suivant que M est du même côté que  $\mathfrak{K}$  par rapport à P ou non. Le grand cercle de  $\Sigma$  passant par M et orthogonal à P couple ce plan en deux points; soit  $m$  celui qui est tel que l'angle  $\widehat{MSm}$  soit aigu : la développante sphérique décrite par  $m$  sera dite « *développante sphérique correspondante* ».

Supposons que M soit l'extrémité située du même côté de P que  $\mathfrak{K}$  de l'arc utile  $\nu$  suivant lequel la surface N de la dent de roue plate est coupée par  $\Sigma$  et imaginons la position relative de  $\mathfrak{K}$  et de la roue plate pour laquelle le point M est le point de contact de  $\nu$  avec son enveloppe sphérique  $\delta$ ; la développante sphérique allongée décrite par M est alors tangente en M à  $\delta$ , car  $\delta$  est l'enveloppe des trajectoires des points de  $\nu$ . Soit I le point de contact de P avec le cercle de base de  $\mathfrak{K}$  sur  $\Sigma$  : la perspective de la figure sphérique que nous venons de définir, effectuée de S comme point de vue sur le plan tangent en I à  $\Sigma$  est à peu près identique aux figures 10 et 11.

La tête de la dent de roue plate est limitée sur  $\Sigma$  par une arc de cercle MM' coaxial à la roue plate, et chaque point de cet arc décrit par rapport à  $\mathfrak{K}$  une développante sphérique allongée déduite de celle décrite par M par une rotation autour de l'axe de  $\mathfrak{K}$ .

Par conséquent, le profil sphérique qui raccorde les pieds des arcs de dentures se faisant vis-à-vis est constitué par deux arcs de développantes allongées, raccordés par un arc de cercle.

### 29. Réalisation d'un engrenage à axes concourants.

Considérons deux roues dentées correspondant à deux roues plates en coïncidence  $[P_1, N_1]$  et  $[P_2, N_2]$ ; soit S $\Delta$  la génératrice de raccordement des cônes primitifs  $\mathfrak{K}_1$  et  $\mathfrak{K}_2$  supposés de part et d'autre du plan  $(P_1 P_2)$  (engrenage extérieur) (fig. 22).

Coupons l'ensemble par une sphère  $\Sigma$  de centre  $S$  : le plan  $(P_1 P_2)$  est coupé suivant un cercle  $C$  et les cônes primitifs suivant deux cercles  $K_1$  et  $K_2$  tangents en un point  $I$ . Soit  $\nu$  la section de  $(N_1 N_2)$  par  $\Sigma$  et conservons les

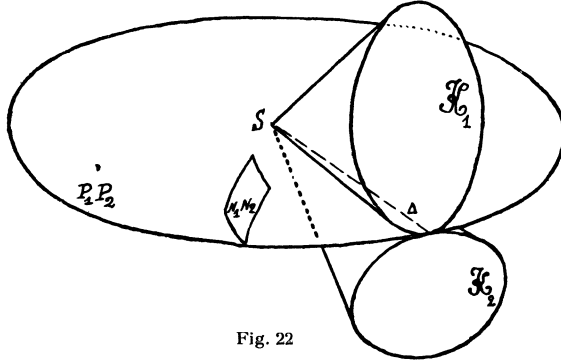


Fig. 22

notations précédemment introduites en les affectant des indices 1 ou 2 suivant la roue à laquelle elles se rapportent (*fig. 23*).

La figure a été faite en supposant l'angle  $\psi$  positif.

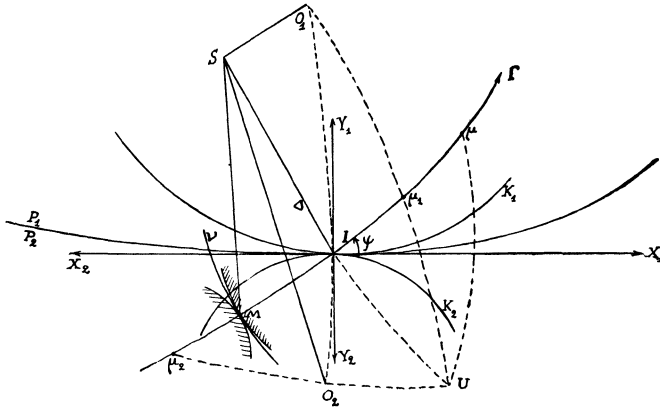


Fig. 23

Pour la roue  $K_1$  (axes  $X_1 I Y_1$ ) le produit  $\widehat{M}_\mu \cdot \phi$  est positif, par suite  $\nu$  doit être matérialisé du côté convexe et vérifier :

$$(14) \quad \operatorname{tg} \alpha_1 \sin (\theta - \lambda) - \sin \theta \sin \lambda > 0.$$

Pour la roue  $K_2$  (axes  $X_2 I Y_2$ ) le produit  $\widehat{M}_\mu \cdot \phi$  est négatif, par suite  $\nu$  doit être matérialisé du côté concave et vérifier :

$$(15) \quad -\operatorname{tg} \alpha_2 \sin (\theta - \lambda) - \sin \theta \sin \lambda < 0,$$

(le premier membre de (15) se déduit de celui de (14) en changeant  $\alpha_1$  en  $\alpha_2$ ,  $\theta$  en  $-\theta$  et  $\lambda$  en  $-\lambda$ ).



Les conditions (14) et (15) doivent être simultanément remplies et limitent  $\nu$  à une portion d'arc coupant le plan  $(P_1 P_2)$ .

Soit  $\mathcal{G}$  la surface commune aux deux roues plates matérielles équivalentes aux outils qui ont taillé les deux roues conjuguées : ces deux roues plates sont matérialisées respectivement de part et d'autre de  $\mathcal{G}$ ; par suite, comme on l'a vu au § 19, il ne peut y avoir interférence entre les deux roues conjuguées.

A la condition d'*emboîtement* des deux roues plates matérielles s'en ajoute une seconde très importante : pour les mêmes raisons que dans le taillage des roues cylindriques (§ 19), on cherchera à ce qu'elles ces deux roues plates soient symétriques.

Je dirai que l'engrenage est *parfait* si ses deux roues plates matérielles sont *emboîtables* et *symétriques* <sup>(10)</sup>.

On en déduit :

1° Si  $\theta$  est l'angle de la rotation qui fait correspondre deux dents consécutives d'une telle roue plate, les traces T et T' des deux faces d'une même dent sur le primitif P se correspondent dans une rotation concentrique d'angle  $\frac{\theta}{2}$ . En effet, imaginons les deux roues plates matérielles emboîtées : elles se correspondent alors dans le produit d'une symétrie par rapport à P et d'une rotation autour de leur axe; or, la figure formée sur P par les traces des dents est invariante dans la symétrie, elle correspond donc avec elle-même dans la rotation indiquée.

2° Dans le cas où une telle roue plate admet un plan de symétrie, les deux roues plates associées sont rigoureusement identiques, et deux roues quelconques ainsi taillées sont alors conjuguées. (Il en est ainsi par exemple lorsque  $(N_1 N_2)$  est un plan passant par S). Je dirai alors que l'assortiment de ces roues est *bilatéral*; dans le cas général où les deux roues plates matérielles sont distinctes, je dirai que l'assortiment est *unilatéral*.

### 30. Remarques.

1° Soient  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  les enveloppes de  $(N_1 N_2)$  par rapport à  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  : la caractéristique de  $\mathcal{D}_1$  dans son mouvement par rapport à  $(N_1 N_2)$  et celle de  $(N_1 N_2)$  par rapport à  $\mathcal{H}_2$  coïncident. Donc  $\mathcal{D}_2$  est l'enveloppe de  $\mathcal{D}_1$  dans le mouvement  $\mathcal{H}_1/\mathcal{H}_2$ .

2° Les deux roues de l'engrenage ainsi défini ont un contact linéaire. Si l'on se contente d'un contact ponctuel, on peut généraliser la définition précédente de l'engrenage concourant taillé par la méthode des roulettes : supposons les roues plates  $[P_1, N_1]$  et  $[P_2, N_2]$  telles que,  $P_1$  et  $P_2$  étant confondus,  $N_1$  et  $N_2$  se raccordent le long d'une certaine courbe. En un point commun à cette

---

(10) Comme dans le cas du taillage des roues cylindriques, ces conditions sont *suffisantes*. Il arrive qu'elles ne sont pas satisfaites : ainsi, dans le cas de la denture Böttcher à chevrons on ne vérifie que la condition d'emboîtement afin de pouvoir tailler chaque roue en une seule passe (§ 121); dans le cas de l'engrenage Gleason spirale on renonce aux deux conditions lorsqu'on veut tailler en une passe une roue de l'engrenage (§ 114). En tout cas, il est remarquable que l'on cherche toujours à se rapprocher de l'engrenage parfait.

courbe et à la caractéristique de  $N_1$  dans le mouvement  $P_1/\mathcal{K}_1$ , la normale commune à  $N_1$  et  $N_2$  coupe  $\Delta$  et, par suite, ce point appartient à la caractéristique de  $N_2$  dans le mouvement  $P_2/\mathcal{K}_2$ .

Les enveloppes de  $N_1$  et  $N_2$  sont alors les dentures conjuguées d'un engrenage à contact ponctuel dont  $\mathcal{K}_1$  et  $\mathcal{K}_2$  sont les cônes primitifs.

### 31. Réalisation d'un engrenage gauche à roues coniques.

Soient  $D_1$  et  $D_2$  les axes d'un engrenage gauche. Coupons-les par un plan  $Q$  qu'ils percent en  $S_1$  et  $S_2$ . Soient  $\mathcal{K}_1$  et  $\mathcal{K}_2$  deux cônes de révolution d'axes respectifs  $D_1$  et  $D_2$  et situés de part et d'autre de leur plan tangent commun  $Q$ . Supposons que  $\mathcal{K}_1$  et  $\mathcal{K}_2$  tournent autour de leurs axes avec les vitesses  $\vec{\Omega}_1$  et  $\vec{\Omega}_2$  de mesures  $\omega_1$  et  $\omega_2$ ; appelons  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  leurs demi-angles au sommet. Soient enfin  $[P_1, N_1]$  et  $[P_2, N_2]$  deux roues plates dont les primitifs

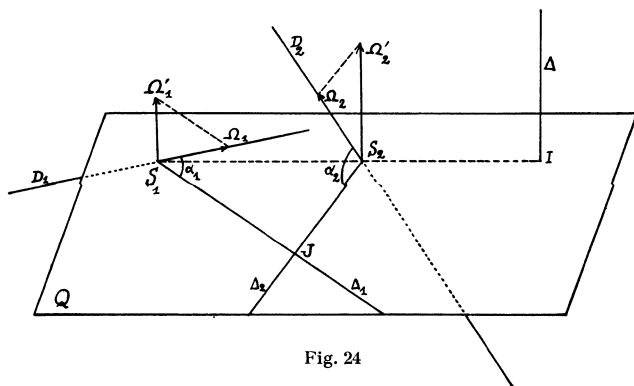


Fig. 24

$P_1$  et  $P_2$  glissent sur  $Q$  et roulent sans glisser respectivement sur  $\mathcal{K}_1$  et  $\mathcal{K}_2$  avec lesquels ils se raccordent le long des droites  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  (fig. 24).

Remarquons, tout d'abord, qu'il n'est pas possible, comme dans le cas de l'engrenage gauche à roues cylindriques, de choisir les surfaces  $N_1$  et  $N_2$  de telles façons qu'elles restent en coïncidence au cours de leur mouvement relatif: en effet, soient  $\vec{\Omega}'_1$  et  $\vec{\Omega}'_2$  les composantes normales à  $Q$  de  $\vec{\Omega}_1$  et  $\vec{\Omega}_2$ ; les roues plates  $[P_1, N_1]$  et  $[P_2, N_2]$  fonctionnent comme un engrenage à axes parallèles dont les vecteurs rotations sont  $\vec{\Omega}'_1$  et  $\vec{\Omega}'_2$ . Si  $I$  est le centre instantané de rotation dans le mouvement  $P_1/P_2$ , la perpendiculaire  $IA$  à  $Q$  est la génératrice de contact des cylindres primitifs de cet engrenage (fig. 24). Cela posé, si  $N_1$  et  $N_2$  restaient en coïncidence, elles seraient de révolution autour de  $\Delta$ , ce qui est impossible, car  $\Delta$  n'est pas fixe par rapport à  $P_1$  ou à  $P_2$ .

Remarquons encore que si les vecteurs  $\vec{S}_1\vec{\Omega}_1$  et  $\vec{S}_2\vec{\Omega}_2$  sont situés d'un même côté de  $Q$ ,  $I$  est à l'extérieur de  $\vec{S}_1\vec{S}_2$ , et le mouvement relatif  $P_1/P_2$  est celui d'un engrenage intérieur (fig. 24). Si  $\vec{S}_1\vec{\Omega}_1$  et  $\vec{S}_2\vec{\Omega}_2$  étaient de part et d'autre de  $Q$ ,  $I$  serait situé entre  $S_1$  et  $S_2$  et l'engrenage  $P_1/P_2$  serait extérieur.

Supposons donc les surfaces  $N_1$  et  $N_2$  telles qu'elles s'enveloppent l'une l'autre et soient  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  leurs enveloppes par rapport à  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  respectivement.

On pourra affirmer que les surfaces  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  sont tangentes si les trois caractéristiques  $\mathcal{D}_1/N_1$ ;  $N_1/N_2$ ;  $N_2/\mathcal{D}_2$  sont *concourantes*. C'est par erreur que l'on a pu croire qu'il en était ainsi quelle que soit  $N_1$  pourvu que  $N_2$  soit son enveloppe dans le mouvement relatif  $P_1/P_2$  (11).

Soit en effet  $J$  le point commun à  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ . Pour que les trois caractéristiques énoncées soient concourantes, il faut et il suffit qu'à un instant quelconque de son mouvement d'engrènement, la surface  $N_1$  admette une normale rencontrant à la fois  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  et  $\Delta$ . Cette condition impose à la dite normale :

— ou bien d'être située dans le plan  $Q$  et de passer par  $I$  :  $N_1$  est alors une surface quelconque, mais coupant  $P_1$  orthogonalement (solution sans intérêt pratique, à cause de graves et inévitables interférences);

— ou bien d'être située dans le plan  $(\Delta, J)$  et de passer par  $J$ .

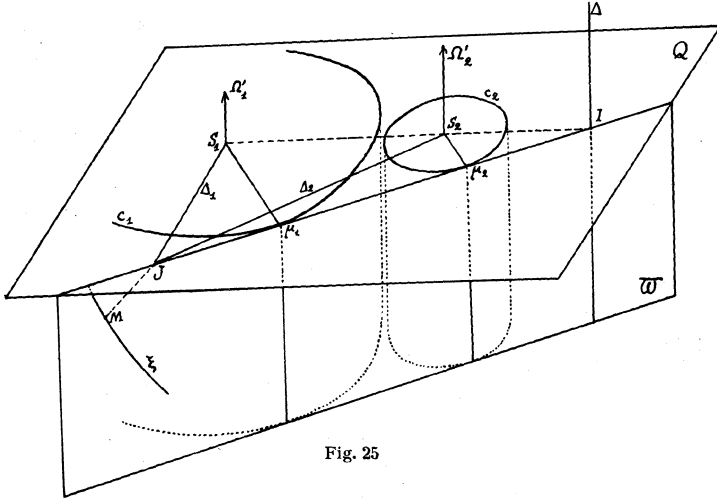


Fig. 25

Cherchons les solutions relatives au second cas.

Dans son mouvement par rapport aux plans  $P_1$  et  $P_2$ , le plan  $(\Delta, J)$  enveloppe deux cylindres de révolution  $c_1$  et  $c_2$  ayant pour axes  $\overrightarrow{S_1 Q_1'}$  et  $\overrightarrow{S_2 Q_2'}$  (fig. 25). Le rapport des rayons de  $c_1$  et  $c_2$  est égal à  $\frac{IS_1}{IS_2}$ ; donc, si l'on suppose que  $c_1$  et  $c_2$  sont liés respectivement aux plans  $P_1$  et  $P_2$ , et qu'un plan  $\omega$  glissant sur le plan  $(\Delta, J)$  roule sans glisser sur ces deux cylindres, le mouvement relatif  $P_1/P_2$  est bien celui qui est défini par les deux vecteurs  $\overrightarrow{Q_1'}$  et  $\overrightarrow{Q_2'}$ .

Cela posé, la surface  $N_1$  doit être telle que l'on puisse, dans le plan  $\omega$ , lui mener une normale passant par  $J$  : cette condition suggère de prendre

(11) Voir par exemple M. PÉRIGNON (B. 16, p. 9) et (B. 17, t. I, p. 52).

comme surface  $N_1$  une surface moulure engendrée par une courbe  $\xi$  arbitrairement choisie dans  $\sigma$  et liée à  $\sigma$ .  $N_1$  et  $N_2$  sont alors les deux surfaces moulures engendrées par  $\xi$  et ayant pour noyaux  $c_1$  et  $c_2$ . Les dentures  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  liées aux cônes  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  sont alors tangentes au point M, pied d'une normale abaissée de J sur  $\xi$ . La courbe d'engrènement d'un tel engrenage est donc située dans le plan  $(\Delta, J)$ .

### 32. Conditions pratique auxquelles doit satisfaire l'engrenage gauche que nous venons de définir.

Les deux roues plates  $[P_1, N_1]$  et  $[P_2, N_2]$  fonctionnent théoriquement comme un engrenage à axes parallèles et à développantes, mais avec les particularités suivantes :

1° La normale au point de contact des dentures conjuguées  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  doit passer J, et cela pour les deux faces de chaque dent. Par suite, si l'on coupe une dent de roue plate par son primitif, les sections de ses deux faces sont nécessairement deux arcs de développantes parallèles (*fig. 26*).

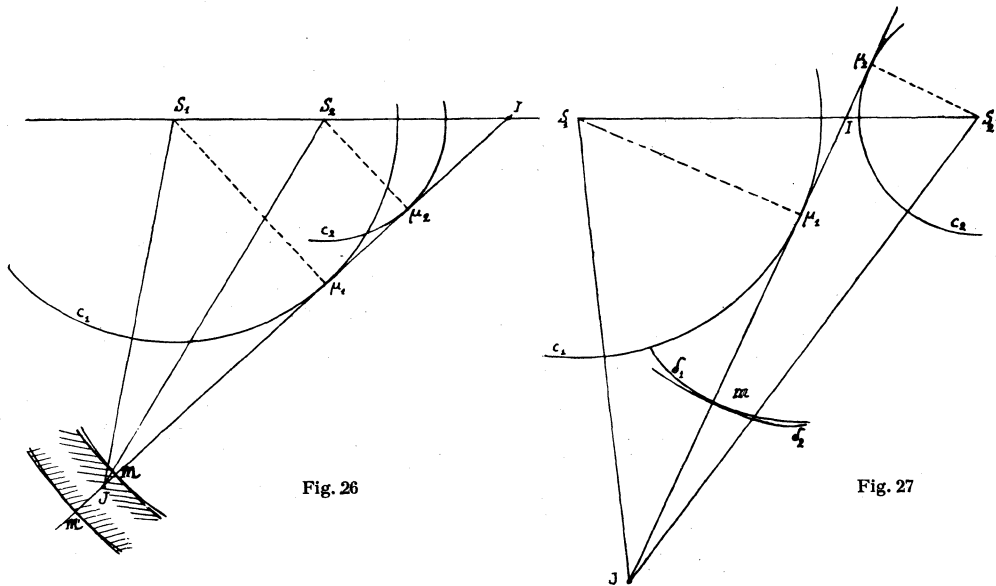


Fig. 26

Fig. 27

Donc les sections de deux faces conjuguées des roues plates en prise sont deux arcs de développantes tournant leur concavité dans le même sens; le point de contact de ces deux arcs est alors à l'extérieur du segment  $\mu_1 \mu_2$ ,  $\mu_1$  et  $\mu_2$  étant leurs centres de courbures. Et si l'on veut que le point J appartienne effectivement à la ligne d'engrènement, ce point devra être situé à l'extérieur du segment  $\mu_1 \mu_2$ .

2° La *figure 26* représente, couverte de hachures, la trace de la partie pleine d'une dent de la roue plate  $[P_2, N_2]$  sur son primitif; cette trace est limitée par deux arcs de développantes dont le centre de courbure est  $\mu_2$ . Les deux faces de cette dent sont en contact avec deux faces en regard de la roue

plate  $[P_1, N_1]$ , et celles-ci ont pour traces deux arcs de développantes dont le centre de courbure est  $\mu_1$ . Soient  $m$  et  $m'$  les points de contact : la *figure 26* montre avec évidence que le contact n'est pas matériellement réalisable à la fois en  $m$  et  $m'$ . L'interférence est donc inévitable entre les dentures des roues plates matérielles. C'est là une grosse difficulté, mais la condition d'emboîtement des roues plates matérielles est une condition suffisante, et non nécessaire pour qu'il n'y ait pas interférence entre deux roues conjuguées. Par suite, en donnant à l'un des cônes  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  un demi-angle au sommet assez petit, on pourra éviter l'interférence. On aura intérêt à rendre aussi voisins que possible les rayons de courbure en  $m$  et  $m'$  et, par conséquent, à prendre le point  $J$  assez loin du vecteur  $\mu_1 \mu_2$ .

3° Il semble, *a priori*, que l'on puisse faire fonctionner les deux roues plates soit comme un engrenage intérieur, soit comme un engrenage extérieur ; en fait, le souci d'éviter les interférences de denture commande de les faire *engrener intérieurement* : en effet, dans le cas contraire, la droite  $IJ$  est une tangente commune intérieure à  $c_1$  et  $c_2$ , et alors les deux arcs de développantes tangents en  $m$  (*fig. 27*) et représentant les traces sur  $Q$  des surfaces conjuguées  $N_1$  et  $N_2$ , sont tels que leurs rayons de courbure *varient en sens contraire* quand on s'écarte de  $m$  : il en résulte un accroissement certain des risques d'interférence.

### 33. Remarques.

1° On peut toujours s'arranger pour que les deux surfaces moulures  $N_1$  et  $N_2$  soient égales, c'est-à-dire pour que les cylindres  $c_1$  et  $c_2$  soient égaux : il faut et suffit pour cela que les vecteurs  $\vec{\Omega}'_1$  et  $\vec{\Omega}'_2$  soient égaux (on a alors :

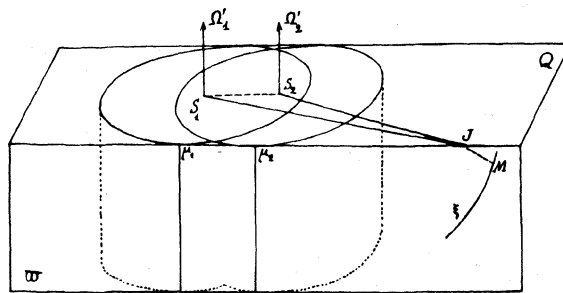


Fig. 28

$\omega_1 \sin \alpha_1 = \omega_2 \sin \alpha_2$ ), ou encore que le plan  $Q$  soit choisi parallèle à la différence géométrique  $\vec{\Omega}'_1 - \vec{\Omega}'_2$ . Le point  $I$  est alors rejeté à l'infini sur  $S_1 S_2$ , et le mouvement relatif  $P_1/P_2$  est un mouvement de translation (*fig. 28*).

2° Lorsque  $\xi$  est une portion de droite, les dentures des deux roues plates sont deux portions d'hélicoïdes développables. Ce cas particulier — sans doute le seul pratique — sera étudié plus loin (III, Chapitre II).

### 34. Généralisation.

Soient  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  les courbes tracées sur les surfaces moulures  $N_1$  et  $N_2$  précédemment définies, et lieux du point de contact des dentures conjuguées  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ . On pourrait remplacer  $N_1$  et  $N_2$  par deux surfaces  $N'_1$  et  $N'_2$  se raccordant avec elles le long de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  respectivement; les dentures  $\mathcal{D}'_1$  et  $\mathcal{D}'_2$  enveloppées par  $N'_1$  et  $N'_2$  seraient bien conjuguées, la courbe d'engrènement serait inchangée, ainsi que le rapport des vitesses de rotation de l'engrenage.

---

## CHAPITRE IV

---

# MÉTHODE des ROULETTES GÉNÉRALISÉE

---

### GÉNÉRATION d'ENGRENAGES GAUCHES à ROUES PSEUDO-CONIQUES ou à ROUES HYPERBOLOÏDES

#### 35. Surfaces axoïdes.

Quand deux solides  $S_1$  et  $S_2$  sont en mouvement, le lieu de l'axe de la viration instantanée est constitué par deux surfaces respectivement liées à chaque solide et dites *axoïdes*.

On démontre que pour que deux réglées soient axoïdes, il faut et suffit (B. 9) :

1° que les génératrices se correspondent deux à deux, de façon à avoir même paramètre de distribution;

2° que, les points centraux et plans centraux étant en coïncidence, les indicatrices sphériques de chaque réglée roulent sans glisser l'une sur l'autre.

Dans le cas de l'engrenage gauche, les axoïdes définissant le mouvement relatif des deux roues sont, en général, deux hyperboloïdes de révolution à une nappe  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  ayant, d'après ce qui précède, même paramètre de distribution.

L'engrenage sera dit *extérieur* si  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  sont extérieurs l'un à l'autre, et *intérieur* dans le cas contraire.

Inversement, deux hyperboloïdes de révolution à une nappe ayant même paramètre de distribution peuvent être considérés comme axoïdes, et cela de deux manières : en effet, si l'on associe deux génératrices correspondant à des paraboloides de raccordement de même sens, on peut placer ces hyperboloïdes de façon qu'ils soient tangents extérieurement ou intérieurement, et les faire tourner à des vitesses relatives convenables, afin de réaliser le roulement sans glissement de leurs indicatrices sphériques.

Je supposerai, par la suite, que l'engrenage est *extérieur*, ce qui correspond d'ailleurs au cas presque exclusivement pratique.

### 36. Définition la plus générale de la méthode des roulettes.

Je dirai qu'un engrenage est taillé par la méthode des roulettes si la denture de chacune des roues qui le composent est engendrée de la façon suivante.

Soit un hyperboloïde de révolution  $\mathcal{H}$  (pouvant être dégénéré) lié et coaxial à la roue considérée,  $A$  une surface axoïde à  $\mathcal{H}$  et munie d'une surface  $N$  qui lui est invariablement liée : la denture de la roue est alors l'enveloppe  $\mathcal{D}$  de  $N$  dans la viration  $A/\mathcal{H}$  et l'arête vive de l'outil est telle que dans son mouvement par rapport à  $A$  elle taillerait  $N$ . Les deux roues de l'engrenage correspondent à deux ensembles  $[A_1, N_1]$  et  $[A_2, N_2]$  tels que  $A_1$  et  $A_2$  soient axoïdes et que  $N_1$  et  $N_2$  s'enveloppent dans la viration  $A_1/A_2$ .

Remarquons que cette définition comprend comme cas particuliers celles relatives au taillage d'engrenages formés de roues cylindriques ou de roues coniques (§ 2)

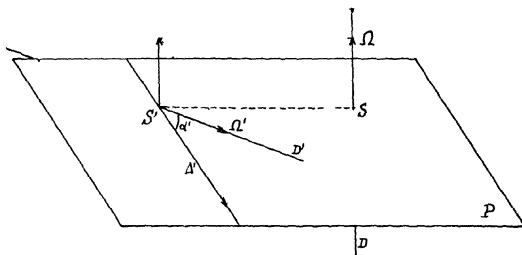


Fig 29

Nous allons voir qu'il est possible que  $\mathcal{H}$  dégénère sans que le mouvement  $A/\mathcal{H}$  cesse d'être une véritable viration : nous serons ainsi conduits à étudier un engrenage gauche particulier, d'un grand intérêt pratique et connu industriellement sous le nom d'*hypôïd*

## I. — ROUES PSEUDO-CONIQUES. ENGRENAGE HYPÔÏD <sup>(12)</sup>

### 37. Conditions de dégénérescence des primitives $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ d'un engrenage gauche.

Soient  $D$  et  $D'$  les axes d'un engrenage gauche défini par les vecteurs rotations  $\vec{\Omega}$  et  $\vec{\Omega}'$ , et soit  $SS'$  leur perpendiculaire commune (fig 29). Le mouvement  $\mathcal{H}/\mathcal{H}'$  résulte de la composition des deux rotations  $\vec{\Omega}$  et  $-\vec{\Omega}'$ , l'axe central de ce système coupe orthogonalement  $SS'$ , donc, pour que les primitives soient dégénérées, il faut et il suffit qu'il passe par  $S$  ou  $S'$ . Cherchons à quelles conditions il passe par  $S'$  par exemple.

Le moment résultant en  $S'$  du système  $(\vec{\Omega}, -\vec{\Omega}')$  est porté par la droite  $\Delta'$  projection de  $D'$  sur le plan  $P$  normal en  $S$  à  $D$  :  $\Delta'$  sera l'axe central du système si la composante de  $\vec{\Omega}'$  normalement à  $P$  est un vecteur égal à  $\vec{\Omega}$ .

(12) Ce mot d'*hypôïd* est, à l'origine, une abréviation du mot hyperboloïde; son introduction est attribuée à George B. GRANT, auteur du *Treatise on Gear Wheels* (États-Unis).



Désignons par  $\alpha'$  l'angle aigu de  $\Delta'$  avec  $D'$  et par  $\omega$  et  $\omega'$  les mesures de  $\vec{\Omega}$  et  $\vec{\Omega}'$  :  $\omega$  et  $\omega'$  sont alors liés par la formule :

$$(1) \quad \omega = \omega' \sin \alpha',$$

et les primitives  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{H}'$  sont dégénérées de la façon suivante :  $\mathcal{H}$  se réduit au plan  $P$  (exactement : le lieu des tangentes à un cercle) et  $\mathcal{H}'$  se réduit au cône  $\mathcal{K}$  de sommet  $S'$ , d'axe  $D'$  et de demi-angle  $\alpha'$ .

Remarquons alors que dans le cas de dégénérescence le mouvement relatif  $P/\mathcal{K}$  est tel que si l'on faisait subir à  $\mathcal{K}$  la translation  $\vec{S'S}$ , il roulerait sans glisser sur  $P$ .

Cela posé, supposons que le plan  $P$  soit muni d'une surface invariable  $N$ , et soit  $\mathcal{D}$  la surface enveloppée par  $N$  dans la viration  $P/\mathcal{K}$  : j'appellerai *roue pseudo-conique* la roue ainsi engendrée pour marquer qu'elle correspond à un engrenage *cône/roue plate*, comme les roues coniques proprement dites, mais qu'elle en diffère essentiellement par le mouvement relatif de cet engrenage.

### 38. Définition de l'engrenage hypoid (13).

Nous appellerons ainsi l'engrenage gauche formé par l'association d'une roue conique et d'une roue pseudo-conique dont les roues plates restent en coïncidence au cours du mouvement.

Soient  $D_1$  et  $D_2$  les axes de l'engrenage, supposés fixes,  $\vec{\Omega}_1$  et  $\vec{\Omega}_2$  les vecteurs rotations correspondants, et  $Q$  un plan fixe coupant les axes et  $S_1$  et  $S_2$ . Supposons le plan  $Q$  tel que le vecteur  $S_1 S_2$  soit orthogonal à  $D_1$  et que les projections de  $\vec{\Omega}_1$  et  $\vec{\Omega}_2$  sur la normale à  $Q$  soient deux vecteurs égaux ; le choix d'un tel plan est possible d'une infinité de façons : la première condition exprime que  $Q$  passe par une génératrice normale à  $D_2$  du paraboloid hyperbolique engendré par les droites orthogonales à  $D_2$  et s'appuyant sur  $D_1$  et  $D_2$  (14) ; la seconde exprime que ce plan est parallèle à la différence géométrique :  $(\vec{\Omega}_1 - \vec{\Omega}_2)$ .

