ALEXANDRE WEINSTEIN

Étude des spectres des équations aux dérivées partielles de la théorie des plaques élastiques

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1937

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1937__197__1_0>

Série A, 1760
N° d'ordre :
2626

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Alexandre WEINSTEIN

1re THÈSE. — Étude des spectres des équations aux dérivées partielles de la théorie des plaques élastiques.

2e THÈSE. — Les problèmes modernes de la théorie des sillages.

Soutenues le , devant la Commission d'Examen.

MM. VILLAT, *Président.*
M. FRÉCHET, J. PÉRÈS, *Examinateurs.*

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1937

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

MM.

Doyen honoraire..... M. MOLLIARD.

Doyen.............. C. MAURAIN, *Professeur*, Physique du globe.

Professeurs honoraires:

H. LEBESGUE.	FREUNDLER.	VESSIOT.	Charles FABRY.
A. FERNBACH.	AUGER.	P. PORTIER.	Léon BERTRAND.
Émile PICARD.	BLAISE.	M. MOLLIARD.	WINTREBERT.
Léon BRILLOUIN.	DANGEARD.	L. LAPICQUE.	O. DUBOSCQ.
GUILLET.	LESPIEAU.	G. BERTRAND.	BOHN.
PECHARD.	MARCHIS.	H. ABRAHAM.	

PROFESSEURS

M. CAULLERY.....	T	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
G. URBAIN.......	T	Chimie générale.
Émile BOREL.....	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.
Jean PERRIN.....	T	Chimie physique.
E. CARTAN.......	T	Géométrie supérieure.
A. COTTON.......	T	Recherches physiques.
J. DRACH.........	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
Charles PÉREZ...	T	Zoologie.
E. RABAUD......	T	Biologie expérimentale.
M. GUICHARD.....		Chimie minérale.
Paul MONTEL.. .	T	Théorie des fonctions et théorie des transformations.
L. BLARINGHEM...	T	Botanique.
G. JULIA.........	T	Mécanique analytique et Mécanique céleste.
C. MAUGUIN......	T	Minéralogie.
A. MICHEL-LEVY..	T	Pétrographie.
H. BÉNARD.......	T	Mécanique expérimentale des fluides.
A. DENJOY	T	Application de l'analyse à la Géométrie.
L. LUTAUD.......	T	Géographie physique et géologie dynamique.
Eugène BLOCH...	T	Physique théorique et physique céleste.
G. BRUHAT.......		Physique.
E. DARMOIS......		Enseignement de Physique.
A. DEBIERNE.....	T	Physique générale et Radioactivité.
A. DUFOUR......	T	Physique (P. C. B.).
L. DUNOYER......		Optique appliquée.
A. GUILLIERMOND.	T	Botanique.
M. JAVILLIER.....		Chimie biologique.
L. JOLEAUD.......		Paléontologie.
ROBERT-LÉVY.....	T	Zoologie.
F. PICARD...... .		Zoologie (Évolution des êtres organisés).
Henri VILLAT....	T	Mécanique des fluides et applications.
Ch. JACOB........	T	Géologie.
P. PASCAL.......	T	Chimie minérale.
M. FRÉCHET......	T	Calcul différentiel et calcul intégral.
E. ESCLANGON...	T	Astronomie.
Mme RAMART-LUCAS.	T	Chimie organique.
H. BÉGHIN.......	T	Mécanique physique et expérimentale.
FOCH............		Mécanique expérimentale des fluides.
De BROGLIE......	T	Théories physiques.
CHRÉTIEN........		Optique appliquée.
P. JOB...........		Chimie générale.
LABROUSTE.......		Physique du globe.
PRENANT.........		Zoologie.
VILLEY..........		Mécanique physique et expérimentale.
COMBES.........	T	Botanique (P. C. B.).
GARNIER.........	T	Mathématiques générales.
PÉRÈS...........		Mécanique théorique des fluides.
HACKSPILL.......		Chimie (P. C. B.).
LAUGIER.........	T	Physiologie générale.
TOUSSAINT.......		Technique Aéronautique.
M. CURIE...... ..		Physique (P. C. B.).
G. RIBAUD.......	T	Hautes températures.
CHAZY.......... .	T	Mécanique rationnelle.
GAULT...........		Chimie (P. C. B.).
CROZE..........		Recherches et physiques.
DUPONT..........	T	Théories chimiques.
LANQUINE........		Géologie.
VALIRON....... .		Mathématiques générales.
BARRABÉ........		Géologie structurale et géologie appliquée.
MILLOT...........		Zoologie (P. C. B.).
F. PERRIN........		Théories physiques.
VAVON...........		Chimie organique.
G. DARMOIS......		Calcul des Probabilités et Physique Mathématique.
CHATTON.........	T	Biologie maritime.
AUBEL...........		Chimie biologique.
J. BOURCART.....		Géographie physique et Géologie dynamique.
Mme JOLIOT-CURIE.		Physique générale et Radioactivité.
PLANTEFOL.......		Biologie végétale (P.C.B.).
CABANNES........		Enseignement de Physique.
GRASSÉ..........		Biologie animale (P.C.B.).
PREVOST..........		Chimie (P.C.B.).

Secrétaire......................... A. PACAUD.

Secrétaire honoraire............... D. TOMBECK.

A

MONSIEUR JACQUES HADAMARD

ET A

MONSIEUR HENRI VILLAT

Hommage de profonde reconnaissance.

PREMIÈRE THÈSE.

ÉTUDE DES SPECTRES

DES

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

DE LA

THÉORIE DES PLAQUES ÉLASTIQUES

1. **Introduction.** — Le présent travail a pour objet l'étude des spectres de deux équations aux dérivées partielles du quatrième ordre qui se présentent dans la Théorie de l'Élasticité.

Considérons dans un domaine S du plan (x, y) l'équation

$$\Delta\Delta w - \lambda^2 w = 0, \tag{1.1}$$

et cherchons ses solutions différentes de zéro, qui s'annulent avec leurs dérivées normales sur la frontière C de S. La théorie des équations intégrales et les méthodes directes du calcul des variations démontrent l'existence de telles *solutions propres* pour une suite dénombrable de *valeurs propres* du paramètre λ^2

$$\lambda_1^2, \quad \lambda_2^2, \quad \ldots \tag{1.2}$$

que nous supposerons rangées par ordre de grandeur en tenant compte de leur multiplicité, c'est-à-dire du nombre de solutions propres indépendantes correspondant à chacune d'elle. La suite (1.2) ainsi définie sera appelée le *spectre* de l'équation (1.1) relatif aux conditions aux limites

$$w = 0, \qquad \frac{dw}{dn_e} = 0. \tag{1.3}$$

(Nous avons désigné par n_e la normale extérieure au domaine.)

La méthode par laquelle nous nous proposons d'étudier ce spectre pourra être appliquée sans changements notables à l'étude du spectre de l'équation

$$\Delta\Delta w^* + \lambda^* \Delta w^* = 0 \tag{1.4}$$

relatif aux conditions aux limites

$$w^* = 0, \qquad \frac{dw^*}{dn_e} = 0. \tag{1.5}$$

Nous désignerons ce spectre par

$$\lambda_1^*, \quad \lambda_2^*, \quad \ldots. \tag{1.6}$$

La théorie des spectres des équations aux dérivées partielles a été étudiée jusqu'à présent surtout pour les équations du second ordre. L'exemple classique de cette théorie est l'équation

$$\Delta u + \omega u = 0, \tag{1.7}$$

dont le spectre relatif à la condition aux limites

$$u = 0 \tag{1.8}$$

sera désigné par

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots \quad (^1). \tag{1.9}$$

Pour les fonctions propres nous emploierons des notations telles que

$$w_1, \quad w_2, \quad \ldots; \quad w_1^*, \quad w_2^*, \quad \ldots, \quad u_1, \quad u_2, \quad \ldots.$$

Le Calcul des Variations nous donnera l'origine commune des trois équations (1.1), (1.4) et (1.7). Nous verrons qu'elles sont les équations d'Euler-Lagrange de trois problèmes isopérimétriques pour des intégrales doubles, généralisations immédiates à deux dimensions de problèmes bien connus pour des intégrales simples. D'ailleurs on considère habituellement l'équation (1.1) comme la généralisation directe de (1.7) quand on aborde l'étude des équations du qua-

(1) On sait que les valeurs propres (1.2), (1.5) et (1.9) sont positives.

trième ordre (1), parmi lesquelles elle doit être considérée, avec (1.4), comme l'exemple le plus simple et le plus typique.

Pour ces raisons déjà l'étude de nos équations s'impose dans le domaine des Mathématiques pures. Mais l'intérêt de la question est considérablement augmenté par le fait que nos équations se présentent dans la théorie des plaques élastiques. En effet, (1.1) et (1.4) sont respectivement les *équations des vibrations et du flambage d'une plaque élastique*, tandis que (1.7) est *l'équation* classique *des vibrations d'une membrane*. Les conditions aux limites (1.3) et (1.5) signifient qu'il s'agit de *plaques encastrées,* c'est-à-dire de plaques dont le bord est immobilisé de manière à y maintenir le plan tangent horizontal.

Un grand nombre de recherches ont permis d'établir plusieurs propriétés du spectre et des fonctions propres du problème des vibrations d'une membrane à bord fixe, c'est-à-dire des solutions de l'équation (1.7) avec les conditions aux limites (1.8). Citons comme exemple le théorème sur les lignes nodales, d'après lequel les lignes nodales d'une fonction propre appartenant à ω_n ne peuvent partager S en plus de n domaines. Ce théorème combiné avec le fait qu'une solution de $\Delta u + \omega u = 0$ ne peut avoir de zéros isolés nous donne immédiatement le résultat suivant : une fonction propre appartenant à la première valeur propre ω_1 ne peut avoir de zéro dans S. par conséquent elle est unique à un facteur près. Des théorèmes de ce genre ne sont pas toujours vrais dans la théorie des plaques; pour d'autres propositions la question n'a pas encore été tranchée.

On connaît explicitement les valeurs numériques des ω_n pour un certain nombre de domaines, en particulier pour le cercle et pour le carré. Par contre les λ_n^2 (et les λ_n^*) n'étaient connues jusqu'à présent que pour le cercle où elles s'obtiennent par l'intégration d'équations ordinaires. M. Weyl a démontré pour un domaine quelconque la loi asymptotique de la répartition des valeurs propres ω_n. Il a trouvé que cette répartition est indépendante de la forme du domaine et qu'elle est complètement déterminée par son aire (2). La démonstration de

(1) Signalons cependant que la théorie de l'équation (1.4) nous apparaîtra légèrement plus facile que celle de (1.1).

(2) H. Weyl, [1].

M. Weyl utilisait d'une manière essentielle la connaissance des ω_n pour un carré et ne pouvait être appliquée à la théorie des plaques. Quelques années plus tard, M. Courant a réussi à tourner la difficulté et à démontrer (¹) que les λ_n^2 se comportent asymptotiquement comme les carrés des ω_n. Sa méthode s'applique sans changements aux λ_n^* pour lesquels on trouve la loi asymptotique $\lambda_n^* \sim \omega_n$. Le procédé de M. Courant utilise avec succès la *définition indépendante des valeurs propres* (méthode des plus grands minima), dont il sera question plus loin. Sa démonstration n'exige plus la connaissance des valeurs propres pour un carré : il suffit de les connaître pour un cercle.

Signalons un autre principe, qui joue également un grand rôle dans la théorie des lois asymptotiques des spectres de la membrane et des plaques encastrées : les valeurs propres pour un domaine S′, contenu dans S, sont supérieures aux valeurs propres pour le domaine S (²).

Les lois asymptotiques, importantes en elles-mêmes, trouvent des applications dans la Physique Théorique. Cependant ce sont les valeurs propres d'indice peu élevé qui jouent un rôle fondamental dans l'Art de l'Ingénieur. Plusieurs procédés, dont le plus connu est la méthode de Rayleigh-Ritz, ont été imaginés pour le calcul numérique des spectres. La *méthode de Ritz* permet d'établir une suite non croissante de *bornes supérieures* pour chaque valeur propre (³). En plus, il est toujours possible de choisir ces suites de manière qu'elles convergent vers la valeur cherchée (⁴). Il est cependant évident que ce n'est pas la question de convergence, malgré son intérêt intrinsèque, qui constitue le point essentiel d'une telle théorie, mais bien l'*évaluation de l'erreur* commise par l'application de la méthode de Ritz (⁵).

(¹) R. Courant, [1].

(²) Ce *théorème de monotonie*, démontré par M. Hadamard, [1], a été retrouvé par plusieurs auteurs.

(³) W. Ritz, [1]. Rappelons que le premier exemple calculé par Ritz lui-même furent les valeurs propres d'une plaque carrée vibrante, libre sur les bords.

(⁴) M. Plancherel, [1], R. Courant, [2].

(⁵) Nous devons renoncer à citer les travaux sur ce sujet, d'autant plus qu'ils ne trouvent pas d'applications dans notre travail. Bornons-nous à signaler que dans plusieurs de ces méthodes on se sert de la fonction de Green, dont la détermination n'est relativement facile que dans la théorie des équations différentielles ordinaires.

Dans les applications, la méthode de Ritz est restée, suivant l'expression de H. Poincaré, une « méthode d'ingénieur ». Le calculateur se contente d'admettre que la borne obtenue est voisine de la valeur cherchée, quand deux ou trois essais le conduisent a des valeurs numériques rapprochées les unes des autres.

Signalons encore le fait suivant. La méthode de Ritz ne nous fournit aucun renseignement général sur le spectre d'un problème, permettant de le comparer aux spectres de problemes plus simples et mieux etudiés. Dans la theorie des plaques encastrées, le théoreme de monotonie nous donne immédiatement un moyen de comparaison entre le spectre pour un domaine S et le spectre du même problème pour un domaine circulaire contenu dans S (ou contenant S). Ce procédé pourrait être considéré comme supérieur a la méthode de Ritz au point de vue théorique, mais la précision des résultats numériques est loin d'être satisfaisante.

Les conditions aux limites (1.3) et (1.5) ne sont pas les seules qu'on est amené a considérer dans la théorie de nos équations (1.1) et (1.4). Si le bord d'une plaque est immobilisé, sans être encastré, il faut remplacer (1.3) et (1.5) par les conditions

$$(1.10) \qquad w = 0 \qquad \Delta w = 0,$$

$$(1.11) \qquad w^\star = 0 \qquad \Delta w^\star = 0$$

Les problemes ainsi poses sont plus élémentaires que les problemes correspondants pour les plaques encastrées, car on vérifie immédiatement qu'ils se ramenent au probleme des vibrations d'une membrane. En effet, les fonctions propres w_n et $w_n^\star$ sont, dans ce cas, identiques aux fonctions propres u_n, les valeurs propres correspondantes étant données par les équations $\lambda_n^2 = \omega_n$, $\lambda_n^\star = \omega_n$.

Les résultats du présent travail nous permettront de rattacher la théorie des spectres des plaques encastrées au probleme des vibrations des membranes. Il va sans dire que le lien entre ces problemes est moins évident que dans le cas élémentaire precédent. Nous trouverons que *la détermination des spectres de nos équations* (1.1) *et* (1.4) *relatifs aux conditions aux limites* (1.3) *et* (1.5) *peut être ramenée à l'étude d'une suite de problèmes de vibrations forcées d'une membrane*. L'énoncé exact de notre résultat sera donné au paragraphe 16. Précisons ici, autant que possible, l'énoncé sommaire que nous venons de donner. Pour étudier les spectres de nos problèmes nous introduirons une suite de problèmes auxiliaires d'un caractère plus élémentaire. Ces problèmes nous donneront des suites non décroissantes de *bornes inférieures* pour les λ_n^2 et les λ_n^* et nous permettront d'établir des inégalités pour les valeurs propres. Ici, comme dans la méthode de Ritz, on peut s'arranger pour que ces suites convergent, mais la question de la convergence constitue un fait séparé que nous n'aurons pas à envisager dans le présent travail, uniquement consacré à l'étude et à la comparaison des spectres de divers problèmes.

Pour construire des bornes inférieures des λ_n^2 et des λ_n^* nous serons amenés à considérer une suite d'équations du type

$$\Delta v_k + \mu v_k = p_k(x, y) \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{1.12}$$

avec les conditions aux limites $v_k = 0$. (Les p_k sont des fonctions harmoniques données; μ désigne un paramètre.) Nous verrons que les p_k sont déterminées à partir des u_k; d'autre part, il est bien connu que les u_k permettent d'intégrer les équations (1.12).