Considérons les cônes de révolution  $\mathcal{K}_1$  et  $\mathcal{K}_2$  de sommets  $S_1$  et  $S_2$ , d'axes  $D_1$  et  $D_2$  et situés de part et d'autre de leur plan tangent commun  $Q$  : ces cônes sont entraînés dans les rotations  $\vec{\Omega}_1$  et  $\vec{\Omega}_2$ . Soit alors  $[P_1, N_1]$  une roue plate de centre  $S_1$  et dont le primitif glisse sur  $Q$  de façon à rouler sans glisser sur  $\mathcal{K}_1$  : dans ce mouvement,  $N_1$  enveloppe la denture d'une roue conique. Si  $[P_2, N_2]$  est une roue plate constamment en coïncidence avec la précédente, son mouvement par rapport à  $\mathcal{K}_2$  est la viration à primitives dégénérées, au cours de laquelle  $N_2$  enveloppe la denture  $D_2$  d'une roue pseudo-conique (*fig.* 30).

(13) M. PLÉRIGNON part de la relation (1) pour définir l'engrenage hypoid — ce qui équivaut à la définition géométrique présente — mais il indique, par erreur, que l'axe central du système  $(\vec{\Omega}_1 - \vec{\Omega}_2)$  est rejeté à l'infini (B. 16 t. I, p. 253).

(14) Dans le cas particulier où  $D_1$  et  $D_2$  sont perpendiculaires, cette condition exprime que le plan  $Q$  passe par  $S_2$ . Remarquons que l'on a alors :  $\cos \widehat{S_1 S_2} = \lg \alpha_1 \lg \alpha_2$ , relation qui s'obtient immédiatement en égalant à zéro le produit scalaire des vecteurs unités de  $D_1$  et  $D_2$ , chacun étant considéré comme somme géométrique de ses composantes dans  $Q$  et normalement à  $Q$ .

Appelons  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  les angles générateurs des cônes  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$ , les mesures de leurs vitesses de rotation sont liées par la formule suivante, déduite de (1) :

$$(2) \quad \omega_1 \sin \alpha_1 = \omega_2 \sin \alpha_2.$$

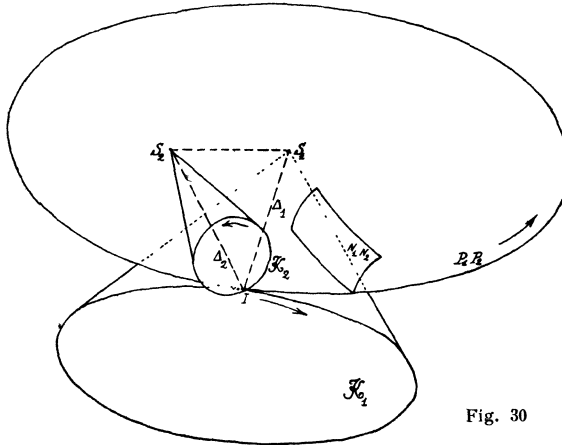


Fig. 30

Remarquons enfin que dans l'engrenage qui vient d'être défini, l'angle  $\widehat{S_1 S_2 \Delta_2}$  est droit.

### 39. Étude du contact des dentures $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ .

La caractéristique de  $N_1$  dans le mouvement  $P_1/\mathcal{H}_1$  est le lieu des pieds des normales rencontrant  $\Delta_1$ ; celle de  $N_2$  dans la viration  $P_2/\mathcal{H}_2$  est le lieu des pieds des normales appartenant au complexe  $\Gamma$  attaché à cette viration. Ces

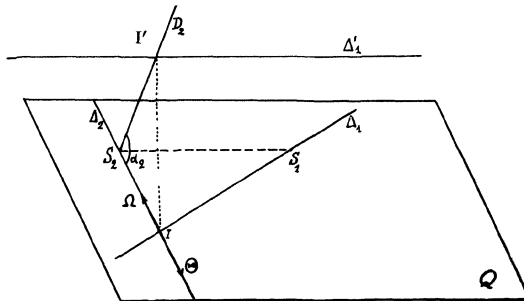


Fig. 31

deux courbes sont généralement distinctes, et, par suite, l'engrenage hypôid est à *contact ponctuel*.

La normale en un point de contact des dentures  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  rencontre  $\Delta_1$  et sa conjuguée  $\Delta'_1$  par rapport au complexe  $\Gamma$ . Or, celle-ci se détermine aisément. Soit  $I$  le point de rencontre de  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ ;  $\Delta_1$  et  $\Delta'_1$  sont les supports

de deux vecteurs dont l'ensemble est équivalent au système qui définit la viration  $P_2/\mathcal{H}_2$  : donc, si  $\vec{I\Theta}$  et  $\vec{I\Omega}$  sont la translation et la rotation qui composent cette viration, le vecteur supporté par  $\Delta'_1$  doit avoir pour moment en I le vecteur  $\vec{I\Theta}$  et doit être parallèle au plan Q; par conséquent,  $\Delta'_1$  est une parallèle à  $S_1S_2$  menée dans le plan normal en I à  $\Delta_2$ . De plus,  $\Delta_1$  et l'axe de la roue plate se coupent, donc leurs deux conjuguées  $\Delta'_1$  et  $D_2$  par rapport à  $\Gamma$  sont également concourantes. La droite  $\Delta'_1$  est donc finalement la parallèle à  $S_1S_2$  menée par le point  $I'$  de  $D_2$  qui se projette orthogonalement en I sur Q (fig. 31).

#### 40. Cas particulier où l'hypoïd est à contact linéaire.

Il est possible, au moins théoriquement, de définir une surface  $(N_1N_2)$  telle que ses caractéristiques dans les deux mouvements  $P_1/\mathcal{H}_1$  et  $P_2/\mathcal{H}_1$  soient confondues : il faut et il suffit pour cela qu'il existe sur N toute une courbe le long de laquelle la normale à N coupe à la fois  $\Delta_1$  et  $\Delta'_1$ , et ce, pour chaque position de la roue plate par rapport au système fixe  $(\Delta_1, \Delta'_1)$ .

Il est facile d'imaginer une telle surface N : prenons la roue plate comme repère; alors l'ensemble  $(\Delta_1, \Delta'_1)$  tourne autour de l'axe de celle-ci et, dans ce mouvement, le point  $I'$  engendre un cercle coaxial à la roue plate. Donc tout tore admettant ce cercle comme cercle moyen est une surface N cherchée.

#### 41. Remarques.

I. — Toutes les machines à taillage successif réalisant les roues coniques matérialisent pratiquement la roue plate : il suffit donc — à la question des interférences près — qu'une telle machine soit construite de façon à permettre un décalage de l'axe du flan et de l'axe du chariot porte-outil, pour qu'elle puisse également tailler les roues pseudo-coniques.

Une machine à taillage progressif ne permet pas, en général, de réaliser un couple hypoïd, car la forme de la roue plate est essentiellement liée au mouvement relatif du flan et des couteaux sur le chariot porte-outil.

II. — L'étude de l'interférence dans le taillage d'une roue pseudo-conique peut être faite comme pour le taillage d'une roue conique (§ 27) en cherchant à limiter la surface N de façon que la partie utile de la denture de la roue taillée n'ait pas d'arête de rebroussement. On aboutit à une équation analogue à l'équation (12) du § 27, mais sensiblement plus compliquée, c'est pourquoi je ne la reproduis pas.

III. — L'engrenage hypoïd, tel que nous l'avons défini, est essentiellement différent de l'engrenage gauche formé de deux roues coniques étudié plus haut (§ 31) : les deux roues plates relatives aux deux roues de l'hypoïd sont en *coïncidence* et en rotation autour d'un *même axe*, tandis que celles relatives à l'autre engrenage gauche sont à *dentures distinctes* et tournent autour d'*axes différents*; enfin, dans le premier cas, la surface N peut être arbitrairement choisie, alors que dans le second ce choix est subordonné à des conditions considérablement restrictives (on est limité pratiquement à l'hélicoïde développable).

## II. — ENGRENAGES GAUCHES à ROUES HYPERBOLOÏDES

Revenons au cas général où la surface  $\mathcal{D}$  liée à l'hyperboloïde non dégénéré  $\mathcal{H}$  est obtenue à partir de l'ensemble  $[A, N]$  déjà défini : j'appellerai *roue hyperboloïde* la roue ainsi engendrée.

Dans ce qui suit, je me bornerai à l'étude des engrenages gauches formés de deux roues hyperboloïdes  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  obtenues par deux ensembles  $[A_1, N_1]$  et  $[A_2, N_2]$  lorsque  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  sont les propres surfaces primitives de l'engrenage considéré.

Nous définirons un hyperboloïde de révolution  $\mathcal{H}$  par le rayon  $a$  de son cercle de gorge et par l'angle aigu  $\alpha$  sous lequel les génératrices coupent ce cercle (ligne de striction de  $\mathcal{H}$ ). Le paramètre de distribution est alors :  $k = a \operatorname{tg} \alpha$ .

### 43. Construction de la génératrice de contact de $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ .

Soient  $\Delta$  cette génératrice,  $\vec{\Omega}_1$  et  $\vec{\Omega}_2$  les vecteurs définissant la rotation de  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  par rapport au repère déterminé par les deux axes  $D_1$  et  $D_2$ . Désignons

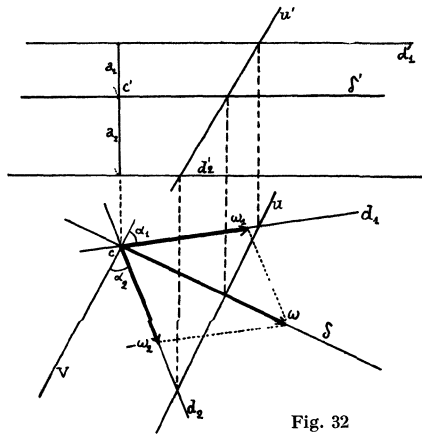


Fig. 32

par  $\Gamma$  le complexe des normales attaché au mouvement  $\mathcal{H}_1/\mathcal{H}_2$ . On sait que toute droite rencontrant  $D_1$  et  $D_2$  appartient à  $\Gamma$  et que, réciproquement, toute droite de  $\Gamma$  coupant  $D_1$  coupe aussi  $D_2$ .

Or l'axe central  $\Delta$  est parallèle à la somme géométrique :

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_1 - \vec{\Omega}_2,$$

et il est conjugué de la droite à l'infini du plan qui lui est normal. Par suite, si l'on considère une droite  $U$  coupant  $D_1$  et  $D_2$  et orthogonale à  $\vec{\Omega}$ , non seulement elle appartient au complexe, mais comme elle coupe la conjuguée de  $\Delta$  elle coupe  $\Delta$  (les droites  $U$  considérées sont les normales communes à  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$ ). L'épure est donc très facile en choisissant par exemple le plan horizontal de projection parallèle à la fois à  $\vec{\Omega}_1$  et  $\vec{\Omega}_2$  et en utilisant deux droites  $U$ , l'une étant la perpendiculaire commune à  $D_1$  et  $D_2$  (fig. 32).

Le point central commun à  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  est alors le point C où  $\Delta$  coupe la perpendiculaire commune à  $D_1$  et  $D_2$ . Soit V le plan mené par C normal à  $\Delta$  : les éléments  $(a_1, \alpha_1)$  et  $(a_2, \alpha_2)$  de  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  sont en évidence sur l'épure : celle-ci montre que pour que l'engrenage soit extérieur, c'est-à-dire pour que  $\Delta$  coupe la perpendiculaire commune à  $D_1$  et  $D_2$  entre ces deux droites, il faut et suffit que les vecteurs  $\vec{\Omega}_1$  et  $\vec{\Omega}_2$  supposés issus des centres de  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  soient de part et d'autre du plan M (l'épure correspond au cas de l'engrenage extérieur).

On connaît alors, pour le calcul de  $a_1, \alpha_1, a_2, \alpha_2$ , outre la distance des axes et leur angle les deux relations :

$$(3) \quad \begin{cases} \omega_1 \cos \alpha_1 = \omega_2 \cos \alpha_2 \\ \omega_1 a_1 \sin \alpha_1 = \omega_2 a_2 \sin \alpha_2. \end{cases}$$

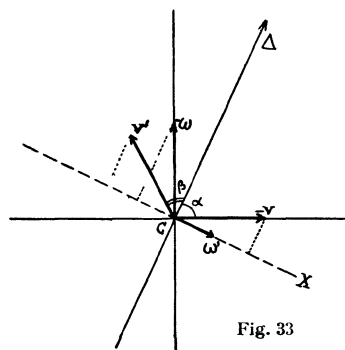
En divisant membre à membre, on retrouve bien la condition qui exprime que  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  ont même paramètre de distribution.

#### 44. L'engrenage défini à partir d'un même ensemble [A, N] est, en général, à contact ponctuel.

Soient, en effet,  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  les complexes des normales attachés aux deux vibrations  $A/\mathcal{H}_1$  et  $A/\mathcal{H}_2$ . La caractéristique de N dans son premier mouvement est le lieu des pieds des normales à N appartenant à  $\Gamma_1$ . Or, les complexes  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  ont même axe, mais, comme on va le voir, diffèrent par leur pas; donc les deux caractéristiques de N dans ses mouvements par rapport à  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  sont, en général, distinctes et le contact des dents  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  est ponctuel.

#### 45. Détermination du complexe des normales attaché à la vibration $A/\mathcal{H}$ .

Soit une surface A axoïde à un hyperboloïde de révolution  $\mathcal{H}(a, \alpha)$ . Soit  $\beta$  l'angle aigu sous lequel la ligne de striction de A coupe la génératrice de contact  $\Delta$  de A avec  $\mathcal{H}$ , et  $k$  le paramètre de distribution des génératrices de A ( $k = a \operatorname{tg} \alpha$ ).



Prenons comme repère l'axe de  $\mathcal{H}$  et la droite  $\Delta$ , et étudions, par rapport à lui, les mouvements conjugués de  $\mathcal{H}$  et de A. Prenons comme plan de figure le plan central et soit C le point central (fig. 33). Le mouvement de  $\mathcal{H}$  est défini par le vecteur rotation  $\vec{\Omega}$ , ou encore, par le système formé par le vecteur rotation  $\vec{C\omega} = \vec{\Omega}$  et le vecteur vitesse de translation  $\vec{CV}$ , d'intensité  $a\omega$ .

D'autre part, le mouvement de l'axoïde A résulte d'une rotation  $\vec{C\omega'}$  (de mesure  $\omega'$ ) normale à  $\Delta$  et d'une vitesse de translation  $\vec{CV'}$  (de mesure  $v'$ ) portée par la tangente en C à la ligne de striction (avec :  $k = \frac{v' \sin \beta}{\omega'}$ ). Ces diverses vitesses sont telles que les résultantes  $(\vec{C\omega'} - \vec{C\omega})$  et  $(\vec{CV'} - \vec{CV})$  soient portées par  $\Delta$ .

Les conditions pour qu'il en soit ainsi sont :

$$\begin{aligned}\omega' &= \omega \cos \alpha \\ v' \sin \beta &= v \sin \alpha,\end{aligned}$$

soit, en remplaçant  $v$  et  $v'$  par leur valeur :

$$(4) \quad \begin{cases} \omega' = \omega \cos \alpha \\ k\omega' = a \omega \sin \alpha. \end{cases}$$

En divisant membre à membre, on retrouve la condition :  $k = a \operatorname{tg} \alpha$ .

Les relations (4) étant satisfaites,  $\Delta$  est bien l'axe de la viration  $A/\mathcal{H}$ , et les éléments de réduction de cette viration ont pour mesure en orientant  $\Delta$  comme sur la *figure 33* :

$$\begin{aligned}\text{vitesse de rotation} &: \omega \sin \alpha; \\ \text{vitesse de translation} &: v \cos \alpha \pm v' \cos \beta.\end{aligned}$$

Considérons les quatre quadrants déterminés par  $\Delta$  et la normale en  $C$ , soit  $CX$  : on prendra le signe  $+$  si les tangentes en  $C$  aux deux lignes de striction sont des quadrants différents, le signe  $-$  dans le cas contraire. Le pas du complexe attaché à la viration  $A/\mathcal{H}$  est alors :

$$\varpi = \frac{v \cos \alpha \pm v' \cos \beta}{\omega \sin \alpha},$$

c'est-à-dire en tenant compte des relations précédentes :

$$(5) \quad \varpi = a (\cot \alpha \pm \cot \beta).$$

Cette formule montre bien que le pas du complexe varie suivant l'axoïde  $A$  considérée.

#### 46. Détermination du point de contact des dentures $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ .

Si  $M$  est un point commun aux deux caractéristiques de  $N$  dans les deux mouvements  $A/\mathcal{H}_1$  et  $A/\mathcal{H}_2$ , la normale en  $M$  à  $N$  appartient à la congruence des droites communes aux deux complexes  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  : or, le faisceau  $(\Gamma_1, \Gamma_2)$  admet comme complexes spéciaux ceux qui ont respectivement comme directrices la droite  $\Delta$  et la droite à l'infini des plans normaux à  $\Delta$ . Par suite, les droites de la congruence sont celles qui coupent orthogonalement  $\Delta$ .

Donc, un point de  $N$  en contact à la fois avec  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  est le pied d'une normale coupant orthogonalement  $\Delta$ . Ou encore : c'est un point de contact de  $N$  avec un cylindre de révolution d'axe  $\Delta$ .

#### 47. Engrenage défini à partir de deux ensembles distincts :

$$[A_1, N_1] \text{ et } [A_2, N_2].$$

Imaginons les hyperboloïdes primitifs  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  tournant de leur mouvement conjugué autour de leurs axes fixes et entraînant deux axoïdes  $A_1$  et  $A_2$  munies de surfaces  $N_1$  et  $N_2$  telles que  $N_1$  et  $N_2$  s'enveloppent mutuellement dans le mouvement  $A_1/A_2$ .

Soit  $M$  un point commun aux deux caractéristiques de  $N_1$  dans les deux mouvements  $A_1/\mathcal{H}_1$  et  $A_1/A_2$ ; la normale en  $M$  aux surfaces  $\mathcal{H}_1-N_1-N_2$  appartient à deux complexes distincts de même axe  $\Delta$ , elle coupe donc orthogonalement  $\Delta$  et, par suite, elle appartient aussi au complexe lié au mouvement  $A_2/\mathcal{H}_2$ ; en d'autres termes : les surfaces  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  enveloppées respectivement par  $N_1$  et  $N_2$  sont tangentes en  $M$ .

Remarquons qu'une telle génération des surfaces conjuguées  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  donne un engrenage à contact généralement ponctuel et admettant la même ligne d'engrènement que si les dentures avaient été enveloppées par un seul des deux ensembles  $[A_1, N_1]$  ou  $[A_2, N_2]$ .

#### 48. Génération de la denture $\mathcal{D}$ par la viration d'axoïdes particulières.

1°  $A$  est un hyperboloïde de révolution. — Si  $a$  et  $\alpha$  sont les éléments de  $\mathcal{H}$  et  $(a', \alpha')$  ceux de  $A$ , on doit avoir :

$$a \operatorname{tg} \alpha = a' \operatorname{tg} \alpha'.$$

Supposons que  $A$  et  $\mathcal{H}$  soient en contact le long de  $\Delta$  : s'ils se raccordent extérieurement, les tangentes en  $C$  aux cercles de gorge (*fig. 33*) sont situées dans des couples de quadrants différents de l'angle  $\widehat{XC\Delta}$  et, par conséquent, le pas du complexe attaché à la viration  $A/\mathcal{H}$  est, d'après la formule (5) :

$$\varpi = a (\cot \alpha + \cot \alpha').$$

Au contraire, si  $A$  et  $\mathcal{H}$  se raccordent intérieurement, les tangentes en  $C$  aux deux lignes de striction sont situées dans les deux mêmes quadrants de l'angle  $\widehat{XC\Delta}$ ; le pas du complexe associé est alors :

$$\varpi = a (\cot \alpha - \cot \alpha').$$

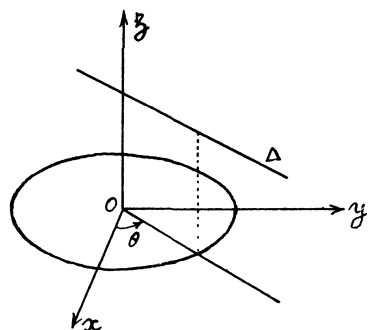


Fig. 34

2°  $A$  est un hélicoïde gauche. — Cherchons à déterminer la surface la plus simple axoïde à  $\mathcal{H}$  : elle ne dépend que de  $k = a \operatorname{tg} \alpha$ . Son indicatrice sphérique sera un grand cercle :  $A$  apparaît alors comme une réglée à plan directeur admettant un paramètre de distribution constant; prenons comme arête de rebroussement une droite normale au plan directeur : l'axoïde ainsi choisie est l'hélicoïde gauche d'équation :

$$z = \pm k \theta,$$

$oz$  étant son axe et le plan des  $xy$  étant parallèle au plan directeur (*fig. 34*). On prendra le signe  $+$  ou  $-$  suivant le sens.

Si  $N$  est une surface liée à l'hélicoïde gauche que je désignerai par la lettre  $H$ , j'appellerai *platoïde* l'ensemble  $[H, N]$ , qui généralise la crémaillère ou la roue plate; ( $H$  sera dit : *hélicoïde primitif*). Remarquons toutefois que

le platoïde est moins privilégié que celles-ci en ce sens que la denture qu'il engendre par rapport à  $\mathcal{H}$  n'est pas la même, en général, que si l'on remplaçait  $H$  par une axoïde quelconque  $A$ , et  $N$  par son enveloppe dans le mouvement  $H/A$  (§ 44).

#### 49. Cas où l'engrenage gauche est à contact linéaire.

Il résulte de la détermination du point de contact des dentures, dans le cas général, que pour que  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  soient en contact le long d'une ligne, il faut et suffit qu'il existe sur  $N$  une courbe telle que les normales à  $N$  le long de cette courbe coupent orthogonalement  $\Delta$ , et cela pour chaque position relative de l'ensemble  $[A, N]$  et de  $\Delta$ . Une telle surface  $N$  est l'enveloppe d'une famille de cylindres de révolution ayant pour axes les génératrices rectilignes de  $A$ .

Mais si la surface  $N$  est ainsi choisie, les dentures  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  sont les mêmes que si l'on remplaçait  $A$  par une axoïde quelconque  $A'$ , et  $N$  par son enveloppe dans le mouvement  $A/A'$ . Nous pouvons donc supposer désormais, sans restreindre la généralité des solutions, que l'ensemble  $[A, N]$  est un platoïde.

En affectant le paramètre de distribution d'un signe convenable, suivant le sens de l'hélicoïde primitif, l'équation de celui-ci peut toujours s'écrire :

$$(6) \quad z = k \theta.$$

Une surface  $N$  liée à  $H$  et telle que le contact  $\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2$  soit linéaire est alors l'enveloppe de  $\infty^1$  cylindres de révolution ayant pour axes les génératrices rectilignes de  $H$ . Or, il existe  $\infty^2$  tels cylindres : l'un d'eux est déterminé si l'on se donne son axe (c'est-à-dire :  $\theta$ ) et son rayon :  $\rho$ . Leur équation générale est :

$$(7) \quad (x \sin \theta - y \cos \theta)^2 + (z - k \theta)^2 = \rho^2.$$

On pourra se donner arbitrairement la fonction  $\rho(\theta)$  pour définir une surface  $N$ . En particulier, si l'on prend :

$$\rho = k \theta - h,$$

il est évident géométriquement (et on vérifie par le calcul) que le plan  $z = h$  est tangent aux  $\infty^1$  cylindres correspondants. Donc, tout plan normal à l'axe  $\Delta$  de  $H$  et lié à  $H$  est une surface  $N$  solution.

#### 50. Remarque.

Soit  $z = f(x, y)$  l'équation d'une surface  $N$  solution; posons  $p = \frac{\partial z}{\partial x}$  et  $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ . En exprimant qu'en un point  $(x, y)$  de  $N$  la normale coupe orthogonalement une génératrice de  $H$ , on obtient pour définir  $N$  l'équation aux dérivées partielles :

$$(8) \quad px + qy + (p^2 + q^2) \left( z + k \operatorname{arctg} \frac{p}{q} \right) = 0.$$



Si l'on prend  $p = q = 0$ , cette équation est satisfaite, et l'on retrouve comme solutions les plans normaux à  $oz$ .

Les  $\infty^2$  cylindres définis par l'équation (7) constituent une *intégrale complète* de l'équation (8).

### 51. Possibilité d'application pratique de la méthode générale des roulettes.

Je me contenterai d'indiquer les éléments essentiels d'une machine qui procéderait par taillage successif, de manière à pouvoir définir très simplement un mouvement générateur, et un mouvement de coupe. le premier est le mouvement de viration de l'axoïde  $A$  sur l'hyperboloïde primitif  $\mathcal{H}$  lié au flan; le second est le mouvement de l'arête vive de l'outil par rapport à  $A$ , mouvement au cours duquel cette arête engendre la surface  $N$

Deux cas semblent particulièrement intéressants :

1° *Génération par le platoïde*  $[H, N]$  — Supposons le flan en rotation autour de son axe fixe; un chariot auquel est lié l'hélicoïde  $H$  est animé d'un mouvement hélicoïdal convenable, d'axe fixe, et assurant la viration de  $H$  sur l'hyperboloïde primitif  $\mathcal{H}$  du flan. Par rapport à ce chariot, l'arête vive de l'outil, d'un mouvement rapide, engendre  $N$ .

Cela posé, si l'on considère les deux platoïdes matériels équivalents aux outils qui ont taillé les deux roues conjuguées, ces deux platoïdes doivent être limités par des surfaces identiques et pouvoir emboîter, moyennant quoi aucune interférence n'est possible entre deux roues conjuguées (même raisonnement que pour les roues conjuguées d'engrenages parallèles ou concourants, quand ils sont taillés par crémaillère ou roue plate : § 19 et 29). Il suffit donc de s'assurer qu'il n'y a pas interférence au taillage.

2° *Génération par l'ensemble*  $[A, N]$ ,  $A$  étant un hyperboloïde de révolution. — Dans ce cas, le flan étant en rotation autour de son axe fixe, on peut imaginer l'outil porté par un chariot animé d'un mouvement de rotation conjugué de celui du flan, cet outil engendrant, dans son mouvement de coupe, la surface  $N$ .

En pratique, l'hyperboloïde  $A$  sera tangent extérieurement à l'hyperboloïde primitif  $\mathcal{H}$  du flan. Par suite, si l'on imagine en prise les deux roues conjuguées en leur associant les surfaces géométriques des roues taillantes  $[A_1, N_1]$  et  $[A_2, N_2]$ , celles-ci *ne sont plus en coïncidence*. L'engrenage est alors théoriquement correct, mais comme dans le cas des engrenages à axes parallèles taillés sur machine Fellows et pour la même raison, il n'est pas sûr qu'entre deux roues conjuguées quelconques, il n'y aura pas interférence.

---

## DEUXIÈME PARTIE

---

# TAILLAGE des ROUES CYLINDRIQUES

---

### CLASSIFICATION et DÉFINITIONS

**52.** Soit  $T$  la trace sur le primitif  $P$  de la portion utile  $N$  de la surface de la dent de crémaillère (*fig. 1*). Nous distinguerons deux familles suivant la nature de  $T$  :

PREMIÈRE FAMILLE :  $T$  est un segment rectiligne, alors deux cas possibles :

1<sup>o</sup>  $T$  est parallèle à l'axe de la roue  $\mathcal{C}$  (*fig. 1*) ; la denture correspondante sera dite *droite*. Le cas industriel est celui où  $N$  est un plan. La surface de la dent  $\mathcal{C}$  est alors un cylindre de génératrices parallèles à celles de  $\mathcal{C}$ , et admettant pour section droite une développante de cercle.

2<sup>o</sup>  $T$  a une direction quelconque ; la denture correspondante sera dite *hélicoïdale*. En pratique,  $N$  est un plan, et la denture de  $\mathcal{C}$  est alors un *hélicoïde développable*.

Cette première famille est d'un intérêt industriel considérable ; c'est la seule qui soit susceptible de former des engrenages gauches à roues cylindriques, (§ 21). Les engrenages correspondant au cas où  $N$  est un plan possèdent des propriétés d'assortiment que j'étudierai dans le Chapitre I ; ils sont taillés couramment sur machines Sunderland, Fellows et Pfauter décrites successivement dans les Chapitres II, III et IV. J'indiquerai ensuite (Chapitre V) un projet de machine pouvant les tailler :

DEUXIÈME FAMILLE :  $T$  est un arc de courbe. — Nous distinguerons encore deux cas :

1<sup>o</sup>  $T$  est coupé en un seul point par une parallèle à l'axe de  $\mathcal{C}$  : la denture correspondante sera dite *spirale*. Elle est d'ailleurs sans utilisation industrielle, car elle n'est pas plus avantageuse que la denture hélicoïdale.

2<sup>o</sup>  $T$  est coupé en plus d'un point par une parallèle à l'axe de  $\mathcal{C}$  : la denture correspondante sera dite *à chevrons*. Elle possède les avantages de la denture hélicoïdale, sans avoir les inconvénients inhérents à la dissymétrie de celle-ci, d'où son intérêt industriel.

Cette sorte d'engrenage est obtenue en particulier sur machine Reinecker (denture Böttcher) qui sera étudiée au Chapitre VI.

**53. Rappel de quelques définitions.**

Considérons la section d'une roue cylindrique quelconque par un plan normal à son axe :

— la *saillie* de la dent est la différence entre le rayon du cercle de tête et celui du primitif;

— le *creux* est la différence entre le rayon du primitif et celui du cercle de pied;

— l'*épaisseur* est la longueur de l'arc primitif intercepté par la dent;

— l'*intervalle* est la longueur de l'arc de primitif comprise entre deux dents consécutives;

L'épaisseur et l'intervalle sont généralement égaux (§ 19).

— le *pas circonférentiel*  $p$  est la somme de l'épaisseur et de l'intervalle; c'est aussi le quotient de la longueur du primitif par le nombre de dents (on l'exprime en mm);

— le *module*  $M$  est le quotient du diamètre du primitif par le nombre de dents; on a :  $M = \frac{p}{\pi}$  (on l'exprime en mm);

— dans le cas où la roue se réduit à une crémaillère, on appelle *pas* la distance  $p$  de deux profils correspondants successifs (comptée dans le primitif et normalement à l'axe de la roue conjuguée), et *module* le quotient :  $M = \frac{p}{\pi}$ .

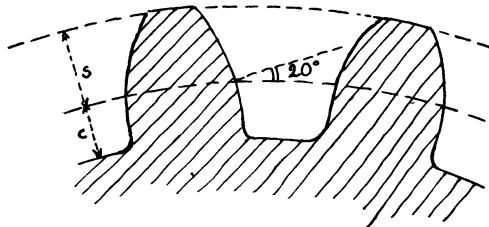


Fig. 35

Le comité de normalisation de la mécanique a fixé comme suit les caractéristiques des engrenages à denture droite interchangeable.

Angle de pression :  $\varphi = 20^\circ$  (fig. 35).

	DENTURE NORMALE	DENTURE BASSE
Saillie : $s$ .....	1 $M$	0,75 $M$
Creux : $c$ .....	1,15 $M$	0,95 $M$

ASSORTIMENT des ROUES à DENTURES DROITES  
 ou HÉLICOÏDALES dans le CAS où la SURFACE N est PLANE

---

Nous considérerons la roue à denture droite comme un cas particulier de la roue à denture hélicoïdale, et l'engrenage à axes parallèles comme cas particulier de l'engrenage gauche.

Nous appellerons *éléments* de l'hélicoïde développable qui constitue la denture :

— le rayon  $r$  de son *noyau* (cylindre de révolution sur lequel est tracée l'hélice de rebroussement);

— son *angle spiral*  $\alpha$  (angle aigu de l'hélice de rebroussement avec les génératrices du noyau);

— son *sens*.

Nous allons déterminer les éléments d'un hélicoïde à partir de la crémaillère qui l'enveloppe et, inversement, trouver les crémaillères pouvant envelopper un hélicoïde donné.

Nous en déduirons les propriétés d'assortiment des roues hélicoïdales, propriétés qui conduisent tout naturellement au principe des divers modes de taillage de ces roues.

**55. Relations entre un hélicoïde développable et la crémaillère qui l'enveloppe.**

Soit  $T$  la trace sur le primitif  $P$  de la face  $N$  de crémaillère; le plan  $\omega$  mené par la génératrice de contact de  $P$  avec le cylindre  $\mathcal{C}$  normalement à  $N$  coupe celui-ci suivant sa caractéristique  $\xi$  et enveloppe un cylindre  $c$  coaxial à  $\mathcal{C}$  et noyau de l'hélicoïde développable  $\mathcal{D}$  engendré par  $\xi$  <sup>(15)</sup> (*fig. 36*).

Soient  $\varphi$  l'angle de pression de la crémaillère,  $r$  et  $R$  les rayons de  $c$  et  $\mathcal{C}$ ,  $\alpha$  l'angle aigu  $\widehat{\Delta, \xi}$  et  $\beta$  l'angle aigu  $\widehat{\Delta, T}$ .

---

(15) Il est facile, en effet, de voir que  $N$  enveloppe bien un hélicoïde développable; supposons le cylindre  $c$  lié à  $\mathcal{C}$  et tournant avec lui; la vitesse d'un point de  $c$  en contact avec  $\omega$  est égale à la vitesse de translation de  $\xi$  sur ce plan. On peut donc considérer que la droite  $\xi$  s'enroule sur  $c$  suivant l'hélice de rebroussement de  $\mathcal{D}$ .

Le trièdre A ( $\Delta T\xi$ ) a une grandeur invariable au cours de l'engrènement, et la relation aux sinus donne :

$$(1) \quad \boxed{\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \cos \varphi} .$$

D'autre part, en exprimant que les hélices sections de  $\mathcal{D}$  par les cylindres  $c$  et  $\mathcal{C}$  ont même pas, on a :

$$h = 2 \pi r \cot \alpha = 2 \pi R \cot \beta$$

d'où :

$$(2) \quad \boxed{r \cot \alpha = R \cot \beta} .$$

De ces deux formules, on déduit les éléments  $\alpha$  et  $r$  de l'hélicoïde obtenu à partir du cylindre  $\mathcal{C}$  et de la crémaillère  $[P, N]$ ; on a, en effet :

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \sin \beta \cos \varphi \\ r &= R \frac{\cos \beta \cos \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta \cos^2 \varphi}} . \end{aligned}$$

Enfin, le sens de  $\mathcal{D}$  est le même que celui de l'hélicoïde qui serait engendré par  $T$  avec  $\mathcal{C}$  pour noyau.

En effet, le plan défini par  $\Delta$  et l'axe de  $\mathcal{C}$ , et le plan mené par  $A$  normal à l'axe de  $\mathcal{C}$  partagent l'espace en quatre dièdres droits (fig. 37); or,

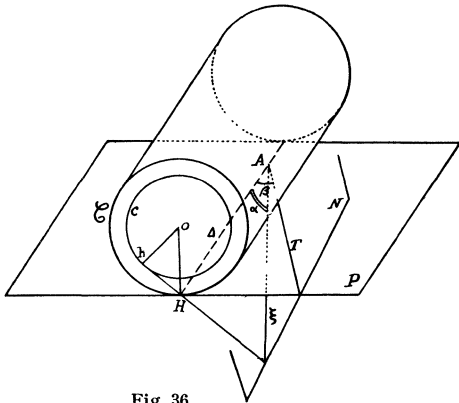


Fig. 36

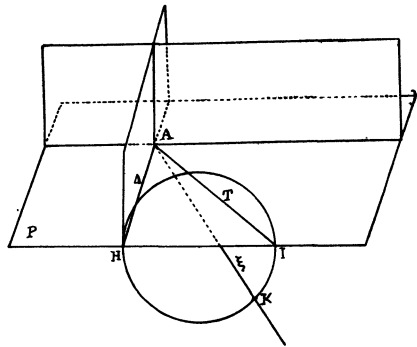


Fig. 37

les droites AT et Axi se trouvent dans les deux mêmes dièdres opposés par l'arête. Cela résulte de la propriété suivante :  $\Delta$  et  $T$  étant fixes, quand  $\varphi$  varie,  $\xi$  engendre un cône qui est coupé par un plan normal à  $\Delta$  suivant un cercle de diamètre HI, H et I étant les points où ce plan coupe  $\Delta$  et  $T$ , et ce cône est bien entièrement situé dans deux dièdres opposés par l'arête.

REMARQUE. — Il résulte de ce qui précède qu'un même hélicoïde  $\mathcal{D}$  peut être enveloppé par une infinité de crémaillères : car  $\alpha$  et  $r$  étant donnés, on peut choisir arbitrairement l'une des trois quantités :  $\varphi$ ,  $\beta$ ,  $R$ , et les deux autres sont donnés par les formules (1) et (2).

### 56. Principe de l'engrenage hélicoïdal.

Considérons l'engrenage gauche défini par les deux vecteurs glissants  $\vec{\Omega}_1$  et  $\vec{\Omega}_2$  (de mesures  $\omega_1$  et  $\omega_2$ ). LIONS à chaque hyperboloïde primitif un cylindre coaxial; bornons-nous au cas de l'engrenage extérieur, et supposons ces cylindres  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ , de rayons  $R_1$  et  $R_2$ , choisis de façon à être de part et d'autre d'un plan tangent commun  $Q$ . Les deux axes et  $Q$  sont fixes.

Imaginons deux plans  $P_1$  et  $P_2$  glissant sur  $Q$  et roulant respectivement sur  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ ; soient  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  les génératrices de contact,  $I$  leur point commun (*fig.* 14). Soient  $[P_1, N_1]$  et  $[P_2, N_2]$  les crémaillères relatives aux roues  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ , et supposées constamment en coïncidence au cours du mouvement. Conservons les notations du § précédent en les affectant des indices 1 ou 2 suivant la roue considérée.

Pour que les plans  $N_1$  et  $N_2$  restent en coïncidence au cours du mouvement, il faut et il suffit que leurs vitesses de translation par rapport à  $Q$  aient même projection sur la normale à leur trace  $T$ , ce qui donne la condition :

$$(3) \quad \omega_1 R_1 \cos \beta_1 = \omega_2 R_2 \cos \beta_2.$$

Les dentures conjuguées de l'engrenage sont alors les hélicoïdes  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  enveloppés par les deux crémaillères. La caractéristique  $\xi_1$  de  $N_1$  est la projection orthogonale de  $\Delta_1$  sur  $N_1$ ; de même  $\xi_2$  est la projection de  $\Delta_2$  sur  $N_2$  :  $\xi_1$  et  $\xi_2$  se coupent au point de contact  $M$  des dentures  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ . L'engrenage hélicoïdal est à contact ponctuel, en général, et sa ligne d'engrènement est la normale à  $(N_1 N_2)$  menée de  $I$ .

### 57. Cas où le contact des dentures est linéaire.

Pour que le contact soit linéaire, il faut et il suffit qu'un plan normal à  $(N_1 N_2)$  rencontre à la fois  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ , ce qui est possible de deux façons :

1°  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  sont confondues. — C'est le cas très important des engrenages à axes parallèles. Alors  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sont les cylindres primitifs de l'engrenage (*fig.* 38). Les deux hélicoïdes  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  se raccordent à chaque instant le long de la caractéristique  $\xi$  de  $(N_1 N_2)$ . La surface d'engrènement est ici le plan passant par  $\Delta$  et normal à  $(N_1 N_2)$ .

$\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  ont même angle spiral  $\alpha$ . Soient  $r_1$  et  $r_2$  les rayons de leurs noyaux  $c_1$  et  $c_2$  : on voit [(*fig.* 38), ou *formule* (2)] qu'on a alors :

$$(4) \quad \frac{r_1}{R_1} = \frac{r_2}{R_2}.$$

Enfin, les sens de  $\mathfrak{D}_1$  et  $\mathfrak{D}_2$  sont les mêmes que ceux des hélicoïdes qui seraient engendrés par T avec  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  pour noyaux : autrement dit,  $\mathfrak{D}_1$  et  $\mathfrak{D}_2$  sont de *sens contraire*.

*Inversement*, soient deux hélicoïdes de même angle spiral  $\alpha$  et de sens contraire; choisissons arbitrairement la distance  $d$  de leurs axes parallèles ( $d > r_1 + r_2$ ). On peut toujours les placer de manière que les noyaux soient de part et d'autre d'un plan tangent commun et que les deux hélices de rebroussement aient une tangente commune  $\xi$ . On a ainsi réalisé un engrenage à axes

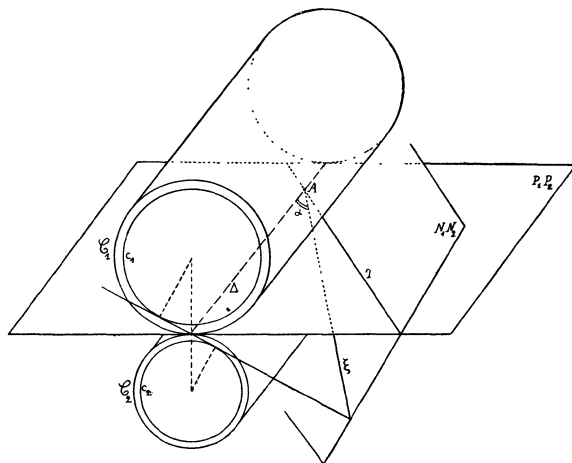


Fig. 38

parallèles et à contact linéaire. De la formule (1) et de la relation  $d = R_1 + R_2$ , on déduit  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $\varphi$  et  $\beta$  :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_1 = r_1 \frac{d}{r_1 + r_2}; \quad R_2 = r_2 \frac{d}{r_1 + r_2}, \\ \sin \varphi = \cos \alpha \sqrt{1 - \left(\frac{r_1 + r_2}{d}\right)^2}, \\ \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r_1 + r_2}{d}\right)^2 \cot^2 \alpha}}. \end{array} \right.$$

2° Le plan  $(N_1 N_2)$  est normal à  $Q$  (cad :  $\varphi = 0$ ). —  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  coïncident alors avec les noyaux des deux hélicoïdes; la droite  $A_1 A_2$  est la caractéristique  $\xi$  des plans  $(N_1 N_2)$  et les angles  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont confondus respectivement avec les angles spiraux  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  (fig. 39).

Remarquons que si les angles en  $A_1$  et  $A_2$  du triangle  $IA_1 A_2$  sont *aigus tous les deux*, les hélicoïdes  $\mathfrak{D}_1$  et  $\mathfrak{D}_2$  sont de *même sens*; si l'un d'eux est *obtus*, les deux hélicoïdes sont de *sens contraire*. Par suite, l'angle des axes est :

$$\begin{array}{l} (\alpha_1 + \alpha_2) \text{ si } \mathfrak{D}_1 \text{ et } \mathfrak{D}_2 \text{ sont de même sens,} \\ |\alpha_1 - \alpha_2| \text{ si } \mathfrak{D}_1 \text{ et } \mathfrak{D}_2 \text{ sont de sens contraire.} \end{array}$$

*Inversement*, soient deux hélicoïdes  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  d'angles spiraux  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ ; on peut toujours les placer de façon que leurs noyaux soient de part et d'autre d'un plan tangent commun et que leurs hélices de rebroussement aient une tangente commune  $\xi$ . On a ainsi réalisé un engrenage généralement gauche et à contact linéaire.

Par exemple, deux hélicoïdes développables de même angle spiral  $\alpha$  forment :

- s'ils sont de sens contraire, un engrenage à axes parallèles;
- s'ils sont de même sens, un engrenage gauche dont les axes font l'angle  $2\alpha$ .

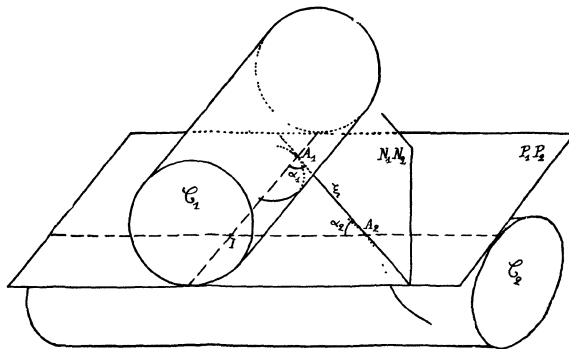


Fig. 39

REMARQUE. — L'engrenage gauche hélicoïdal à contact linéaire est, malheureusement, sans intérêt pratique à cause d'inévitables interférences : en effet, les deux faces de chaque dent devraient être orthogonales à  $(P_1 P_2)$ , donc *parallèles*. Les surfaces conjuguées seraient alors situées d'un même côté de leur plan tangent commun, et on ne pourrait éviter qu'elles se traversent.

### 58. Étude du cas général. Contact ponctuel.

Revenons à la *figure 14*. Au cours du mouvement, le tétraèdre  $IMA_1 A_2$  reste homothétique à lui-même par rapport à  $I$ . Nous allons calculer les éléments de  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  en fonction des données :  $R_1, R_2, \beta_1, \beta_2$  et  $\varphi$ .

Les formules (1) et (2) donnent :

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \varphi = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_1} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \beta_2} \\ \frac{r_1}{R_1} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \beta_1} \quad \frac{r_2}{R_2} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \beta_2} \end{array} \right.$$

On en déduit :

$$(\mathcal{D}_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_1 = R_1 \frac{\cos \varphi \cos \beta_1}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \sin^2 \beta_1}} \\ \cos \alpha_1 = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi \sin^2 \beta_1} \end{array} \right. \quad (\mathcal{D}_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_2 = R_2 \frac{\cos \varphi \cos \beta_2}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \sin^2 \beta_2}} \\ \cos \alpha_2 = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi \sin^2 \beta_2} \end{array} \right.$$



Enfin, le sens de  $\mathcal{D}_1$  par exemple est le même que celui de l'hélicoïde qui serait engendré par  $A_2 A_1$  avec  $C_1$  pour noyau; on en conclut, comme au § précédent :

— si les angles en  $A_2$  et  $A_1$  du triangle  $IA_1 A_2$  sont *aigus tous les deux*,  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  sont de *même sens*;

— si l'un de ces angles est *obtus*,  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  sont de *sens contraire*.

L'angle des axes de l'engrenage est donc :

$(\beta_1 + \beta_2)$  si  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  sont de même sens,

$|\beta_1 - \beta_2|$  si  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  sont de sens contraire.

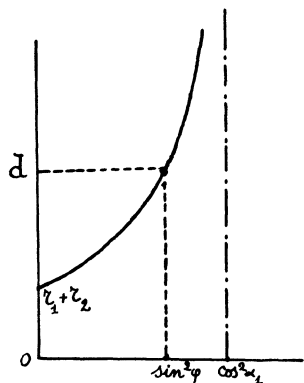


Fig. 40

*Inversement*, soient deux hélicoïdes  $(r_1, \alpha_1$  et  $r_2, \alpha_2)$  : ils constituent les dentures d'un engrenage. En effet, choisissons arbitrairement la distance  $d$  de leurs axes ( $d > r_1 + r_2$ ). On a alors pour calculer  $R_1, R_2, \beta_1, \beta_2$  et  $\varphi$  les quatre équations (6) et la relation :  $R_1 + R_2 = d$ .

On en déduit que  $\varphi$  est racine de l'équation :

$$(7) \quad d = \frac{r_1}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \alpha_1}}} + \frac{r_2}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \alpha_2}}}.$$

Or, en supposant par exemple  $\alpha_1 > \alpha_2$ , la courbe  $y = f(\sin^2 \varphi)$  montre (fig. 40) que l'équation (7) a une solution unique.  $\varphi$  étant ainsi calculé, on a :

$$(\mathcal{D}_1) \left\{ \begin{array}{l} R_1 = \frac{r_1}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \alpha_1}}} \\ \sin \beta_1 = \frac{\sin \alpha_1}{\cos \varphi} \end{array} \right. \quad (\mathcal{D}_2) \left\{ \begin{array}{l} R_2 = \frac{r_2}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \alpha_2}}} \\ \sin \beta_2 = \frac{\sin \alpha_2}{\cos \varphi} \end{array} \right.$$

### 59. Cas particulier.

Si  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ , les angles  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont égaux : soit  $\beta$  leur valeur commune. Dans ce cas, les formules précédentes se réduisent aux formules (5) déjà obtenues dans l'étude de l'engrenage à axes parallèles.

Donc, si les deux hélicoïdes sont de sens contraire, on retrouve bien l'engrenage à axes parallèles; s'ils sont de même sens, ils constituent un engrenage gauche dont les axes font l'angle  $2\beta$ .

*Application* : considérons trois pignons à dentures hélicoïdales appartenant à un train d'engrenages à axes parallèles (fig. 41); les hélicoïdes développables dentures des pignons 1 et 3 sont alors de même sens, et peuvent par conséquent engrener correctement entre eux, en formant un engrenage gauche.

### 60. Conclusion.

Aux interférences près, les roues hélicoïdales correspondant à une surface de crémaillère plane, forment un assortiment, et les engrenages ainsi formés sont à entre-axes variables.

Mais, à part le cas de l'engrenage à axes parallèles, l'angle des axes dépend de la valeur choisie pour l'entre-axes : il suffit de le vérifier dans le

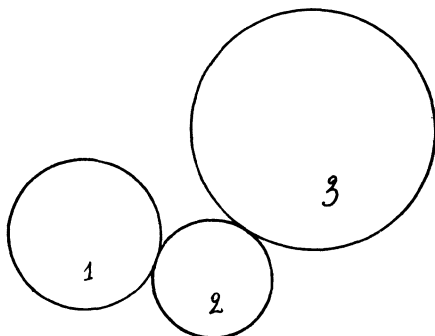


Fig. 41

cas particulier précédent, où les axes font l'angle  $2\beta$  donné par la dernière formule (5). Ce résultat rectifie donc l'opinion couramment admise, d'après laquelle l'angle des axes resterait constant quand l'entre-axes varie <sup>(16)</sup>.

Soulignons en outre que la formule (3) montre que le rapport des vitesses reste rigoureusement constant dans l'engrenage hélicoïdal correspondant à une dent de crémaillère plane <sup>(17)</sup>.

---

(16) Voir, par exemple, M. PÉRIGNON (B. 16, t. I. p. 229).

(17) M. R. BRICARD, écrit que « l'engrenage hélicoïdal n'assure pas rigoureusement la constance du rapport des vitesses angulaires » (B. 3). Cette proposition n'est donc pas applicable aux engrenages dont la denture est un hélicoïde développable, c'est-à-dire à la plupart des engrenages hélicoïdaux industriels.

TAILLAGE SUCCESSIF par l'OUTIL-CRÉMAILLÈRE  
sur MACHINE SUNDERLAND

**61. Principe.**

La machine réalise matériellement la génération de la denture droite ou hélicoïdale correspondant à une surface plane N, à partir d'une crémaillère.

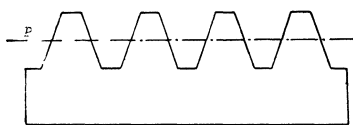


Fig. 42

La face active de l'outil — appelé *outil-crémaillère* — est plane et formée de plusieurs trapèzes isocèles (fig. 42). Cette face active, normale au primitif P, est soumise par rapport à P à un mouvement de va-et-vient perpendiculaire à elle-même (mouvement de coupe), et *très rapide* par rapport au mouvement relatif P/C (mouvement générateur).

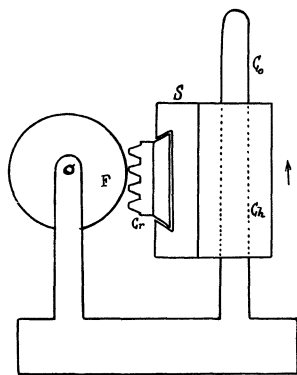


Fig. 43

**62. Schéma de la machine.**

Le flan F est bridé sur un axe horizontal fixe : prenons pour plan de figure un plan normal à cet axe (fig. 43). L'outil crémaillère Cr est lié à un coulisseau; le support S du coulisseau est lui-même fixé sur un chariot Ch qui peut glisser le long d'une colonne verticale fixe C0.

La position du support du coulisseau par rapport au chariot est réglable pour permettre la taille hélicoïdale : on peut, pour cela, le faire tourner autour d'un axe horizontal lié au chariot et normal au plan P. Pour la taille droite on règle cette position de manière que le plan de la face active de l'outil soit normal à l'axe du flan; pour la taille hélicoïdale, on fait tourner le support du coulisseau d'un angle  $\beta$  (défini au § 55) dans un sens ou dans l'autre,

suisant le sens de l'hélicoïde  $\mathcal{D}$  que l'on veut obtenir. En particulier, les deux roues d'un engrenage parallèle à dentures hélicoïdales nécessitent deux réglages distincts du support : les deux inclinaisons correspondantes devant être symétriques par rapport à un plan horizontal.

Le fonctionnement de la machine est le suivant : le chariot monte *lentement* d'un mouvement conjugué de celui du flan, pendant que l'outil est animé de son mouvement de coupe rapide (dans la période de retour, l'outil-crémaillère s'écarte du flan pour ne pas talonner). Quand le chariot s'est élevé d'une hauteur correspondant à un, deux ou trois pas, le support de l'outil s'écarte du flan, le chariot redescend rapidement et, le flan ayant tourné d'un angle correspondant à une, deux ou trois dents, le mouvement relatif du chariot et du flan reprend comme ci-dessus.

REMARQUES I. — Au point de vue de l'indépendance des mouvements de coupe et générateur, il existe deux types de machines Sunderland :

— dans les modèles destinés au taillage des grosses pièces, le flan et le chariot sont immobiles pendant que l'outil enlève son copeau; ce n'est que pendant la période de retour de l'outil que se produit le mouvement générateur, le flan ayant tourné d'un très petit angle;

— dans les modèles courants, le mouvement de coupe est bien plus rapide, et le mouvement générateur reste ininterrompu pendant tout le temps que dure la montée du chariot.

II. — La machine Maag utilise l'outil-crémaillère dans les mêmes conditions que la machine Sunderland, à cette différence près que le flan est alors mobile autour d'un axe vertical fixe.

### 63. Étude des interférences.

Prenons comme plan de figure un plan normal à l'axe de  $\mathcal{C}$ ; la partie *utile* de la face N de la dent de crémaillère a déjà été déterminée (§ 15); soit M l'extrémité située du même côté de P que  $\mathcal{C}$  du segment de droite  $\nu$  section de N (*fig. 44*); la figure est faite au moment où  $\nu$  est en contact avec la denture au point M, et on a déterminé le profil de l'évidement du pied des dents de  $\mathcal{C}$  comme il a été dit au § 18.

1° *Cas de l'engrenage roue-droite/crémaillère.* — Soit  $s$  la saillie de la crémaillère; pour qu'il n'y ait pas interférence de denture, il faut et il suffit que l'on ait :  $s \leq MI \cdot \sin \varphi$ , soit :

$$(1) \quad s \leq R \sin^2 \varphi.$$

$R$  étant le rayon du primitif  $\mathcal{C}$  et  $\varphi$  l'angle de pression. Dans le cas où l'on veut réaliser la denture normale, la saillie de l'outil-crémaillère est  $s = 1,15 \mathcal{M}$ , et la condition précédente s'écrit :

$$n \geq \frac{2,30}{\sin^2 \varphi},$$

$n$  étant le nombre de dents de la roue à tailler.

2<sup>o</sup> Cas de l'engrenage roue-hélicoïdale/crémaillère. — On peut se ramener à l'étude précédente en coupant l'ensemble par un plan normal à l'axe du flan; la figure 44 reste valable à condition d'y remplacer l'angle  $\varphi$  par l'angle  $\psi$  que fait avec la normale à P la droite intersection du plan N avec un plan normal à l'axe du flan.

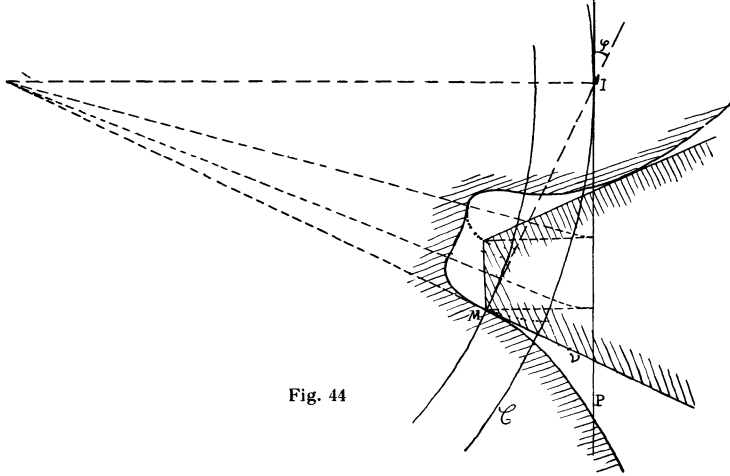


Fig. 44

L'interférence de denture sera donc évitée à condition que l'on ait :

$$s \leq R \sin^2 \psi.$$

Considérons la figure 36 par exemple : l'angle  $\psi$  n'est autre que l'angle en O du triangle rectangle OHh; donc :  $\cos \psi = \frac{r}{R}$ , soit (§ 55) :

$$(2) \quad \cos \psi = \frac{\cos \beta \cos \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta \cos^2 \varphi}}.$$

En remplaçant  $\psi$  par sa valeur dans la condition précédente, celle-ci devient :

$$(3) \quad s \leq R \frac{\sin^2 \varphi}{1 - \sin^2 \beta \cos^2 \varphi}.$$

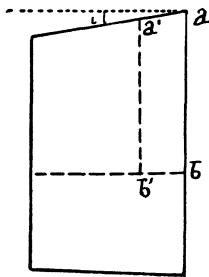


Fig. 45

Si l'on compare à la condition (1), on voit que pour un cylindre primitif  $\mathcal{C}$  donné, un outil-crémaillère déterminé donnera plutôt des interférences en denture droite qu'en denture hélicoïdale.

#### 64. Détalonnage et affûtage de l'outil-crémaillère.

L'outil-crémaillère est limité par une surface prismatique oblique ayant pour base le contour des arêtes de la face active (fig. 42) : les arêtes de cette surface sont parallèles au plan de symétrie d'une dent et font avec la normale au plan de la face active un angle  $i$  compris entre 5° et 10° (angle de détalonnage) (fig. 45).

L'affûtage se fait suivant des plans parallèles au plan de la face active initiale; ainsi, après un certain nombre d'affûtages, la face active d'une dent se projettera non plus en  $ab$ , mais en  $a'b'$  (*fig. 45*).

Le profil est rigoureusement conservé, quel que soit l'état d'usure de l'outil; il suffit de noter que si le plan actif s'est déplacé de  $x$  par suite de l'usure, l'outil et le flan devant être rapprochés de la longueur  $x \operatorname{tg} i$ .



TAILLAGE SUCCESSIF par l'OUTIL - PIGNON  
sur MACHINE FELLOWS

---

**65. Principe.**

Nous avons vu que les deux hélicoïdes développables  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ , dentures des roues  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  (fig. 38) s'enveloppent mutuellement (§ 57) : de là, l'idée de tailler le flan au moyen d'une roue cylindrique d'axe parallèle, et à denture droite ou hélicoïdale.

D'où deux types de machines Fellows — ne différant d'ailleurs que par l'outil et le mouvement de coupe — suivant que la roue à tailler est droite ou hélicoïdale.

**I. — MACHINE FELLOWS à TAILLE DROITE**

**66. Schéma de la machine.**

La face active de l'outil — appelé *outil-pignon* — est identique à la section d'une roue cylindrique à denture droite ou hélicoïdale par un plan normal à son axe. Cet outil O est solidaire d'un coulisseau C vertical et coaxial. Le flan F peut tourner autour de son axe vertical fixe (fig. 46).

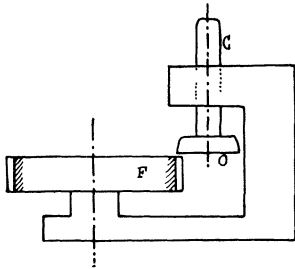


Fig. 46

Le fonctionnement de la machine est le suivant : le coulisseau est animé d'un mouvement de va-et-vient très *rapide* (jusqu'à 700 coups à la minute) au cours duquel les arêtes de la face active de l'outil engendrent une roue à denture droite (mouvement de coupe). En pratique, l'outil travaille en descendant, et un dispositif le fait écarter légèrement du flanc au retour, afin qu'il ne

talonne pas. En outre, le coulisseau et le flan tournent lentement autour de leurs axes, de façon que le flan et la roue équivalente à l'outil soient animés du mouvement relatif conjugué (mouvement générateur).

### 67. Étude des interférences (18).

Bornons-nous au cas où la machine Fellows taille une roue d'engrenage extérieur. Considérons un cercle fixe  $\mathcal{C}_1$  et un cercle mobile  $\mathcal{C}$  extérieur à  $\mathcal{C}_1$  et roulant sans glisser sur  $\mathcal{C}_1$ . Soit M un point lié à  $\mathcal{C}$ ,  $m$  le point où la demi-droite OM coupe  $\mathcal{C}$  (*fig. 47*). Nous appellerons la courbe décrite par M « *épicicloïde allongée* » ou « *épicicloïde raccourcie* » suivant que M est à l'extérieur ou à l'intérieur de  $\mathcal{C}$ ; l'épicicloïde décrite par  $m$  sera dite « *épicicloïde correspondante* ». La construction d'Euler-Savary donne le centre de courbure J de la courbe décrite par M.

Considérons maintenant deux développantes conjuguées  $\delta$  et  $\delta_1$ , dont les noyaux  $c$  et  $c_1$  sont respectivement concentriques à  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}_1$  ( $\delta$  étant liée à  $\mathcal{C}$  enveloppe  $\delta_1$ ). Par rapport au plan  $(O, O_1)$  le point de contact M de  $\delta$  et  $\delta_1$

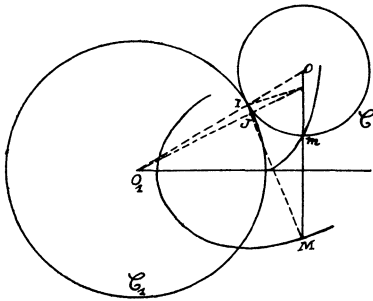


Fig. 47

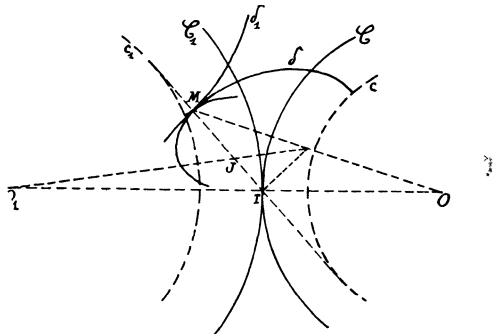


Fig. 48

décrit une tangente commune à  $c$  et  $c_1$  (*fig. 48*). Le point M étant supposé lié à  $\delta$ , sa trajectoire par rapport au plan lié à  $\mathcal{C}_1$  est, dans le cas de la *figure 48*, une épicicloïde allongée tangente en M à  $\delta_1$  et  $\delta$  (cela résulte de la relation :  $\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r$  appliquée au mouvement du point de contact de  $\delta$  avec  $\delta_1$ ).

Si le point M considéré sur  $\delta$  est de plus en plus éloigné de  $c$ , il vient un moment où l'épicicloïde allongée qu'il décrit devient tangente à l'arc non figuré de la développante  $\delta_1$ ; en construisant alors le centre de courbure J, on verrait que l'épicicloïde allongée coupe l'arc de  $\delta_1$  dessiné.

Soit maintenant l'engrenage roue-droite/outil-pignon, et considérons l'arc de développante qui limite une dent de l'outil : tout point de cet arc décrit par rapport à la roue taillée une épicicloïde allongée ou raccourcie tangente à sa denture.

Pour éviter l'interférence de denture, il faut et il suffit que la saillie de la dent de l'outil ne dépasse pas celle indiquée à la *figure 49*, le point extrême étant celui qui engendrerait par rapport au flan une épicicloïde allongée tangente à sa denture en son point de rebroussement. Les deux faces de dents

(18) Voir l'étude de M. Pol RAVIGNEAUX (B. 19) et de M. MERLIN (B. 13).



de la roue se faisant vis-à-vis sont alors raccordées par une courbe n'intervenant pas pour la conduite, et comprenant deux arcs symétriques d'épicycloïdes allongées, eux-mêmes raccordés par un arc de cercle de centre  $O_1$ .