En résumé, la connaissance des fonctions propres u_k permet, comme dans le cas élémentaire des conditions (1.10) et (1.11), *de faire l'étude complète du spectre des problèmes des plaques encastrées.*

On obtient des résultats analogues en imposant à w et w^* des *conditions mixtes*, c'est-à-dire les conditions (1.3), (1.5) sur une partie de la frontière et les conditions (1.10), (1.11) sur la partie complémentaire.

Notre méthode admet des applications numériques. Combinée avec celle de Ritz, elle fournit des *bornes numériques inférieures et supérieures pour les valeurs propres.* On peut de cette manière évaluer l'erreur attachée aux valeurs obtenues par la méthode de Ritz et combler ainsi une grave lacune que présente ce procédé. Dans certains cas nous obtenons la valeur cherchée à une erreur de 0,2 pour 100 près.

Les résultats du présent travail ont été en partie résumés dans deux Notes [1]. Dans des publications antérieures j'avais indiqué des inégalités pour la première valeur propre λ_1^* (ainsi que pour λ_2^2)

---

[1] A. WEINSTEIN, [5], [6].

dans le cas du carré. M. Tomotika a fait, d'après mes indications, le calcul analogue pour λ_1^2 (1). Les résultats acquis depuis nous permettront de faire rentrer ces cas particuliers dans le cadre d'un procédé général et de les débarrasser d'artifices étrangers à nos problèmes.

Signalons enfin que nous avons primitivement entrepris nos recherches dans le but d'élucider les *solutions formelles*, par lesquelles plusieurs auteurs cherchaient à obtenir les valeurs de λ_1^* et de λ_1^2 dans le cas du carré. Ces calculs rappellent un procédé formel par lequel Fourier avait obtenu en 1822 les coefficients de certains développements trigonométriques. M. Picard signale ce « calcul extraordinaire » dans un de ses Traités récents (2). En comparant les résultats numériques, obtenus par des méthodes formelles, avec les nôtres, nous constaterons parfois une concordance imprévue, que nous pourrons expliquer dans une certaine mesure (3). Il pourrait paraître inutile d'insister sur les procédés formels qui sortent des cadres des mathématiques usuelles; qu'il nous soit pourtant permis de signaler, à l'usage des calculateurs, que les méthodes rigoureuses présentent, dans notre cas, des avantages indiscutables dans les applications numériques et que les procédés formels ne peuvent fournir aucun renseignement sur les valeurs propres d'indice supérieur à un.

2. Rappel de quelques définitions. Fonctionnelles quadratiques et formules de Green. — On désigne habituellement par fonctionnelle bilinéaire symétrique, définie pour une certaine classe de fonctions, un nombre $Q(\varphi, \psi) = Q(\psi, \varphi)$ qui dépend linéairement des fonctions φ et ψ. On obtient une *fonctionnelle quadratique* en posant $\psi = \varphi$ et l'on écrit pour abréger $Q(\varphi)$ au lieu de $Q(\varphi, \varphi)$. Pour une combinaison linéaire de n fonctions à coefficients constants A_i, on a

(1) A. Weinstein, [1], [2], [3], [4]. S. Tomotika, [1].

E. Trefftz, [1], [2], a retrouvé mes inégalités numériques pour λ_1^* dans le cas du carré, mais sa méthode ne permet pas d'obtenir des inégalités pour λ_n^* et λ_n^2 dans les cas où $n > 1$. Ceci tient au fait que la théorie de Trefftz ne fait intervenir ni les fonctions propres u_n du problème de la membrane, ni les suites des fonctions harmoniques p_k qui jouent un rôle important dans nos recherches.

(2) E. Picard, [1], p. 99.

(3) De même que dans d'autres domaines (par exemple en mécanique quantique) la méthode rigoureuse diffère essentiellement des procédés formels et ne permet nullement de les justifier *a posteriori*.

l'identité

$$Q\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\varphi_i\right) = \sum_{i,k=1}^{n} A_i A_k Q(\varphi_i, \varphi_k). \tag{2.1}$$

On dit que la fonctionnelle Q est *définie positive,* si, pour la classe de fonctions considérée, l'équation $Q(\varphi) = 0$ entraîne $\varphi = 0$. Deux fonctions φ et ψ seront dites *orthogonales* par rapport à Q si l'on a $Q(\varphi, \psi) = 0$.

Nous allons considérer en particulier les fonctionnelles bilinéaires suivantes

$$H(\varphi, \psi) = \int\int_S \varphi\psi \, dx \, dy, \tag{2.2}$$

$$D(\varphi, \psi) = \int\int_S (\varphi_x \psi_x + \varphi_y \psi_y) \, dx \, dy, \tag{2.3}$$

$$I(\varphi, \psi) = \int\int_S \Delta\varphi \, \Delta\psi \, dx \, dy. \tag{2,4}$$

Nous utiliserons souvent une notation usuelle dans la théorie des espaces de Hilbert, en écrivant (φ, ψ) au lieu de $H(\varphi, \psi)$.

En posant $\psi = \varphi$ on obtient les fonctionnelles quadratiques

$$H(\varphi) = \int\int_S \varphi^2 \, dx \, dy, \tag{2.5}$$

$$D(\varphi) = \int\int_S (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) \, dx \, dy, \tag{2.6}$$

$$I(\varphi) = \int\int_S (\Delta\varphi)^2 \, dx \, dy. \tag{2.7}$$

$H(\varphi)$ est *le carré de la norme hilbertienne* de φ. $D(\varphi)$ est *l'intégrale de Dirichlet.* Cette fonctionnelle est positive définie pour la classe des fonctions qui s'annulent sur la frontière C de S. La fonctionnelle $I(\varphi)$ est égale à $H(\Delta\varphi)$.

Hypothèses sur le domaine S. — Nous supposerons que le domaine S est borné et que sa frontière C se compose d'un nombre fini de courbes fermées simples, chacune de ces courbes étant elle-même formée d'un nombre fini d'arcs à courbure hölderienne, se raccordant sans point de rebroussement. Nous désignerons par s l'arc sur C.

Formules de Green. — Nous utiliserons fréquemment les identités classiques suivantes, valables sous des conditions de continuité bien connues,

$$(2.8)\qquad (\varphi, \Delta\psi) + D(\varphi, \psi) = \int_C \varphi \frac{d\psi}{dn_e} ds,$$

$$(2.9)\qquad (\varphi, \Delta\psi) - (\psi, \Delta\varphi) = \int_C \left(\varphi \frac{d\psi}{dn_e} - \psi \frac{d\varphi}{dn_e}\right) ds.$$

En remplaçant ici φ par $\Delta\varphi$, on obtient

$$(2.10)\qquad (\Delta\varphi, \Delta\psi) - (\psi, \Delta\Delta\varphi) = \int_C \left(\Delta\varphi \frac{d\psi}{dn_e} - \psi \frac{d\Delta\varphi}{dn_e}\right) ds$$

et l'on en déduit immédiatement la formule suivante :

$$(2.11)\qquad (\varphi, \Delta\Delta\psi) - (\psi, \Delta\Delta\varphi) = \int_C \left(\varphi \frac{d\Delta\psi}{dn_e} - \psi \frac{d\Delta\varphi}{dn_e} + \Delta\varphi \frac{d\psi}{dn_e} - \Delta\psi \frac{d\varphi}{dn_e}\right) ds.$$

3. Définition des spectres par des problèmes variationnels. — Il est bien connu que les valeurs et les fonctions propres des (1.1), (1.4) et (1.7) relatifs à des conditions linéaires et homogènes aux limites peuvent être définies par des problèmes variationnels. On est amené à chercher les minima des rapports

$$(3.1)\qquad \frac{I}{H}, \quad \frac{I}{D} \quad \text{et} \quad \frac{D}{H},$$

pour toutes les fonctions satisfaisant à certaines conditions [1].

Pour fixer les idées, nous allons considérer les problèmes variationnels pour le rapport $\frac{I}{H}$ et pour des fonctions s'annulant avec leurs

---

[1] Signalons que des problèmes analogues ont déjà été traités pour des intégrales simples. Posons

$$I_n = \int_0^1 [f^{(n)}(x)]^2\, dx.$$

M. M. Janet, [1], a trouvé les minima des rapports $\frac{I_n}{I_k}$ ($k < n$) pour les fonctions qui s'annulent ainsi que leurs $n - 1$ premières dérivées pour $x = 0$ et $x = 1$. Les rapports $\frac{I}{H}$, $\frac{I}{D}$ et $\frac{D}{H}$ correspondent à $\frac{I_2}{I_0}$, $\frac{I_2}{I_1}$ et $\frac{I_1}{I_0}$ et les minima trouvés par M. Janet correspondent à λ_1^2, λ_1^* et ω_1.

dérivées normales sur la frontière de S. Bien que la plupart des considérations suivantes soient connues, il nous paraît nécessaire de les reproduire ici pour mettre en évidence les résultats et les raisonnements qui pourront être appliqués aux problèmes modifiés introduits par notre méthode.

On peut définir les valeurs propres λ_1^2, λ_2^2, ... de deux manières différentes par des problèmes variationnels.

Définition des λ_n^2 par récurrence. — λ_1^2 sera défini comme le minimum du rapport $\frac{I(w)}{H(w)}$ pour toutes les fonctions w s'annulant avec leurs dérivées normales sur la frontière de S. Une fonction minimisante de ce problème sera désignée par w_1 (¹).

Pour $n > 1$ on définit λ_n^2 comme le minimum de $\frac{I}{H}$ pour les fonctions w, qui, en plus des conditions aux limites $w = \frac{dw}{dn_e} = 0$, satisfont aux $n-1$ conditions d'orthogonalité

$$H(w, w_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{3.2}$$

Une fonction minimisante de ce problème sera désignée par w_n. (La démonstration de l'identité de la suite des λ_n^2 ainsi définie avec le spectre (1.3) sera rappelée plus loin.) Il est évident que les λ_n^2 définis par les problèmes variationnels forment une suite non décroissante.

Soit δw une fonction arbitraire satisfaisant aux conditions aux limites, ainsi qu'aux $n-1$ conditions

$$H(w_i, \delta w) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{3.3}$$

On aura, pour toute valeur de ε, l'inégalité

$$I(w_n + \varepsilon\,\delta w) \geqq \lambda_n^2 H(w_n + \varepsilon\,\delta w),$$

ce qui nous donne l'équation

$$I(w_n, \delta w) - \lambda_n^2 H(w_n, \delta w) = 0. \tag{3.4}$$

(¹) Les conditions de continuité suffisantes pour assurer l'existence des solutions des problèmes de ce paragraphe ont été étudiées par M. K. Friedrichs, [1]. Pour les problèmes modifiés ces conditions seront énoncées explicitement au paragraphe 5. Bornons-nous à signaler que, dans ce dernier cas, elles seront moins restrictives.

En posant dans cette équation $\delta w = w_i$, on trouve, d'après (3.2), les équations

$$(3.5)\qquad \begin{gathered} \mathrm{I}(w_n, w_i) = 0, \qquad \mathrm{H}(w_n, w_i) = 0 \qquad \text{pour} \quad i \neq n, \\ \mathrm{I}(w_n) = \lambda_n^2 \mathrm{H}(w_n) \qquad (i, n = 1, 2, \ldots). \end{gathered}$$

Si δw ne satisfait pas aux conditions (3.3), nous poserons

$$(3.6)\qquad \delta w = \overline{\delta w} + \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{A}_i w_i,$$

les coefficients A_i étant choisis de manière que $\overline{\delta w}$ soit orthogonale à $w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}$. On aura immédiatement, d'après (3.5) et (3.4),

$$\begin{gathered} \mathrm{I}(w_n, \overline{\delta w} + \Sigma \mathrm{A}_i w_i) - \lambda_n^2 \mathrm{H}(w_n, \overline{\delta w} + \Sigma \mathrm{A}_i w_i) \\ = \mathrm{I}(w_n, \overline{\delta w}) - \lambda_n^2 \mathrm{H}(w_n, \overline{\delta w}) = 0, \end{gathered}$$

ce qui démontre que l'équation (3.4) est remplie pour toute fonction δw *satisfaisant aux conditions aux limites, même si elle ne satisfait aux conditions d'orthogonalité* (3.3).

Équation d'Euler-Lagrange. — Appliquons les identités de Green. On déduit de (3.4), en laissant tomber l'indice n, l'équation générale, équivalente à l'annulation de la première variation,

$$(3.7)\qquad \mathrm{H}(\Delta\Delta w - \lambda^2 w, \delta w) + \int_{\mathrm{C}} \left(\Delta w \frac{d\delta w}{dn_e} - \delta w \frac{d\Delta w}{dn_e} \right) ds = 0.$$

En vertu des conditions aux limites $\delta w = \dfrac{d\delta w}{dn_e} = 0$, l'intégrale étendue à C est égale à zéro. La fonction δw étant arbitraire dans S, on obtient pour $w = w_n$, $\lambda^2 = \lambda_n^2$ l'équation d'Euler (1.1)

$$\Delta\Delta w - \lambda^2 w = 0.$$

Ce procédé démontre que chaque λ^2 obtenu par un problème variationnel est une valeur propre de l'équation (1.1) relative aux conditions aux limites (1.2). La réciproque est également vraie. Nous reproduirons ici l'élégante démonstration de M. Herrmann [1] qui a simplifié la démonstration donnée primitivement par M. Courant.

Soit λ^2 une valeur propre de l'équation (1.1) relative aux condi-

---

[1] H. Herrmann [1].

tions (1.3) et soit w une fonction propre correspondante. Il s'agit de démontrer que λ^2 est le minimum de l'un des problèmes variationnels considérés. Soit δw une fonction arbitraire s'annulant avec sa dérivée normale sur la frontière de S. On obtient immédiatement, en multipliant (1.1) par δw et en intégrant, l'équation

$$\mathrm{I}(w, \delta w) - \lambda^2 \mathrm{H}(w, \delta w) = 0. \tag{3.8}$$

Posons $\delta w = w$. On trouve $\lambda^2 = \dfrac{\mathrm{I}(w)}{\mathrm{H}(w)}$, ce qui démontre l'inégalité $\lambda^2 \geqq \lambda_1^2$. Soit

$$\lambda_{n-1}^2 < \lambda^2 \leqq \lambda_n^2. \tag{3.9}$$

Posons dans (3.8) $\delta w = w_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$. On obtient

$$\mathrm{I}(w, w_i) - \lambda^2 \mathrm{H}(w, w_i) = 0.$$

D'autre part, on a, en posant dans (3.4) $n = i$ et $\delta w = w$, $\mathrm{I}(w_i, w) - \lambda_i^2 \mathrm{H}(w_i, w) = 0$. Vu que I et H sont des fonctionnelles symétriques, on en déduit

$$(\lambda_i^2 - \lambda^2)\mathrm{H}(w, w_i) = 0.$$

Par conséquent w satisfait aux conditions d'orthogonalité

$$\mathrm{H}(w, w_i) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n-1),$$

ce qui montre que λ^2 ne peut être inférieure à λ_n^2. En comparant ce résultat à l'inégalité (3.9), on trouve immédiatement $\lambda^2 = \lambda_n^2$, ce qui démontre que la valeur propre λ^2 du problème différentiel est égale au minimum de l'un de nos problèmes variationnels.

Définition indépendante des valeurs propres. (Méthode des plus grands minima.) — Cette définition, utilisée avec grand succès par M. Courant, permet d'établir des inégalités entre les valeurs propres de différents problèmes.

Soient $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$, $n-1$ fonctions continues dans S (il suffit de supposer qu'elles soient de carré sommable). Désignons par $\lambda_n^2(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})$ le minimum (ou la limite inférieure) du rapport $\dfrac{\mathrm{I}(w)}{\mathrm{H}(w)}$ pour toutes les fonctions satisfaisant aux conditions aux limites (1.3) ainsi qu'aux $n-1$ conditions

$$\mathrm{H}(w, \varphi_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{3.10}$$

qui remplacent les conditions d'orthogonalité (3.2).

On démontre que $\lambda_n^2(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}) \leq \lambda_n^2$. La valeur λ_n^2 est le maximum de ces minima, quand $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ varient. Ce maximum est atteint pour $\varphi_i = w_i$. La démonstration de ces propriétés est basée sur le lemme suivant : Le rapport $\frac{\mathrm{I}(w)}{\mathrm{H}(w)}$ est inférieur ou égal à λ_n^2 pour toute combinaison linéaire à coefficients constants $w = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k w_k$ des n premières fonctions propres $w_1, \ldots, w_n$. En effet, on a, d'après (3.5), $\mathrm{I}(w) - \lambda_n^2 \mathrm{H}(w) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k^2(\lambda_k^2 - \lambda_n^2)\mathrm{H}(w_k) \leqq 0$.