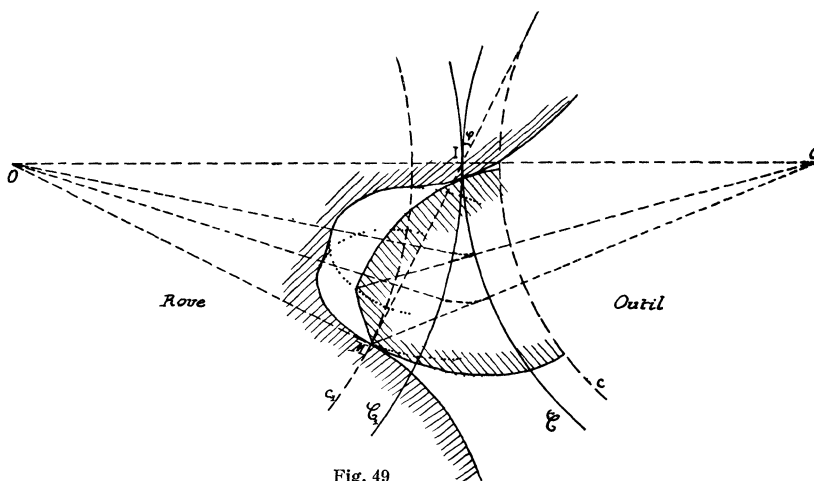
Soient  $s$  la saillie de la dent de l'outil,  $R_1$  et  $R$  les rayons des primitifs  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}_1$ ,  $\varphi$  l'angle de pression. Pour qu'il n'y ait pas d'interférence de denture, il faut et il suffit que l'on ait :  $s + R \leq OM$ . Or, dans le triangle OMI :

$$\overline{OM}^2 = R_1^2 \sin^2 \varphi + R^2 + 2 R_1 R \sin^2 \varphi.$$

D'où la condition générale :

$$(1) \quad s \leq \sqrt{(R_1 + R)^2 \sin^2 \varphi + R^2 \cos^2 \varphi} - R.$$

Pratiquement, on prend pour le creux des roues taillées sur machine Fellows la valeur 1,25  $\mathcal{M}$ . Donc, si l'on veut éviter l'interférence de denture au



taillage, on devra avoir, en appelant  $n$  et  $n_1$  les nombres de dents de l'outil et du flan ( $\mathcal{M} = \frac{2R}{n} = \frac{2R_1}{n_1}$ ) :

$$(n_1^2 + 2 n_1 n) \sin^2 \varphi - (5 n + 6,25) \geq 0,$$

ou :

$$n_1 \geq \sqrt{n^2 + \frac{5 n + 6,25}{\sin^2 \varphi}} - n.$$

REMARQUES I. — D'après la condition générale (1), pour que deux roues cylindriques droites à denture normale, ayant même module et même angle de pression, puissent engrener sans interférence de denture, il faut et il suffit que l'on ait à la fois :

$$n_1 + n_2 \geq \sqrt{n_2^2 + \frac{4(n_2 + 1)}{\sin^2 \varphi}} \quad \text{et} \quad n_1 + n_2 \geq \sqrt{n_1^2 + \frac{4(n_1 + 1)}{\sin^2 \varphi}}.$$

or, l'une de ces conditions majeure l'autre.

II. — En fait, la saillie de la dent d'un couteau Fellows —  $s = 1,25 \mathcal{M}$  — est suffisante pour que deux roues quelconques (à denture normale) ainsi taillées engrènent sans interférence : on se bornera donc à éviter l'interférence au taillage.

**68. Comparaison au point de vue de l'interférence des roues droites taillées sur machines Sunderland et Fellows.**

La valeur maximum  $S$  de la saillie  $s$  de la dent de l'outil permettant d'éviter pour la roue  $\mathcal{C}_1$  l'interférence de denture, est :

$$S = \sqrt{(R + R_1)^2 \sin^2 \varphi + R^2 \cos^2 \varphi} - R.$$

En supposant  $R_1$  et  $\varphi$  fixes, faisons varier  $R$ . La dérivée  $\frac{ds}{dR}$  étant négative, la fonction  $S(R)$  est constamment décroissante. Pour  $R$  infini, la valeur limite de  $S$  est  $R_1 \sin^2 \varphi$ , ce qui correspond au cas de la crémaillère (*fig. 50*).

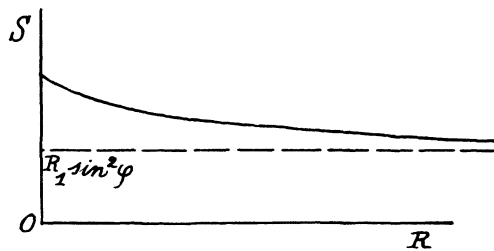


Fig. 50

Par suite, si une crémaillère engrène sans interférence avec une roue droite, il en sera, *a fortiori*, de même de toute roue droite ayant même saillie, même angle de pression, même module et un creux suffisant.

**69. Détalonnage et affûtage de l'outil-pignon.**

L'outil ne peut pas être un cylindre ayant pour section droite la face active, sinon il talonnerait; la matière qui le constitue est donc à l'intérieur de ce cylindre.

L'affûtage de l'outil se fait parallèlement au plan de la face active.

Le détailonnage est subordonné à la condition suivante : *quel que soit son état d'usure, l'outil doit pouvoir tailler une roue de module  $\mathcal{M}$  et d'angle de pression  $\varphi$ .*

Le nombre  $n$  des dents de l'outil reste évidemment le même ainsi que celui  $n_1$  des dents de la roue et que le rayon  $r_1$  du noyau de celle-ci. Donc, le rayon  $r$  du noyau correspondant à la face active de l'outil reste indépendant de l'état d'usure (car on a :  $\frac{r}{n} = \frac{r_1}{n_1}$  comme conséquence de  $\frac{r}{R} = \frac{r_1}{R_1}$ ). Soient  $ox$  l'axe de symétrie d'une dent, I le point de rebroussement d'une arête,  $\widehat{AB}$  l'arc

de primitif intercepté par la dent, R le rayon du primitif de l'outil neuf (fig. 51). Posons  $\widehat{XOI} = a$ ; on a :  $a = \widehat{xOA} + \widehat{AOI}$ .

Or :

$$\widehat{xOA} = \frac{\pi \mathcal{A}b}{4R} = \frac{\pi}{2n},$$

$$\widehat{AOI} = \widehat{UOI} - \widehat{UOA} = \text{tg } \varphi - \varphi.$$

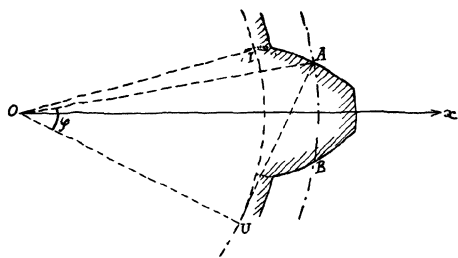


Fig. 51

Posons, avec certains auteurs<sup>(19)</sup> :

$$(\text{tg } \varphi - \varphi) = \text{inv. } \varphi,$$

On a alors la formule :

$$(2) \quad a = \frac{\pi}{2n} + \text{inv. } \varphi.$$

Par suite des affûtages, le cercle de tête de l'outil-pignon diminue : on est donc conduit à rapprocher celui-ci du flan. Alors l'entre-axes décroît, ainsi que R et  $\varphi$ . Soient  $R'$ ,  $\varphi'$ ,  $a'$  et  $\mathcal{A}b'$  les valeurs du primitif, de l'angle de pression, de l'angle  $xOI'$ , et du module correspondant à un certain état d'usure (fig. 52).

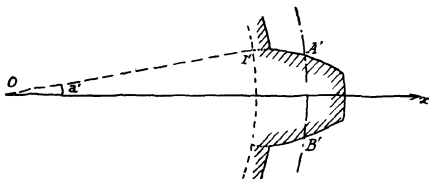


Fig. 52

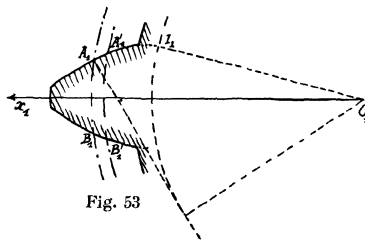


Fig. 53

Considérons maintenant une roue à tailler : soit  $R_1$  le rayon de son primitif, et posons  $\widehat{x_1 O_1 I_1} = a_1$  (fig. 53). On a, comme plus haut :

$$(3) \quad a_1 = \frac{\pi}{2n_1} + \text{inv. } \varphi.$$

Soit  $d$  l'entre-axes dans l'engrènement de la roue avec l'outil neuf ; on a :

$$\frac{\mathcal{A}b}{2} = \frac{R}{n} = \frac{R_1}{n_1},$$

et, par suite :

$$R = d \frac{n}{n + n_1}; \quad R_1 = d \frac{n_1}{n + n_1}.$$

(19) inv.  $\varphi$  : abréviation pour : involute  $\varphi$ .

L'usure de l'outil correspond à une diminution  $\varepsilon$  de l'entre-axes; les rayons des primitifs de l'outil et de la roue sont alors pendant l'engrènement qu'est le taillage :

$$R' = (d - \varepsilon) \frac{n}{n + n_1}; \quad R'_1 = (d - \varepsilon) \frac{n_1}{n + n_1}.$$

Le nouveau primitif détermine sur la dent de la roue un arc  $\widehat{A'_1 B'_1} > \widehat{A_1 B_1}$  (*fig. 53*).

Par suite, l'arc  $A'B'$  déterminé sur la dent de l'outil usé (*fig. 52*) par son primitif actuel doit être tel que l'on ait :

$$\widehat{A'B'} + \widehat{A'_1 B'_1} = \pi \mathbb{A}b',$$

soit :

$$(4) \quad a' - a = \frac{n + n_1}{n} (\text{inv. } \varphi' - \text{inv. } \varphi).$$

Nous allons déterminer la fonction  $(a' - a)$  de  $\varepsilon$ . Des relations :

$$\cos \varphi = \frac{r}{R} \quad \text{et} \quad \cos \varphi' = \frac{r}{R'},$$

on déduit :

$$\frac{\cos \varphi}{\cos \varphi'} = \frac{R'}{R} = \frac{d - \varepsilon}{d},$$

$(a' - a)$  est donc une fonction de fonction de  $\varepsilon$  par l'intermédiaire de la fonction  $\varphi'$ , elle-même définie par la relation :

$$(5) \quad \cos \varphi' = \frac{d \cos \varphi}{d - \varepsilon}.$$

On peut donc calculer les dérivées successives de la fonction  $(\text{inv } \varphi')$  par rapport à  $\varepsilon$ . On a ainsi :

$$\left[ \frac{d(\text{inv. } \varphi')}{d\varepsilon} \right]_{\varepsilon=0} = -\frac{1}{d} \text{tg } \varphi; \quad \left[ \frac{d^2(\text{inv } \varphi')}{d\varepsilon^2} \right]_{\varepsilon=0} = \frac{\cot \varphi}{d^2};$$

$$\left[ \frac{d^3(\text{inv } \varphi')}{d\varepsilon^3} \right]_{\varepsilon=0} = \frac{\cot \varphi (4 + \cot^2 \varphi)}{d^3}; \quad \text{etc.}$$

On en déduit les premiers termes du développement de  $(\text{inv } \varphi')$  en série de Taylor, d'où finalement :

$$(6) \quad a' - a = \frac{n + n_1}{n} \left[ -\frac{\text{tg } \varphi}{d} \varepsilon + \frac{\cot \varphi}{2 d^2} \varepsilon^2 + \frac{\cot \varphi (4 + \cot^2 \varphi)}{6 d^3} \varepsilon^3 + \dots \right].$$

Or, la surface extérieure de l'outil à laquelle appartiennent les portions d'arêtes vives du cercle de tête de la face active est un tronc de cône de révolution de demi-angle au sommet  $i$  (*fig. 54*). Soit alors  $\varepsilon_0$  la diminution du rayon du cercle de tête correspondant à l'usure  $x$  :

$$(7) \quad \varepsilon_0 = x \text{ tgi}.$$

Si l'on veut que le rayon du cylindre de pied du flan soit indépendant de l'état d'usure de l'outil, on devra rapprocher les axes de la longueur  $\varepsilon_0$  lorsque l'usure de l'outil sera  $x$ . Donc, en remplaçant dans (6)  $\varepsilon$  par la valeur  $\varepsilon_0$  définie par (7), on a la relation qui donne  $a'$  en fonction de  $x$  et qui, par conséquent, détermine la surface de détalonnage rigoureusement exacte de l'outil.

En pratique, cette surface serait difficile à réaliser; elle a d'ailleurs l'inconvénient de dépendre du nombre de dents du flan; on la remplacera donc par une surface plus simple, à condition d'admettre une certaine tolérance pour le creux du flan. Si on limite le développement  $a'(x)$  à son premier terme, on a la relation :

$$(8) \quad a' = a - \frac{\operatorname{tg} i \operatorname{tg} \varphi}{R} x.$$

Alors,  $a'$  est fonction linéaire de  $x$ , c'est dire que la surface de détalonnage est formée par deux portions d'hélicoïdes développables symétriques par rapport au plan de symétrie de la dent, et dont le noyau a pour rayon  $r$ .

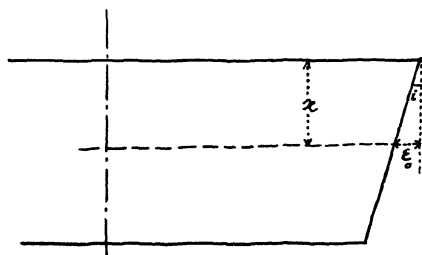


Fig. 54

La surface de détalonnage étant ainsi choisie, la distance  $\varepsilon$  dont on doit rapprocher les axes n'est plus exactement égale à  $\varepsilon_0$  : en comparant (6) et (8) qui s'écrivent :

$$a' - a = - \frac{n + n_1}{n} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{d} \varepsilon_0,$$

on voit que  $\varepsilon$  est défini en fonction de  $\varepsilon_0$ , c'est-à-dire de l'usure, par la relation :

$$\varepsilon_0 = \varepsilon - \frac{\cot^2 \varphi}{2d} \varepsilon^2 - \frac{\cot^2 \varphi (4 + \cot^2 \varphi)}{6d^2} \varepsilon^3 + \dots$$

En inversant, il vient :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{\cot^2 \varphi}{2d} \varepsilon_0^2 + \frac{2 \cos^2 \varphi}{3d^2 \sin^4 \varphi} \varepsilon_0^3 + \dots$$

ce qui s'écrit encore :

$$(9) \quad \varepsilon - \varepsilon_0 = \frac{\cot^2 \varphi}{3b(n + n_1)} \varepsilon_0^2 + \frac{8 \cot^2 \varphi}{3b^2(n + n_1)^2 \sin^2 \varphi} \varepsilon_0^3 + \dots$$

La correction que cette formule met en évidence est loin d'être négligeable : les praticiens savent fort bien que la quantité dont on rapproche les axes n'est pas exactement proportionnelle à l'usure  $x$ ; ils la déterminent à peu près par des moyens empiriques.

*Exemple.* — Supposons  $\mathbb{A} = 5$ ,  $n + n_1 = 60$ ,  $\varphi = 20^\circ$ , l'usure de l'outil étant telle que l'on ait :  $\varepsilon_0 = 2$  mm. Les deux termes correctifs de la formule (9) sont alors respectivement : 0,10 mm et 0,015 mm. On devra tenir compte du premier.

## II. — MACHINE FELLOWS à TAILLE HÉLICOÏDALE

### 70. Principe.

La seule différence avec la taille droite réside dans le mouvement de coupe et dans la forme de l'outil-pignon.

Le mouvement de coupe est ici un mouvement alternatif hélicoïdal ayant même axe que le coulisseau.

L'outil est tel que ses arêtes vives décrivent dans ce mouvement une roue dont la denture est un hélicoïde de même angle spiral que celui de la roue à tailler, mais de sens différent (§ 57) : c'est ce que nous appelons « la roue équivalente à l'outil ».

Remarquons que les deux roues conjuguées d'un engrenage à axes parallèles ayant des dentures de sens différent, il faut, pour les tailler, deux outils de sens différent.

### 71. Étude des interférences.

Si l'on coupe le flan et la roue équivalente à l'outil par un plan normal à leurs axes, on a la même figure que dans le cas de la taille droite : ainsi, la valeur maximum de la saillie de l'outil permettant d'éviter pour la roue l'interférence de denture, correspond à la *figure 49*, avec cette différence que l'angle qui est désigné par  $\varphi$  dans cette figure n'est pas l'angle de pression, mais l'angle  $\psi$  défini au § 63 [formule (2)]. En conservant les notations précédentes, la condition de non interférence est donc :

$$s \leq \sqrt{(R + R_1)^2 \sin^2 \psi + R^2 \cos^2 \psi} - R,$$

soit, en remplaçant  $\psi$  par sa valeur :

$$(10) \quad s \leq \sqrt{\frac{(R + R_1)^2 \sin^2 \varphi + R^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \beta}{1 - \sin^2 \beta \cos^2 \varphi}} - R.$$

Si l'on compare cette limite à celle obtenue dans le cas de la denture droite [condition (1)], on voit que pour une même valeur de  $R$ ,  $R_1$  et  $\varphi$ , elle est plus grande. Donc, pour une même valeur de la saillie, des primitifs et de l'angle de pression, l'interférence se produit plutôt dans l'engrenage à denture droite que dans l'engrenage à denture hélicoïdale.

**72. Détalonnage et affûtage de l'outil.**

Si l'outil pouvait être affûté suivant des plans normaux à l'axe, l'étude faite dans le cas de la taille droite s'étendrait au cas actuel en remplaçant  $\varphi$  par  $\psi$  dans les formules trouvées, et la développante section de la surface de détalonnage d'une face de dent par un plan d'affûtage correspondant à l'usure  $\alpha$  se déduirait de la section de la dent de la roue équivalente à l'outil neuf par la rotation définie par la formule (8), en y remplaçant  $\varphi$  par  $\psi$ ; enfin, sous la même réserve, la correction relative à la variation de l'entre-axes avec l'usure serait valable.

Mais — à moins que l'angle spiral ne soit très petit — un tel mode d'affûtage produirait une coupe très défectueuse (le plan d'affûtage devant être sensiblement normal aux trajectoires des points de l'arête).

Cherchons à déterminer une surface de détalonnage exacte correspondant à des affûtages corrects : soient  $h_1$  et  $h_2$  les arêtes de rebroussement des deux

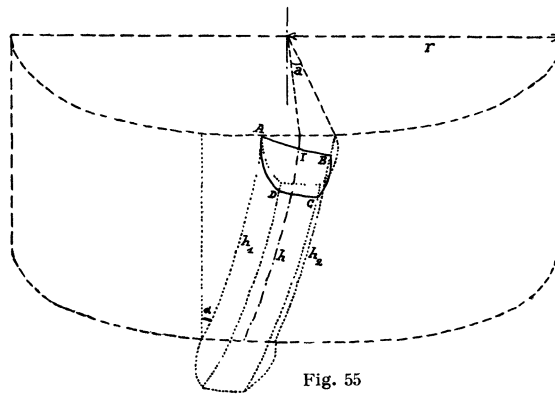


Fig. 55

faces d'une dent de la roue équivalente à l'outil neuf, et  $h$  l'hélice moyenne (fig. 55); supposons le plan d'affûtage normal à cette hélice, et soit ABCD la section de la dent considérée par ce plan. Connaissant  $h$ , l'angle  $a$  précédemment défini, et le rayon du cylindre de tête, on peut construire le quadrilatère curviligne ABCD <sup>(20)</sup>.

Connaître la surface de détalonnage, c'est connaître le quadrilatère A'B'C'D' à associer à chaque point I' de  $h$ ; or, pour cela, l'étude faite à propos de l'outil Fellows à taille droite est valable, à condition de remplacer  $\varphi$  par  $\psi$ . Définissons la position de I' sur  $h$  par sa distance  $x$  au plan normal à l'axe de l'outil et passant par I, trace du plan d'affûtage de la dent neuve. Remarquons que le noyau de la roue équivalente à l'outil doit être indépendant de l'usure (§ 69), et que l'angle spiral  $\alpha$  doit rester constant (comme égal à celui de la roue à tailler).

(20) Le calcul sera fait dans le chapitre suivant, à propos du détalonnage de la vis-mère Pfauter.

Finalement, le quadrilatère  $A'B'C'D'$  à associer au point  $I'$  ne dépend que de l'angle  $a'$  défini par la formule (8) qui s'écrit ici :

$$(11) \quad a' = a - \frac{\operatorname{tg} i \cdot \operatorname{tg} \psi}{R} x,$$

où  $\psi$  et  $R$  sont relatifs à l'outil neuf.

Il est donc possible de construire une dent semblable, dans un rapport aussi grand que l'on voudra, à une dent de l'outil à réaliser, et susceptible de servir de gabarit permettant la rectification très précise de l'outil.

Enfin, la détermination correcte de l'entre-axes du flan et de l'outil, suivant l'état d'usure de celui-ci, pourra se faire exactement comme en taille droite.





TAILLAGE PROGRESSIF par la VIS-MÈRE  
sur MACHINE PFAUTER

**73. Principe.**

Nous avons vu (II, Chap. I) que deux hélicoïdes développables quelconques peuvent être considérées comme dentures conjuguées d'un engrenage gauche à contact *ponctuel* : ces dentures ne sont donc pas l'enveloppe l'une de l'autre. Par suite, si l'on veut prendre comme roue taillante une roue hélicoïdale fonctionnant avec le flan comme un engrenage gauche (*fig. 14*), on devra

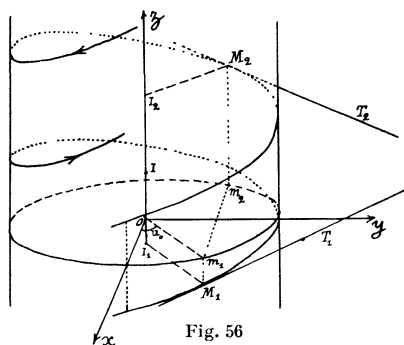


Fig. 56

réaliser, outre les mouvements de rotation conjugués de la roue et du flan autour de leurs axes, un mouvement relatif convenable de ces deux axes permettant de faire varier à chaque tour du flan le lieu des points de contact successifs de chacune de ses dents avec l'hélicoïde taillant.

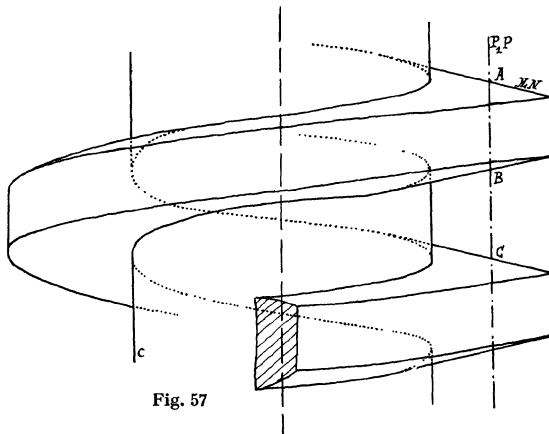
Théoriquement, on pourrait utiliser un outil-pignon à taille hélicoïdale animé du même mouvement de coupe que dans la machine Fellows, et d'un mouvement générateur compliqué du mouvement relatif des deux axes. Une machine construite d'après cette génération serait très complexe.

En fait, la roue taillante est une vis à denture hélicoïdale qui n'est, au fond, qu'une roue hélicoïdale à une, deux ou trois dents (appelées ici filets), d'angle spiral assez voisin de  $\frac{\pi}{2}$ , et qui permet, comme on le verra, la suppression du mouvement de coupe des machines Sunderland ou Fellows.

Considérons deux hélices déduites l'une de l'autre par une translation parallèle à leur axe commun (*fig. 56*). Orientons-les en sens contraire, et

considérons relativement à chacune d'elles la nappe d'hélicoïde engendrée par la demi-tangente orientée comme l'hélice. Soient  $m_1$  et  $m_2$  deux points du cercle section droite du cylindre portant les hélices : faisons leur correspondre les points  $M_1$  et  $M_2$  respectivement sur les deux hélices. Soient  $oy$  la médiatrice de  $m_1m_2$  et  $I_1M_1$ ,  $I_2M_2$  les rayons du cylindre issus de  $M_1$  et  $M_2$ . Les plans  $I_1M_1T_1$  et  $I_2M_2T_2$  tangents le long de  $T_1$  et  $T_2$  aux deux nappes d'hélicoïdes précitées se coupent suivant une perpendiculaire à  $oy$  : en effet, ces deux plans sont symétriques par rapport à la parallèle à  $oy$  menée par le milieu  $I$  de  $I_1I_2$  (on le voit par exemple en remarquant que cette symétrie est équivalente au produit de deux symétries : l'une par rapport au plan  $zoy$ , l'autre par rapport au plan parallèle à  $xoy$  et passant par  $I$ ).

Prenons alors comme plan de figure un plan normal à cette intersection : les plans tangents aux deux hélicoïdes en  $M_1$  et  $M_2$  sont alors normaux à ce plan, et leurs traces sont également inclinées sur la projection de l'axe de ces hélicoïdes (*fig. 57*). Je désignerai les grandeurs attachées à la vis par les notations déjà introduites (II, Chap. I), et sans les affecter d'indice.



Le plan de la *figure 57* est, sur la *figure 14*, normal à la droite  $T$ . On y voit le contour apparent du noyau  $c$  de l'une des roues — la vis hélicoïdale — et la trace des crémaillères  $[P, N]$  et  $[P_1, N_1]$  confondues. On voit de plus que l'angle d'inclinaison de l'axe de la vis sur le plan normal à  $T$ , est complémentaire de l'angle  $\widehat{T, \Delta}$  (*fig. 36*) : cet angle est donc égal à  $\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$ .

#### 74. Remarques.

I. — Abstraction faite des cylindres de pied et de tête, la vis que nous avons imaginée est définie par son sens et les trois grandeurs :  $r$ ,  $\alpha$  et  $a$  (en désignant par  $2a$  la longueur de la portion de génératrice du noyau interceptée par  $h_1$  et  $h_2$  à travers un filet).

Cette vis étant donnée, nous avons choisi arbitrairement le couple  $(m_1, m_2)$  et, à chacun de ces choix, nous avons fait correspondre une position de la vis

telle que son contour apparent sur un plan donné soit identique au profil d'un outil-crémaillère Sunderland.

II. — Soit Q le plan fixe sur lequel glisse le primitif de la crémaillère [P, N] quand il roule sans glisser sur le cylindre primitif C de la vis animée de la rotation  $\omega$ ; il résulte d'une propriété déjà vue (§ 10) que si P<sub>1</sub> glisse sur Q avec une vitesse non parallèle à celle de l'axe de la vis et égale en projection sur le plan de la *figure 57* à celle de P, la vis enveloppe par rapport à P<sub>1</sub> la crémaillère [P<sub>1</sub>, N<sub>1</sub>].

**75. Comment construire et placer la vis pour que son contour apparent soit une crémaillère de module et d'angle de pression donnés ?**

Supposons que la vis ait  $k$  filets.

On a d'abord les formules générales déjà établies (§ 55) :

$$(1) \quad \cos \varphi = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

et :

$$(2) \quad r \cot \alpha = R \cot \beta.$$

La relation qui exprime que les plans tangents en M<sub>1</sub> et M<sub>2</sub> aux hélicoïdes considérées (*fig. 56*) font entre eux l'angle  $2\varphi$  est :

$$(3) \quad \cos u_0 = \frac{\sin \varphi}{\cos \alpha}.$$

L'hélice section par C de chaque hélicoïde a pour pas :  $2\pi R \cot \beta$ . Or, les points A et C (*fig 57*) sont les projections de deux points d'une génératrice de C dont la distance dans l'espace est égale au pas; si  $\mathcal{M}$  est le module, on doit avoir :  $AC = k(\pi\mathcal{M})$ , d'où, en égalant les deux expressions de AC :

$$(4) \quad 2 R \cos \beta = k \mathcal{M}.$$

Enfin, exprimons que dans le primitif de la crémaillère associée à la vis, l'épaisseur est égale à l'intervalle : il suffit d'écrire, pour cela, que la distance AB est égale au demi-pas de cette crémaillère, d'où l'équation (compte tenu des relations précédentes) :

$$(5) \quad a \sin \beta = R \operatorname{tg} \varphi - \frac{\mathcal{M}}{2} \left[ (k + 1) \frac{\pi}{2} - k u_0 \right].$$

CONCLUSION. — Si l'on se donne  $k$ ,  $\mathcal{M}$ ,  $\varphi$  et R, il correspond à ces éléments deux vis symétriques dont on calculera successivement :  $\beta$ ,  $\alpha$ ,  $r$ ,  $u_0$  et  $a$  par les formules (4), (1), (2), (3), (5).

REMARQUE. — Pour une vis donnée ( $r$ ,  $\alpha$ ,  $a$ ,  $k$ ), on vérifie bien, en faisant abstraction de la condition : épaisseur = intervalle, qu'on n'a que trois relations pour déterminer :  $\mathcal{M}$ ,  $\varphi$ , R et  $\beta$ .

**76. Schéma de la machine Pfauter.**

L'axe A de la vis-mère (*fig. 58*) est solidaire d'un support S monté sur un chariot Ch et réglable autour d'un axe lié au chariot et qui est la perpendiculaire commune à A et à l'axe du flan : ce réglage a pour but de donner à l'axe de la vis l'inclinaison voulue pour le taillage à réaliser. Le chariot peut coulisser verticalement sur une colonne fixe. Le flan F est bridé sur un axe vertical fixe.

Au cours du taillage, le chariot monte *très lentement d'un mouvement continu*, pendant que le flan et la vis-mère sont animés de leurs rotations conjuguées (§ 77); quand la vis s'est élevée suffisamment pour ne plus mordre le flan, l'opération est terminée.

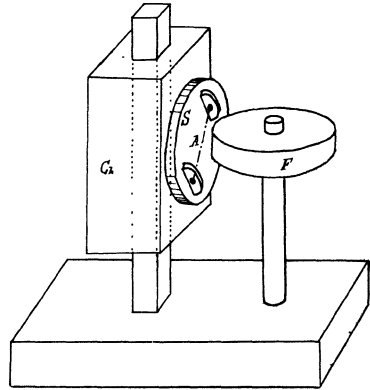


Fig. 58

**77. Taillage d'une roue à denture droite.**

Définissons les éléments de la roue à tailler avec les notations déjà introduites en les affectant de l'indice 1. Plaçons le flan de façon que son axe soit normal au plan de la *figure 57* et prenons pour plan de figure le plan parallèle passant par la perpendiculaire commune aux deux axes (*fig. 59*).

P roulant sans glisser sur  $C$ , et  $P_1$  sur  $C_1$ , la vitesse de rotation  $\omega_1$  du flan est celle qui assure la coïncidence de  $N_1$  et  $N$ , et vérifie donc la relation :

$$\omega R \cos \beta = \omega_1 R_1.$$

soit, en tenant compte de (4), et désignant par  $n_1$  le nombre de dents du flan :

(6) 
$$k\omega = n_1 \omega_1.$$

Si l'on fait tourner la vis et le flan de ce mouvement conjugué, leurs axes étant fixes, le lieu des points de contact de la vis et de la dent à réaliser est

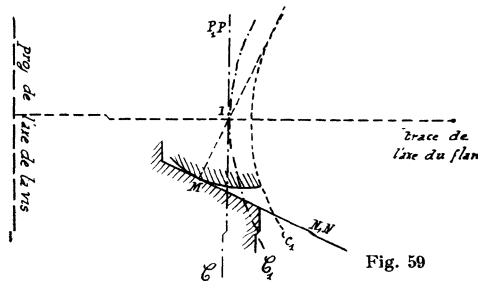


Fig. 59

exactement la section de celle-ci par le plan de figure. Donc, si après chaque tour du flan, on déplace l'axe de la vis par une très petite translation normale au plan de figure, on engendre bien la denture voulue.

Or, il est aussi rigoureux, et beaucoup plus commode, de ne pas séparer ces deux mouvements, et le taillage s'effectue ainsi : le flan et la vis tournent du mouvement conjugué défini plus haut, pendant que la vis est animée d'un mouvement de translation *très lent*, parallèle à l'axe du flan, mais, à cela près, arbitraire.

Remarquons que, dans ce taillage, l'axe de la vis fait l'angle  $\beta$  avec l'axe du flan.

### 78. Étude des interférences.

Considérons la *figure 59* : on a vu que lorsque les axes de la vis et du flan sont fixes, le lieu des points de contact des dentures en prise est, par rapport à la roue, sa section par un plan normal à son axe. Tout se passe donc, au point de vue des interférences, comme si la vis-mère était remplacée par la crémaillère matérielle équivalente (c'est-à-dire la crémaillère qui aurait comme profil le contour apparent de la vis). Donc, comme dans le taillage par l'outil crémaillère, la condition pour qu'il n'y ait pas interférence de denture est :

$$s \leq R_1 \sin^2 \varphi,$$

$s$  étant la saillie de la dent de vis-mère.

### 79. Taillage d'une roue à denture hélicoïdale.

Prenons comme plan de figure le plan passant par la perpendiculaire commune aux axes de la vis et du flan, et sur lequel le contour apparent de

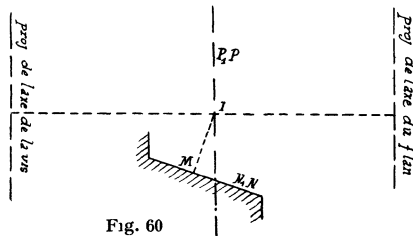


Fig. 60

la vis coïncide avec le profil de la crémaillère matérielle équivalente (*fig. 60*). Ces axes font alors respectivement avec le plan de figure les angles  $\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$  et  $\left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right)$ . La condition de conjugaison des vitesses de rotation de la vis et du flan est, quand les axes sont fixes :

$$\omega R \cos \beta = \omega_1 R_1 \cos \beta_1,$$

soit, en tenant compte de (4) et de la relation :  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cos \beta_1$ , où  $\mathcal{M}_1$  est le module de la roue à tailler :

$$k\omega = n_1 \omega_1.$$

Remarquons que le point de contact des dentures en prise est dans le plan de figure : c'est la projection sur le plan  $(NN_1)$  du point de contact I des cylindres  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}_1$ . Par suite, les axes étant fixes, le lieu des points de contact de la surface de la vis avec la denture à réaliser est, par rapport à celle-ci, une section par l'hyperboloïde de révolution coaxial au flan et engendré par IM.

Si l'on donne à l'axe de la vis un mouvement tel que les crémaillères  $[P, N]$  et  $[P_1, N_1]$  restent en coïncidence, on engendrera bien la denture proposée.

Pratiquement, on imprime à l'axe de la vis un mouvement de translation très lent de vitesse  $v$ , parallèle à l'axe du flan. Soit alors  $\omega'$  la nouvelle vitesse de rotation de la vis correspondant à la vitesse  $\omega_1$  du flan : on l'obtient en exprimant que la projection de la vitesse de I sur le plan de la figure 60 est la même suivant qu'on la considère comme appartenant à  $\mathcal{C}$  ou à  $\mathcal{C}_1$  :

$$\omega' R \cos \beta \pm v \sin \beta_1 = \omega_1 R_1 \cos \beta_1,$$

ou :

$$(7) \quad k\omega' \pm \frac{2v \sin \beta_1}{\mathbb{A}\mathbb{B}} = n_1 \omega_1,$$

d'où, en comparant à la formule qui donne  $\omega$  :

$$(8) \quad |\omega' - \omega| = \frac{2 \sin \beta_1}{k \mathbb{A}\mathbb{B}} v.$$

La machine utilisée pour le taillage est toujours la machine Pfauter (fig. 58); les seules différences avec le cas de la taille droite sont :

1° l'angle de l'axe de la vis avec la verticale :  $(\beta + \beta_1)$  ou  $|\beta - \beta_1|$  suivant que l'hélicoïde à tailler est de même sens que la vis ou de sens contraire (§ 58);

2° la variation  $|\omega' - \omega|$  de la vitesse de rotation de la vis, réalisée grâce à un différentiel.

### 80. Remarque.

Il résulte de cette étude qu'une vis-mère dont les filets seraient rectilignes en section axiale ne saurait tailler les dentures droites ou hélicoïdales à développantes des cercles. Il ne faut donc pas s'étonner qu'une telle vis-mère ne donne pas les mêmes résultats que l'outil-crémaillère : cela vient d'une conception fautive de la vis équivalente à la crémaillère, et non, comme on le croit encore souvent, des « interférences ».

De même, une vis-mère dont le filet serait coupé suivant deux segments rectilignes par un plan normal à l'hélice moyenne (§ 81) n'est qu'une réalisation imparfaite de la vis correcte.

### 81. Détalonnage et affûtage de la vis-mère.

Les rainures d'affûtage doivent être sensiblement normales aux hélices tracées sur les filets de la vis; la surface d'affûtage de chaque filet est très sensiblement plane : dans ce qui suit, nous l'assimilerons à un plan.

La *figure 61* montre la réalisation de l'outil par rapport à la vis hélicoïdale équivalente : la vis-mère est réalisée à partir d'une vis hélicoïdale sur laquelle on pratique les *rainures d'affûtage* qui partagent les filets en un certain nombre de tronçons. Puis, la surface de détalonnage est réalisée *approximativement* sur un tour spécial dont le chariot porte-outil est commandé par une came à profil en spirale d'Archimède.

Nous allons définir une surface de détalonnage exacte de chaque tronçon afin de permettre une rectification précise, après trempe, de la vis-mère une fois taillée.

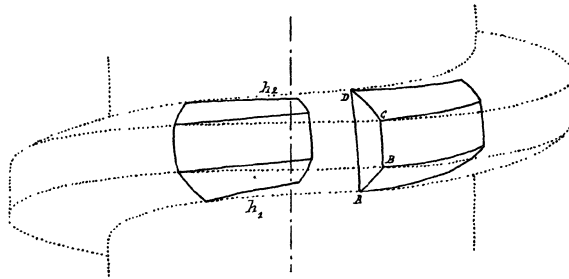


Fig. 61

Soient  $h_1$  et  $h_2$  les hélices de rebroussement des deux nappes hélicoïdales qui constituent un filet de la vis équivalente à l'outil neuf (*fig. 56*). Leurs équations sont :

$$(h_1) \begin{cases} x = r \cos u \\ y = r \sin u \\ z = ru \cot \alpha + a \end{cases} \quad (h_2) \begin{cases} x = r \cos u \\ y = r \sin u \\ z = ru \cot \alpha - a \end{cases}$$

On en déduit les équations paramétriques des hélicoïdes développables correspondants :

$$(9) \quad (\mathcal{D}_{h_1}) \begin{cases} x = r \cos u - \rho \sin \alpha \sin u \\ y = r \sin u + \rho \sin \alpha \cos u \\ z = ru \cot \alpha + \rho \cos \alpha - a \end{cases} \quad (\mathcal{D}_{h_2}) \begin{cases} x = r \cos u + \rho \sin \alpha \sin u \\ y = r \sin u - \rho \sin \alpha \cos u \\ z = ru \cot \alpha - \rho \cos \alpha + a \end{cases}$$

Les nappes utiles sont obtenues pour  $\rho > 0$ . Soit  $R$  le rayon du cylindre primitif de l'outil neuf; ce cylindre coupe  $\mathcal{D}_{h_1}$  et  $\mathcal{D}_{h_2}$  suivant deux hélices définies par la valeur de  $\rho$  :

$$\rho_0 = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{\sin \alpha}.$$

L'angle spiral de ces hélices est l'angle  $\beta$  défini au § 55; enfin, ces deux hélices percent le plan  $zox$  en deux points symétriques par rapport à  $ox$ . Par suite, l'hélice moyenne correspondante  $H$  s'appuie sur  $ox$  : remarquons qu'elle est sur le même conoïde droit d'axe  $oz$  que l'hélice moyenne relative à  $h_1$  et  $h_2$ .

Nous supposons donc le plan d'affûtage normal à H. Considérons en particulier un tronçon de filet détalonné, situé au milieu de la vis-mère; le plan d'affûtage de ce tronçon neuf a pour équation :

$$(10) \quad y \sin \beta + z \cos \beta = 0.$$

Supposons enfin le détalonnage effectué de façon que si l'on appelle  $\theta$  l'angle dont a tourné le plan d'affûtage par suite de l'usure (fig. 62), on ait :

$$(11) \quad R' = R (1 - \theta \operatorname{tg} i),$$

$R'$  étant le rayon du primitif correspondant à l'usure  $\theta$ ,  $i$  un angle donné (peu différent de l'angle de détalonnage sur le cylindre de tête de la vis).

Soit  $\eta$  la section du cylindre admettant pour section droite la spirale d'Archimède définie par l'équation (11), par le conoïde droit d'axe  $oz$  et de directrice H. Les hélices moyennes  $H'$  associées à chaque état d'usure (défini par  $\theta$ ) s'appuient sur la courbe  $\eta$ . A chaque point de  $\eta$  correspond un quadrilatère curviligne ABCD (fig. 61) dont le plan est normal à l'hélice  $H'$  relative à ce point. Avec l'usure, le rayon  $R'$  du primitif de la vis hélicoïdale équivalente à l'outil diminue : nous allons déterminer le quadrilatère ABCD de façon que la crémaillère associée à cette vis hélicoïdale soit *indépendante de l'usure*, c'est-à-dire que son module  $\mathbb{A}b$  et son angle de pression  $\varphi$  soient indépendants de  $\theta$ .

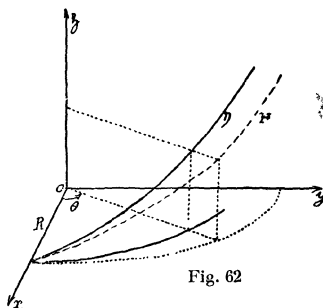


Fig. 62

Nous sommes ramenés au problème déjà traité : déterminer la vis théorique connaissant  $\mathbb{A}b$ ,  $\varphi$ ,  $R'$  et  $k$  (§ 75). Nous pouvons donc construire pour chaque valeur de  $\theta$  le contour ABCD section du filet de la vis théorique correspondante; occupons-nous, par exemple, de l'arc  $\overline{AB}$  de la nappe  $\mathcal{D}_{h_1}$  relative à l'outil neuf ( $\theta = 0$ ).

Faisons un changement d'axes de coordonnées, les nouveaux axes étant déduits des précédents (fig. 56) par rotation autour de  $ox$  de façon que le plan des XY soit le plan d'affûtage et que  $oz$  soit dirigé vers l'extérieur du tronçon considéré. Les formules de transformation sont :

$$X = x \quad Y = -y \cos \beta + z \sin \beta \quad Z = -y \sin \beta - z \cos \beta.$$

Des équations paramétriques de  $\mathcal{D}_{h_1}$ , on déduit alors, en faisant  $Z = 0$ , les équations de la courbe cherchée dans le plan des XY en fonction du paramètre  $u$  :

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = \frac{r(u \sin u + \cos u + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta) - a \operatorname{tg} \alpha \sin u}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \cos u} \\ Y = \frac{r(u \cos u - \sin u) - a \operatorname{tg} \alpha \cos u}{\cos \beta + \operatorname{tg} \alpha \sin \beta \cos u} \end{array} \right.$$



Connaissant la section du filet de vis théorique pour une usure déterminée et sur le tronçon moyen considéré, on engendre la vis en faisant subir à cette section un mouvement hélicoïdal défini par le pas de cette vis. Or, ce pas est :

$$h' = 2 \pi R' \cot \beta'.$$

Le détalonnage assurant la constance du module, on a d'après (4) :

$$(13) \quad h' = k \pi \mathfrak{M} \cdot \frac{1}{\sin \beta'}.$$

Cette formule montre que le pas *dépend de l'usure* (en fait, il varie très peu, comme on va le voir sur un exemple) : il en résulte que les tronçons successifs de la vis-mère détalonnée exactement ne sont pas absolument égaux.

Remarquons enfin que pour tailler un type de roue donné, on n'aura pas à modifier, d'après l'état d'usure, les vitesses de rotation de la vis et du flan, ainsi que le montrent les formules (6) et (8); mais on devra régler l'inclinaison de la vis suivant la valeur correspondante de l'angle  $\beta'$ .

*Exemple numérique.* — Supposons :  $\mathfrak{M} = 6$ ,  $\varphi = 20$ ,  $R = 50$  mm,  $k = 1$ . On a alors pour l'outil neuf :

$$\beta = 86^\circ 33' 38''; \quad \alpha = 69^\circ 43' 6''; \quad r = 8, 1316 \text{ mm.}$$

Supposons le détalonnage tel que :  $\operatorname{tg} i = 0,114$  ( $i = 6^\circ 30'$ ). Admettons que lorsque la vis-mère est complètement usée, on ait :  $\theta = 0,4$  radians ( $\theta$  est alors voisin de  $23^\circ$ , ce qui est un maximum).

La formule (11) donne alors :  $R = 47,702$  mm. La valeur correspondante de  $\beta'$  est, d'après (4) :  $\beta' = 86^\circ 23' 40''$ .

Par suite des affûtages successifs, l'angle  $\beta$  a donc varié de  $10'$  : dans un taillage précis, il est indispensable d'en tenir compte.

Il résulte de la formule (13) que le pas de la vis-mère est égal à 18,8836 mm quand elle est neuve, et à 18,8870 mm quand elle est usée : soit une variation maximum de 3,4 microns. Il semble bien que cette variation soit de l'ordre de la tolérance admise pour une vis-mère de très haute précision.

Cette variation du pas avec l'usure est d'autant moins sensible que la vis a moins de filets, et que  $\beta$  est plus grand : il y a donc intérêt, à ce point de vue, à prendre  $R$  assez grand.

## 82. Application pratique de cette étude du détalonnage.

Les déformations dues à la trempe rendraient pratiquement vains les efforts que l'on pourrait faire pour perfectionner le taillage de la vis-mère : je me suis donc préoccupé d'améliorer la rectification en la faisant reposer sur une étude rigoureuse.

On peut ainsi obtenir une rectification exacte, sans recourir à l'habileté quasi mystérieuse du praticien chargé de retoucher les fraises-mères d'après des données empiriques.

Supposons construit un gabarit semblable dans un rapport assez grand (5 à 10 par exemple) à la vis-mère à réaliser; si l'on peut négliger la variation du pas avec l'usure, il suffira même de construire un seul tronçon.

Prenons comme meule la meule tronconique intérieurement évidée et travaillant par sa surface latérale (*fig. 63*). Supposons réalisée une touche

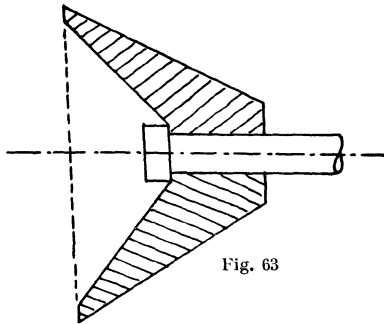


Fig. 63

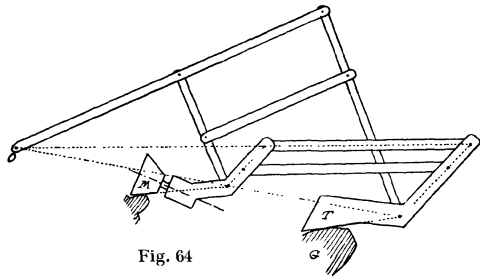


Fig. 64

semblable à la surface latérale de la meule dans le rapport de similitude envisagé ci-dessus. La meule A et la touche T sont reliées par une sorte de pantographe double (*fig. 64*) tel que la surface enveloppée par la meule soit homothétique par rapport au point fixe O de celle enveloppée par la touche : il suffit alors de placer le tronçon de vis-mère à rectifier de façon qu'il soit homothétique du gabarit G par rapport à O.

---

TAILLAGE PROGRESSIF des DENTURES DROITES  
et HÉLICOIDALES par OUTIL-CRÉMAILLÈRE

PROJET A

83. Principe.

L'arête coupante de l'outil est, comme dans le cas du taillage Sunderland, normale à la trace  $T$  du plan  $N$  sur le primitif  $P$ .

Proposons-nous d'abord de réaliser des dentures droites.

Le flan étant en rotation autour de son axe fixe, supposons que  $P$  glisse sur un plan fixe  $Q$ , en roulant sans glisser sur le cylindre primitif  $C$  du flan.

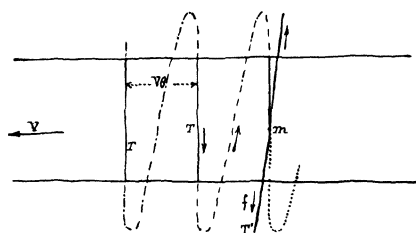


Fig. 65

Soit  $P'$  un plan lié au chariot porte-outil, constamment en coïncidence avec  $P$  et  $Q$ , et sur lequel  $P$  glisse d'un mouvement de translation uniforme de vitesse  $V$ .

1° *Réalisation du mouvement de coupe.* — L'outil-crémaillère est animé, sur le chariot qui le porte, d'un mouvement de translation alternatif au cours duquel la trace  $m$  d'une arête coupante décrit par rapport à  $P'$  un arc  $T'$  : nous allons choisir cet arc de façon que, au cours de son mouvement dans le sens de la flèche  $f$  par exemple (*fig. 65*), le point  $m$  décrive par rapport à  $P$  un segment de droite  $T$  normal à la vitesse de translation de  $P$  sur  $P'$ . Dans ces conditions, si  $\theta$  est la période du mouvement de  $m$ , ce point décrit dans  $P$  des traits parallèles, deux traits consécutifs étant à une distance égale à  $V\theta$ .

Nous définirons  $T'$  et le mouvement de  $m$  sur  $T'$  de la façon suivante : prenons comme plan de figure le plan  $P'$  ; un point  $C$  est animé dans ce plan

d'un mouvement rectiligne sinusoïdal entre deux points A et B (fig. 66), mouvement réalisé par application du théorème de La Hire (C est un point d'une circonférence qui roule sans glisser à l'intérieur d'un cercle de rayon double). Fixons en C une extrémité d'une tige dont l'autre extrémité D décrit sur P' une ligne que nous allons déterminer par la condition qu'un certain point  $m$  de CD décrive par rapport à P le segment rectiligne voulu.

Posons  $AB = 2a$ ;  $Cm = b$ ;  $CD = c$ . Choisissons l'inclinaison  $\gamma$  de AB par rapport à la normale à la vitesse de translation de P sur P' ( $\gamma = \widehat{XOA}$ ), de façon que la tige CD soit dans le prolongement de AB lorsque le point C passe au milieu O de sa course. La vitesse de C à ce moment là est égale à  $\left(\frac{2\pi a}{\theta}\right)$ ; la condition recherchée sera vérifiée pourvu que la projection de cette vitesse de C sur la vitesse de translation P/P', soit égale à V, ce qui définit  $\gamma$  par la formule :

$$(1) \quad \sin \gamma = \frac{V \theta}{2 \pi a}.$$

$\gamma$  étant ainsi choisi; il est facile de trouver par rapport aux axes XOY les équations de la courbe décrite par D. Soit :  $\overline{OC} = -a \sin \frac{2\pi t}{\theta}$  la loi du mouvement

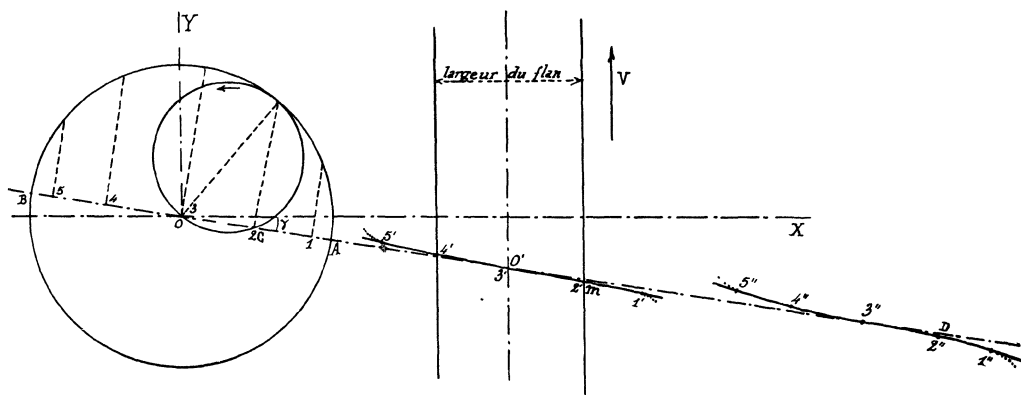


Fig. 66

de C sur l'axe OD, et posons :  $\widehat{DOX} = u$ . Tout revient à déterminer la fonction  $u(t)$ . Les coordonnées de  $m$  sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -a \cos \gamma \sin \frac{2\pi t}{\theta} + b \cos u \\ y = a \sin \gamma \sin \frac{2\pi t}{\theta} - b \sin u. \end{array} \right.$$

En exprimant que la vitesse de  $m$  par rapport à P est un vecteur parallèle à OX, on a l'équation différentielle :

$$\frac{d}{dt} \left( a \sin \gamma \sin \frac{2\pi t}{\theta} - b \sin u \right) - V = 0,$$

d'où l'on déduit :

$$a \sin \gamma \sin \frac{2 \pi t}{\theta} - b \sin u - Vt = -b \sin \gamma,$$

en remarquant que la constante d'intégration se détermine par la condition que lorsque C passe en O ( $t=0$ ), on ait :  $u=\gamma$ .

En définitive, en tenant compte de (1) et posant  $\lambda = \frac{2 \pi t}{\theta}$ , la relation précédente devient :

$$(2) \quad \frac{\sin u}{\sin \gamma} = 1 - \frac{a}{b} (\lambda - \sin \lambda),$$

on en déduirait les équations du lieu de D en fonction du paramètre  $\lambda$ .

La figure 66 représente en 11'1",... 55'5", des positions successives de la tige CmD relatives à des intervalles de temps égaux à  $\frac{\theta}{12}$ . L'arc 1'5" est la plus grande longueur de la courbe ci-dessus définie, qui soit pratiquement utilisable pour le taillage; au delà des extrémités de cet arc, le point D pourra être guidé par des lignes arbitraires dessinées en traits pleins.

2° Réalisation du mouvement générateur. — Supposons d'abord le chariot immobile; soient  $\omega$  la vitesse de rotation du flan, R le rayon du primitif C, et  $n$  le nombre de dents à tailler. La vitesse de glissement de P sur P' est :

$$(3) \quad V = \omega R.$$

Si, par révolution de l'outil, le flan tourne d'un angle égal à  $\frac{2 k \pi}{n}$  (§ 84), la vitesse  $\omega$  vérifie :

$$(4) \quad \omega \theta = \frac{2 k \pi}{n}.$$

Remarquons qu'au cours de ce mouvement, l'arête taillante décrit, par rapport au flan, une surface S qui se raccorde avec la denture  $\mathcal{D}$  à réaliser, mais qui ne coïncide pas avec elle (§ 11).

Après  $n$  révolutions de l'outil, au plus, on retrouvera les conditions initiales, et l'outil ne travaillera plus : il est donc indispensable de donner au chariot un mouvement qui permette de faire varier très légèrement, à chaque rotation du flan, la courbe de contact de S avec  $\mathcal{D}$  (21). C'est pourquoi, comme dans le taillage Pfauter (II, Chap. IV), on fera subir au chariot un mouvement de translation de très petite vitesse  $v$ , parallèle à la vitesse de glissement de P sur P'; mais alors, la vitesse de rotation du flan doit prendre une valeur  $\omega'$  telle que la vitesse de P sur P' soit toujours égale à V. On doit donc avoir :

$$(6) \quad R |\omega' - \omega| = v.$$

Si la vitesse  $v$  du chariot a même sens que la vitesse de P sur P', on prendra  $\omega'$  supérieur à  $\omega$ .

---

(21) Ainsi, dans le taillage sur machine Sunderland, le mouvement de coupe de l'outil doit être assez rapide par rapport au mouvement générateur pour que deux courbes de contact consécutives de la denture du flan avec la surface engendrée par rapport à lui par l'arête taillante soient suffisamment rapprochées.

**84. Remarque.**

L'angle  $\gamma$  et la courbe qui guide le point D ne dépendent que de  $(V\theta)$ ; pour une valeur donnée de cette expression, il est possible de tailler des roues de *plusieurs modules* : en effet, supposons que l'outil-crémaillère ait au moins  $k$  dents, et soit  $p$  le pas circonférentiel de la roue à tailler, on devra avoir :

$$kp = V\theta.$$

Le plus grand module que l'on pourra réaliser est alors :  $M = \frac{V\theta}{\pi}$ . Mais l'on pourra utiliser *sans modification de réglage* des crémaillères de modules :

$$\frac{M}{2}, \quad \frac{M}{3} \dots\dots$$

**85. Réalisation de la machine correspondante.**

Le flan F est monté sur un axe horizontal fixe (*fig. 67*). Le chariot  $C_h$  peut prendre sur une colonne  $C_o$  un mouvement de translation vertical. Sur ce chariot est fixé le support  $S_u$  de la tige  $T_i$  qui, dans son mouvement alternatif, entraîne la crémaillère. Ce support a une position réglable sur le chariot : pour le taillage des dentures droites, il sera incliné de façon que la trajectoire rectiligne de la tête de la tige fasse avec l'horizontale l'angle  $\gamma$  précédemment défini. L'autre extrémité de la tige glisse le long d'une rainure limitée par deux arcs parallèles à la courbe déterminée plus haut (§ 83), et portée par un guide G changeable, suivant le module à réaliser.

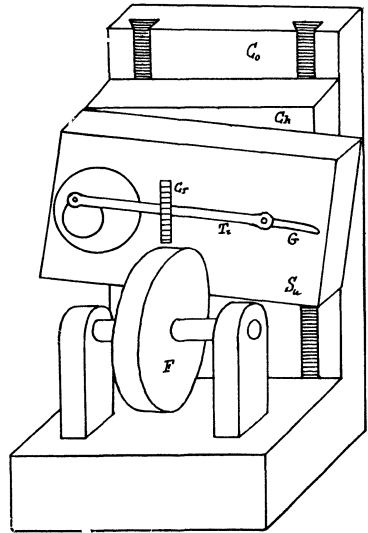


Fig. 67

Le mouvement de translation de l'outil est obtenu à l'aide de deux coulisseaux  $C_1$  et  $C_2$  à glissières orthogonales (non figurés) :  $C_1$ , monté sur  $S_u$ , peut glisser dans le sens perpendiculaire à la position moyenne de la tige;  $C_2$ , monté sur  $C_1$ , porte la crémaillère et est entraîné par la tige. Enfin, un dispositif non représenté sur la figure permet à l'outil de

s'écarter lors de la période de retour.

Le mouvement de la machine est alors le suivant : l'inclinaison  $\gamma$  et le guide G ayant été choisis d'après le module à réaliser, le chariot s'élève *très lentement* avec la vitesse  $v$  (mouvement générateur), tandis que la tige est animée de son mouvement alternatif de période  $\theta$  (mouvement de coupe), et que le flan tourne avec une vitesse angulaire  $\omega'$  liée au choix de  $v$  par l'équation (5). Quand le chariot est suffisamment élevé, le taillage est terminé.

REMARQUE. — Il est possible d'apporter à la réalisation du mouvement de coupe une variante qui permet de supprimer la tige. En effet, le support  $S_u$  étant toujours incliné sur le chariot de l'angle  $\gamma$  calculé plus haut, imaginons que le mécanisme qui commande le va-et-vient de l'outil soit monté, non plus sur le support, mais sur le coulisseau  $C_1$ , de façon que le coulisseau  $C_2$ , porteur de l'outil soit animé sur  $C_1$  d'un mouvement sinusoïdal incliné de l'angle  $\gamma$  sur l'horizontale (fig. 68). Le mouvement alternatif de  $C_1$ , dont l'amplitude est très faible, comme on va le voir, est déterminé sur  $S_u$  par la condition que la vitesse de translation de l'outil-crémaillère par rapport au plan primitif P de la crémaillère théorique, soit horizontale. Prenons comme repère le support  $S_u$ ,

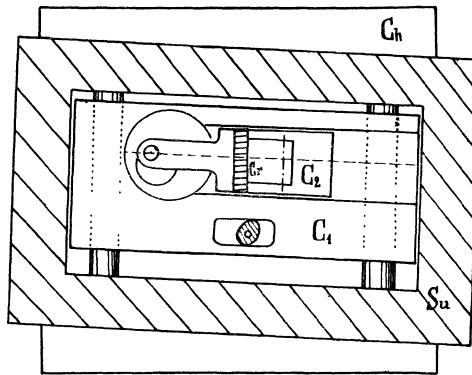


Fig. 68

et désignons par  $z$  la mesure de l'élongation du coulisseau  $C_1$ , comptée positivement vers le haut, l'élongation nulle correspondant à la position moyenne de  $C_2$  sur  $C_1$ . La condition à réaliser est :

$$\cos \gamma \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{d}{dt} \left( a \sin \gamma \sin \frac{2\pi t}{\theta} \right) - V = 0,$$

d'où, en tenant compte des données initiales, et faisant les mêmes transformations que tout à l'heure :

$$(6) \quad z = a \operatorname{tg} \gamma (\lambda - \sin \lambda),$$

Cette équation permet de déterminer le profil de la came nécessaire pour réaliser, pour le module désiré, le mouvement alternatif convenable de  $C_1$ . Elle montre que l'amplitude de ce mouvement est minime, ce qui est capital pour un taillage rapide.

EXEMPLE. — Données :  $a = 30$  mm et  $V\theta = 3\pi$  mm. Le module à tailler est 3. La formule (1) donne :  $\gamma = 2^\circ 52'$ . Si la valeur utile maximum de  $|\lambda|$  est  $\frac{\pi}{3}$  l'élongation correspondante du coulisseau  $C_1$  est, d'après (6), inférieure à 0,3 mm.

### 86. Taillage des dentures hélicoïdales.

La machine étant réglée, comme il vient d'être dit, faisons tourner le support  $S_u$  d'un angle  $\beta$ , dans un sens quelconque, et fixons-le dans cette position, sur le chariot, sans toucher ni au guide, ni à la crémaillère.

Désignons toujours par  $P'$  le plan lié au chariot et sur lequel glisse le primitif  $P$  de la crémaillère théorique; soit, d'autre part,  $P_1$  un plan glissant sur  $P'$  avec la vitesse  $V$  parallèle à la face active de la crémaillère,  $V$  et  $\theta$  étant les mêmes éléments que ci-dessus et auxquels correspondent un guide ou une came bien déterminés. Par rapport à  $P_1$ , une arête taillante de l'outil engendre un plan  $N$ : or, d'après une propriété déjà vue (§ 10), cette arête engendre le même plan  $N$  par rapport à tout plan qui glisserait sur  $P'$  d'un mouvement de translation uniforme, dont la vitesse se projetterait sur la vitesse de  $P$  suivant un vecteur égal à celle-ci. La vitesse de glissement de  $P$  sur  $P'$  sera donc :

$$\frac{V}{\cos \beta}.$$

Soit  $\omega_1$  la vitesse de rotation du flan correspondant à l'immobilité du chariot, elle est définie par la relation :

$$(7) \quad \omega_1 R = \frac{V}{\cos \beta}.$$

Si, par révolution de l'outil, le flan tourne de l'angle  $\frac{2k\pi}{n}$ , la vitesse  $\omega_1$  doit vérifier également :

$$(8) \quad \omega_1 \theta = \frac{2k\pi}{n}.$$

Supposons maintenant que le chariot soit animé de son mouvement générateur; la vitesse de rotation  $\omega'_1$  à imposer au flan doit être telle que la vitesse de glissement de  $P$  sur  $P'$  soit toujours égale à  $\frac{V}{\cos \beta}$ , ce qui donne :

$$(9) \quad R |\omega'_1 - \omega_1| = v.$$

Remarquons que si l'on utilise une crémaillère de module  $\mathcal{M}$ , le module de la roue hélicoïdale obtenue est  $\frac{\mathcal{M}}{\cos \beta}$ .