Déterminons les constantes A_k de manière à satisfaire les $n-1$ équations linéaires (3.10). D'après le lemme précédent, on aura les inégalités $\lambda_n^2 \geqq \frac{\mathrm{I}(w)}{\mathrm{H}(w)} \geqq \lambda_n^2(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})$. En posant $\varphi_i = w_i$, on trouve $\lambda_n^2(w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}) = \lambda_n^2$, ce qui achève la démonstration.

Problèmes mixtes. — Les considérations précédentes s'appliquent presque sans modifications à ces problemes.

Signalons qu'on obtient les fonctions propres satisfaisant aux conditions $w = \frac{dw}{dn_e} = 0$ sur une partie C′ de C, et aux conditions $w = \Delta w = 0$ sur l'autre partie, C″, en imposant aux fonctions w, considérées dans les problèmes variationnels, la condition

$$w = \frac{dw}{dn_e} = 0$$

sur C′ et $w = 0$ sur C″. Il est superflu d'imposer la condition $\Delta w = 0$. En effet, l'équation générale (3.7) se réduit pour une fonction minimisante, à l'équation

$$\int_{\mathrm{C}} \Delta w \frac{d\delta w}{dn_e} ds = 0 \text{ (1)}.$$

La fonction $\frac{d\delta w}{dn_e}$ étant arbitraire, on en déduit que l'équation $\Delta w = 0$ est valable sur C″. La condition $\Delta w = 0$ est une *condition aux limites intrinsèque* de nos problèmes variationnels. Elle a lieu

(1) Ce mode de raisonnement, d'ailleurs classique, sera développé au paragraphe 6.

lorsqu'on n'impose aucune condition à la dérivée normale. De même' pour obtenir les conditions $w = \Delta w = 0$ sur toute la frontière C, il suffit d'imposer aux fonctions w du problème variationnel la seule condition aux limites $w = 0$.

Problèmes du flambage. — Pour définir les valeurs propres de ces problèmes par des problemes variationnels, il suffit de remplacer le rapport $\frac{I(w)}{H(w)}$ par l'expression $\frac{I(w^\star)}{D(w^\star)}$. Les conditions d'orthogonalité (3.2) et (3.10) sont à remplacer par les équations

$$D(w^\star, w_i^\star) = 0, \qquad D(w^\star, \varphi_i) = 0.$$

(On suppose que les φ_i ont des dérivées continues.) On aura, au lieu de (3.7), l'équation suivante

$$H(\Delta\Delta w^\star + \lambda^\star \Delta w^\star, \delta w^\star) + \int_C \left(\Delta w^\star \frac{d\delta w^\star}{dn_e} - \delta w^\star \frac{d(\Delta w^\star + \lambda^\star w^\star)}{dn_e} \right) ds = 0.$$

De même que dans les problemes relatifs à $\frac{I}{H}$, la condition $\Delta w^\star = 0$ joue le rôle d'une condition intrinsèque.

En résumé, nous pouvons dire que les minima des rapports $\frac{I}{H}$ et $\frac{I}{D}$ jouent dans la théorie des plaques le même rôle que les minima de l'expression $\frac{D}{H}$ dans le probleme classique des vibrations d'une membrane.

Nous désignerons par *Problème* I l'ensemble des problèmes variationnels définissant le spectre du problème des vibrations des plaques encastrées. Ceci nous permettra de les distinguer des problèmes auxiliaires modifiés que nous serons amenés à considérer dans la suite. Les problèmes variationnels correspondants de la théorie du flambage seront appelés *Problème* II.

4. Les solutions indéfinies des equations $\Delta\Delta w - \lambda^2 w = 0$ et $\Delta\Delta w + \lambda^\star \Delta w^\star = 0$. — Les fonctions qui satisfont à ces équations du quatrième ordre sont des sommes de solutions d'équations aux dérivées partielles du second ordre. Ce fait élémentaire nous sera tres utile pour l'étude des spectres des différents problèmes envisagés.

Considérons d'abord l'équation $\Delta\Delta w - \lambda^2 w = 0$. Soit $\lambda^2 > 0$. Désignons par λ la racine positive de λ^2. Posons

$$\Delta w + \lambda w = 2\lambda \overline{U}. \tag{4.1}$$

On aura

$$\Delta\overline{U} - \lambda\overline{U} = 0. \tag{4.2}$$

Par conséquent on peut écrire, au lieu de (4.1),

$$\Delta w + \lambda w = \lambda\overline{U} + \lambda\overline{U} = \Delta\overline{U} + \lambda\overline{U}$$

ce qui donne

$$\Delta(w - \overline{U}) + \lambda(w - \overline{U}) = 0. \tag{4.3}$$

On peut donc poser

$$w = U + \overline{U} \tag{4.4}$$

ou la fonction U satisfait à l'équation

$$\Delta U + \lambda U = 0, \tag{4.5}$$

c'est-a-dire à l'équation indéfinie du problème des vibrations d'une membrane. En faisant la somme de (4.2) et (4.5), on obtient l'identité

$$\Delta w = \lambda(\overline{U} - U) \quad (^1). \tag{4.6}$$

Considérons maintenant l'équation $\Delta\Delta w^* + \lambda^*\Delta w^* = 0$ pour $\lambda^* \neq 0$. On aura

$$\Delta w^* + \lambda^* w^* = \lambda^* p(x, y), \tag{4.7}$$

ou p est une fonction harmonique. Il vient donc

$$\Delta(w^* - p) + \lambda^*(w^* - p) = 0.$$

Par consequent on peut poser

$$w^* = p + U, \tag{4.8}$$

ou p et U satisfont aux équations

$$\Delta p = 0, \tag{4.9}$$

$$\Delta U + \lambda^* U = 0 \tag{4.10}$$

et l'on aura l'identité

$$\Delta w^* = -\lambda^* U. \tag{4.11}$$

---

(1) Il parait que jusqu'a present on a utilisé (4.4) uniquement dans le problème des vibrations d'une plaque encastree circulaire. Nous utiliserons (4.4) et (4.6) pour un domaine quelconque.

Applications. — Considérons d'abord l'équation (1.1) avec les conditions aux limites (1.10) : $w = \Delta w = 0$. D'après (4.4), et (4.6) U et $\overline{U}$ doivent s'annuler sur la frontière. Par conséquent U est identiquement nul dans S, tandis que U est une fonction propre u correspondant à une certaine valeur propre $\lambda = \omega_n$. On a $w = u_n$ et $\lambda^2 = \omega_n^2$. Réciproquement, toute fonction propre u_n de (1.7), (1.8) est une solution de (1.1), (1.10) correspondant à $\lambda^2 = \omega_n^2$.

Pour les solutions de l'équation $\Delta\Delta w^\star + \lambda^\star \Delta w^\star = 0$, qui satisfont aux conditions aux limites (1.11) : $w^\star = \Delta w^\star = 0$, on trouve, d'après (4.8) et (4.11), que p et U s'annulent sur C. Par conséquent la fonction harmonique p est identiquement nulle et $w^\star$ est, d'après (4.7), une fonction propre u_n, correspondant à $\lambda_n^\star = \omega_n$. Réciproquement toute fonction propre u_n est une solution de notre problème aux limites et l'on a $\omega_n = \lambda_n^\star$. En résumé, les problèmes aux limites correspondant aux conditions $w = \Delta w = 0$ et $w^\star = \Delta w^\star = 0$ se ramènent immédiatement au problème des vibrations d'une membrane [1].

5. **Les problèmes modifiés.** — Nous nous servirons fréquemment dans la suite du *principe fondamental* suivant : Si l'on remplace les conditions imposées aux fonctions d'un problème variationnel par des conditions moins restrictives, on obtient un problème modifié, pour lequel le minimum est non supérieur au minimum obtenu dans le problème initial. En effet, la classe des fonctions considérées dans le problème modifié contient la classe des fonctions envisagées dans le problème initial. De même, en introduisant des conditions plus restrictives, on obtient un nouveau minimum, non inférieur au minimum primitivement trouvé.

Ce principe général est classique. Il est d'ailleurs implicitement utilisé dans la méthode de Ritz-Rayleigh pour le calcul des bornes supérieures des valeurs propres d'un problème donné.

Nous allons nous servir du même principe pour obtenir des bornes inférieures des valeurs propres de nos problèmes. Pour fixer les idées nous allons, comme au paragraphe 3, considérer d'abord le problème des vibrations d'une plaque encastrée.

---

[1] Les démonstrations usuelles utilisent le fait que le système des fonctions propres u_n est complet.

Définition des problèmes modifiés. — Soit

$$(5.1)\qquad p_1(x, y), p_2(x, y), \ldots, p_k(x, y), \ldots$$

une suite arbitrairement choisie de *fonctions harmoniques*, linéairement indépendantes dans le domaine S. Nous supposerons que ces fonctions sont continues dans $S + C$ [1], et nous désignerons par

$$(5.2)\qquad p_1(s), p_2(s), \ldots, p_k(s), \ldots$$

les valeurs que prennent les $p_k(x, y)$ sur la frontière C.

La suite (5.1), ou (5.2), que nous supposerons fixée une fois pour toutes, nous servira dans la définition des problèmes modifiés. Nous l'appellerons la *suite fondamentale* de ces problèmes. Son choix est pour l'instant arbitraire, mais nous verrons plus loin qu'il existe des suites privilégiées, permettant d'obtenir des résultats plus approfondis.

Nous allons définir maintenant, par des problèmes variationnels, une suite de bornes inférieures pour les valeurs propres λ_n^2. Envisageons d'abord le problème suivant : *Déterminer le minimum de* $\frac{I(w)}{H(w)}$ *pour toutes les fonctions continues dans* $S + C$, *possédant dans* S *un laplacien de carré sommable et satisfaisant aux conditions suivantes :*

$$(5.3)\qquad w = 0 \quad \text{sur } C,$$

$$(5.4)\qquad (p_k, \Delta w) = 0 \quad \text{pour} \quad k = 1, \ldots, m,$$

où m désigne un entier positif. Les conditions (5.4) expriment que le laplacien Δw est orthogonal dans S aux m fonctions $p_1, p_2, \ldots, p_m$.

Soit μ_{1m}^2 le minimum dans le problème considéré et soit w_{1m} une fonction minimisante correspondante. Pour $n > 1$, nous définirons les valeurs μ_{nm}^2 par récurrence : μ_{nm}^2 sera le minimum dans le problème qu'on déduit du précédent en ajoutant aux conditions énoncées les $n - 1$ conditions d'orthogonalité

$$(5.5)\qquad H(w, w_{im}) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n - 1).$$

Une fonction minimisante correspondante sera appelée w_{nm}.

Les théorèmes d'existence démontrent l'analycité des fonctions minimisantes dans le domaine S. Le laplacien d'une telle fonction

(1) Pour établir certains résultats, nous serons amenés à modifier ces hypothèses.

est continu sur la frontiere C. De même, sa dérivée normale, ainsi que la dérivée normale de son laplacien sont continues sur les arcs de C à courbure holderienne.

Au voisinage d'un point anguleux de C, les dérivées premières par rapport à x et y d'une fonction minimisante et de son laplacien ne peuvent devenir infinies d'un ordre supérieur à $\frac{1}{2}$.

D'apres le principe général, énoncé au début de ce paragraphe, la suite

$$\mu_{1m}^2,\ \mu_{2m}^2,\ \ldots,\ \mu_{nm}^2,\ \ldots \tag{5.6}$$

est non décroissante. Nous désignerons l'ensemble des problemes variationnels définissant cette suite par *problème* I_m; la suite elle-même sera appelée le spectre de ce problème. De même que λ_n^2, la valeur μ_{nm}^2 peut être définie par le procédé des plus grands minima.

Remplaçons dans la définition de μ_{nm}^2 les conditions (5.5) par les $n-1$ conditions $\mathrm{H}(w, \varphi_i) = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n-1$), les φ_i désignant, comme dans le problème I, des fonctions arbitraires de carré sommable. Soit $\mu_{nm}^2(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})$ le minimum du probleme ainsi posé. On démontre, comme au paragraphe 3, que le maximum de $\mu_{nm}^2(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})$ quand les φ_i varient, est égal à μ_{nm}^2 et que ce maximum est atteint pour $\varphi_i = w_{im}$.

Nouvelle expression pour les conditions (5.4). — Soit $p(x, y)$ une fonction harmonique dans S, et soit $\mathrm{W}(x, y)$ une fonction arbitraire, nulle sur C.

Supposons p et W suffisamment regulieres pour qu'on puisse leur appliquer la formule de Green

$$(p, \Delta \mathrm{W}) - (\mathrm{W}, \Delta p) = \int_{\mathrm{C}} \left(p \frac{d\mathrm{W}}{dn_e} - \mathrm{W} \frac{dp}{dn_e} \right) ds. \tag{5.7}$$

On en déduit immédiatement l'*identité fondamentale*

$$(p, \Delta \mathrm{W}) = \int_{\mathrm{C}} p \frac{d\mathrm{W}}{dn_e} ds. \tag{5.8}$$

Cette démonstration suppose l'existence de la dérivée normale de p sur la frontière. Mais on peut, apres coup, se débarrasser de cette hypothese : pour établir (5.8), il suffit d'admettre la continuité des valeurs $p(s)$, que prend p sur C. En effet, on peut approximer uniformément la fonction $p(s)$, continue sur C, par des fonctions $p^{(n)}(s)$ possédant des dérivées hölderiennes $\frac{dp^{(n)}(s)}{ds}$. Les fonctions harmoniques $p^{(n)}(x, y)$, correspondant aux valeurs $p^{(n)}(s)$, tendront uniformément vers p dans $S + C$. On sait, d'après la théorie générale du problème de Dirichlet, que les $p^{(n)}$ possèdent des dérivées normales continues sur C. D'après ce qui précède, l'identité (5.8) est démontrée pour les $p^{(n)}$ (1). Par conséquent, elle sera encore valable pour la fonction limite p.

L'identité (5.8) permet de remplacer les conditions (5.4) par les m *conditions aux limites* équivalentes

$$\int_C p_k(s) \frac{dw}{dn_e} ds = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m). \tag{5.9}$$

Ces équations, fort importantes dans la suite, expriment que la dérivée normale $\frac{dw}{dn_e}$ est orthogonale sur C aux m fonctions $p_1, p_2, \ldots, p_m$.

Appliquons maintenant le principe général. Les conditions (5.9) étant moins restrictives que la condition $\frac{dw}{dn_e} = 0$, on trouve immédiatement les inégalités

$$\mu_{nm}^2(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}) \leqq \lambda_n^2(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}).$$

En posant $\varphi_i = w_{im}$ on en déduit les inégalités

$$\mu_{nm}^2 = \mu_{nm}^2(w_{1m}, w_{2m}, \ldots, w_{n-1,m}) \leqq \lambda_n^2(w_{1m}, w_{2m}, \ldots, w_{n-1,m}) \leqq \lambda_n^2.$$

De même, on trouve, toujours par le même principe, les inégalités

$$\mu_{nm}^2 \leqq \mu_{n,m+1}^2.$$

En supprimant les conditions (5.9) on obtient, d'après les résultats du paragraphe 4, un problème qui se réduit immédiatement au problème des vibrations d'une membrane (2). Par conséquent on a $\omega_n^2 \leqq \mu_{nm}^2$. (Il est évident que toutes ces inégalités sont valables aussi pour le cas $n = 1$, qui s'obtient en supprimant les φ_i.) En résumé,

(1) Si $s = s_0$ est un point anguleux, on peut poser $p^{(n)}(s) = p(s_0)$ pour les s voisins de s_0. Une transformation conforme de S en un domaine sans points anguleux permet de démontrer (5.8) pour $p^{(n)}$.

(2) Ce problème peut être considéré au point de vue formel comme un problème du type I_m. En effet, il suffit d'écrire en tête de la suite fondamentale la fonction harmonique $p_0 = 0$ et de considérer le problème I_0.

nous avons obtenu pour $n = 1, 2, \ldots$, les inégalités fondamentales

$$\omega_n^2 \leqq \mu_{n1}^2 \leqq \mu_{n2}^2 \leqq \ldots \leqq \lambda_n^2. \tag{5.10}$$

Le problème I_m nous donne des bornes inférieures μ_{nm}^2 pour chaque λ_n^2. Les μ_{nm}^2 sont des fonctions non décroissantes de m et ne sont jamais inférieures à ω_n^2.

Signalons que M. Courant avait déjà établi, par une méthode différente, les inégalités

$$\omega_n^2 \leqq \lambda_n^2 \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{5.11}$$

Notre procédé, qui permet d'intercaler entre ω_n^2 et λ_n^2 une suite infinie de bornes inférieures, nous donnera au lieu de (5.11) des inégalités plus précises.