Enfin, pour tailler deux roues conjuguées d'un engrenage parallèle, il faudra faire tourner le support  $S_u$  d'un même angle  $\beta$  dans les deux sens.

### 87. Intérêt de cette machine.

1° La complication résultant du mouvement nécessairement discontinu du chariot dans la machine Sunderland, est supprimée. Ici, le chariot a simplement un mouvement uniforme, très lent, sans aucune interruption au cours du taillage. On pourra le construire très lourd et très stable. De plus, les organes du mouvement de coupe (tige, coulisseau porte-outil) peuvent avoir



une inertie faible et, par suite, être animés de vitesses assez grandes. Grâce à ce fait, et à la suppression du temps mort correspondant au retour du chariot dans la machine Sunderland, on peut attendre de la machine qui vient d'être décrite un *débit nettement supérieur*.

2° Malgré la rapidité du taillage, l'échauffement du flan est uniforme, et les déformations ne sont pas à craindre (avantage de tous les procédés de taillage progressif).

3° Cette machine permet le taillage de roues hélicoïdales, et cela par une simple modification du réglage.

4° Ce procédé serait plus économique que les procédés Fellows ou Pfauter aux outils compliqués et coûteux.

5° Si l'on adopte la réalisation matérielle schématisée par la *figure 68*, on peut même se dispenser d'établir un jeu de cames correspondant aux divers modules. En effet, l'équation (6) montre que toutes les elongations  $z(\lambda)$  sont *proportionnelles* : par conséquent, il suffira de construire *une seule came* réalisant l'un de ces mouvements alternatifs, et de communiquer au coulisseau  $C_1$ , par un mécanisme facile à imaginer, une elongation proportionnelle à celle du mouvement précédent dans un rapport réglable.

---

TAILLAGE des DENTURES à CHEVRONS

I. — DENTURE RÉALISÉE sur MACHINE SUNDERLAND SPÉCIALE  
par OUTILS CRÉMAILLÈRES (TAILLAGE SUCCESSIF)

88. Définition de la crémaillère matérielle équivalente à l'outil.

La trace T de chaque face de dent est formée de deux demi-droites symétriques par rapport au plan normal à l'axe du flan au centre de celui-ci. Chaque face de dent est constituée par un dièdre dont les plans font avec le primitif P le même angle  $\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ ,  $\varphi$  étant l'angle de pression. Si  $p$  est le pas

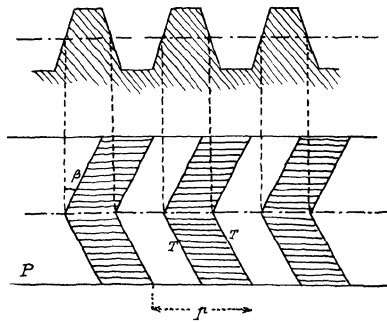


Fig. 69

de la crémaillère, les traces des deux faces d'une dent se déduisent par une translation de mesure  $\frac{p}{2}$  et parallèle au sens de progression de la crémaillère (fig. 69). Alors, deux crémaillères parallèles identiques sont *emboîtables* et *symétriques* : les engrenages correspondants sont donc *parfaits* (§ 19). De plus, la même crémaillère permet le taillage de deux roues conjuguées. Les roues ainsi engendrées forment un assortiment *bilatéral*.

89. Réalisation du taillage.

La fixation du flan sur le bâti, et le mouvement générateur sont réalisés exactement comme dans le taillage Sunderland ordinaire. Les seules particularités résident dans le mouvement de coupe : le chariot  $C_h$  porte deux

outils-crémaillères  $C_r$  symétriques, montés sur deux coulisseaux animés de mouvements de translation rectilignes, correspondant à des inclinaisons symétriques d'angle  $\beta$  avec l'horizontale (fig. 70). Le mouvement de coupe est tel que lorsqu'un outil s'approche du centre du chariot, l'autre s'en écarte. Enfin, les faces actives de chaque crémaillère sont verticales et se trouvent, alternativement, en fin de course, dans le plan vertical de symétrie commun au chariot et au flan.

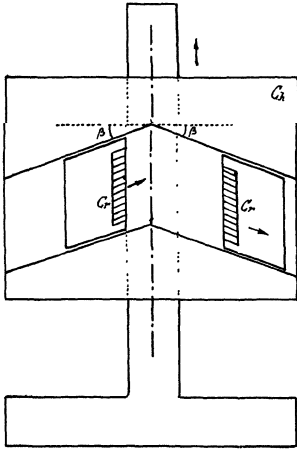


Fig. 70

Cette condition empêche que le plan des arêtes vives soit normal à la surface prismatique de la crémaillère équivalente à l'outil, comme dans le cas du couteau Sunderland ordinaire : ce taillage nécessite donc deux outils valables pour un module et un angle  $\beta$  donnés.

Les conditions de coupe correcte (§ 3) exigent que l'affûtage s'effectue suivant deux directions de plan différentes : le plan des arêtes coupantes sert de plan d'affûtage pour les arêtes le long desquelles la surface de l'outil forme un dièdre aigu; les autres arêtes sont affûtées individuellement, suivant des plans parallèles entre eux, de façon à réaliser, le long de chacune d'elles, un dièdre aigu (fig. 71).

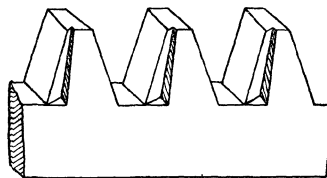


Fig. 71

La surface de détalonnage est encore une surface prismatique engendrée par une translation rectiligne de l'ensemble des arêtes coupantes (§ 64).

## II. — TAILLAGE SUCCESSIF de DENTURES à CHEVRONS par la FRAISE CONIQUE GLEASON

### 90. Définition de la crémaillère matérielle équivalente à l'outil.

La surface d'égale pente  $N$  est une portion de cône de révolution autour d'un axe perpendiculaire au primitif  $P$  et situé dans le plan normal à l'axe du flan au centre de celui-ci : ce plan est de symétrie pour la crémaillère matérielle.

Les deux faces d'une dent appartiennent à deux cônes ayant leurs sommets de part et d'autre de  $P$ ; supposons ces cônes égaux, leurs traces  $T$

sur P étant déduites l'une de l'autre par une translation parallèle au sens de progression de la crémaillère et égale à  $\frac{P}{2}$ , si  $p$  est le pas (fig. 72).

Dans ces conditions, deux crémaillères matérielles *identiques* sont *emboîtables* et *symétriques*; donc les engrenages correspondants sont parfaits, et l'assortiment est encore bilatéral.

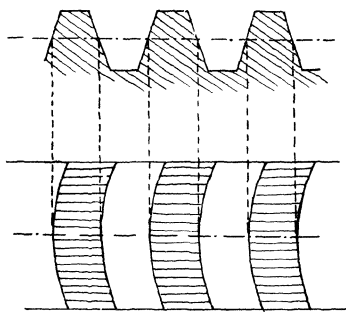


Fig. 72 < --- P --- >

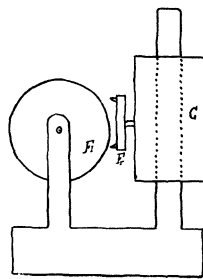


Fig. 73

### 91. Réalisation de ce taillage.

Il est nécessaire d'avoir deux fraises engendrant des surfaces coniques identiques : l'une pour tailler les flancs concaves, l'autre les flancs convexes (§ 112). Chaque roue sera donc taillée en deux passes.

La machine correspondante est la machine Sunderland ordinaire où les organes du mouvement de coupe sont remplacés par la fraise conique  $F_r$  d'axe lié au chariot (fig. 73). Le fonctionnement est le suivant : la fraise tournant rapidement autour de son axe (mouvement de coupe), le chariot  $C_h$  s'élève pendant que le flan  $F_l$  tourne avec la vitesse conjuguée. Quand une dent est terminée, le support de la fraise doit s'écarter pendant que le chariot redescend, le flan ayant tourné d'un angle correspondant à une dent.

REMARQUE. — L'obligation d'éviter des interférences, dans la région de la fraise diamétralement opposée à celle qui taille, exige que le rayon de T soit assez grand, ce qui limite l'avantage de cette denture sur la denture droite.

En tout cas, la machine est de construction très simple, et le mouvement de coupe continu (qui évite le temps perdu lors du retour des couteaux) permet un taillage rapide.

### III. — DENTURE BÖTTCHER RÉALISÉE sur MACHINE REINECKER (TAILLAGE PROGRESSIF)

#### 92. Définition de la roue plate.

1° *Définition de la surface N.* — C'est une surface d'égale pente (§ 3) déterminée par l'angle de pression et sa trace T sur le primitif P. La méthode Böttcher consiste à engendrer T de la façon suivante : un point  $m$  décrit dans

un plan  $P'$  une courbe cycloïdale  $T'$  en forme de carré à coins arrondis, le primitif  $P$  glisse sur  $P'$  d'un mouvement uniforme, pendant que  $m$  décrit sa trajectoire; par suite,  $m$  décrit dans  $P$  une courbe dont les boucles successives

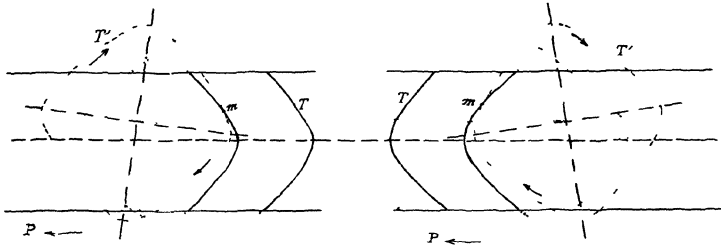


Fig 74

sont équidistantes, et on peut régler l'inclinaison des axes de  $T'$  sur le sens de translation de  $P$ , de façon que les arcs utiles de  $T$  (dessinés en traits pleins sur la *figure 74*) soient à peu près symétriques

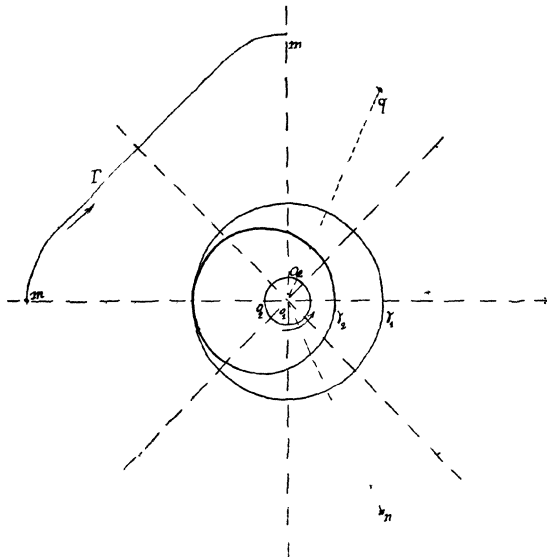


Fig 75

Il reste à définir exactement la courbe  $T'$  soient  $\gamma_1$  un cercle fixe dans  $P'$  et de rayon  $4r$ ,  $\gamma_2$  un cercle de rayon  $3r$  et roulant sans glisser à l'intérieur de  $\gamma_1$ , au cercle  $\gamma_2$  on lie un point  $m$  dont la distance à son centre  $O_2$  est égale à  $10r$  (*fig 75*) Le lieu du centre de  $\gamma_2$  est un cercle concentrique à  $\gamma_1$  et de rayon  $r$  remarquons que lorsque le point  $m$  décrit le quart de la trajectoire  $T'$ , le centre de  $\gamma_2$  décrit les trois quarts de son lieu : autrement dit,  $O_2$  fait trois tours autour de  $O_1$  par révolution de  $m$

2° Réalisation de la crémaillère matérielle équivalente à l'outil — Un couteau  $A$  est monté de façon que la trace  $m$  de son arête sur le primitif  $P$

ait le mouvement qui vient d'être défini; ce couteau — dont la trajectoire est représentée en traits mixtes sur la *figure 76* — taille les faces convexes du flan (la figure représente la section, par le primitif, de la crémaillère matérielle équivalente à l'outil).

Pour réaliser simultanément le taillage des flancs concaves, on doit lier un deuxième couteau au cercle  $\gamma_2$ . Pour tailler une roue d'engrenage parfait (§ 19), il faudrait que les arcs utiles décrits sur P par ces deux couteaux et correspondant à deux coupes successives, se déduisent l'un de l'autre par une translation égale à  $\frac{P}{2}$  (le pas circonférentiel étant  $p = \frac{a_1 a_2}{2}$ ). Il faudrait, pour cela, que le point lié à  $\gamma_2$  et qui est symétrique de  $m$  par rapport à  $O_2$ , ait dans P' la même trajectoire T' que  $m$ . Or cela est impossible : en effet, puisque par révolution de  $m$  sur T' le centre  $O_2$  de  $\gamma_2$  tourne trois fois, il y a dans le

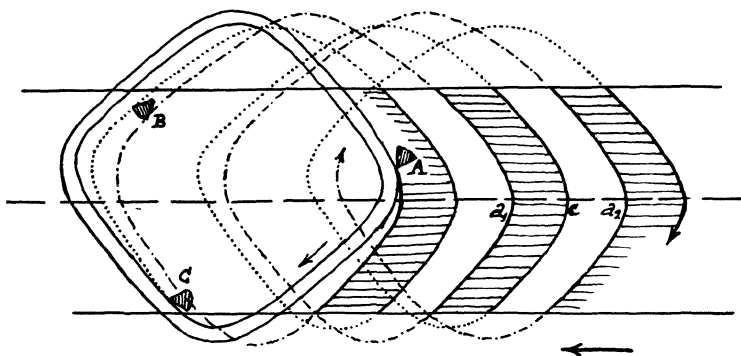


Fig. 76

plan de  $\gamma_2$  deux points qui ont même trajectoire que  $m$  : ce sont les points  $n$  et  $q$  qui forment avec  $m$  un triangle équilatéral de centre  $O_2$ .

Par suite, si l'on plaçait en un des points  $n$  ou  $q$  la trace du couteau à tailler les flancs concaves, on aurait sur P des arcs utiles tels que deux arcs consécutifs se déduiraient l'un de l'autre par des translations ayant alternativement pour mesure  $\frac{P}{3}$  et  $\frac{2P}{3}$  : d'où une disproportion inadmissible entre les épaisseurs des dents de deux roues conjuguées.

On procède alors de la façon suivante : en même temps que le couteau A, on lie au cercle  $\gamma_2$  deux autres couteaux B et C; l'un B, destiné au dégrossissage, est placé au voisinage du point  $n$  (c'est un burin qui creuse le fond des dents, mais n'intervient pas dans la réalisation de la denture); l'autre C, taillant les flancs concaves, a sa trace sur le rayon  $o_2q$ , mais plus proche de  $O_2$  que  $q$ , ce dernier réglage étant déterminé par la condition que :  $a_1c = ca_2$  (*fig. 77*).

Enfin, on doit : 1<sup>o</sup> satisfaire aux conditions générales de coupe (§ 3) : pour cela, les couteaux sont guidés par des cames;

2<sup>o</sup> prévoir un dispositif permettant à chaque couteau de s'éclipser longitudinalement dans son support après chaque période de coupe.

Considérons maintenant la crémaillère matérielle relative au taillage de la roue conjuguée. Elle doit s'emboîter exactement dans la précédente : donc, si on la retourne, et si l'on considère les sections des deux crémaillères conjuguées par leurs primitifs, on doit avoir deux figures symétriques. On y parviendra en faisant tourner la courbe  $T'$  dans  $P'$  autour de son centre de façon que ses axes aient des inclinaisons symétriques des précédentes par rapport à la vitesse de translation de  $P$  sur  $P'$  (*fig. 74*). De plus, le couteau  $A$ , qui taille les flancs convexes, est rapproché du centre de  $\gamma_2$ , tandis que le couteau  $C$  en est écarté, les trajectoires de leurs traces étant permulées.

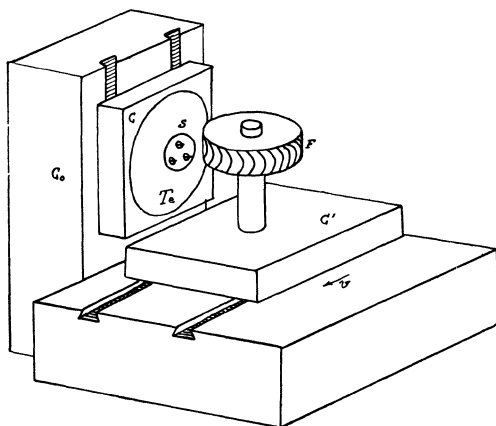


Fig. 77

### 93. Schéma de la machine Reinecker (*fig. 77*).

Le support  $S$  des couteaux est un disque percé de trois trous équidistants à travers lesquels les couteaux apparaissent périodiquement; ce support est monté en excentrique dans une tête circulaire  $T_e$ . C'est dans leur mouvement rapporté au chariot porte-tête  $C$  — auquel est lié le plan  $P'$  — que la trace d'un couteau engendre la courbe cycloïdale définie plus haut (mouvement de coupe). Le chariot  $C$  est réglable en hauteur sur la colonne  $C_0$ , mais reste fixe pendant la taille de l'engrenage.

Le flan  $F$ , d'axe vertical, est monté sur un chariot  $C'$  qui pendant le taillage à un mouvement d'avance très lent, de vitesse  $v$ , suivant des glissières horizontales parallèles au plan  $P'$ .

Ce mouvement générateur se justifie exactement comme dans les cas déjà étudiés de taillage progressif : la seule particularité consiste en ce que, ici, le mouvement relatif du chariot porte-outils et du flan est réalisé en laissant le premier immobile, et en déplaçant le support du flan.

L'étude des vitesses faite à propos du projet  $A$  (§ 83) s'applique ici, en donnant à  $k$  la valeur 1.

La modification de réglage nécessaire pour passer du taillage d'une roue à celui de la roue conjuguée porte sur les deux points suivants :

1<sup>o</sup> incliner la tête porte-couteaux de façon que les arêtes vives décrivent dans P des trajectoires symétriques de celles relatives au premier réglage (*fig. 74*);

2<sup>o</sup> rapprocher A du centre de la tête et écarter C de façon que les trajectoires de leurs traces soient permutées.

#### **94. Interférences de denture.**

La surface N étant une surface d'égalé pente, la détermination de la portion utile de cette surface (permettant d'éviter l'interférence de denture au taillage) peut se faire très exactement à l'aide de la formule (9) (I, Chap. II), mais elle est assez compliquée, car elle nécessite le calcul du rayon de courbure de T <sup>(22)</sup>.

---

(22) M. PÉRIGNON ayant abordé ce problème d'interférences, en donne une solution très simple, mais inexacte (B. 16, t. I, p. 148).





## TROISIÈME PARTIE

---

# TAILLAGE des ROUES CONIQUES et PSEUDO-CONIQUES

---

### CLASSIFICATION et DÉFINITIONS

**95.** Soit  $T$  la trace sur le primitif  $P$  de la portion utile  $N$  de la surface de la dent de roue plate (*fig. 2*). Nous distinguerons deux familles, suivant la nature de  $T$  :

PREMIÈRE FAMILLE. —  $T$  est un segment rectiligne, alors deux cas possibles :

1°  $T$  passe par le sommet  $S$  de  $\mathfrak{K}$  (*fig. 2*); la denture correspondante sera dite *droite*. Le cas pratique (§ 3) est celui où  $N$  est un plan passant par  $S$ . Ces engrenages sont taillés, principalement sur la machine Gleason à couteaux qui sera étudiée dans le Chapitre I.

2°  $T$  a une direction quelconque; la denture correspondante sera dite *hélicoïdale*. Le cas pratique est celui où  $N$  est un plan.

Les machines susceptibles de tailler les dentures hélicoïdales peuvent également tailler les dentures droites : je citerai la machine HEIDENREICH et HARBECK (Chap. I).

Cette première famille d'engrenages est également obtenue sur machine BILGRAM, de principe différent de celui des précédentes (23).

DEUXIÈME FAMILLE. —  $T$  est un arc de courbe. Nous distinguerons encore deux cas :

1°  $T$  est coupé en un seul point par un rayon vecteur issu de  $S$  : la denture correspondante sera dite : *spirale*.

Les engrenages ainsi définis sont extrêmement importants : l'étude de leur taillage fait l'objet du Chapitre II où l'on verra successivement :

— la denture BRANDENBERGER réalisée sur machine OERLIKON, pour engrenages exclusivement concourants :  $T$  est sensiblement un arc de spirale logarithmique;

---

(23) Cette machine à travail lent est peu employée : je ne l'étudierai pas. Elle est décrite par M. PÉRIGNON (B. 17).

— les roues coniques obtenues en prenant pour  $N$  un hélicoïde développable : c'est le cas où l'on pourrait obtenir, en même temps que des engrenages concourants, des engrenages gauches formés de roues coniques. Ce type de denture est réalisé approximativement par la fraise-mère tronconique KLINGELNBERG peu utilisée et que je n'étudierai pas <sup>(24)</sup>. J'indiquerai un projet de machine permettant le taillage de ces roues (projet B);

— la denture Gleason spirale caractérisée par le fait que  $T$  est un arc de cercle, et obtenue sur machine Gleason à fraise conique. Cette denture est de beaucoup la plus utilisée industriellement pour la réalisation d'engrenages concourants ou hypoids.

2°  $T$  est coupé en plus d'un point par un rayon vecteur issu de  $S$  : la denture correspondante sera dite à chevrons.

On verra, dans le Chapitre III, la solution apportée par la denture Böttcher taillée sur machine REINECKER.

### 96. Rappel de quelques définitions.

Coupons une roue conique par un plan passant par son axe, et figurons la trace du cône primitif  $\mathfrak{K}$ , ainsi que les traces du cône de pied et du cône de tête entre lesquels est comprise la denture. Alors — ou bien ces trois cônes

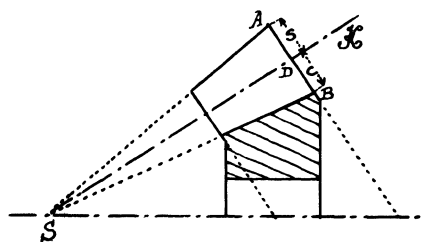


Fig. 78

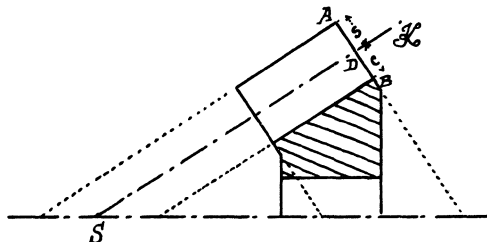


Fig. 79

ont même sommet (*fig. 78*) et les différences entre les demi-angles au sommet du primitif et des cônes de pied et de tête sont appelées respectivement *angle de pied* et *angle de tête* (c'est la solution que l'on préfère réaliser, bien que ce soit le plus souvent, sauf dans le taillage par machine Gleason à secteurs dentés, au prix d'une approximation), — ou bien le cône de pied est égal au primitif (*fig. 79*) (c'est la solution parfaitement correcte que toutes les machines peuvent réaliser).

D'autre part, la denture est limitée à deux cônes supplémentaires de  $\mathfrak{K}$  et qui lui sont coaxiaux : on appelle *cône extérieur* le plus éloigné de  $S$ . Soit  $C$  le cercle intersection de  $\mathfrak{K}$  et du cône extérieur; on appelle :

- *saillie* la longueur  $DA$  (*fig. 78* et *79*);
- *creux* la longueur  $DB$ ;

(24) Cette machine a été étudiée en particulier par M. PÉRIGNON (B. 17) et par A. SCHIEBEL (B. 23).

- *épaisseur* de la dent : la longueur de l'arc de C qu'elle intercepte;
- *intervalle* la longueur de l'arc de C comprise entre deux dents consécutives.

L'épaisseur est en général égale à l'intervalle : cela résulte des conditions de réalisation de l'engrenage parfait (§ 29).

— Le *pas circonférentiel*  $p$  est la somme de l'épaisseur et de l'intervalle, c'est-à-dire le quotient de la longueur de C par le nombre de dents (on l'exprime en mm).

— Le *module* est le quotient  $M = \frac{p}{\pi}$ .

A ces définitions, ajoutons celle propre aux dentures hélicoïdales et spirales, de l'*angle de spirale* <sup>(25)</sup> : soit T l'arc utile de la trace de N sur le plan

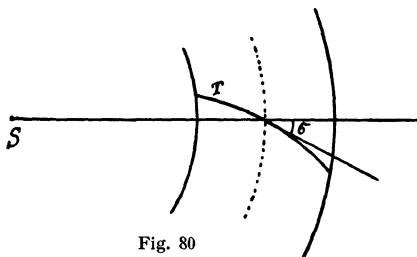


Fig. 80

de la roue plate (*fig. 80*), et considérons le cercle moyen relatif aux deux cercles concentriques passant par les extrémités de T; l'angle de spirale est l'angle  $\sigma$  que fait T avec le rayon du cercle moyen au point de rencontre de celui-ci avec T.



(25) Si T est un arc de spirale logarithmique de pôle S, il coupe tous les rayons sous un angle constant; mais il n'est pas nécessaire, comme on le croit souvent, que T soit ainsi choisi pour que l'engrenage soit parfaitement correct.

TAILLAGE des DENTURES DROITES et HÉLICOÏDALES

---

I. — DENTURE DROITE et MACHINES GLEASON A COUTEAUX  
(TAILLAGE SUCCESSIF)

97. Définition de la roue plate.

La surface N est un plan passant par le centre S de la roue plate; la dent de celle-ci est alors une pyramide de sommet S, et admet donc un plan de symétrie (les angles de pression relatifs aux deux faces de la dent étant les mêmes). On en déduit que deux roues plates matérielles identiques sont *emboîtables* et *symétriques*, par suite, les engrenages ainsi réalisés sont *parfaits*, et l'assortiment de ces roues est *bilatéral* (§ 29).

On a déjà vu comment limiter la partie utile de la surface N pour éviter l'interférence de denture (§ 25); soit  $g_0$  la plus petite racine de l'équation (13) (I, Chap. III), quand elle existe : on a vu qu'elle est forcément positive, ce qui veut dire que l'interférence n'est à craindre que vers le pied des dents à tailler. Soit  $\mathbb{M}$  le module de la roue; en denture normale, le creux est :

$$c = 1,15 \mathbb{M}.$$

Donc, si  $\varphi$  est l'angle de pression, la condition pour qu'il n'y ait pas interférence de denture est :

$$1,15 \mathbb{M} < g_0 \cos \varphi.$$

98. Remarque.

Ces engrenages n'ont pas des propriétés d'assortiment aussi étendues que les engrenages à roues cylindriques droites à développantes : ce sont les roues coniques à denture droite à développantes sphériques qui possèdent la propriété d'engrener correctement, quel que soit l'angle de leurs axes (supposés concourants), et pour lesquels la surface d'engrènement est particulièrement simple. Mais ces roues ont une surface de dent de roue plate compliquée, ce qui les

rend difficiles à engendrer; aussi elles ne sont pratiquement pas utilisées. C'est pourquoi je ne me suis pas occupé de ces dentures dont l'étude géométrique a d'ailleurs été faite par plusieurs auteurs <sup>(26)</sup>.

### 99. Machine Gleason à couteaux et à secteurs dentés.

Le principe de la machine est le suivant : la roue plate et le flan tournent autour de leurs axes fixes, à des vitesses telles que le cône primitif de la roue à tailler roule sans glisser sur le plan primitif de la roue plate; pendant ce temps, deux couteaux entraînés dans la rotation de la roue plate, sont animés par rapport à celle-ci d'un mouvement de va-et-vient très rapide, au cours duquel ils engendrent, relativement au primitif de la roue plate, les deux faces d'une dent de celle-ci.

Et voici les éléments essentiels de la machine : le flan F est bridé sur un axe horizontal fixe X'OX (fig. 81), et il est solidaire d'un bras B muni

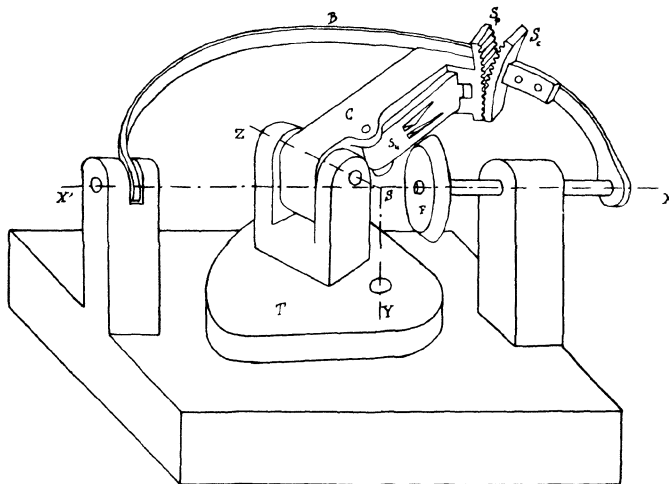


Fig. 81

d'un secteur conique  $S_c$  destiné à matérialiser le cône primitif de la roue à tailler. D'autre part, une tourelle T est réglable autour d'un axe vertical SY (mais reste fixe au cours du taillage), et supporte le chariot porte-outils C mobile lui-même autour d'un axe horizontal SZ. Ce chariot est muni d'un secteur plan  $S_p$  destiné à matérialiser le plan primitif de la roue plate : ce secteur engrène avec le secteur conique, réalisant ainsi, d'une manière concrète, le mouvement conjugué de la roue plate et du flan. Les deux couteaux peuvent glisser sur un support  $S_n$  mobile autour d'un axe lié au chariot et orthogonal à l'axe SZ de celui-ci; ce support est réglé sur le chariot de façon que les extrémités des arêtes coupantes des couteaux décrivent alternativement deux

(26) Voir notamment : M PÉRIGNON (B. 17).  
M. MERLIN (B. 13).

segments rectilignes dirigés vers le centre  $S$  de la roue plate et faisant avec le primitif de celle-ci un angle égal à l'angle de pied du flan (*fig 82*).

Le fonctionnement de la machine est le suivant : le support  $S_u$  étant en position de réglage, le bras  $B$  s'élève lentement pendant que les couteaux, dans leur rapide mouvement de coupe, taillent les deux faces d'une dent du flan. Lors de leur retour, ceux-ci s'écartent légèrement de la roue à tailler (le support restant fixe par rapport au chariot) afin de ne pas talonner. Quand le bras  $B$  est parvenu au sommet de sa course, la dent du flan est terminée, et le support s'écarte (c'est à ce moment que la machine est représentée sur la *figure 81*), de façon que les couteaux — dont le va-et-vient reste ininterrompu — ne puissent mordre le métal; le bras  $B$  redescend à sa position initiale, et

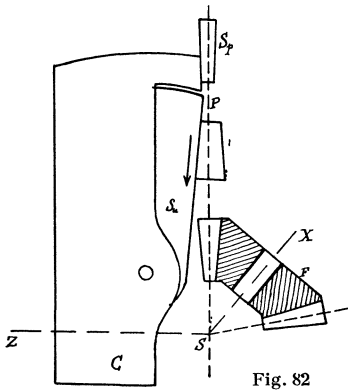


Fig. 82

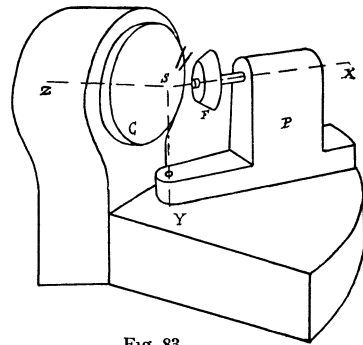


Fig. 83

le flan, un instant désolidarisé de  $B$ , tourne d'un angle convenable : le mouvement reprend alors pour le taillage de la dent suivante.

Remarquons que chaque secteur conique correspond à un cône primitif unique : en pratique, il suffit d'avoir un jeu de tels secteurs pour pouvoir tailler des roues ayant des primitifs quelconques.

### 100. Machine Gleason à couteaux et à train d'engrenages.

Pour le taillage de roues coniques à denture droite de dimensions plus importantes, la maison Gleason remplace la machine précédente par une machine correspondant au même principe de génération, mais dont la réalisation diffère sur les deux points suivants :

1° un train d'engrenages est substitué aux deux secteurs dentés, pour assurer le mouvement conjugué de la roue plate et du flan;

2° alors que dans la machine précédente, l'axe du flan est fixe et le chariot porte-outils est porté par une tourelle réglable, ici le flan  $F$  est porté par une poupée réglable  $P$  (*fig 83*), et le chariot  $C$  tourne autour d'un axe horizontal  $SZ$  lié au bâti.

Cette machine est, encore, à taillage successif et fonctionne comme la précédente.

## II. — DENTURE HÉLICOÏDALE et MACHINE HEIDENREICH et HARBECK (TAILLAGE SUCCESSIF)

### 101. Définition de la roue plate.

La surface N est un plan ne passant pas par le centre S de la roue plate. On peut choisir arbitrairement la trace T d'une dent de roue plate sur le primitif; si T' est la trace de l'autre face de la même dent, remarquons qu'elle est déterminée. Soit, en effet,  $\theta$  l'angle dont il faut faire tourner la roue plate matérielle pour amener en coïncidence deux dents voisines : il

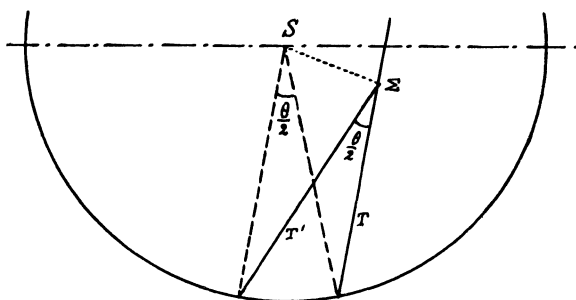


Fig. 84

résulte des conditions de réalisation des engrenages parfaits (§ 29) que T' se déduit de T par rotation d'angle  $\frac{\theta}{2}$  autour de l'axe de la roue plate (*fig. 84*).

Soit  $\Sigma$  le point de rencontre de T et T',  $l$  la distance de S à T, S $\Sigma$  est une bissectrice de l'angle  $\widehat{T, T'}$ , et on a :

$$S\Sigma = \frac{l}{\cos \frac{\theta}{4}},$$

$l$  étant choisie arbitrairement, cette relation montre que le sommet  $\Sigma$  de la dent de roue plate doit être obligatoirement pris sur le cercle de centre S et de rayon  $\frac{l}{\cos \frac{\theta}{4}}$ .

Si l'on matérialise d'un côté, puis de l'autre, la surface de la roue plate qui vient d'être définie, on obtient deux roues plates *emboîtables* et *symétriques*; donc, deux roues dentées taillées respectivement par ces deux roues plates forment un engrenage concourant parfaitement correct (27). L'assortiment des roues ainsi réalisées est unilatéral.

(27) M. BRANDENBERGER a émis une opinion contraire (B. 2).



**102. Machine Heidenreich et Harbeck.**

Cette machine est absolument semblable comme construction et fonctionnement à la machine Gleason à couteaux et à train d'engrenages; c'est ainsi qu'elle taille des dentures droites dans les mêmes conditions. Mais elle est pourvue d'un dispositif supplémentaire permettant le taillage des dentures hélicoïdales : la tête porte-couteaux a une position réglable sur le chariot C; imaginons celui-ci dans une position telle que les couteaux soient symétriques par rapport au plan horizontal passant par son axe; la tête porte-couteaux  $T_e$ , montée sur le chariot au moyen de glissières, peut être abaissée ou élevée de façon à placer le sommet  $\Sigma$  de la dent de roue plate à la distance voulue du centre S de celle-ci. Sur la *figure 85* la tête est représentée élevée.

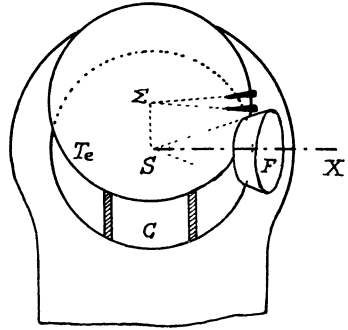


Fig. 85

Soient  $r$  le rayon du cercle moyen de la roue plate,  $\sigma$  l'angle de spirale désiré (*figure 80*),  $\theta$  l'angle dont il faut faire tourner la roue plate pour amener en coïncidence deux dents voisines; le réglage de la tête est défini par la relation :

$$S \Sigma = \frac{r \sin \sigma}{\cos \frac{\theta}{4}}$$

Pour le taillage de deux roues conjuguées, le réglage est fait de façon que  $\Sigma$  occupe successivement deux positions symétriques l'une de l'autre par rapport à S.

**III. — TAILLAGE de ROUES PSEUDO-CONIQUES**

**103.** Les deux dernières machines seraient susceptibles de tailler des roues pseudo-coniques, en vue de la réalisation de couples hypoïds, pourvu que la poupée porte-flan soit réglable en hauteur.

Remarquons que dans le cas d'un tel engrenage hypoïd, on obtient très facilement, pour chaque position de la roue plate, les deux caractéristiques de la face plane N dans ses mouvements par rapport aux deux roues conjuguées : en effet, revenons à la *figure 30* du cas général, et considérons une position quelconque de la surface  $(N_1 N_2)$ .

La caractéristique de  $N_1$  dans le mouvement  $N_1/\mathcal{K}_1$  est la projection  $\delta_1$  de  $\Delta_1$  sur  $N_1$ .

La caractéristique de  $N_2$  dans le mouvement  $N_2/\mathcal{K}_2$  est la droite  $\delta_2$  le long de laquelle la normale à  $N_2$  appartient au complexe  $\Gamma$  (§ 39); le pôle du plan normal à  $N_2$  le long de  $\delta_2$  étant rejeté à l'infini, ce plan est parallèle à l'axe de  $\Gamma$ :  $\delta_2$  est donc parallèle à la projection sur  $N_2$  de l'axe de  $\Gamma$ . Or, le point de rencontre de  $\delta_1$  et  $\delta_2$  est tel que la normale à  $(N_1 N_2)$  en ce point coupe la conjuguée  $\Delta'_1$  de  $\Delta$  (*fig. 31*). D'où finalement, la construction de  $\delta_2$ : *c'est la parallèle à la projection de  $\Delta_2$  menée par le point de rencontre des projections de  $\Delta_1$  et  $\Delta'_1$* . L'épure se fait immédiatement.

---

TAILLAGE des DENTURES SPIRALES

I. — DENTURE BRANDENBERGER et MACHINE CERLIKON  
(TAILLAGE PROGRESSIF)

104. Définition de la roue plate.

Considérons un plan P tournant autour d'un point S d'un mouvement de rotation uniforme; sur un rayon fixe SX, un point  $m$  est animé d'un mouvement oscillatoire entre deux points A et B (*fig. 86*). Par rapport à P,  $m$  décrit une courbe située entre les deux cercles concentriques passant par A

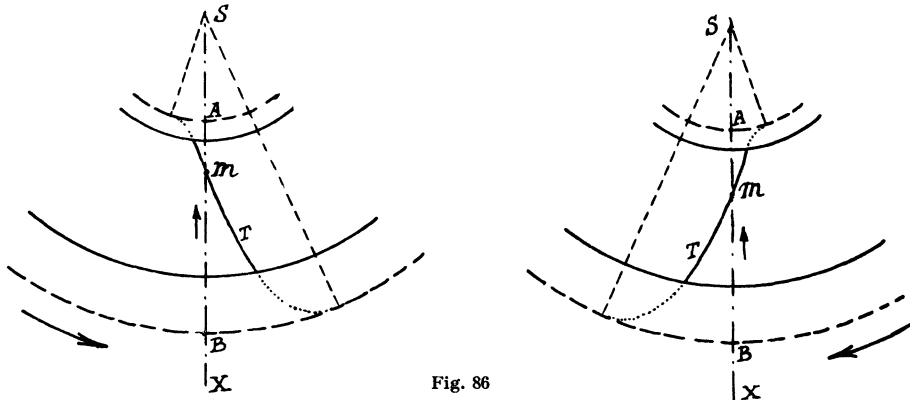


Fig. 86

et B; limitons un arc T de cette courbe (en trait plein sur la *figure 86*); si P tourne dans un sens, puis dans l'autre avec la même vitesse, les deux arcs T correspondant à un même parcours de  $m$  entre A et B sont rigoureusement symétriques. Le mouvement de  $m$  étant donné sur AB, l'angle de spirale  $\sigma$  est déterminé par le choix de la vitesse de rotation de P.

Or, on peut réaliser le mouvement de  $m$  sur AB de façon que T soit très voisin d'un arc de spirale logarithmique <sup>(28)</sup>; remarquons d'ailleurs que si pour une vitesse de rotation déterminée, T était exactement un arc de spirale logarithmique, la propriété serait indépendante de cette vitesse.

(28) En fait, la variation de l'angle que fait la tangente à T avec le rayon vecteur n'atteint pas 3°.

La surface  $N$  de la dent de roue plate Brandenberger est alors engendrée par un segment rectiligne orthogonal à  $AB$  et entraîné par le point  $m$  d'un mouvement de translation.

### 105. Réalisation de cette denture sur machine $\text{\textcircled{E}rlikon}$ .

La figure schématique faite à propos de la machine Gleason à couteaux et à train d'engrenages (*fig. 83*) correspond exactement à la construction de la machine  $\text{\textcircled{E}rlikon}$  : même poupée porte-flan réglable autour d'un axe vertical fixe  $SY$ , et le chariot porte-outils est également mobile autour d'un axe horizontal fixe  $SZ$ . La différence entre ces deux machines réside essentiellement dans le montage des couteaux sur le chariot et dans le mouvement.

Le montage des couteaux est le suivant : sur le chariot  $C_h$  (*fig. 87*) est animée d'un mouvement rectiligne alternatif; une tête qui entraîne

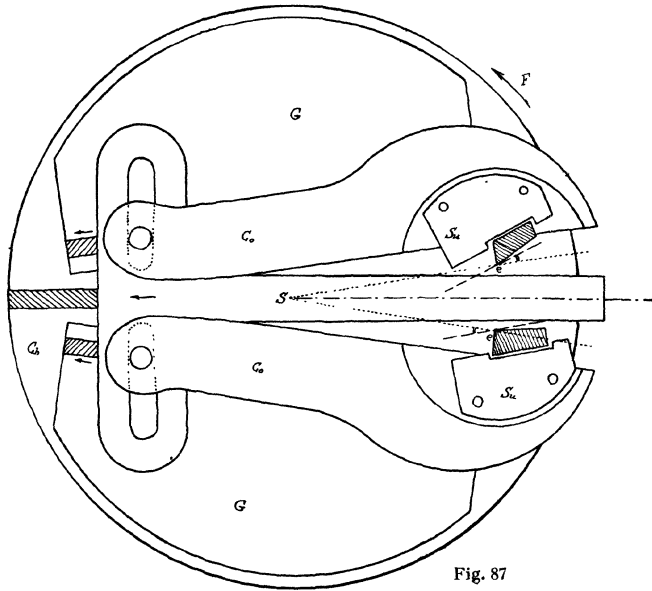


Fig. 87

deux coulisseaux  $C_0$  guidés par deux glissières rectilignes  $G$ , réglables sur le chariot de façon que les coulisseaux fassent l'angle voulu. Sur chacun d'eux est fixé le support  $S_n$  d'un couteau : ce support est réglable autour d'une parallèle à l'axe du chariot, pour permettre de placer les couteaux, d'après l'angle de spirale, de façon qu'ils ne talonnent pas. Les arêtes vives rectilignes des couteaux sont alors symétriques par rapport à un plan passant par l'axe du chariot et lié à celui-ci.

Voici maintenant comment s'effectue le mouvement de taillage : les couteaux travaillent quand ils progressent vers le centre, et un dispositif non représenté les fait s'écarter pendant le mouvement de retour. L'un des couteaux taille un flanc convexe, et l'autre le flanc concave de la dent suivante (les deux

flancs ne se faisant pas vis-à-vis). Chaque couteau effectue une passe toutes les cinq, sept, onze ou treize dents. (Si  $n_1$  et  $n_2$  sont les nombres de dents des deux roues conjuguées à réaliser, on prendra l'un de ces quatre nombres qui soit premier avec  $n_1$  et  $n_2$  à la fois). Pour le montage des couteaux indiqué sur la *figure 87*, le primitif P de la roue plate tourne dans le sens de la flèche F. Quant au chariot, il tourne très lentement dans le sens contraire de F depuis le moment où les couteaux commencent à mordre le flan, jusqu'au moment où ils ne le touchent plus, ce qui correspond à la fin du taillage.

1° *Taillage correct.* — Supposons le cône primitif du flan tangent au primitif de la roue plate de centre S; puisque les couteaux sont soumis à des translations parallèles à ce plan, ils déterminent dans le flan un cône de pied parallèle au cône primitif (*fig. 79*). Supposons le réglage des couteaux tel que leurs traces décrivent dans P' deux segments de droites concourants en S, chaque arête étant orthogonale au segment T' correspondant.

Soit  $\theta$  la durée de la révolution du couteau qui effectue une passe toutes les  $k$  dents du flan; soient  $\alpha_1$  le demi-angle au sommet du primitif de la roue à tailler,  $n_1$  son nombre de dents, et  $\omega_1$  sa vitesse angulaire *quand le chariot est immobile*. On obtient  $\omega_1$  en exprimant de deux manières l'angle dont a tourné le flan pendant le temps  $\theta$  :

$$(1) \quad \omega_1 \theta = \frac{2 k \pi}{n_1}.$$

Imprimons maintenant au chariot son mouvement générateur de très petite vitesse angulaire  $u$ , dans le sens inverse de la roue plate; la vitesse  $\omega'_1$  que l'on doit alors donner au flan est déterminée par la condition que la vitesse de P sur P' soit toujours égale à  $\omega_1 \sin \alpha_1$  :

$$(2) \quad \omega_1 - \omega'_1 = \frac{u}{\sin \alpha_1}.$$

La vitesse de rotation du flan est réduite, conformément à cette formule, grâce à un différentiel <sup>(29)</sup>.

Passons au taillage de la roue conjuguée : on change le sens de rotation du flan, donc de la roue plate, la vitesse de celle-ci étant toujours égale, par rapport au chariot, à  $\omega_1 \sin \alpha_1$ ; on incline alors chaque support  $S_u$  symétriquement par rapport à la droite T' correspondante, et l'on remplace les couteaux de façon que les arêtes coupantes des nouveaux aient, sur les coulisseaux, la même position que celles des précédents.

On a ainsi réalisé une roue plate matérielle *symétrique* de la précédente et *emboîtable* avec elle <sup>(30)</sup>.

(29) Le train d'engrenages utilisé dans la machine permet de réaliser la vitesse de rotation du flan avec une précision supérieure à 10<sup>-4</sup>. (B. 2).

(30) Il est à noter que, ces conditions étant exactement satisfaites, l'engrenage Erlikon est *parfaitement* correct, bien que N ne soit pas une surface d'égale pente et que T ne soit qu'à peu près une spirale logarithmique.

Soit  $\omega_2$  la vitesse angulaire du flan quand le chariot est immobile,  $\omega'_2$  celle que l'on doit associer à la vitesse  $u$  du mouvement générateur (de même sens que lors du taillage précédent), on a :

$$(3) \quad \omega_2 \theta = \frac{2 k \pi}{n_2}.$$

$$(4) \quad \omega'_2 - \omega_2 = \frac{u}{\sin \alpha_2}.$$

2° *Taillage effectué pratiquement.* — Le désir de réaliser une roue où le cône de pied et le primitif aient même sommet (*fig 78*) — c'est-à-dire d'avoir des dents « rajeunies » vers le sommet du cône, suivant l'expression de M. BRANDENBERGER — conduit à modifier de la façon suivante la position et le mouvement des couteaux et du flan : chaque support est réglable autour de la parallèle à l'axe SZ du chariot menée par l'extrémité  $e$  du couteau correspondant et, dans leur mouvement relatif au chariot, ces extrémités  $e$  décrivent deux droites passant par le sommet S du cône primitif (*fig 87*). Quant au flan,

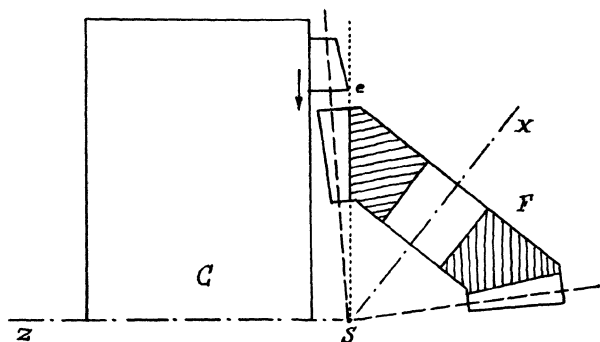


Fig. 88

il est disposé de façon que son cône de pied soit tangent au plan normal en S à SZ (*fig. 88*).

Mais alors le cône primitif du flan est tangent, non pas à ce plan, mais à un cône K d'axe SZ et dont le demi-angle au sommet est le complément de l'angle de pied  $\varepsilon$  du flan.

Soit K' le cône lié au chariot et sur lequel glisse K. La vitesse de rotation  $\omega_1$  du flan correspondant à l'immobilité du chariot est encore donnée par la formule (1). La vitesse angulaire de rotation du cône K est alors :  $\frac{\omega_1 \sin \alpha_1}{\cos \varepsilon}$ . Quand le chariot est animé du mouvement générateur, la vitesse  $\omega''_1$  du flan s'obtient en exprimant que la vitesse de K par rapport à K' est toujours égale à  $\frac{\omega_1 \sin \alpha_1}{\cos \varepsilon}$ , d'où :

$$(5) \quad \omega_1 - \omega''_1 = \frac{u \cos \varepsilon}{\sin \alpha_1}.$$

REMARQUE. — En toute rigueur, les roues matérielles équivalentes aux outils ne s'enveloppent pas, et les roues obtenues comme il vient d'être dit ne s'enveloppent pas très exactement. Cependant,  $\varepsilon$  étant très petit (le creux est ici choisi égal au module), la correction apportée par la formule (5) à la formule (2) est minime, si l'on songe que  $u$  est déjà très petit par rapport à  $\omega_1$  : ceci explique l'excellence des résultats obtenus, malgré l'approximation précédente.

## II. — PROJET B : TAILLAGE PROGRESSIF de ROUES CONIQUES pour ENGRENAGES CONCOURANTS ou GAUCHES

### 106. Définition de la roue plate.

Proposons-nous de réaliser une denture de roue conique susceptible d'appartenir à des engrenages des deux espèces : la roue plate doit donc vérifier les conditions déjà déterminées (§ 32). La courbe T est une développante d'un cercle coaxial à la roue plate et dont le plan est pris pour plan de la *figure 89*. La surface d'égalé pente N est alors un hélicoïde développable.

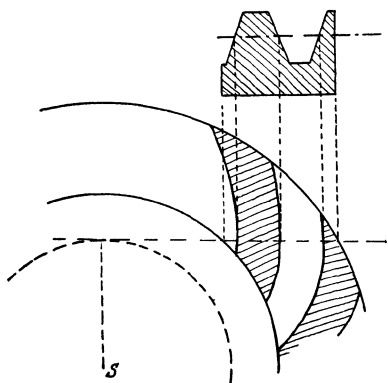


Fig 89

Les traces des deux faces de chaque dent sont des arcs parallèles de développante, et l'on a figuré, sur une projection auxiliaire, la section de la roue plate matérielle par un plan tangent au noyau de sa denture (*fig. 89*).

### 107. Engrenage à axes concourants.

Soit S le sommet commun aux cônes primitifs  $\mathfrak{K}_1$  et  $\mathfrak{K}_2$  tangents extérieurement le long de  $\Delta$ ; imaginons qu'en tournant autour de leurs axes fixes, avec leur mouvement conjugué, ils entraînent leurs roues plates  $[P_1, N_1]$  et  $[P_2, N_2]$  confondues.

Considérons les deux roues plates matérielles conjuguées, et supposons l'épaisseur égale à l'intervalle; elles sont alors *emboîtables* et *symétriques* : donc les traces des dents de l'une sur son primitif sont symétriques des traces des dents de l'autre quand, les ayant déboîtées, on retourne l'une d'elles. L'assortiment des roues ainsi taillées est *unilatéral* et les engrenages correspondants sont *parfaits* (§ 29).

### 108. Engrenage gauche.

Ici, les deux roues plates théoriques  $[P_1, N_1]$  et  $[P_2, N_2]$  ne peuvent coïncider (§ 31). Prenons pour plan de figure le plan Q tangent aux deux primitifs  $\mathfrak{K}_1$  et  $\mathfrak{K}_2$  (*fig 25*). On a représenté la section par le plan Q des deux

roues plates conjuguées; celles-ci sont tangentes suivant un profil rectiligne situé dans le plan tangent au noyau et passant par les points I et J définis au § 31. Une projection auxiliaire donne la construction du point de contact des dentures conjuguées  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  enveloppées par les roues plates (*fig. 90*).

Comme nous l'avons vu (§ 32), l'interférence de denture est inévitable entre les roues plates; mais on peut prendre pour les demi-angles au sommet des cônes  $\mathfrak{H}_1$  et  $\mathfrak{H}_2$  des valeurs telles que cette interférence soit évitée. S'il en est ainsi, on peut dire que la difficulté précédente a un effet heureux : c'est que les dentures conjuguées sont très voisines sur une assez grande surface

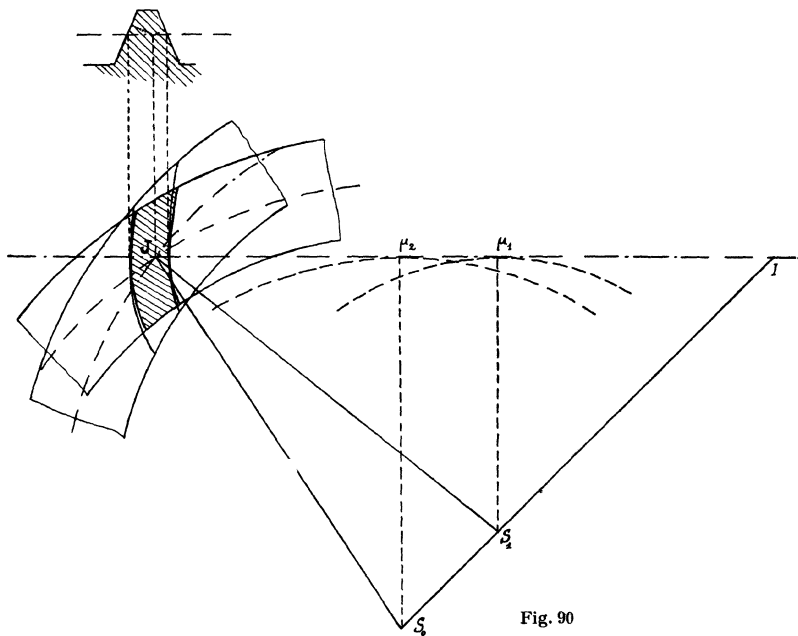


Fig. 90

autour du point de contact théorique, de sorte que ces engrenages doivent posséder sensiblement les avantages du contact linéaire.

Ainsi, il est possible de définir un engrenage gauche analogue à l'hypôid, facile à étudier, et susceptible d'être taillé industriellement.

### 109. Projet de machine à tailler les roues précédentes.

Considérons un cercle C d'un plan P tournant autour de S d'un mouvement uniforme, dans le sens de la flèche F, et entraînant un arc d'une de ses développantes (*fig. 91*). Imaginons un autre cercle, de centre O, tournant en sens contraire d'un mouvement uniforme : supposons qu'une tige ait une extrémité sur ce cercle, un de ses points étant assujéti à se trouver sur la développante considérée plus haut; on peut s'arranger pour que l'autre extrémité de la tige ait, sur le plan fixe, une trajectoire s'écartant peu d'une



droite quand le point intermédiaire décrit la partie utile de l'arc de développante. Inversement, cette trajectoire étant connue, pourvu qu'on ne modifie pas le sens et le rapport des vitesses de rotation des deux cercles, le point intermédiaire de la tige décrira, par rapport au plan P, une développante de C. Sur la *figure 91* les cercles et la tige ont été représentés à trois instants séparés par des intervalles de temps égaux. La partie utile de la trajectoire de l'autre extrémité de la tige est comprise entre les points 1'' et 3''; cet arc a

été prolongé de part et d'autre en A et B de façon à permettre à la tête de la tige de décrire entièrement le cercle O.

Cela posé, imaginons une machine construite comme la plupart de celles qui précèdent (*fig. 83*) et dont le chariot est réalisé de la façon suivante :

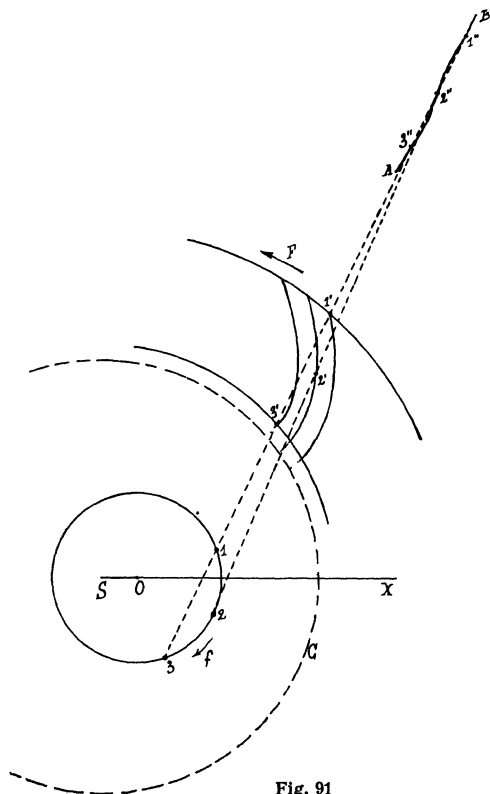


Fig. 91

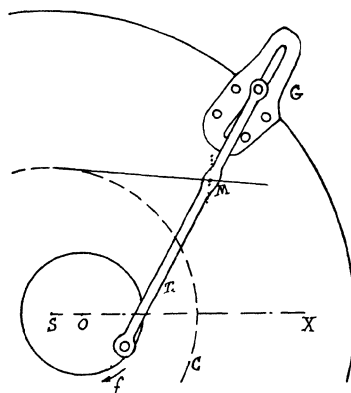


Fig. 92

ce chariot entraîne un disque O, lequel actionne une tige  $T_i$  dont l'autre extrémité est guidée par une rainure G fixée au chariot (*fig. 92*) et de profil convenable.

Soit  $m$  le point de la tige qui, par rapport à P, décrit une développante : la tige entraîne une crémaillère à flancs rectilignes et dont le plan actif, normal au plan de figure, passe par  $m$ , et est tangent à C. Ainsi, tous les flancs de la crémaillère engendrent, par rapport à P, des hélicoïdes développables; de plus, la constance de l'angle de coupe est rigoureusement respectée.

L'étude du mouvement de taillage est absolument la même que dans le cas de la machine CErlikon (§ 105, étude du taillage correct).

Pour réaliser la roue conjuguée, on remplacera le guide G par un guide symétrique (on pourrait se borner à le retourner); le disque (o) sera animé

de la rotation opposée, et sera placé, ainsi que la face active de la crémaillère, de façon que la nouvelle figure soit symétrique de la précédente par rapport à un plan passant par l'axe du chariot.

Il est évidemment indispensable de prévoir un dispositif permettant à la crémaillère de s'écartier pendant le mouvement de retour de la tige.

### III. — TAILLAGE SUCCESSIF de la DENTURE GLEASON SPIRALE sur MACHINE à FRAISE-CONIQUE

#### A. Engrenage à axes concourants

##### 110. Définition de la roue plate.

La surface N appartient à un tronc de cône de révolution à tour d'une perpendiculaire au plan P : elle correspond donc exactement aux conditions du § 3. La courbe T est un arc de cercle (*fig. 93*), dont le rayon peut être

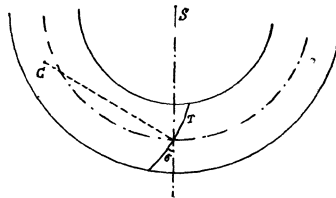


Fig. 93

arbitrairement choisi (on est limité par l'encombrement de la fraise d'une part et, d'autre part, par l'obligation d'éviter les interférences et d'avoir un arc T dont l'angle avec les rayons issus de S ne varie pas trop; le plus souvent, le rayon de T est assez voisin du rayon R du cercle moyen :  $\frac{3R}{4}$  à  $\frac{5R}{4}$  environ).

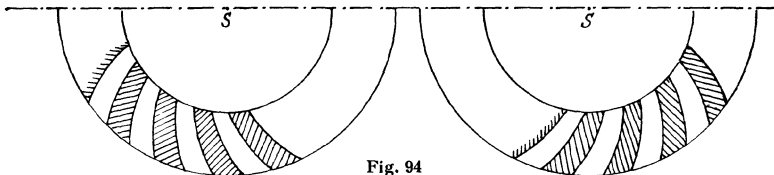


Fig. 94

Considérons maintenant les deux roues plates matérielles relatives à un engrenage parfait (§ 29), et coupons-les par leur primitif après les avoir déboîtées et retournées. Les traces des dents de l'une sont des arcs de cercles se déduisant les uns des autres par des rotations concentriques de même angle : les deux figures sont symétriques (*fig. 94*).

**111. Caractéristique de la surface N dans la génération d'une roue conique.**

Revenons à la *figure 2* : la caractéristique de N est le lieu des pieds des normales coupant  $\Delta$ . L'épure se fera donc très simplement en faisant pivoter un plan auxiliaire de l'axe de N : ce plan coupe N suivant un segment de droite et  $\Delta$  en un point dont la projection sur le segment est un point de la caractéristique.

REMARQUE. — Il est facile de vérifier que cette courbe est une biquadratique; cherchons plus généralement le lieu des pieds des normales à un cône de révolution rencontrant une droite  $\Delta$  non parallèle à son axe.

Prenons comme axe  $oz$  l'axe du cône,  $ox$  étant la perpendiculaire commune à  $oz$  et à  $\Delta$ . Le cône et la droite ayant pour équations :

$$(C) x^2 + y^2 - (z - c)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi = 0 \quad \text{et} \quad (\Delta) \begin{cases} x = a \\ z = my, \end{cases}$$

le lieu cherché est l'intersection du cône et de la surface :

$$(x - a)(z - c) \operatorname{tg}^2 \varphi + xz - may = 0.$$

Si  $m$  n'est pas nul, cette surface est un paraboloides hyperbolique équilatère passant par  $\Delta$ , par le sommet du cône et admettant pour plans directeurs les plans  $xoy$  et  $zoy$ . Si  $m = 0$ , le paraboloides se réduit au cylindre de génératrices parallèles à  $\Delta$  et coupé par le plan  $zox$  suivant l'hyperbole équilatère d'équation :

$$(x - a)(z - c) \operatorname{tg}^2 \varphi + xz = 0.$$

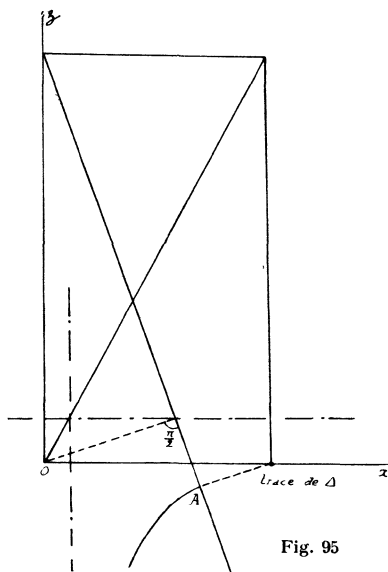


Fig. 95

Par suite, la caractéristique de N dans la génération d'une roue conique se projette sur le plan méridien normal à  $\Delta$  suivant une hyperbole équilatère (*fig. 95*). Le point d'arrêt A de l'arc utile d'hyperbole est la projection sur la génératrice méridienne correspondante du cône, de la trace de  $\Delta$  sur le plan  $zox$ . La construction des asymptotes est indiquée sur la figure.