6. Les équations d'Euler du problème I_m. — Dans les paragraphes suivants m sera fixe; ceci nous permettra d'écrire

$$\mu_1^2, \mu_2^2, \quad \ldots, \quad \mu_n^2, \quad \ldots, \tag{6.1}$$

$$w_1, w_2, \quad \ldots, \quad w_n, \quad \ldots \tag{6.2}$$

au lieu de $\mu_{1m}^2, \mu_{2m}^2, \ldots, \mu_{nm}^2, \ldots$ et de $w_{1m}, w_{2m}, \ldots, w_{nm}, \ldots$ [1].

Considérons l'équation

$$H(\Delta\Delta w - \mu^2 w, \delta w) + \int_C \left(\Delta w \frac{d\delta w}{dn_e} - \delta w \frac{\delta \Delta w}{dn_e}\right) ds = 0. \tag{6.3}$$

Cette équation, qui est équivalente à l'annulation de la première variation, est identique, aux notations près, à (3.7). Elle a lieu pour $w = w_n$ et $\mu^2 = \mu_n^2$. La fonction δw doit, d'après (5.3) et (5.9) s'annuler sur C et satisfaire en outre aux m conditions

$$\int_C p_k \frac{d\delta w}{dn_e} ds = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m), \tag{6.4}$$

qui signifient que $\frac{d\delta w}{dn_e}$ est sur C orthogonale aux m fonctions $p(s)$, $p_2(s), \ldots, p_m(s)$.

On prendra d'abord, dans (6.3), pour δw une fonction arbitraire

---

[1] Il ne faut pas confondre la suite (6.2) avec la suite des fonctions propres du problème I. Ces dernières n'interviendront plus dans les paragraphes suivants.

s'annulant avec sa dérivée normale sur C. Cet artifice classique démontre que w satisfait à l'équation d'Euler

$$\Delta\Delta w - \mu^2 w = 0. \tag{6.5}$$

Par conséquent l'équation (6.3) se réduit, en vertu de (6.5) et de la condition $\delta w = 0$ sur C, à la relation

$$\int_C \Delta w \frac{d\delta w}{dn_e}\, ds = 0, \tag{6.6}$$

qui exprime que le laplacien Δw est orthogonal à $\frac{d\delta w}{dn_e}$ sur C. Or, nous avons vu que $\frac{d\delta w}{dn_e}$ est une fonction arbitraire sur C, orthogonale à $p_1(s), p_2(s), \ldots, p_m(s)$. Par conséquent, Δw est, sur la frontière C, une combinaison linéaire des $p_k(s)$. En effet, on a pour tout système de valeurs des constantes $A_1, A_2, \ldots, A_m$ l'équation

$$\int_C \left(\Delta w - \sum_{k=1}^{m} A_k p_k\right) \frac{d\delta w}{dn_e}\, ds = 0. \tag{6.7}$$

Déterminons les A_k par les conditions

$$\int_C (\Delta w - \Sigma A_k p_k) p_i\, ds = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{6.8}$$

c'est-à-dire par les m équations

$$\sum_{k=1}^{m} \left(\int_C p_i p_k\, ds\right) A_k = \int_C p_i \Delta w\, ds \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{6.9}$$

Le déterminant des coefficients $\int_C p_i p_k\, ds$ est identique au déterminant de Gram des m fonctions indépendantes $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Par conséquent, il est différent de zéro, et les équations (6.9) admettent une solution unique. Il est permis de poser, dans (6.7), en vertu de (6.8),

$$\frac{d\delta w}{dn_e} = \Delta w - \Sigma A_k p_k.$$

On obtient alors

$$\int_C (\Delta w - \Sigma A_k p_k)^2\, ds = 0,$$

c'est-à-dirè

$$\Delta w = \sum_{k=1}^{m} A_k p_k(s) \quad (^1).$$

En résumé, on a, pour $\mu^2 = \mu_n^2$ et $w = w_n$, l'équation d'Euler

$$\Delta\Delta w_n - \mu_n^2 w_n = 0,$$

avec les conditions aux limites

(6.10) $$w_n = 0,$$

(6.11) $$\Delta w_n = 2\mu_n \sum_{k=1}^{m} a_{kn} p_k(s),$$

(6.12) $$\int_C p_k \frac{dw_n}{dn_e} ds = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Nous avons posé $A_k = 2\mu_n a_{kn}$. Cette notation met en évidence que les constantes A_k, inconnues *a priori*, dépendent de n.

Définition du spectre de I_m *par un problème aux limites.* — Considérons, sur C, l'ensemble L_m de toutes les combinaisons linéaires à coefficients constants des m fonctions indépendantes $p_1(s), p_2(s), \ldots, p_m(s)$. Les considérations précédentes nous amènent à poser le problème suivant.

Problème aux limites I_m. — Déterminer le spectre de l'équation

(6.13) $$\Delta\Delta w - \mu^2 w = 0$$

relatif aux conditions aux limites

(6.14) $$w = 0,$$

(6.15) Δw appartient à l'ensemble linéaire L_m.

(6.16) $\dfrac{dw}{dn_e}$ est orthogonale à l'ensemble linéaire L_m.

Nous avons vu que chaque μ_n^2 du spectre (6.1) du problème variationnel I_m est une valeur propre du problème aux limites que nous venons de poser. Réciproquement, toute valeur propre μ^2 du pro-

(1) Signalons que notre démonstration est au fond identique à la démonstration classique du second lemme fondamental du Calcul des Variations (*voir* par exemple GOURSAT, *Cours d'Analyse*, III, 1927, p. 546; COURANT-HILBERT, [1], p. 172).

blème aux limites est un μ_n^2. La démonstration de l'équivalence des deux problèmes est identique à celle du paragraphe **3**. Multiplions (**6**.13) par une fonction δw satisfaisant aux conditions (**6**.14), (6.15) et (6.16), et intégrons sur S. On obtient par les formules de Green l'équation

$$\mathrm{I}(w, \delta w) - \mu^2 \mathrm{H}(w, \delta w) + \int_{\mathrm{C}} \left(\delta w \frac{d\Delta w}{dn_e} - \Delta w \frac{d\delta w}{dn_e} \right) ds = 0,$$

qui, en vertu des hypothèses sur δw, se réduit à l'équation

$$\mathrm{I}(w, \delta w) - \mu^2 \mathrm{H}(w, \delta w) = 0.$$

Cette équation est identique, aux notations près, à (**3**.8). Par conséquent la démonstration de l'équivalence de nos problèmes s'achève comme au paragraphe **3**.

7. Réduction du problème aux limites. — Nous allons démontrer que le problème aux limites I_m pour l'équation du quatrième ordre (**6**.13), considérée dans le paragraphe précédent, se réduit à un problème aux limites pour un système de deux équations aux dérivées partielles du second ordre. A cet effet nous allons nous servir des solutions indéfinies, étudiées au paragraphe **4**. Soit $\mu = \mu_n^2$ une valeur propre de (**6**.13) et $w = w_n$ une fonction propre correspondante. Soit μ la racine positive de μ^2. D'après les résultats du paragraphe **4**, on a dans S + C les équations (**4**.4), (**4**.6), (4.5) et (4.2), où il faut écrire μ au lieu de λ. Notre fonction w satisfait aux conditions aux limites

$$(7.1) \qquad w = 0, \qquad \Delta w = 2\mu \sum_{k=1}^{m} a_k p_k(s),$$

les coefficients constants $2\mu a_k$ étant inconnus *a priori*. (Nous avons écrit pour abréger a_k au lieu de a_{kn}.) On déduit immédiatement de ces équations les conditions aux limites suivantes pour les fonctions U et $\overline{\mathrm{U}}$ du paragraphe **4** :

$$\mathrm{U} + \overline{\mathrm{U}} = 0; \qquad \mathrm{U} - \overline{\mathrm{U}} = -2\Sigma a_k p_k(s).$$

Par conséquent, on aura sur C.

$$\mathrm{U} = -\Sigma a_k p_k, \qquad \overline{\mathrm{U}} = \Sigma a_k p_k.$$

Vu que $p_k(x, y)$ est harmonique, on peut écrire, au lieu de (4.5) et (4.2), les équations

$$\Delta(U + \Sigma a_k p_k) + \mu(U + \Sigma a_k p_k) = \mu \Sigma a_k p_k,$$
$$\Delta(\overline{U} - \Sigma a_k p_k) - \mu(\overline{U} - \Sigma a_k p_k) = \mu \Sigma a_k p_k.$$

Posons

$$v(x, y) = U(x, y) + \sum_{k=1}^{m} a_k p_k(x, y),$$

$$\bar{v}(x, y) = \overline{U}(x, y) - \sum_{k=1}^{m} a_k p_k(x, y).$$

On aura $v + \bar{v} = U + \overline{U} = w$, de sorte que les équations (4.5) et (4.2) prennent la forme équivalente

$$\Delta v + \mu v = \mu \sum_{k=1}^{m} a_k p_k, \tag{7.2}$$

$$\Delta \bar{v} - \mu \bar{v} = \mu \sum_{k=1}^{m} a_k p_k, \tag{7.3}$$

avec les conditions aux limites

$$v = 0, \qquad \bar{v} = 0. \tag{7.4}$$

Les solutions de ce système doivent satisfaire, en outre, aux équations $(p_k, \Delta w) = 0$, c'est-à-dire aux m conditions

$$(p_k, \Delta v + \Delta \bar{v}) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m). \tag{7.5}$$

En faisant la somme de (7.2) et (7.3) on vérifie, en tenant compte de (7.4), que les conditions aux limites (7.1) sont satisfaites. Signalons qu'il ne faut pas confondre (7.2) avec l'équation des vibrations forcées d'une membrane. En effet, le second membre contient les coefficients a_k, inconnus *a priori*. Cette « indétermination » est en quelque sorte compensée par la condition supplémentaire (7.5).

En résumé, nous aurons, au lieu du problème aux limites I_m du paragraphe 6, le problème équivalent suivant.

Désignons par $\mathfrak{L}_m$ l'ensemble linéaire des fonctions harmoniques, ayant pour base $p_1(x, y), p_2(x, y), \ldots, p_m(x, y)$.

Problème aux limites I'_m. — Déterminer les valeurs du paramètre μ pour lesquels il existe deux fonctions v et $\bar{v}$, non nulles simultanément, satisfaisant aux conditions suivantes. Les fonctions

$$\Delta v + \mu v \quad \text{et} \quad \Delta\bar{v} - \mu\bar{v}$$

appartiennent à $\mathfrak{L}_m$ dans S, et sont, d'après (7.2) et (7.3), égales entre elles. v et $\bar{v}$ s'annulent sur C; $\Delta\left(v + \bar{v}\right)$ est orthogonal aux éléments de $\mathfrak{L}_m$ dans S.

Le paramètre μ est supposé positif. (Dans le cas contraire, le rôle de v et $\bar{v}$ serait interchangé.) Nous désignerons par

$$\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_n,\ \ldots \tag{7.6}$$

les valeurs propres de I'_m et par v_n et $\bar{v}_n (n = 1, 2, \ldots)$ les fonctions propres correspondantes. Rappelons que μ_n est la racine carrée positive de la $n^{\text{ième}}$ valeur propre du spectre de I_m.

Remarquons enfin que v et $\bar{v}$ satisfont aux équations

$$\Delta\Delta v + \mu\,\Delta v = 0, \qquad \Delta\Delta\bar{v} - \mu\,\Delta\bar{v} = 0,$$

dont la première est identique à l'équation (1.4) de la théorie du flambage.

8. **Les problèmes modifiés de la théorie du flambage.** — Ces problèmes s'obtiennent en remplaçant, dans le problème I_m, les notations H, w, λ^2, μ^2 par D, $w^\star$, $\lambda^\star$, $\mu^\star$. Signalons qu'on a, pour une fonction $w^\star$, nulle sur C, $D(w^\star) = -(w^\star, \Delta w^\star)$. On trouve, au lieu de (5.10), les inégalités

$$\omega_n \leqq \mu^\star_{n1} \leqq \mu^\star_{n2} \leqq \ldots \leqq \lambda^\star_n \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{8.1}$$

Donnons, comme au paragraphe 7, à m une valeur fixe, et écrivons $\mu^\star_n$ et $w^\star_n$ au lieu de $\mu^\star_{nm}$ et $w^\star_{nm}$. La fonction $w^\star = w_n$ satisfait dans S à l'équation $\Delta\Delta w^\star + \mu^\star\,\Delta w^\star = 0$, ainsi qu'aux conditions suivantes sur C : $w^\star = 0$; $\Delta w^\star$ appartient à L_m. En plus, $\Delta w^\star$ est orthogonal à $\mathfrak{L}_m$ dans S.

Posons, pour $\mu^\star = \mu^\star_n$, $\Delta w^\star = \mu^\star \Sigma a_k p_k(s)$ sur C, les coefficients a_k étant inconnus *a priori*. Les fonctions harmoniques $\Delta w^\star + \mu^\star w^\star$ et $\mu^\star \Sigma a_k p_k(x, y)$ prennent les mêmes valeurs sur C. Par conséquent, elles coïncident dans S.

En résumé, on a l'équation

$$\Delta w^* + \mu w^* = \mu^* \sum_{k=1}^{m} a_k p_k(x, y), \tag{8.2}$$

avec les conditions

$$w^* = 0 \text{ sur } C; \qquad (p_k, \Delta w^*) = 0 \text{ pour } k = 1, 2, \ldots, m. \tag{8.3}$$

L'équation (8.2) est identique, aux notations près, à (7.2). Le problème modifié du flambage peut donc être traité en même temps que le problème modifié des vibrations. Il est même plus simple que celui-ci, car on n'a qu'une seule équation à intégrer.

9. **Intégration des équations des problèmes modifiés.** — Reprenons l'étude des équations (7.2) et (7.3) avec les conditions aux limites (7.4) et (7.5). Le paramètre μ est, par définition, positif. Par conséquent (7.3) admet pour chaque valeur de μ une solution unique, nulle sur C, qui est de la forme

$$\bar{v} = \mu \sum_{j=1}^{m} a_j v_j, \tag{9.1}$$

où les $\bar{v}_j$ sont déterminées d'une manière univoque par les équations

$$\Delta \bar{v}_j - \mu \bar{v}_j = p_j \text{ dans S} \qquad (\bar{v}_j = 0 \text{ sur C}). \tag{9.2}$$

Une formule classique permet de développer v_j en série de fonctions propres du problème des vibrations de la membrane.

Supposons ces fonctions propres $u_1, u_2, \ldots$ orthonormées dans S. Soit $c_\sigma^{(j)} = (p_j, u_\sigma)$ le $\sigma^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier de $p_j(x, y)$. La fonction $\bar{v}_j$ sera alors donnée par la formule

$$\bar{v}_j = -\sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{c_\sigma^{(j)} u_\sigma}{\mu + \omega_\sigma}. \tag{9.3}$$

L'intégration de (7.2) est plus compliquée. En effet, μ pourrait être égal à l'une des valeurs propres du spectre (1.7) du problème des vibrations d'une membrane. Nous touchons ici à une des difficultés caractéristiques de nos problèmes, que nous aurons à étudier dans les paragraphes suivants.

Déterminons d'abord parmi les valeurs propres μ de Γ'_m celles qui sont différentes de tous les ω_n de la suite (1.7). Pour une telle valeur μ les coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_m$ ne sont pas simultanément nuls. En effet. les relations $a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 0$ entraîneraient $v = \bar{v} = w = 0$, ce qui serait contraire à l'hypothèse.