**112. Description de la fraise conique.**

Pour simplifier, je vais d'abord supposer que l'on veuille tailler l'engrenage parfait (roues plates symétriques et emboîtables).

Chaque fraise se compose d'un plateau sur lequel sont rapportés une vingtaine de couteaux, dont les arêtes vives appartiennent à un même cône de révolution coaxial au plateau.

La *figure 96* représente un secteur d'une telle fraise (dans le cas où les couteaux taillent par l'extérieur, réalisant ainsi les flancs concaves des dents).

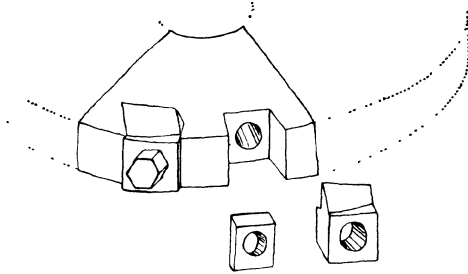


Fig. 96

Une cale conique, représentée sur le dessin, est interposée entre le plateau et la lame, afin de régler l'écartement de celle-ci suivant son état d'usure.

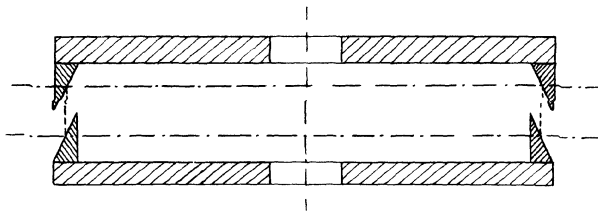


Fig. 97

Pour tailler l'engrenage parfait, il sera indispensable d'avoir deux fraises différentes correspondant à un même cône, mais matérialisé soit du côté convexe, soit du côté concave (*fig. 97*), les deux fraises étant nécessaires pour le taillage de chaque roue.

### 113. Schéma de la machine Gleason correspondante.

Cette machine a encore l'allure générale des précédentes (*fig. 83*) : le flan est monté sur une poupée réglable autour d'un axe vertical.

Voyons comment le système porte-fraise est relié au bâti. La partie mobile se compose de trois pièces : le berceau, la colonne, et le chariot porte-fraise. Le berceau  $B_c$  peut tourner autour de l'axe de la roue plate, lequel est fixe; soit  $S$  le centre de cette roue (*fig. 98*). Sur le berceau est montée la colonne  $C_0$ , réglable sur celui-ci au moyen de glissières normales à l'axe du berceau et à la direction de la colonne; pendant le taillage, la colonne est solidaire du berceau. Enfin, la position du chariot porte-fraise  $C_h$  est réglable sur la colonne, le long de laquelle on peut le faire glisser.

Sur la *figure 98*, la fraise a été représentée au moyen du cercle  $T$  trace sur le primitif du cône qu'elle engendre dans son mouvement de coupe :

la fraise est placée de façon que T coupe le cercle moyen  $C_m$  de la roue plate sous l'angle  $\left(\frac{\pi}{2} - \sigma\right)$ . Le réglage sera donc le suivant : la colonne étant verticale (comme sur la figure), on fera glisser celle-ci sur le berceau, et le chariot sur elle-même, de façon que le cercle T de la fraise dont on dispose passe par le point de rencontre de  $C_m$  avec la projection sur P de l'axe SX du flan et coupe cette projection sous l'angle de spirale  $\sigma$

Le taillage d'une roue est alors réalisé ainsi : le berceau étant à l'extrémité de sa course, se met en mouvement, ainsi que le flan, de façon à réaliser le roulement sans glissement du cône primitif de la roue sur le primitif P lié au

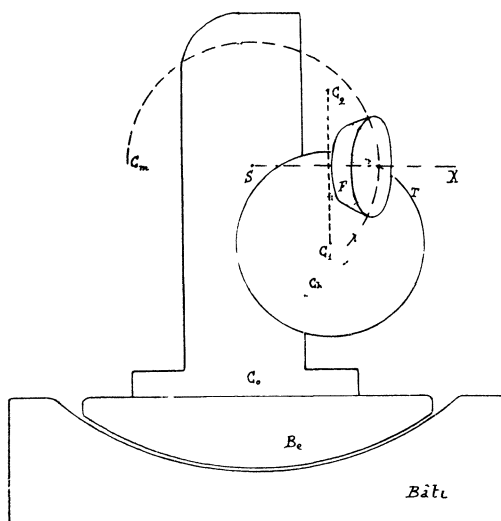


Fig. 98

berceau. Quand celui-ci est parvenu à l'autre extrémité de sa course, il revient en arrière de façon à occuper sa position primitive; pendant ce temps, la poupée porte-flan s'écarte légèrement pour laisser passer la fraise, puis le flan reprend sa position correcte, et le mouvement relatif du berceau et du flan recommence, celui-ci ayant tourné, grâce à un diviseur, d'un angle correspondant à son pas circonférentiel. Supposons qu'on ait commencé par le taillage des faces convexes, par exemple; pour tailler les faces concaves, il faudra changer de fraise, faire tourner le flan d'un angle correspondant à son intervalle, et remettre en marche, sans autre modification de réglage

Pour le taillage de la roue conjuguée de la précédente (pour former un engrenage concourant), on fera simplement glisser le chariot sur la colonne, de façon que le centre de la fraise soit en  $C_2$  symétrique de  $C_1$  par rapport au plan horizontal passant par SX (quand la colonne est verticale).

On réalise bien ainsi les deux roues plates matérielles *emboîtables et symétriques*

**114. Taillage en une passe de l'une des deux roues conjuguées.**

On gagne du temps en taillant en une passe de préférence celle des deux roues conjuguées qui a le plus de dents. Dans la fraise utilisée, les couteaux sont disposés alternativement de façon à tailler les uns une face concave, les autres la face convexe qui lui fait vis-à-vis dans la roue à réaliser. Si nous représentons la section de la roue plate matérielle correspondante  $\mathcal{R}_1$  par son primitif, les traces de ces deux faces sont deux cercles concentriques (fig. 99); soient  $r$  et  $r'$  leurs rayons ( $r' < r$ ) : il faut alors renoncer à la condition de symétrie des deux roues plates (§ 29).

Si l'on imagine la roue plate matérielle qui s'emboîterait exactement dans la précédente, le rayon  $r$  de la trace de sa face convexe est alors plus grand que celui  $r'$  de la trace de sa face concave : d'où l'impossibilité d'utiliser

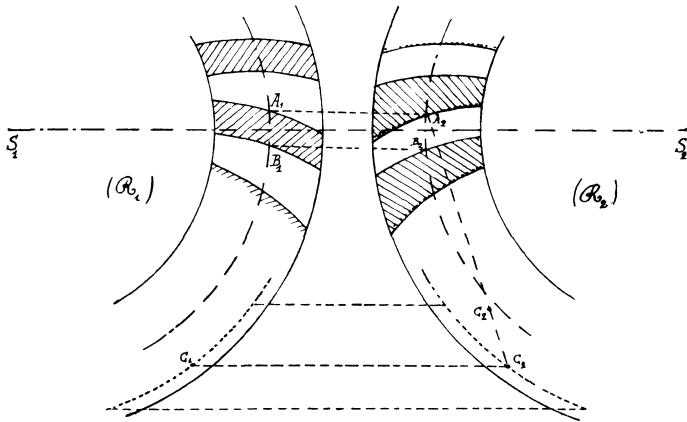


Fig. 99

une même fraise pour réaliser cette roue plate; il faudrait avoir pour cela deux autres fraises.

Pratiquement, on peut, en renonçant à la condition d'emboîtement des roues plates matérielles, utiliser une même fraise dont les couteaux taillent alternativement par l'intérieur et par l'extérieur : mais cette fraise sera utilisée en deux passes, taillant une fois les faces concaves, l'autre fois les faces convexes de la deuxième roue. A cet effet, le rayon  $r''$  de la trace de son cône intérieur sur le primitif est choisi aussi voisin de  $r'$  que le permet l'épaisseur des couteaux [la différence  $(r' - r'')$  est nettement inférieure à  $(r - r')$ ]. Dans ces conditions, on réalise un contact linéaire pour un système de faces conjuguées de l'engrenage, ponctuel pour l'autre.

Soit  $\widehat{A_1 B_1}$  l'arc de cercle moyen de la roue plate  $\mathcal{R}_1$ , limitée par un plein correspondant à une fraise de centre  $C_1$ ;  $\widehat{A_2 B_2}$  l'arc associé dans la roue plate  $\mathcal{R}_2$ . La deuxième fraise décrite plus haut devra être centrée en  $C_2$ , symétrique de  $C_1$ , pour tailler le côté convexe de la petite roue, et en  $C'_2$  sur  $A_2 C_2$  (tel que  $A_2 C'_2 = r''$ ), pour tailler le côté concave.

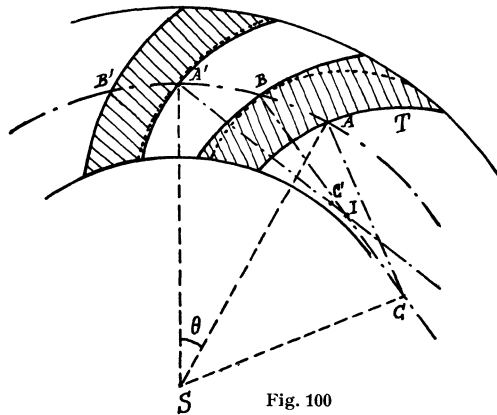
Tous les éléments du réglage de la machine permettant de passer de la réalisation de la roue  $\mathcal{R}_1$  à celle de la roue  $\mathcal{R}_2$  sont ainsi déterminés.

Il résulte de ce qui précède que le mode de taillage qui vient d'être exposé, peut être parfaitement correct (bien qu'on pense souvent le contraire).

**115. Le taillage en une seule passe est-il possible pour les deux roues conjuguées?**

Soient  $\widehat{AA'}$  un arc de cercle moyen de la roue plate limité à deux faces correspondantes, et  $\theta$  son angle au centre (*fig. 100*). Soit C le centre de la première fraise supposée telle que les traces de ses deux cônes sur le primitif passent par A et par le milieu B de l'arc  $\widehat{AA'}$ . Si l'on fait tourner cette fraise de l'angle  $\theta$ , son centre vient en C', et elle réalise une dent de roue plate interceptant sur le cercle moyen l'arc  $\widehat{A'B'} = \widehat{AB}$ ; on a hachuré les sections de deux dents consécutives de cette première roue plate.

Proposons-nous de déterminer le centre I d'une deuxième fraise dont les traces seraient deux cercles tangents respectivement en B et A' aux arcs déjà figurés : I est alors nécessairement le point de rencontre de BC et A'C'. Pour être sûr qu'il n'y aura pas interférence entre les deux roues conjuguées, il faudra s'arranger pour que I soit entre B et C, et au delà de C' sur A'C'. La *figure 100* a été faite en prenant pour C la projection de S sur la normale en A à la trace de la denture. Si l'on imagine que les surfaces géométriques des deux roues plates ont été mises en contact, les traces des deux faces d'une dent de la deuxième roue plate sont figurées en pointillés.



La grosse difficulté vient du faible rayon des fraises (risque d'interférence au taillage, et grande variation de l'angle sous lequel T coupe un rayon de la roue plate), mais le problème n'est pas impossible <sup>(31)</sup>.

(31) D'ailleurs la maison Gleason préconise de plus en plus le taillage en une seule passe pour les deux roues, en particulier pour la fabrication du couple couronne-pignon des ponts arrière d'automobiles.

**116. Remarques.**

Toute l'étude précédente a été faite en supposant que le flan est bien taillé par la roue plate, c'est-à-dire que le cône de pied est parallèle au cône primitif (fig. 79). Mais, comme dans le taillage Öerlikon, on préfère que ces cônes aient même sommet (fig. 78); par suite, le flan est placé sur la poupée de façon que l'angle de son axe avec le plan normal à l'axe d'oscillation du berceau soit égal au demi-angle au sommet du cône de pied. Alors, la surface liée au berceau et qui roule sans glisser sur le primitif du flan n'est pas un plan, mais un cône (fig. 88), et l'engrenage n'est donc pas absolument correct.

En pratique, d'ailleurs, lorsqu'il s'agit d'un pont arrière d'automobile, on a intérêt à ne pas réaliser un contact linéaire : il faut prévoir que par suite de son montage en porte-à-faux, le pignon aura par rapport à la couronne, une position variable suivant la charge.

**B. Engrenage hypoïd**

**117.** Pour la réalisation de la roue pseudo-conique qu'il comprend, la poupée porte-flan est réglable en hauteur, de façon à décaler l'axe du flan par rapport à celui de la roue plate : à part cette modification, le taillage s'effectue exactement comme celui d'une roue conique.

**118. Détermination du point de contact des dentures conjuguées  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  de l'hypoïd.**

Reprenons les notations du § 38; la caractéristique de N dans le taillage de la roue conique  $\mathcal{H}_1$  a déjà été déterminée (§ 111). La caractéristique de N

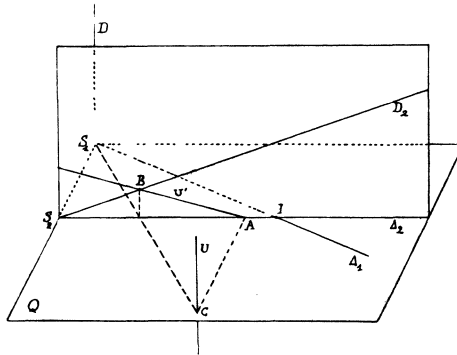


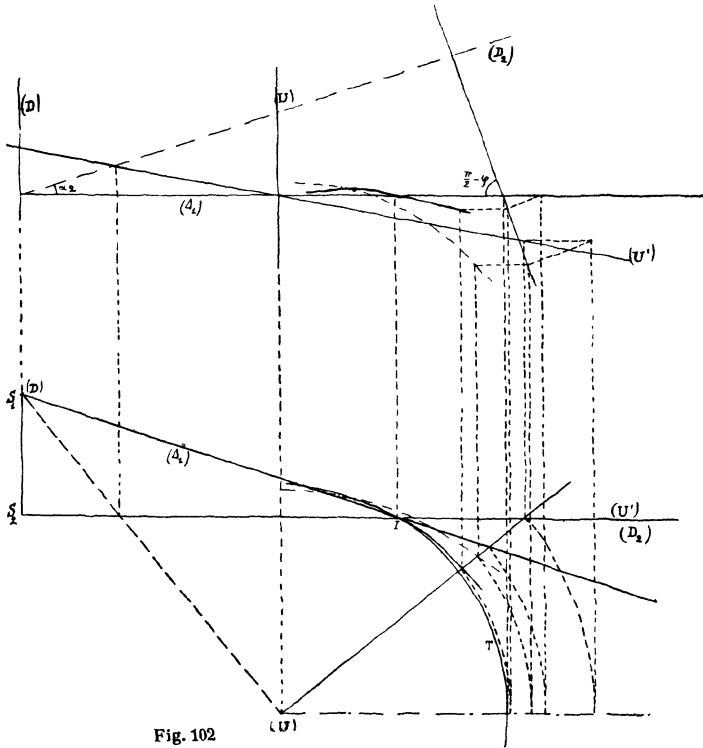
Fig. 101

dans la génération de la roue pseudo-conique  $\mathcal{H}_2$  est le lieu des pieds des normales rencontrant la conjuguée  $U'$  de l'axe  $U$  du cône N par rapport au complexe  $\Gamma$ . Si D est l'axe de la roue plate, ce complexe est parfaitement déterminé par la connaissance de son axe  $\Delta_2$  et des deux droites conjuguées D et  $D_2$ . La construction de la conjuguée d'une droite quelconque par rapport à



ce complexe est bien connue : je me bornerai à remarquer que dans le cas actuel, on peut avoir une construction très rapide de la droite  $U'$  : en effet, le plan mené par  $U$  normal à  $\Delta_2$  a son pôle  $A$  sur  $\Delta_2$ , et le plan  $(U, D)$  a son pôle  $B$  sur  $D_2$ .  $AB$  est donc la droite  $U'$  cherchée (*fig. 101*).

Cette construction est indéterminée dans le cas particulier où le centre  $C$  de la fraise est aligné avec  $S_1$  et  $S_2$ ; mais alors les droites  $\Delta_1$  et  $U'$  sont très



éloignées l'une de l'autre, et les surfaces utiles des dentures ne sont plus en prise.

Ayant construit  $U'$ , la caractéristique cherchée s'obtient point par point en faisant pivoter un plan auxiliaire autour de  $U$ , et en projetant son point de rencontre avec  $U'$  sur la génératrice correspondante du cône  $N$ .

L'épure des deux caractéristiques a été faite dans le cas où la trace  $T$  de  $N$  sur le primitif passe par  $I$  (*fig. 102*). La caractéristique de la roue conique est dessinée en trait plein; celle de la roue pseudo-conique en trait mixte.

On peut arriver, grâce à l'examen de ces épures, à déterminer la grandeur et la position optima du cercle  $T$ .

### 119. Fraises utilisées pour le taillage.

Pour un taillage correct, les deux roues plates matérielles équivalentes aux outils, doivent être rigoureusement emboîtables.

1<sup>o</sup> *Taillage de chaque roue en deux passes.* — On peut réaliser les deux roues plates matérielles symétriques et emboîtables en n'utilisant que les deux fraises décrites plus haut (§ 112).

En fait, on est obligé de ne pas donner aux deux faces de la dent de roue plate le même angle de pression, sinon il y aurait une trop grande variation de courbure dans le profil des faces de la roue pseudo-conique. Ce défaut est mis en lumière par la *figure 103* (la roue pseudo-conique se reconnaît à la dissymétrie de son profil). On y remédie en utilisant des angles de pression différents pour les deux faces de la dent de roue plate : par exemple : 25° et 17° 1/2.

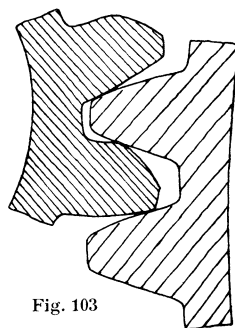


Fig. 103

Donc, si l'on veut réaliser les deux roues plates matérielles dont les sections par le primitif correspondent à la *figure 94*, il faudra nécessairement deux passes par roue, soit, au total, quatre fraises.

2<sup>o</sup> *Taillage d'une roue en une passe.* — Ce procédé est utilisé pour la fabrication des couples hypoïds des ponts arrière d'automobiles : la couronne est la roue conique; elle est obtenue en une passe au moyen d'une fraise taillant intérieurement et extérieurement, mais dont les cônes ont des angles différents (cette différence est assez sensible pour qu'on puisse distinguer à première vue une couronne destinée à un couple hypoïd, d'une couronne ordinaire).

Si  $r$  et  $r'$  sont les rayons de ces deux cônes dans le primitif (§ 114), il sera indispensable, pour que la condition d'emboîtement des roues plates matérielles soit respectée, d'avoir, pour tailler le pignon pseudo-conique, deux fraises distinctes : l'une de rayon  $r$  et taillant intérieurement; l'autre de rayon  $r'$  et taillant extérieurement.

### 120. Remarque sur la définition pratique du couple hypoïd Gleason.

Le couple pignon-couronne taillé industriellement sur machines Gleason et connu sous le nom d'engrenage hypoïd n'est pas exactement l'engrenage gauche que nous avons déjà désigné ainsi (§ 38).

Soient deux cônes  $\mathfrak{H}_1$  et  $\mathfrak{H}_2$  d'axes fixes et situés de part et d'autre d'un plan tangent commun fixe  $Q$ ; sur celui-ci glissent les primitifs de deux roues plates  $[P_1, N_1]$  et  $[P_2, N_2]$  constamment en coïncidence et dont le centre commun est le sommet  $S_1$  de  $\mathfrak{H}_1$  (*fig. 30*). Le plan  $P_1$  roule sans glisser sur  $\mathfrak{H}_1$ ; mais le mouvement  $P_2/\mathfrak{H}_2$  n'admet plus ces deux dernières surfaces pour primitives, en sorte que,  $\mathfrak{H}_1$  et  $\mathfrak{H}_2$  étant arbitrairement choisis en grandeur et position, le rapport de leurs vitesses de rotation est laissé indéterminé.

L'engrenage ainsi défini est à contact ponctuel.

Le cône  $\mathfrak{K}_1$  lié à la couronne (roue conique) a son angle au sommet très ouvert et, par suite, reste sur une assez grande surface très voisin du plan  $P_1$ ; aussi, pour que les points de contact des dentures  $\mathfrak{D}_1/\mathfrak{D}_2$  soient aussi près que possible des deux surfaces  $\mathfrak{K}_1$  et  $\mathfrak{K}_2$ , MM L. STEWART et E. WILDHABER se sont proposés (B 24) de définir la trace T de la surface d'égalité pente ( $N_1 N_2$ ) sur son primitif ( $P_1 P_2$ ) par la condition que la surface d'engrènement relative à l'engrenage gauche *roue-plate/pignon* passe par la génératrice de contact  $\Delta_2$  de  $\mathfrak{K}_2$  avec  $P_2$ .

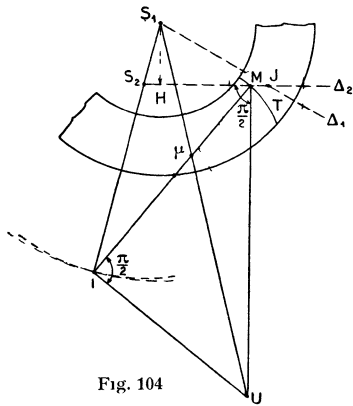


Fig. 104

Imaginons alors le plan  $P'_2$  en coïncidence avec Q et tournant autour de  $S_2$  de façon à rouler sans glisser sur  $\mathfrak{K}_2$  : le centre instantané de rotation du mouvement  $P_2/P'_2$  est alors un point I situé sur le prolongement de  $S_1 S_2$  (fig. 104), et tel que :

$$\frac{IS_1}{IS_2} = \frac{\omega_2 \sin \alpha_2}{\omega_1 \sin \alpha_1}.$$

Le point caractéristique M de T dans ce mouvement étant sur  $\Delta_2$ , il est facile d'en déduire la définition de T au moyen d'une équation différentielle. Nous allons nous contenter de déterminer son rayon de courbure en

un point quelconque. Considérons la normale MI à T comme une tige dont une extrémité décrit T par rapport à  $P_1$ , et  $\Delta_2$  par rapport à Q; le centre instantané du mouvement de cette tige par rapport à Q est l'intersection U des normales en M à  $\Delta_2$  et en I à MI. Or, le centre de courbure  $\mu$  de T est le centre instantané dans le mouvement de la tige par rapport à  $P_1$ , et comme celui-ci résulte de deux rotations de centres respectifs U et  $S_1$ , on en déduit que  $\mu$  est à l'intersection de MI avec  $S_1 U$ .

En pratique, on réalise approximativement la solution précédente en remplaçant T par un arc de cercle dont le centre est une position moyenne du point  $\mu$  dans le plan ( $P_1 P_2$ ).

Remarquons enfin que cet engrenage industriel étant à axes rectangulaires, on a la relation déjà établie (note 14) :

$$\cos \widehat{S_1 JS_2} = \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2.$$

### CHAPITRE III

---

## TAILLAGE PROGRESSIF des ROUES CONIQUES à DENTURE à CHEVRONS sur MACHINE REINECKER (Système BOTTCHER)

---

#### 121. Définition de la roue plate.

1<sup>o</sup> *Définition de la surface N.* — C'est une surface d'égale pente engendrée de manière à satisfaire aux deux conditions générales de coupe (§ 3). La méthode Böttcher consiste à engendrer sa trace T sur le primitif P de la roue

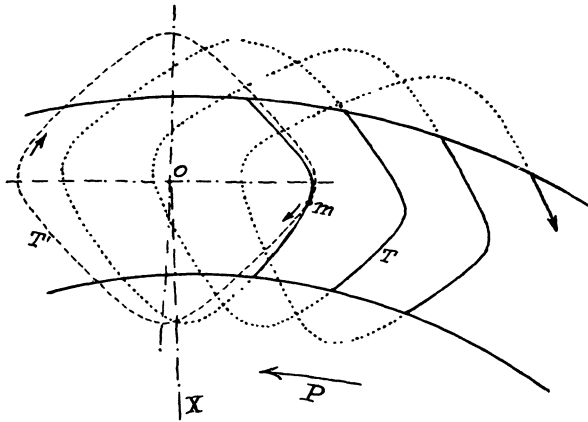


Fig. 105

plate de la façon suivante : un point  $m$  décrit dans un plan  $P'$  la courbe cycloïdale  $T'$  déjà étudiée (*fig. 75*); le primitif  $P$  de la roue plate à réaliser tourne autour d'un point  $S$  de  $P'$ , d'un mouvement uniforme; dans ces conditions,  $m$  décrit dans  $P$  une courbe dont les boucles successives se déduisent par des rotations de centre  $S$  et d'angles égaux. La partie utile de ces boucles a été représentée en trait plein (*fig. 105*).

2° Réalisation de la roue plate matérielle équivalente à l'outil. — Comme dans le taillage des roues cylindriques, il est impossible de réaliser simultanément les flancs convexes et les flancs concaves en vérifiant les deux conditions de l'engrenage parfait (§ 29). On utilise les trois mêmes copeaux : A pour tailler les flancs convexes, B pour le dégrossissage, et C pour tailler les flancs concaves; la trace  $m$  de A décrivant la courbe  $T'$  (*fig. 75*), la trace de C est située sur  $O_2q$ , plus proche de  $O_2$  que le point  $q$ . Ce réglage est déterminé par la condition que l'on ait :  $a_1c = ca_2$  (*fig. 106*).

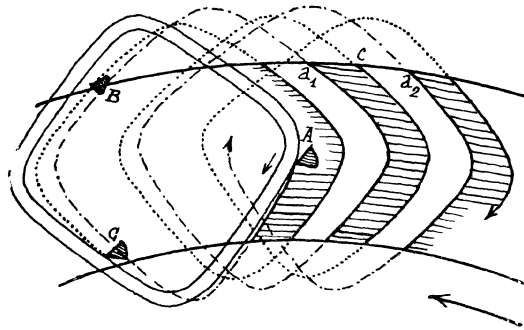


Fig. 106

On a représenté par des hachures la section, par le primitif, des dents de la roue plate matérielle équivalente à l'outil.

Un dispositif non représenté assure :

- 1° la position correcte du copeau pendant la coupe;
- 2° le retrait de chaque copeau à la suite de sa période de coupe.

Pour le taillage de la roue conjuguée, on satisfait à la condition d'emboîtement des roues plates matérielles de la façon suivante : on fera tourner la courbe  $T'$  dans  $P'$  autour de son centre  $O$  de façon que ses axes aient des inclinaisons symétriques des précédentes par rapport au rayon  $oX$  de la roue plate (*fig. 105*). Enfin, les distances de  $O$  aux copeaux A et C sont modifiées de façon que les trajectoires de leurs traces sur  $P'$  soient permutées.

## 122. Schéma de la machine Reinecker.

Cette machine à tailler les roues coniques à denture Böttcher a le même aspect que la plupart des machines précédentes (*fig. 83*) : le flan est toujours monté sur une poupée réglable par rotation autour d'un axe vertical, et reposant sur une semelle horizontale (l'axe du flan restant fixe au cours du taillage).

La machine Reinecker est caractérisée par le montage et le mouvement du chariot porte-copeau : celui-ci est mobile autour de l'axe fixe de la roue plate de centre  $S$  (*fig. 107*). Sur ce chariot  $C_h$  est montée une tête porte-

couteaux identique à celle que porte le chariot C de la machine Reinecker à tailler les roues cylindriques (*fig. 77*). Cette tête  $T_e$  tourne autour d'un axe horizontal lié au chariot, en entraînant le support  $S_u$  des trois couteaux qui lui est excentrique; les mouvements de cette tête et du support sont tels que les

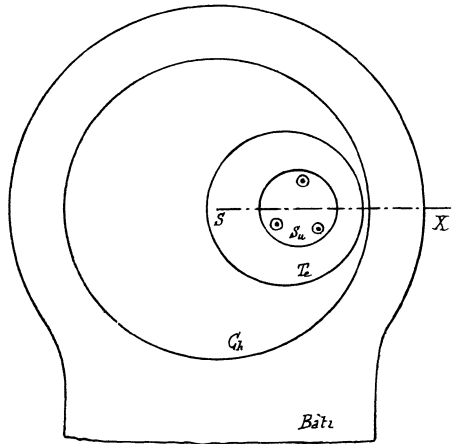


Fig. 107

couteaux aient par rapport au chariot  $C_h$  — auquel est lié le plan  $P'$  — le mouvement de coupe étudié ci-dessus.

Le calcul de la vitesse de rotation à imprimer au flan, d'après la période du mouvement de coupe et la vitesse du mouvement générateur (qui est une rotation *très lente* du chariot), se fait absolument comme dans le cas de la machine  $\text{CERLIKON}$ : il suffit de remplacer  $k$  par 1 dans les formules obtenues (§ 105, taillage correct).



## BIBLIOGRAPHIE

---

1. BÖTTCHER et GESSNER. — « Maschinenbau » Band 6, Heft 3, Seite 103, Berlin (1927).
  2. H. BRANDENBERGER. — « Machines-outils destinées à la taille des engrenages coniques avec denture en spirale », extrait des *C. R. du Congrès International de Mécanique Générale*. Liège (1930).
  3. R. BRICARD. — « Leçons de Cinématique » (2 vol.), Paris (1927).
  4. A.H. CANDEE. — « Large Spiral Bevel and Hypoïd Gears », extrait de « Machine Shop Practice », New-York (1929).
  5. J. CAPELLE. — *C. R. Acad. Sc.*, Paris (1937), n° 9.
  6. J. CAPELLE. — *C. R. Acad. Sc.*, Paris (1937), n° 13).
  7. G.L. CAVALIERI. — « Tracé, Calcul, Correction, procédés modernes de la taille des engrenages », Paris et Liège (1927).
  8. R. CHAMPLY. — « Engrenages et vis sans fin », Paris et Liège.
  9. R. GARNIER. — Cours de cinématique professé à la Sorbonne, Paris (1932-33.)
  10. J.N. HATON DE LA GOUPILLIÈRE. — « Traité des mécanismes », Paris (1864).
  11. F.D. JONES. — « Gear cutting processes », New-York (1924).
  12. E.O. LAMI. — « Dictionnaire Encyclopédique et Biographique de l'Industrie et des Arts Industriels », Paris (1885).
  13. Ch. MERLIN. — « Leçons sur les Mécanismes » (2 vol.), Paris (1935-37).
  14. R. MIGNÉE. — « Les Engrenages », Paris (1929).
  15. F.E. Mc. MULLEN et T.M. DURKAN. — « The Gleason Works System of Bevel Gears », extrait de « Machinery », New-York (juin 1922).
  16. J. PÉRIGNON. — « Théorie et Technologie des Engrenages », (2 vol.), Paris (1932).
  17. J. PÉRIGNON. — « Les Procédés Modernes de taille des Engrenages », Paris (1931).
  18. H. PETIT. — « Les engrenages Gleason spirale », extrait de « La Technique Automobile et Aérienne », Paris (1919).
  19. P. RAVIGNEAUX. — « Les engrenages à développantes » et « Machines à tailler les engrenages droits », extraits de « La Technique Automobile et Aérienne », Paris (1913-1914).
  20. H. RÉSAL. — *C. R. Acad. Sc.*, Paris (septembre 1893).
  21. REULEAUX. — « Cinématique », traduct. Debize, Paris (1877).
  22. REULEAUX. — « Le Constructeur », traduct. Debize, Paris (1890).
  23. A. SCHIEBEL. — « Zahnräder » (tomes I et II), Berlin (1934).
  24. A.L. STEWART et E. WILDHABER. — « The Design and Manufacture of Hypoïd Gears », extrait de « Il. Soc. Automotive Engrs », New-York (juin 1926).
  25. E. VESSIOT. — « Géométrie Supérieure ».
  26. L. WÈVE. — « Les Engrenages », Paris et Liège.
-