Les a_j n'étant pas simultanément nuls, l'équation (7.2) admet une seule solution, nulle sur C. Cette solution sera de la forme

$$(9.4) \qquad v = \mu \sum_{j=1}^{m} a_j v_j,$$

les v_j étant univoquement déterminées par les équations

$$(9.5) \qquad \Delta v_j + \mu v_j = p_j \text{ dans S} \qquad (v_j = 0 \text{ sur C}).$$

On aura les formules suivantes, analogues à (9.3)

$$(9.6) \qquad v = \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{c_\sigma^{(j)} u_\sigma}{\mu - \omega_\sigma}.$$

Posons $w_j = v_j + \bar{v}_j$. Les conditions $(p_k, \Delta w) = 0$, $(k = 1, 2, \ldots, m)$ nous donnent m équations linéaires et homogènes

$$(9.7) \qquad \sum_{j=1}^{m} a_j (p_k, \Delta w_j) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

pour les m inconnues $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Il est aisé à voir que la matrice des coefficients $(p_k, \Delta w_j)$ est symétrique. En effet v_j et v_k satisfont aux équations

$$(9.8) \qquad \Delta v_j + \mu v_j = p_j; \qquad \Delta v_k + \mu v_k = p_k \qquad (v_j = v_k = 0 \text{ sur C}).$$

Multiplions ces équations par v_k et v_j respectivement et intégrons leur différence dans S. La formule de Green donne immédiatement

$$(9.10) \qquad (p_j, v_k) - (p_k, v_j) = (v_k, \Delta v_j) - (v_j, \Delta v_k) = 0.$$

Multiplions maintenant les équations (9.8) respectivement par p_k et p_j et intégrons dans S. On obtient

$$(9.11) \qquad (p_k, \Delta v_j) = (p_j, p_k) - \mu (p_k, v_j),$$

$$(9.12) \qquad (p_j, \Delta v_k) = (p_k, p_j) - \mu (p_j, v_k),$$

ce qui donne d'après (9.10)

(9.13) $$(p_k, \Delta v_j) = (p_j, \Delta v_k).$$

De même on obtient

$$(p_k, \Delta \bar{v}_j) = (p_j, \Delta \bar{v}_k),$$

et l'on en déduit immédiatement les équations cherchées

(9.14) $$(p_k, \Delta w_j) = (p_j, \Delta w_k) \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, m).$$

Le système (9.7) doit admettre par hypothese, des solutions a_1, a_2, ..., a_m differentes de zéro. Par conséquent son déterminant doit être nul. Nous obtenons ainsi le résultat suivant :

Toute valeur propre μ, différente des valeurs propres ω, est une racine de l'équation transcendante

(9.15) $$|(p_k, \Delta w_j)| = 0 \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, m) \text{ (}^1\text{)}.$$

Inversement toute racine de (9.15), qui est différente des valeurs propres ω, est une valeur propre du probleme aux limites Γ'_m.

En effet, soit μ une racine de (9.15), différente des ω, et soit R le rang de la matrice des $(p_k, \Delta w_j)$. Les équations (9.7) admettent $m - \mathrm{R}$ solutions indépendantes

$$a_1^{(h)}, \quad a_2^{(h)}, \quad \ldots, \quad a_m^{(h)} \qquad (h = 1, 2, \ldots, m - \mathrm{R}).$$

Le rang de la matrice des $a_k^{(h)}$ est égal à $m - \mathrm{R}$. On obtient, pour chaque systeme des $a_k^{(h)}$, une fonction propre $w = w^{(h)}$, satisfaisant à l'équation $\Delta w^{(h)} = 2\mu \Sigma a_k^{(h)} p_k$, sur C [2]. Ces $m - \mathrm{R}$ fonctions $w^{(h)}$ sont linéairement indépendantes dans S, car une relation de la forme

$$\sum_{h=1}^{m-\mathrm{R}} \mathrm{C}_h w^{(h)} = 0$$

entraînerait l'équation

$$\sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{h=1}^{m-\mathrm{R}} \mathrm{C}_h a_k^{(h)} \right) p_k = 0,$$

---

[1] Signalons que (9.15) ne depend que de μ^2 *Voir* (9.17).

[2] Ceci démontre que les carres des racines μ sont positifs. Nous pourrons donc prendre μ positif.

c'est-à-dire, vu l'indépendance des p_k, les m équations

$$\sum_{h=1}^{m-\mathrm{R}} a_k^{(h)} \mathrm{C}_h = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

pour les constantes C_h. La matrice des $a_l^{(h)}$ ayant le rang $m - \mathrm{R}$, on trouve

$$\mathrm{C}_1 = \mathrm{C}_2 = \ldots = \mathrm{C}_{m-\mathrm{R}} = 0.$$

Nous obtenons par conséquent le résultat suivant : *la multiplicité d'une valeur propre* μ, *différente des* ω, *est égale à* $m - \mathrm{R}$.

Il est aise de former explicitement l'équation aux racines μ, différentes des ω. En effet, on a, par la formule de Parseval,

$$(9.16) \qquad (p_k, \Delta w_j) = \sum_{\sigma=1}^{\infty} (p_l, u_\sigma)(\Delta w_j, u_\sigma) = \sum_{\sigma=1}^{\infty} c_\sigma^{(l)} (\Delta w_j, u_\sigma)$$

Or, on a, d'après (9.2), (9.3), (9.5) et (9.6),

$$\begin{aligned}(\Delta w_j, u_\sigma) &= (\Delta v_j + \Delta \bar{v}_j, u_\sigma) = (2p_j + \mu[v_j - v_j], u_\sigma) \\ &= \left(2p_j - \mu \sum_{\gamma=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\mu + \omega_\gamma} + \frac{1}{\mu - \omega_\gamma}\right] c_\gamma^{(j)} u_\gamma, u_\sigma\right) \\ &= 2c_\sigma^{(j)} - 2\mu^2 \frac{c_\sigma^{(j)}}{\mu^2 - \omega_\sigma} = -2\mu^2 \frac{c_\sigma^{(j)} \omega_\sigma^2}{\mu^2 - \omega_\sigma^2}.\end{aligned}$$

En introduisant cette valeur de $(\Delta w_j, u_\sigma)$ dans (9.16), on trouve l'équation cherchée

$$(9.17) \qquad \left| \sum_{\sigma=1}^{\infty} c_\sigma^{(j)} c_\sigma^{(k)} \frac{\omega_\sigma^2}{\omega_\sigma^2 - \mu^2} \right| = 0 \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, m).$$

Pour l'écrire il suffit de connaître les valeurs propres ω_σ et les fonctions propres u_σ du problème de la membrane. Signalons cependant que dans les applications on réussit parfois a former (9.15) sans avoir a recourir aux développements en séries de fonctions propres u_σ. Rappelons encore que, pour le moment, il ne faut pas tenir compte des racines de (9.15) qui seraient égales a des ω. Nous avons, dans ce qui précède, démontré que les racines positives de (9.15) qui sont différentes des ω, appartiennent au spectre

$$(9.18) \qquad \mu_1, \quad \mu_2, \quad \ldots, \quad \mu_n, \quad \ldots$$

du problème I'_m. Rangeons ces racines par ordre de grandeur, en écrivant chacune d'elles autant de fois que l'indique sa multiplicité. Nous obtenons de cette manière la suite partielle

$$\mu_{m_1}, \quad \mu_{m_2}, \quad \ldots \qquad (m_1 < m_2, \ldots) \tag{9.19}$$

de toutes les valeurs propres μ différentes des ω. Il est nécessaire de signaler que nous ne connaissons pas les indices m_1, m_2, ..., car nous n'avons pas encore déterminé les μ qui sont égaux à des ω.

On conçoit immédiatement l'importance du problème qui se pose : pour obtenir une borne inférieure de λ_n^2, il faut connaître le μ_n^2 du *même indice*. Or, pour résoudre ce problème il faudrait déterminer aussi la suite partielle

$$\mu_{n_1}, \quad \mu_{n_2}, \quad \ldots \qquad (n_1 < n_2 < \ldots) \tag{9.20}$$

des μ qui sont égaux à des ω. L'ensemble des éléments de (9.19) et de (9.20), rangé par ordre de grandeur, nous donnerait alors le spectre (9.18) et nous permettrait de déterminer les indices inconnus. L'étude de ces questions fera l'objet des paragraphes suivants. Bornons-nous à signaler ici, que les valeurs propres ω qui figurent dans le spectre (9.18) ne sont pas nécessairement identiques aux valeurs ω qui sont des racines de (9.15) et que nous avons négligées jusqu'à présent.

Problème du flambage. — On vérifie immédiatement que les équations analogues à (9.15) et (9.17) s'écrivent sous les deux formes suivantes :

$$|(p_k, \Delta w_j^\star)| = 0, \tag{9.21}$$

$$\left| \sum_{\sigma=1}^{\infty} c_\sigma^{(j)} c_\sigma^{(k)} \frac{\omega_\sigma}{\omega_\sigma - \mu^\star} \right| = 0 \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, m). \tag{9.22}$$

Signalons que le calcul effectif de $(p_k, \Delta w_j^\star)$ se fait en supprimant dans (9.16) la fonction $\bar{v}_j$ et en remplaçant μ par $\mu^\star$.

10. La répartition des valeurs propres du problème des vibrations d'une membrane dans les spectres des problèmes modifiés. — Désignons par r_n la multiplicité de ω_n ($n = 1, 2, \ldots$) dans le spectre (1.9) des vibrations d'une membrane. Soit

$$(10.1) \qquad u_1^{(n)},\quad u_2^{(n)},\quad \ldots,\quad u_{r_n}^{(n)}$$

un système de r_n fonctions propres correspondantes. Nous les supposerons linéairement indépendantes, mais non nécessairement orthonormées dans S. La suite (10.1) sera appelée une *base* des fonctions propres correspondant à ω_n. Pour mettre ces bases en évidence, nous désignerons parfois la suite des fonctions propres par

$$(10.2) \quad u_1^{(1)},\ u_1^{(2)},\ \ldots,\ u_{r_2}^{(2)},\ u_1^{(3)},\ \ldots,\ u_{r_3}^{(3)},\ \ldots,\ u_1^{(n)},\ \ldots,\ u_{r_n}^{(n)},\ \ldots$$ [1]

au lieu d'écrire comme jusqu'à présent u_1, u_2, ...

Abordons maintenant l'étude du problème fondamental suivant :

Déterminer l'ensemble des valeurs propres du problème de la membrane qui appartient au spectre du problème I'_m. (Cet ensemble peut être vide, fini ou infini.)

Désignons par ρ_n la multiplicité ω_n dans le spectre de I'_m. Il est évident que ρ_n n'est pas nécessairement égal à r_n. Nous conviendrons de dire que la multiplicité ρ_n est égale à zéro, si ω_n ne figure pas dans le spectre de I'_m. Écrivons la suite (vide, finie ou infinie)

$$(10.3) \qquad \omega_{\nu_1},\quad \omega_{\nu_2},\quad \ldots,\quad \omega_{\nu_i},\quad \ldots \qquad (\nu_1 < \nu_2 < \ldots),$$

des ω qui appartiennent effectivement au spectre de I'_m, en tenant compte de leur multiplicité ρ. On aura, en utilisant les notations (9.20), les équations $\mu_{n_i} = \omega_{\nu_i}$ pour toutes les valeurs de l'indice i. Les éléments de la suite (10.3) sont répartis d'une façon *a priori* inconnue dans le spectre de I'_m, mais l'ensemble des éléments des deux suites (9.19) et (10.3), rangés par ordre de grandeur, permet de déterminer tous les indices. De même, et cette remarque sera importante, il suffit de connaître tous les éléments de (9.19) et de (10.3), inférieurs à une certaine quantité donnée, pour pouvoir déterminer leurs indices.

Rappelons que, pour définir les problèmes $I'_m (m = 1, 2, \ldots)$ nous nous sommes servi jusqu'à présent d'une suite fondamentale arbitrai-

---

[1] On sait que $r_1 = 1$.

rement choisie de fonctions harmoniques $p_1, p_2, \ldots$. Nous verrons qu'il ne sera pas facile d'énoncer, dans ces circonstances, une règle générale et simple donnant les valeurs ω qui figurent dans le spectre de Γ'_m. Ces difficultés nous amèneront à chercher des suites fondamentales privilégiées, pour lesquelles notre problème trouvera une solution satisfaisante. Nous établirons dans les paragraphes suivants l'existence de telles suites et nous verrons qu'elles nous permettront de résoudre en plus quelques autres questions intéressantes. Pour le moment nous continuerons à nous servir d'une suite fondamentale arbitrairement fixée.

Soit $\omega = \omega_n$ une des valeurs propres de multiplicité $r = r_n$ du problème de la membrane et soit (10.1) une base correspondante. Pour abréger, nous écrirons ω, r, ρ au lieu de ω_n, r_n, ρ_n et

$$(10.4) \qquad u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_r,$$

au lieu de (10.1).

Déterminons les conditions nécessaires et suffisantes afin que notre ω appartienne au spectre de Γ'_m, c'est-à-dire afin que ρ soit positif. Remarquons d'abord que l'équation

$$(10.5) \qquad \Delta\bar{v} - \omega\bar{v} = \omega\,\Sigma\, a_k p_k$$

[qu'on obtient en posant $\mu = \omega$ dans (7.3)] admet pour tout système de valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_m$ une solution unique, nulle sur C.

Il en est autrement pour (7.2). La condition classique nécessaire et suffisante, afin que l'équation

$$(10.6) \qquad \Delta v + \omega v = \omega \sum_{k=1}^{m} a_k p_k$$

[qu'on obtient en posant $\mu = \omega$ dans (7.2)] admette des solutions nulles sur C, est donnée par les r équations linéaires et homogènes

$$(10.7) \qquad \sum_{k=1}^{m} a_k (p_k, u_j) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, r),$$

auxquelles doivent satisfaire les m inconnues $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Ces équations admettent toujours la solution triviale

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 0.$$

Formons les fonctions v et $\bar{v}$ correspondant aux différentes solutions de (10.7), la solution triviale n'étant pas exclue ([1]). Afin que ω figure dans le spectre de I'_m, il faut et il suffit que les m équations (7.5),

$$(p_k, \Delta v + \Delta \bar{v}) = (p_k, \Delta w) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

soient satisfaites pour une au moins des fonctions $w (= v + \bar{v})$. L'ensemble de ces solutions de (7.5) forme une multiplicité linéaire M.

D'une manière plus précise, on peut énoncer le critère suivant : La multiplicité $\rho (\geqq 0)$ de ω dans le spectre de I'_m est égale au nombre de fonctions indépendantes w dans M. Pour donner à ce critère une forme maniable nous allons considérer séparément les cas $r > m$, $r = m$, $r < m$.

11. Les valeurs propres ω de grande multiplicité. — Admettons que la multiplicité r de notre ω soit supérieure au nombre m des fonctions $p_1, p_2, \ldots, p_m$ qui nous ont servi à former le problème I'_m.

Ce cas pourrait se présenter pour certains domaines S, quel que soit le nombre m. En effet, la multiplicité $r = r_n$ de $\omega = \omega_n$ n'est pas nécessairement une fonction bornée de l'indice n ([2]). Les équations (10.7), dont le nombre est supérieur à celui des inconnues, admettent, parmi leurs solutions éventuelles, la solution triviale

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 0,$$

à laquelle correspondent, d'après (10.5) et (10.6), les fonctions

$$\bar{v} = 0, \qquad v = b_1 u_1 + b_2 u_2 + \ldots + b_r u_r. \tag{11.1}$$

([1]) Signalons que v n'est pas univoquement déterminée par les a_k. En effet, on peut toujours ajouter à v une combinaison linéaire des fonctions propres (10.4). Ce fait complique la détermination de la multiplicité de ω dans le spectre de I'_m.

([2]) Prenons, comme exemple, le domaine $-\frac{\pi}{2} \leqq (x, y) \leqq \frac{\pi}{2}$, que nous allons considérer dans les applications. Les valeurs propres sont des entiers et la multiplicité r_n de ω_n, qui est égale au nombre de décompositions de ω_n en somme de deux carrés, n'est pas une fonction bornée de n. Il n'existe aucun critère permettant d'indiquer les domaines à r_n borné.

les b_k étant des constantes arbitraires. On aura

$$w = v \qquad \text{et} \qquad \Delta w = -\,\omega \sum_{k=1}^{r} b_k u_k.$$

Les conditions (7.5) nous donnent les m équations linéaires et homogènes

$$\sum_{k=1}^{r} b_k(p_j, u_k) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{11.2}$$

pour les r inconnues b_k. Le nombre de ces équations étant inférieur à celui des inconnues, on aura une ou plusieurs solutions indépendantes, différentes de zéro, auxquelles correspondra le même nombre de solutions indépendantes $w = v$, données par (11.1). Nous obtenons ainsi le résultat suivant :

Les valeurs propres ω, *dont la multiplicité* r *est supérieure à* m, *figurent toujours dans le spectre* Γ_m. La multiplicité $\rho(> 0)$ d'une telle valeur ω n'est pas inférieure au nombre de solutions indépendantes de (11.2). Pour déterminer complètement ρ, il faudrait tenir compte des solutions éventuelles non nulles de (10.7) et appliquer le critère du paragraphe 10. Bien que ces opérations permettent de déterminer ρ dans chaque cas particulier explicitement donné, le résultat ne pourrait être formulé d'une façon simple et générale.

Au premier abord cette difficulté pourrait paraître très grave. Mais il est évident que, pour un m donné, elle ne se présente pas pour un certain nombre ν d'éléments $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu$ du spectre (1.9), l'indice ν étant une fonction monotone de m, tendant avec m vers l'infini. Faisons parcourir au paramètre m la suite des entiers $1, 2, \ldots$. Pour un ω donné, de multiplicité r, la difficulté disparaît dès que m dépasse $r - 1$. On peut dire que l'inégalité $m > r$ est « généralement » satisfaite pour un ω donné. Cette remarque nous permettra de nous débarrasser du cas $m < r$, mais il nous sera utile de considérer séparément le cas « exceptionnel » $m = r$.

12. La suite adjointe de fonctions harmoniques. — Conservons les notations du paragraphe 10. Soit $\omega = \omega_n$ une valeur propre de multiplicité $r = r_n$, et soit, comme précédemment $u_1, u_2, \ldots, u_r$ une base correspondant à ω.

Soit $m = r$. Proposons-nous de déterminer la multiplicité ρ de ω dans le spectre de Γ'_m. Dans ce cas, on aura, au lieu de (10.7), un système

$$\sum_{k=1}^{r} a_k(p_k, u_j) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, r) \tag{12.1}$$

de r équations avec les r inconnues $a_1, a_2, \ldots, a_r$. On s'aperçoit immédiatement que la discussion se simplifie considérablement si l'on fait *l'hypothèse* suivante :

Le déterminant $|(p_k, u_j)|$ de (12.1) est différent de zéro.

Les équations (12.1) admettent, sous cette hypothèse, une solution unique.

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_r = 0.$$

Les fonctions v et $\bar{v}$ seront données par la formule (11.1). Au lieu de (11.2) on aura les équations

$$\sum_{k=1}^{r} b_k(p_j, u_k) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, r)$$

dont le déterminant est le transposé de celui des équations (12.1). Par conséquent il est différent de zéro. ce qui nous donne

$$b_1 = b_2 = \ldots = b_r = 0.$$

La fonction $w = v + \bar{v}$ étant nulle, il en résulte que ω ne figure pas dans le spectre de Γ'_m (c'est-à-dire que sa multiplicité ρ est égale à zéro).

La simplicité du résultat ainsi obtenu nous amène à préciser le choix, arbitraire jusqu'à présent. de la suite fondamentale, dont nous nous sommes servi pour définir les problèmes Γ'_m. Nous allons montrer qu'on peut choisir ces suites de maniere que l'hypothèse que nous venons de faire soit vérifiée pour un numérotage convenable des fonctions p_k.

Définition. — *Une suite de r_n fonctions harmoniques*

$$p_1^{(n)}, \; p_2^{(n)}, \; \ldots, \; p_{r_n}^{(n)} \tag{12.2}$$

sera appelée suite adjointe à la valeur propre ω_n. si le déterminant

$$|(p_k^{(n)}, u_j^{(n)})| \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, r_n)$$

est différent de zéro.

Cette définition est évidemment indépendante du choix de la base $u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, \ldots, u_{r_n}^{(n)}$. D'autre part, on obtient une nouvelle suite adjointe par une transformation linéaire, non singulière, des $p_k^{(n)}$.

Théorème d'existence. — *Il existe des suites adjointes à ω_n pour toutes les valeurs de l'indice n.*

La démonstration repose sur des lemmes très simples.

Lemme 1. — *Les dérivées normales*

$$\frac{du_1^{(n)}}{dn_e}, \quad \frac{du_2^{(n)}}{dn_e}, \quad \ldots, \quad \frac{du_{r_n}^{(n)}}{dn_e} \tag{12.3}$$

d'une base $u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, \ldots, u_{r_n}^{(n)}$ sont des fonctions linéairement indépendantes sur la frontière C *de* S.

Démonstration. — Soit R la distance d'un point (x, y) de S au point (variable) s sur C. Désignons par $Y_0 = Y_0(R\sqrt{\omega})$ la fonction de Bessel de deuxième espèce d'indice zéro. On aura, pour une solution quelconque de l'équation $\Delta u + \omega u = 0$, la formule classique de Weber-Green,

$$u(x, y) = \frac{1}{4}\int_C \left(u\frac{dY_0}{dn_e} - Y\frac{du}{dn_e}\right) ds$$

qui se réduit, pour $u = u_j^{(n)}$, à

$$u_j^{(n)}(x, y) = -\frac{1}{4}\int_C Y_0(R\sqrt{\omega_n})\frac{du_j^{(n)}}{dn_e}\, ds.$$

Par conséquent une égalité de la forme $\sum_j C_j \frac{du_j^{(n)}}{dn_e} = 0$ entraînerait l'égalité

$$\sum_j C_j u_j^{(n)}(x, y) = 0,$$

ce qui donnerait

$$C_1 = C_2 = \ldots = C_{r_n} = 0.$$

On peut énoncer un résultat plus précis.

Lemme 2. — *Les dérivées normales $\frac{du_j^{(n)}}{dn_e}$ sont des fonctions indépendantes sur tout arc c de la frontière* C.

Supposons qu'on ait sur un arc c la relation linéaire à coefficients constants

$$\sum C_j \frac{du_j^{(n)}}{dn_e} = 0.$$

Considérons la fonction propre, appartenant à ω_n,

$$u = \sum C_j u_j^{(n)}(x, y).$$

Cette fonction s'annule avec sa dérivée normale sur c. D'après le théorème classique de Cauchy-Kowalewski. u est nulle partout, donc on a

$$C_1 = C_2 = \ldots = C_{r_n} = 0.$$

(Si l'arc c n'est pas analytique, on appliquera, à la place du théorème de Cauchy-Kowalewski, le théorème d'unicité de Holmgren.)

Remarque. — Signalons que les dérivées normales de fonctions propres u. appartenant à de différentes valeurs propres ω, ne sont plus nécessairement indépendantes sur C. En effet, prenons comme exemple, pour S le cercle $x^2+y^2 \leqq 1$. Toutes les fonctions propres de la forme $J_0\left[\sqrt{\omega(x^2+y^2)}\right]$, où $\sqrt{\omega}$ désigne les racines (en nombre infini) de la fonction de Bessel J_0, ont des dérivées normales égales à des constantes sur la frontière.

Remarques sur les dérivées normales des fonctions propres u. — Soit c un arc de courbure continue et hölderienne. appartenant à la frontière de S.

La dérivée normale $\frac{du}{dn_e}$ d'une fonction propre u admet, sur c, une dérivée continue et hölderienne par rapport à l'arc s. En effet. u satisfait à l'équation de Poisson $\Delta u = -\omega u$ dans S ($u = 0$ sur C). Par conséquent, on peut poser, d'après un procédé classique,

$$(12.4)\quad u(x, y) = \frac{\omega}{2\pi}\int\int_S u(\xi, \eta)\log\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}\,d\xi\,d\eta - V(x, y)$$
$$= P(x, y) - V(x, y),$$

où V désigne une fonction harmonique dans S, prenant sur C les mêmes valeurs que le potentiel logarithmique P. On déduit immédiatement de (12.4) l'existence et la continuité de $\frac{du}{dn_e}\cdot$ Pour démontrer l'existence d'une dérivée hölderienne $\frac{d}{ds}\left(\frac{du}{dn_e}\right)$ nous allons prolonger u par zéro à l'extérieur de S. Soit K un cercle contenant le domaine S. La fonction u satisfait en tout point (x, y) de c à une condition de Hölder-Lipschitz. Ce fait entraîne l'existence de dérivées secondes hölderiennes de $P(x, y)$. D'après un résultat classique ([1]) il en sera de même pour les dérivées secondes de V dans $S + c$, ce qui démontre notre proposition concernant la dérivée normale de $u = P - V$.

Pour se rendre compte de l'allure de la dérivée normale en un point anguleux de la frontière, considérons, comme exemple, le cas où S est le secteur $0 \leqq R \leqq 1$, $0 \leqq \theta \leqq \alpha$. (Nous avons désigné par R et θ les coordonnées polaires.) Les fonctions propres u sont données par les formules

$$u = \sin\frac{n\pi\theta}{\alpha} J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(R\sqrt{\omega}), \qquad J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\sqrt{\omega}) = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

où $J_{\frac{n\pi}{\alpha}}$ désigne la fonction de Bessel d'indice $\frac{n\pi}{\alpha}$.

Considérons le point anguleux $R = 0$. Pour $\alpha \leqq \pi$ les dérivées normales restent bornées et continues au voisinage de ce point. Par contre, certaines d'entre elles deviennent infinies $\left(\text{d'un ordre inférieur à } \frac{1}{2}\right)$ pour $\pi < \alpha < 2\pi$ ([2]). Signalons que les points anguleux ne jouent aucun rôle dans le lemme 2, mais, par contre, le théorème de Holmgren, sur lequel est basé celui-ci, est d'un caractère moins élémentaire que les moyens employés dans la démonstration du lemme 1.

Nous sommes maintenant en mesure de donner la démonstration de l'existence d'une suite adjointe à ω_n. Posons

$$p_k^{(n)}(s) = \frac{du_k^{(n)}}{dn_e} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r_n). \tag{12.5}$$

Formons les fonctions harmoniques $p_k^{(n)}(x, y)$ prenant les valeurs

---

(1) Lichtenstein, [1], p. 58, 70.

(2) On obtient des résultats analogues, relatifs à l'allure des dérivées premières dans le voisinage d'un point anguleux, pour toute fonction W satisfaisant à une équation de Poisson : $\Delta W = f(x, y)$ ($W = 0$ sur C). La fonction f est supposée continue dans $S + C$. Ce fait m'a été communiqué par M. G. Giraud, auquel j'adresse mes vifs remercîments.

Signalons que les fonctions propres v et $\bar{v}$ du Problème Γ_m satisfont aux équations de Poisson (7.2) et (7.3).

(**12**.5) sur C. Appliquons maintenant l'identité fondamentale (5.8). On trouve

$$(12.6)\qquad (p_k^{(n)}, u_j^{(n)}) = -\frac{1}{\omega_n}(p_k^{(n)}, \Delta u_j^{(n)}) = -\frac{1}{\omega_n}\int_C p_k^{(n)} \frac{du_j^{(n)}}{dn_e}\,ds$$
$$= -\frac{1}{\omega_n}\int_C p_k^{(n)} p_j^{(n)}\,ds.$$

Le déterminant $|(p_k^{(n)}, u_j^{(n)})|$ est égal $\left[\text{au facteur } \left(-\frac{1}{\omega_n}\right)^{r_n} \text{près}\right]$ au déterminant de Gram

$$\left|\int_C p_k^{(n)} p_j^{(n)}\,ds\right| \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, r_n),$$

des fonctions (**12**.5), qui sont, d'après nos lemmes, indépendantes sur la frontière. Par conséquent, ce déterminant est différent de zéro, ce qui démontre que nos $p_k^{(n)}$ forment une suite adjointe à ω_n.

Le procédé indiqué ramène la détermination de $p_k^{(n)}(x, y)$ à la résolution d'un problème de Dirichlet. Le choix des valeurs de $p_k^{(n)}(s)$, donné par la formule (**12**.5), s'impose par sa simplicité. Mais il est évident qu'il existe une infinité de fonctions $p_k(s)$ telles que le déterminant

$$(12.7)\qquad \left|\int_C p_k \frac{du_j^{(n)}}{dn_e}\,ds\right| \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, r_n)$$

soit différent de zéro. Par conséquent, il existe une infinité de suites adjointes à ω_n. Observons que les fonctions $p_k(x, y)$ prenant sur la frontière les valeurs données par (**12**.5), possèdent certainement des dérivées normales continues sur les arcs de C à courbure hölderienne. Ceci résulte immédiatement de la théorie générale du problème de Dirichlet, en vertu d'une remarque antérieure faite sur l'allure de $\frac{du_j^{(n)}}{dn_e}$.

Au voisinage d'un point anguleux de la frontière les $\frac{du_k^{(n)}}{dn_e}$ ne sont plus nécessairement continues ou même bornées. Dans ce cas la formule (**12**.5) ne donne plus des valeurs aux limites continues et dérivables pour les $p_k^{(n)}$. Mais, d'après ce que nous venons de dire, il est possible de trouver, en vertu du lemme **2** (et même d'une infinité de manières), des fonctions $p_k(s)$, aussi régulières qu'on veut, telles que le déterminant (**12**.7) soit différent de zéro. En résolvant le problème de Dirichlet correspondant à ces données, on trouve immédiatement des suites adjointes à ω_n.

13. Les suites fondamentales privilégiées. — *Définition. Une suite de fonctions harmoniques $p_1, p_2, \ldots$ linéairement indépendantes dans* S, *sera appelée suite fondamentale privilégiée, si elle contient des suites adjointes à tous les $\omega_n (n = 1, 2, \ldots)$.*

Il est facile de démontrer l'existence de telles suites. Prenons pour chaque valeur de l'indice n une suite adjointe à ω_n. Soit

$$(13.1) \qquad p_1^{(1)}, p_1^{(2)}, \ldots, p_{r_2}^{(2)}, \quad p_1^{(3)}, \ldots, p_{r_3}^{(3)}, \quad \ldots, \quad p_1^{(n)}, \ldots, p_{r_n}^{(n)}, \quad \ldots$$

l'ensemble de ces suites, rangées par ordre de grandeur de n. Supprimons dans (13.1) tous les éléments qui sont des combinaisons linéaires des précédents. Numérotons les éléments indépendants dans l'ordre dans lequel on les rencontre dans (13.1) et désignons ces fonctions par

$$(13.2) \qquad p_1, \quad p_2, \quad \ldots, \quad p_{\alpha-1}, \quad p_\alpha, \quad p_{\alpha+1}, \quad \ldots.$$

Nous allons montrer que *la suite* (13.2) *est une suite privilégiée.*

Les fonctions $p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \ldots, p_{r_n}^{(n)}$ de la suite adjointe seront des combinaisons linéaires

$$(13.3) \qquad p_k^{(n)} = \sum_{\tau=1}^{\alpha} c_{k\tau} p_\tau \qquad (k = 1, 2, \ldots, r_n)$$

d'un certain nombre $\alpha (\leqq r_1 + r_2 + \ldots + r_n)$ de fonctions $p_1, p_2, \ldots, p_\alpha$ de la suite (13.2). Vu que les $p_k^{(n)}$ sont indépendants, le nombre α sera non inférieur à r_n. Posons, pour abréger l'écriture, $r = r_n$. On a, d'après (13.3), l'équation suivante :

$$\left| (p_k^{(n)}, u_j^{(n)}) \right| = \sum_{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r = 1}^{\alpha} c_{1\tau_1} c_{2\tau_2} \ldots c_{r\tau_r} \begin{vmatrix} (p_{\tau_1}, u_1^{(n)}) \ldots (p_{\tau_1}, u_r^{(n)}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (p_{\tau_r}, u_1^{(n)}) \ldots (p_{\tau_r}, u_r^{(n)}) \end{vmatrix}$$
$$(k, j = 1, 2, \ldots, r).$$

Le déterminant du premier membre étant différent de zéro, les déterminants du second membre ne peuvent être tous nuls. Par conséquent on peut trouver parmi $p_1, p_2, \ldots p_\alpha$, r fonctions

$$p_{\alpha_1}, \quad p_{\alpha_2}, \quad \ldots, \quad p_{\alpha_r} \qquad (\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_r \leqq \alpha)$$

telles que le déterminant

$$\left| (p_{\alpha_k}, u_j^{(n)}) \right| \qquad (k, j = 1, 2, \ldots, r)$$

soit différent de zéro. Ceci revient à dire qu'on peut extraire de (**13**.2) une suite adjointe à ω_n. Nous utiliserons désormais uniquement des suites privilégiées. Les problèmes, formés à l'aide de ces suites, seront appelés *problèmes privilégiés*.

14. La suite privilégiée régulière. — En posant, dans (**13**.1),

$$p_k^{(n)}(s) = \frac{du_k^{(n)}}{dn_e} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r_n;\ n = 1, 2, \ldots),$$

on obtient, par le procédé du paragraphe **13**, une suite privilégiée particulière qui sera appelée *suite privilégiée régulière*. A des changements de base $u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, \ldots, u_{r_n}^{(n)}$ près, *cette suite est déterminée d'une manière univoque par le problème des vibrations d'une membrane*. Signalons que tous les $\frac{du_k^{(n)}}{dn_e}$ sont des combinaisons linéaires d'un nombre fini d'éléments $p_k(s)$ de la suite régulière.

Il est évident que la suite régulière pourra être définie si les $\frac{du_k^{(n)}}{dn_e}$ satisfont aux conditions de continuité énoncées au paragraphe **12**.

Théorème. — *La suite privilégiée régulière est fermée sur la frontière de* S. — En effet, soit $p(s)$ une fonction arbitraire, continue sur C, satisfaisant aux conditions

$$\int_C p(s) p_k(s)\, ds = 0 \qquad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Soit $p(x, y)$ la fonction harmonique prenant les valeurs $p(s)$ sur C. Vu que les $\frac{du_j^{(n)}}{dn_e}$ sont des combinaisons linéaires des $p_k(s)$, on aura

$$\int_C p(s) \frac{du_j^{(n)}}{dn_e}\, ds = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, r_n;\ n = 1, 2, \ldots).$$

Il vient, par conséquent, en vertu de (5.8), $(p, \Delta u_j^{(n)}) = 0$, c'est-à-dire $(p, u_j^{(n)}) = 0$. Le système des $u_j^{(n)}$ étant complet, donc *a fortiori* fermé, on en déduit immédiatement $p(x, y) \equiv 0$, $p(s) \equiv 0$.

Si $p_1, p_2, \ldots$ est une suite privilégiée fermée sur C, l'ensemble des conditions pour une fonction w quelconque

$$\int_C \frac{dw}{dn_e} p_k\, ds = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

est équivalent à la condition $dw/dn_e = 0$. On est ainsi amené à énoncer dans ce cas l'hypothèse, à savoir que les spectres des problèmes modifiés tendront pour $m \to \infty$ vers les spectres des problèmes initiaux. Ce théorème est exact et sa démonstration sera développée ailleurs [1].

15. Étude des problèmes privilégiés. — Soit $p_1, p_2, \ldots$ une suite privilégiée arbitrairement fixée. Considérons les problemes I'_m formés à l'aide de cette suite. La suite des fonctions $p_1, p_2, \ldots, p_m$ contient des suites adjointes aux valeurs propres d'indices suffisamment petits, $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu$, ν étant une fonction non décroissante de m, tendant avec m vers l'infini. Nous nous proposons de déterminer leurs multiplicités $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu$ dans le spectre de I'_m.

Soit $\omega = \omega_n$ une de ces valeurs, de multiplicité $r = r_n$. Désignons par $u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, \ldots, u_r^{(n)}$ une base de r fonctions propres correspondantes. Soit $p_{\alpha_1}, p_{\alpha_2}, \ldots, p_{\alpha_r} (1 \leqq \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_r \leqq m)$ une suite adjointe à ω. Pour abréger l'écriture, nous allons changer le numérotage et désigner cette suite par $p_1, p_2, \ldots, p_r$. On aura donc

$$(15.1) \qquad \left| (p_k, u_j^{(n)}) \right| \neq 0 \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, r).$$

Dans le *cas* $m = r$, on trouve par le raisonnement du paragraphe **12**, que ω n'appartient pas au spectre de I'_m.

Supposons $m > r$. — Posons

$$(15.2) \qquad \begin{cases} \hat{p}_i = p_i & (i = 1, 2, \ldots, r), \\ \hat{p}_{r+q} = p_{r+q} - \sum_{h=1}^{r} A_{qh} p_h & (q = 1, 2, \ldots, m-r) \end{cases}$$

et déterminons $A_{q1}, A_{q2}, \ldots, A_{qr} (q = 1, 2, \ldots, m-r)$ par les r conditions d'orthogonalité

$$(15.3) \qquad \left(\hat{p}_{r+q}, u^{(n)}\right) = \left(p_{r+q}, u_j^{(n)}\right) - \sum_{h=1}^{r} A_{qh} \left(p_h, u_j^{(n)}\right) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, r).$$

Ces conditions peuvent être satisfaites, car on a $\left| (p_h, u_j^{(n)}) \right| \neq 0$. Il

---

[1] *Voir* à ce sujet : N. ARONSZAJN et A. WEINSTEIN [1].

est évident qu'on peut remplacer $p_1, p_2, \ldots, p_m$ par $\hat{p}_1, \hat{p}_2, \ldots, \hat{p}_m$ sans altérer le spectre de Γ'_m, car cette substitution revient à un changement de base dans la multiplicité $\mathfrak{L}_m$ (§ 7).

Considérons les équations (10.7),

$$\sum_{k=1}^{m} \hat{a}_k \left(\hat{p}_k,\, u_j^{(n)}\right) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, r),$$

où les $\hat{a}_k$ désignent les inconnues relatives aux $\hat{p}_k$. Ce système se réduit d'après (15.3) et (15.1) aux équations

$$\sum_{k=1}^{r} \hat{a}_k \left(\hat{p}_k,\, u_j^{(n)}\right) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, r),$$

dont le déterminant est différent de zéro. Par conséquent, on a

$$\hat{a}_1 = \hat{a}_2 = \ldots \hat{a}_r = 0,$$

et l'on peut écrire, au lieu de (10.6), l'équation

$$\Delta v + \omega v = \omega \sum_{k=r+1}^{m} \hat{a}_k \hat{p}_k \qquad (v = 0 \text{ sur } C). \tag{15.4}$$

En vertu des conditions d'orthogonalité (15.3), cette équation admet des solutions pour des valeurs arbitraires de

$$\hat{a}_{r+1},\quad \hat{a}_{r+2}, \quad \ldots \quad \hat{a}_m.$$

La solution générale de (15.4) sera donnée par la formule

$$v = \omega \sum_{j=r+1}^{m} \hat{a}_j \hat{v}_j - \sum_{h=1}^{r} b_h u_h^{(n)}, \tag{15.5}$$

où les b_h sont des constantes arbitraires et les fonctions $\hat{v}_j$ satisfont aux équations

$$\Delta \hat{v}_j + \omega \hat{v}_j = \hat{p}_j \qquad \left(\hat{v}_j = 0 \text{ sur } C;\ j = r+1, \ldots, m\right). \tag{15.6}$$

Désignons par $\hat{v}_{r+1}^{(0)}, \ldots, \hat{v}_m^{(0)}$ un système de solutions (particulières) de (15.6). La solution générale sera alors donnée par la formule

$$\hat{v}_j = \hat{v}{}_j^{(0)} + \sum_{\sigma=1}^{r} C_{j\sigma} u_\sigma^{(n)} \qquad (j = r+1, \ldots, m),$$

où $C_{j\sigma}$ désignent des constantes arbitraires.

Formons, comme au paragraphe 10, les fonctions $\bar{v}$ et $w = v + \bar{v}$. On aura

$$\bar{v} = \omega \sum_{j=r+1}^{m} \hat{a}_j \overset{\triangle}{v}_j, \tag{15.7}$$

où $\overset{\triangle}{v}_j$ désigne la solution (unique) de l'équation

$$\Delta\overset{\triangle}{v}_j - \omega \overset{\triangle}{v}_j = \hat{p}_j \qquad \left(\overset{\triangle}{v}_j = 0 \text{ sur } C;\ j = r+1, \ldots, m\right). \tag{15.8}$$

Posons

$$\hat{w}_j = \hat{v}_j + \overset{\triangle}{v}_j = \hat{v}{}_j^{(0)} + \sum_{\sigma=1}^{r} C_{j\sigma} u_\sigma^{(n)} + \overset{\triangle}{v}_j. \tag{15.9}$$

On aura alors

$$w = -\sum_{h=1}^{r} b_h u_h^{(n)} + \omega \sum_{j=r+1}^{m} \hat{a}_j \hat{w}_j.$$

Écrivons maintenant les m équations (7.5) :

$$\left(\hat{p}_k, \Delta w\right) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{h=1}^{r} b_h \left(\hat{p}_k, u_h^{(n)}\right) + \sum_{j=r+1}^{m} \hat{a}_j \left(\hat{p}_k, \Delta\hat{w}_j\right) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m). \tag{15.10}$$

Vu que le déterminant $\left|\left(\hat{p}_k, u_\sigma^{(n)}\right)\right|$ $(k, \sigma = 1, 2, \ldots, r)$ est, d'après (15.1), différent de zéro, on peut choisir les constantes $C_{j\sigma}$ de manière que

$$\left(\hat{p}_k, \Delta\hat{w}_{r+q}\right) = 0 \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots, r;\ q = 1, 2, \ldots, m-r. \tag{15.11}$$

[Signalons que les $\left(\hat{p}_k, \Delta\hat{w}_j\right)$ $(j, k = r+1, \ldots, m)$ sont, d'après (15.3), indépendants du choix des $C_{j\sigma}$].

Si ω appartient au spectre de Γ'_m, les m coefficients $b_1, b_2, \ldots, b_r$, $\hat{a}_{r+1}, \hat{a}_{r+2}, \ldots, \hat{a}_m$ ne sont pas tous nuls. Par conséquent le déterminant du système (15.10) doit être égal à zéro, ce qui donne, en vertu de (15.3) et (15.11), l'équation

$$(15.12)\qquad \begin{vmatrix} (\hat{p}_1, u_1^{(n)}) & \ldots & (\hat{p}_1, u_r^{(n)}) & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & . & \ldots & . \\ (\hat{p}_r, u_1^{(n)}) & \ldots & (\hat{p}_r, u_r^{(n)}) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & (\hat{p}_{r+1}, \Delta\hat{w}_{r+1}) & \ldots & (\hat{p}_{r+1}, \Delta\hat{w}_m) \\ . & \ldots & . & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ 0 & \ldots & 0 & (\hat{p}_m, \Delta\hat{w}_{r+1}) & \ldots & (\hat{p}_m, \Delta\hat{w}_m) \end{vmatrix} = 0.$$

Le mineur principal des $(\hat{p}_k, u_j^{(n)})$ $(j, k = 1, 2, \ldots, r)$ est différent de zéro. Par conséquent nous obtenons, au lieu de (15.12), l'équation équivalente

$$(15.13)\qquad \left|(\hat{p}_k, \Delta\hat{w}_j)\right| = 0 \qquad (j, k = r+1, \ldots, m),$$

qui exprime la condition nécessaire pour que ω appartienne au spectre de Γ'_m.

La réciproque est évidente : si (15.13) admet la racine $\omega = \omega_n$, cette valeur appartiendra au spectre de Γ'_m et sa multiplicité ρ_n sera donnée par le nombre de solutions indépendantes de (15.10).

Soit $\hat{R}$ le rang de la matrice des $(\hat{p}_k, \Delta\hat{w}_j)$; $j, k = r+1, \ldots, m$.

Les équations (15.10) admettent, vu que

$$\left|(\hat{p}_k, u_j^{(n)})\right| \neq 0 \quad (j, k = 1, 2, \ldots, r)$$

$(m - r) - \hat{R}\,[= m - r_n - \hat{R}]$ solutions indépendantes :

$$0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \hat{a}_{r+1}^{(\tau)},\ \ldots,\ \hat{a}_m^{(\tau)} \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, m - r_n - \hat{R}).$$

On obtient ainsi $m - r_n - \hat{R}$ fonctions propres indépendantes

$$w = w^{(\tau)} = \omega \sum_{i=r+1}^{m} \hat{a}_j^{(\tau)} \hat{w}_j,$$

ce qui démontre que ρ_n est égal à $m - r_n - \hat{R}$.

Signalons qu'on peut utiliser pour le calcul du premier membre de (15.13), les éléments du déterminant (9.15), calculés pour $\mu \neq \omega$. Posons pour $q = 1, \ldots, m - r$ [1],

$$\hat{w}_{r+q} = w_{r+q} - \sum_{h=1}^{r} A_{qh} w_h,$$

les A_{qh} étant les mêmes constantes que dans (15.2). Écrivons, dans (15.4) et (15.8), μ au lieu de ω. On aura, comme au paragraphe 9, l'équation

$$(15.14) \qquad \left|\left(\hat{p}_k, \Delta\hat{w}_j\right)\right| = -2\mu^2 \left|\sum_{\sigma=1}^{\infty} \hat{c}_\sigma^{(j)} \hat{c}_\sigma^{(k)} \frac{\omega_\sigma^2}{\omega_\sigma^2 - \mu^2}\right|$$

$$(j, k = r+1, \ldots, m),$$

où nous avons posé $\hat{c}_\sigma^{(k)} = \left(\hat{p}_k, u_\sigma\right)$. On a

$$\hat{c}_\sigma^{(r+q)} = c_\sigma^{(r+q)} - \sum_{h=1}^{r} A_{qh} c_\sigma^{(h)} \qquad (q = 1, \ldots, m-r;\ \sigma = 1, 2, \ldots).$$

La formule (15.14) est calculée pour $\mu \neq \omega_n$. Mais, pour obtenir le premier membre de (15.13), on peut y poser $\mu = \omega_n$, car, d'après (15.3), le coefficient du terme $\dfrac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - \mu^2}$ est égal à zéro.

La règle énoncée dans ce paragraphe permet de déterminer les multiplicités $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu$ avec lesquelles les valeurs $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu$ figurent dans le spectre de I'_m. D'autre part, le procédé du paragraphe 9 nous donne toutes les valeurs propres de I'_m, qui sont différentes des ω. Par conséquent, nous connaissons toutes les valeurs propres de I'_m qui sont inférieures à $\omega_{\nu+1}$. Désignons ces valeurs par μ_1, $\mu_2, \ldots, \mu_M$. L'indice M dépend de m et tend avec m vers l'infini. En faisant parcourir à m les entiers 1, 2, ..., nous pourrons calculer non seulement un nombre toujours croissant de bornes inférieures μ_1^2, $\mu_2^2, \ldots, \mu_M^2$ des valeurs propres de nos problèmes initiaux, mais aussi substituer aux bornes déjà calculées des bornes plus grandes, améliorant ainsi les résultats déjà obtenus.

---

[1] Rappelons qu'il faut préalablement changer de numérotage dans (9.15) pour le rendre conforme aux notations présentes.

16. **Résumé.** — Nous allons résumer le procédé, développé dans les paragraphes précédents, qui donne des bornes inférieures pour les valeurs propres du spectre (1.2) : λ_1^2, λ_2^2, ... des vibrations d'une plaque encastrée. Pour appliquer ce procédé, il suffit de connaître le spectre et les fonctions propres du problème des vibrations de la membrane pour le même domaine S.

Commençons par écrire le spectre et les fonctions propres du problème de la membrane :

$$(16.1) \qquad \omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots,$$

$$(16.2) \qquad u_1, \quad u_2, \quad \ldots,$$

$$(16.3) \qquad (u_i, u_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

Pour mettre en évidence la multiplicité r_n de ω_n $(n = 1, 2, \ldots)$, nous écrirons, au lieu de (16.2), la suite du paragraphe 10

$$(16.4) \qquad u_1^{(1)}, u_1^{(2)}, \ldots, u_{r_2}^{(2)}, \quad u_1^{(3)}, \ldots, u_{r_3}^{(3)}, \quad \ldots, \quad u_1^{(n)}, \ldots, u_{r_n}^{(n)}, \quad \ldots.$$

Formons la suite des dérivées normales

$$(16.5) \qquad \frac{du_1^{(1)}}{dn_e}, \frac{du_1^{(2)}}{dn_e}, \ldots, \frac{du_{r_2}^{(2)}}{dn_e}, \quad \frac{du_1^{(3)}}{dn_e}, \ldots, \frac{du_{r_3}^{(3)}}{dn_e}, \quad \frac{du_1^{(n)}}{dn_e}, \ldots, \frac{du_{r_n}^{(n)}}{dn_e}, \quad \ldots.$$

Supprimons, dans cette suite, les éléments qui sont des combinaisons linéaires des précédents. Désignons les autres, dans l'ordre dans lequel on les rencontre en parcourant la suite (16.5) par

$$(16.6) \qquad p_1(s), \quad p_2(s), \quad \ldots$$ (1).

Résolvons les problèmes de Dirichlet relatifs aux valeurs $p_k(s)$ et formons la suite des fonctions harmoniques

$$(16.7) \qquad p_1(x, y), \quad p_2(x, y), \quad \ldots.$$

Écrivons les équations

$$(16.8) \qquad \begin{aligned} \Delta v_k + \mu v_k &= p_k \quad (v_k = 0 \text{ sur } C) \\ \Delta \bar{v}_k - \mu v_k &= p_k \quad (\bar{v}_k = 0 \text{ sur } C) \end{aligned} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

---

(1) Nous supposerons la frontière de S suffisamment régulière, pour que l'on puisse former la suite régulière. Pour les autres cas, *voir* paragraphe 12.

Posons $w_k = v_k + \bar{v}'_k$. Formons la matrice infinie

$$
(16.9) \qquad \left\| \begin{matrix} (p_1, \Delta w_1) & (p_1, \Delta w_2) & (p_1, \Delta w_3) & \dots \\ (p_2, \Delta w_1) & (p_2, \Delta w_2) & (p_2, \Delta w_3) & \dots \\ (p_3, \Delta w_1) & (p_3, \Delta w_2) & (p_3, \Delta w_3) & \dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots \end{matrix} \right\|
$$

Les éléments de cette matrice sont donnés par les formules

$$
(16.10) \qquad (p_k, \Delta w_j) = -2\mu^2 \sum_{\sigma=1}^{\infty} c_\sigma^{(j)} c_\sigma^{(k)} \frac{\omega_\sigma^2}{\omega_\sigma^2 - \mu^2},
$$

$$
c_\sigma^{(k)} = (p_k, u_\sigma).
$$

On a $(p_k, \Delta w_j) = (p_j, \Delta w_k)$.

Considérons les déterminants

$$
(16.11) \quad d_m(\mu) = |(p_k, \Delta w_j)| \qquad (j, k = 1, 2, \dots, m;\ m = 1, 2, \dots).
$$

Soit $\nu + 1$ le plus petit entier, tel que la suite adjointe à $\omega_{\nu+1}$ ne soit pas contenue dans la suite $p_1, p_2, \dots, p_m$.

Calculons d'abord les racines positives $\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \dots, \mu^{(\alpha)}$ de $d_m(\mu)$ qui sont différentes des ω et inférieures à $\omega_{\nu+1}$.

Déterminons le rang R_n de $d_m(\mu^{(n)})$ $(n = 1, 2, \dots \alpha)$. Écrivons $(m - R_n)$ — fois la valeur $\mu^{(n)}$ $(n = 1, \dots, \alpha)$. Soit

$$
(16.12) \qquad \mu_{m_1 m}, \ \mu_{m_2 m}, \ \dots, \ \mu_{m_\gamma m}
$$

la suite ainsi formée.

Considérons, après avoir obtenu (16.12), la suite

$$
p_{\alpha_1}, \ p_{\alpha_2}, \ \dots, \ p_{\alpha_r} \qquad (1 \leqq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_r \leqq m)
$$

adjointe à ω_n $(n = 1, 2, \dots, \nu)$. (Nous avons posé pour abréger $r = r_n$). Formons le mineur $d_{m-r}^{(n)}(\mu)$ relatif aux lignes et colonnes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ de la matrice de $d_m(\mu)$. Soient $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{m-r}$ les indices des lignes et colonnes de d_m qui figurent dans $d_{m-r}^{(n)}$. Remplaçons p_{β_k} et w_{β_l} par

$$
(16.13) \qquad \hat{p}_{\beta_k} = p_{\beta_k} - \sum_{h=1}^{r} A_{\beta_k \alpha_h} p_{\alpha_h}
$$

$$
\qquad\qquad (k = 1, 2, \dots, m - r).
$$

$$
(16.14) \qquad \hat{w}_{\beta_k} = w_{\beta_k} - \sum_{h=1}^{r} A_{\beta_k \alpha_h} w_{\alpha_h}
$$

les coefficients A étant déterminés par les conditions d'orthogonalité

$$(16.15) \qquad (\hat{p}_{\beta_k}, u_j^{(n)}) = (p_{\beta_k}, u_j^{(n)}) - \sum_{h=1}^{r} A_{\beta_k \alpha_h} (p_{\alpha_h}, u_j^{(n)}) = 0$$

$$(j = 1, 2, \ldots, r;\ k = 1, 2, \ldots, m - r) \quad [1].$$

Calculons le déterminant

$$(16.16) \qquad \hat{d}_{m-r}^{(n)}(\omega_n) = \left| (\hat{p}_{\beta_k}, \Delta\hat{w}_{\beta_j}) \right| \qquad (j, k = 1, \ldots, m - r).$$

On peut se servir pour ce calcul des valeurs déjà calculées $(p_k, \Delta w_j)$.

Déterminons le rang $\hat{R}_n (\leq m - r_n)$ de la matrice $\hat{d}_{m-r}^{(n)}(\omega_n)$. Posons

$$\rho_n = m - r_n - \hat{R}_n \qquad (0 \leq \rho_n \leq m - r_n).$$

Écrivons ρ_n — fois la valeur $\omega_n (n = 1, 2, \ldots, \nu)$. Soit

$$(16.17) \qquad \mu_{n_1 m}, \quad \mu_{n_2 m}, \quad \ldots, \quad \mu_{n_\delta m},$$

la suite ainsi obtenue. Désignons par

$$(16.18) \qquad \mu_{1m}, \quad \mu_{2m}, \quad \ldots, \quad \mu_{Mm},$$

l'ensemble des éléments de (16.12) et (16.17), rangés par ordre de grandeur. On aura alors les inégalités

$$(16.19) \qquad \omega_n^2 \leq \mu_{nm}^2 \leq \lambda_n^2 \qquad (n = 1, 2, \ldots, M)$$

qui nous donnent les bornes inférieures cherchées. L'indice M dépend de m et tend avec m vers l'infini. Rappelons qu'on a

$$\mu_{nm+1}^2 \geq \mu_{nm}^2 \qquad \text{et} \qquad \lim_{m=\infty} \mu_{nm}^2 = \lambda_n^2.$$

---

[1] On a

$$(p_k, u_j^{(n)}) = \frac{1}{\omega_n} \int_C p_k \frac{du_j^{(n)}}{dn_e} \, ds.$$

D'après une remarque antérieure les $\frac{du_j^{(n)}}{dn_e}$ sont des combinaisons linéaires de $p_1, \ldots, p_m$. Par conséquent le calcul des intégrales doubles qui figurent dans (16.15) est ramené au calcul des intégrales simples

$$\int_C p_k p_j \, ds \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, m).$$

17. Quelques inégalités. — Soit $\omega = \omega_n$ une valeur propre de multiplicité r et soit $p_1, p_2, \ldots$ une suite privilégiée. On peut admettre (en changeant. si c'était nécessaire, le numérotage des p_k) que les fonctions $p_1, p_2, \ldots, p_r$ forment une suite adjointe à ω. Considérons le problème Γ'_r. D'après les résultats du paragraphe **12**, la valeur ω ne figure pas dans le spectre $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$ de Γ'_r. Or, nous savons que μ_n ne peut être inférieur à ω_n. Par conséquent, nous obtenons l'inégalité $\mu_n^2 > \omega_n^2$. D'autre part, on a $\lambda_n^2 \geqq \mu_n^2$. En résumé, nous obtenons les inégalités

$$\lambda_n^2 > \omega_n^2 \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{17.1}$$

Signalons qu'on pourrait évaluer les différences $\lambda_n^2 - \omega_n^2$ en se servant de l'équation (9.17).

18. Le problème du flambage. Les problèmes mixtes. — Le procédé résumé au paragraphe **16** s'applique immédiatement au problème du flambage d'une plaque encastrée. En effet, il suffit de remplacer dans toutes les formules μ et w par $\mu^\star$ et $w^\star$ (ce qui revient à supprimer $\bar{v}$). Au lieu de (16.10), il faut se servir de la formule (9.22).

On obtient, de même, les inégalités

$$\lambda_n^\star > \omega_n \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{18.1}$$

analogues à (17.1).

Pour les problèmes mixtes, on peut, d'après le lemme **2**, utiliser la même suite régulière. mais il faut remplacer les $p_k(s)$ par zéro sur tous les arcs (en nombre fini), sur lesquels on a la condition $w = \Delta w = 0$ (ou $w^\star = \Delta w^\star = 0$). Les nouvelles fonctions $p_k(s)$ auront un nombre fini de points de discontinuité sur la frontière C, qui seront également des points de discontinuité pour Δv, $\Delta \bar{v}$ et $\Delta w^\star$; mais ce fait ne peut modifier aucun des résultats obtenus.

19. Applications. — 1° A titre d'exercice, nous allons déterminer par notre procédé le spectre du problème du flambage d'une barre encastrée. Il va sans dire que ce problème pourrait être résolu par des moyens plus élémentaires.

Problème. — Déterminer le spectre de l'équation différentielle

$$w^{\text{IV}}(x) + \lambda^\star w''(x) = 0, \tag{19.1}$$

donnée dans l'intervalle S : $|x| \leq \frac{\pi}{2}$, en supposant que w s'annule avec sa dérivée première pour $x = \pm \frac{\pi}{2}$.

D'après la règle du paragraphe 16, nous avons à considérer dans S, l'équation des cordes vibrantes

$$u'' + \omega u = 0, \tag{19.2}$$

avec les conditions aux limites $u = 0$ pour $x = \pm \frac{\pi}{2}$.

Le spectre et les fonctions propres de (19.2) sont donnés par les formules

$$\left\{\begin{aligned} &\omega_n = n^2 \qquad (n = 1, 2, \ldots), \\ &u_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin n\left(x + \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}\right. \tag{19.3}$$

Les dérivées « normales » prennent, à des facteurs constants près, les valeurs $+1$, $+1$ ou $+1$, -1 aux extrémités de l'intervalle d'intégration. Par conséquent, la suite fondamentale normale se compose de deux fonctions seulement

$$p_1(x) = 1, \qquad p_2(x) = x.$$

Les problèmes analogues à I'_m, sont, pour $m > 2$, identiques à I'_2.

La suite adjointe à ω_n se compose de la fonction p_1 pour n impair. et de p_2 pour n pair.

Formons, d'après la règle générale, les équations

$$v_1'' + \mu^* v_1 = 1 \qquad \left(v_1 = 0 \text{ pour } x = \pm \frac{\pi}{2}\right), \tag{19.3}$$

$$v_2'' + \mu^* v_2 = x \qquad \left(v_2 = 0 \text{ pour } x = \pm \frac{\pi}{2}\right). \tag{19.4}$$

On peut les intégrer sans développements en séries. La solution de (19.3) [ou de (19.4)] sera, d'après les résultats du paragraphe 7, la somme d'une fonction linéaire et d'une fonction trigonométrique, ces deux fonctions prenant des valeurs opposées sur la frontière. On trouve immédiatement

$$\mu^* v_1 = 1 - \frac{\cos(x\sqrt{\mu^*})}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu^*}\right)}, \qquad \mu^* v_2 = x - \frac{\pi}{2}\,\frac{\sin(x\sqrt{\mu^*})}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu^*}\right)}$$

L'équation $d_2(\mu^\star) = 0$ est équivalente a l'équation

$$\begin{vmatrix} 2\,\mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu^\star}\right) & 0 \\ 0 & -\pi\cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu^\star}\right) + \dfrac{2\sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu^\star}\right)}{\sqrt{\mu^\star}} \end{vmatrix} = 0.$$

c'est-à-dire à l'équation

$$\mathrm{tang}\,\zeta(\mathrm{tang}\,\zeta - \zeta) = 0, \qquad \left(\zeta = \frac{\pi}{2}\sqrt{\mu^\star}\right).$$

L'ensemble des racines de l'équation

$$\mathrm{tang}\,\zeta - \zeta = 0$$

nous donne toutes les valeurs propres $\mu^\star$ qui sont différentes des ω.

Les fonctions p_1 et p_2 satisfont aux conditions d'orthogonalité

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} p_1 u_{2j}\,dx = 0 \\ &\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} p_2 u_{2j-1}\,dx = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

Par conséquent on a (toujours avec les notations du § 16)

$$\hat{p}_1 = p_1, \qquad \hat{p}_2 = p_2, \qquad \hat{d}_1^{(1)} = d_1^{(1)}, \qquad \hat{d}_1^{(2)} = d_1^{(2)},$$

$d_1^{(1)}(\mu^\star) = 0$ n'admet pas de racines ω. Par contre, on a $d_1^{(2)}(4\sigma^2) = 0$, $(\sigma = 1, 2, \ldots)$. Par conséquent, toutes les valeurs propres ω de la forme $(2\sigma)^2$ figurent dans le spectre de Γ_2' avec la multiplicité un.

On vérifie immédiatement que les fonctions propres v_1 et v_2 vérifient les conditions aux limites $v = v' = 0$ du problème initial. Par conséquent, le spectre obtenu est identique au spectre du problème du flambage des barres encastrées. Ce fait s'explique aisément. En effet, vu que p_1 et p_2 forment un systeme fermé sur la frontière, on se trouve en présence d'un cas particulier du theorème énoncé au paragraphe **14**, sur la convergence des valeurs propres des problèmes modifiés vers les valeurs propres des problemes initiaux.

2° *Le carré et le rectangle.* — Ainsi que nous l'avons dit dans l'introduction, les spectres des problèmes des vibrations et du flambage des plaques encastrées ne peuvent être déterminés explicitement pour ces domaines. Par contre, les problèmes modifiés sont élémentaires, car on connaît explicitement la solution du problème correspondant des vibrations d'une membrane.

Soit S le carré $|x| \leqq \frac{\pi}{2}$, $|y| \leqq \frac{\pi}{2}$.

Le spectre et les fonctions propres du problème de la membrane sont donnés par les formules

$$\omega = m^2 + n^2 \qquad (m, n = 1, 2, \ldots),$$
$$u = \frac{2}{\pi} \sin m\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \sin n\left(y + \frac{\pi}{2}\right).$$

On a, avec les notations du paragraphe 16,

$$\omega_1 = 2, \qquad u_1^{(1)} = \cos x \cos y,$$
$$\omega_2 = \omega_3 = 5, \qquad u_1^{(2)} = \sin 2x \cos y, \qquad u_2^{(2)} = \cos x \sin 2y,$$
$$\omega_4 = 8, \qquad u_1^{(4)} = \sin 2x \sin 2y,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_1 = p_1^{(1)} = \frac{\cosh x \cos y + \cosh y \cos x}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)},$$
$$p_2 = p_1^{(2)} = \frac{\sin 2x \cosh 2y}{\cosh \pi} + 2\,\frac{\sinh x \cos y}{\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)},$$
$$p_3(x, y) = p_2^{(2)}(x, y) = p_2(y, x),$$
$$p_4 = p_1^{(4)} = -2\,\frac{\sin 2x \sinh 2y + \sinh 2x \sin 2y}{\sinh \pi}.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Formons les équations

$$\Delta v_k + \mu v_k = p_k, \qquad \Delta \overline{v_k} - \mu \overline{v_k} = p_k \qquad (v_k = \overline{v_k} = 0 \text{ sur } C).$$

Pour les intégrer sans développements en séries, nous allons poser comme au paragraphe 7,

$$\mu v_k = U_k + p_k, \qquad \mu \overline{v_k} = \overline{U_k} - p_k,$$
$$\Delta U_k + \mu U_k = 0, \qquad \Delta \overline{U_k} - \mu \overline{U_k} = 0,$$
$$U_k = -p_k, \qquad \overline{U_k} = p_k \text{ sur } C.$$

On trouve immédiatement

$$U_1 = -\frac{\cos x \cos(y\sqrt{\mu - 1}) + \cos(x\sqrt{\mu - 1})\cos y}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu - 1}\right)},$$

$$U_2 = -\frac{\sin 2x \cos(y\sqrt{\mu - 4})}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu - 4}\right)} - 2\frac{\cos y \sin(x\sqrt{\mu - 1})}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu - 1}\right)},$$

$$U_3(x, y) = U_2(y, x),$$

$$U_4 = 2\frac{\sin 2x \sin(y\sqrt{\mu - 4}) + \sin(x\sqrt{\mu - 4})\sin 2y}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu - 4}\right)}.$$

. . . .

$$\overline{U_1} = \frac{\cos x \cosh(y\sqrt{\mu + 1}) + \cosh(x\sqrt{\mu + 1})\cos y}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu + 1}\right)},$$

$$\overline{U_2} = \frac{\sin 2x \cosh(y\sqrt{\mu + 4})}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu + 4}\right)} + 2\frac{\sinh(x\sqrt{\mu + 1})\cos y}{\sinh\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu + 1}\right)},$$

$$\overline{U_3}(x, y) = \overline{U_2}(y, x),$$

$$\overline{U_4} = -2\frac{\sin 2x \sinh(y\sqrt{\mu + 4}) + \sinh(x\sqrt{\mu + 4})\sin 2y}{\sinh\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu + 4}\right)}.$$

. . . .

On aura à calculer

$$\mu(p_k, \Delta v_j) = (p_k, \Delta U_j) = -\mu(p_k, U_j),$$
$$\mu(p_k, \overline{\Delta v_j}) = (p_k, \overline{\Delta U_j}) = +\mu(p_k, \overline{U_j}),$$
$$(p_k, \Delta w_j) = (p_k, \overline{U_j} - U_j).$$

Avant d'aborder ces calculs, signalons que dans des travaux antérieurs (¹) nous avons déjà obtenu les inégalités suivantes :

(19.5) $\qquad 5,30236 < \lambda_1^1 < 5,31173, \qquad 13,294 < \lambda_1^2 < 13,37.$

Les bornes supérieures ont été obtenues par la méthode de Ritz. Quant aux bornes inférieures, nous nous sommes servi de la suite

(¹) A. WEINSTEIN, [1], [2]. Les inégalités pour λ_1^2 ont été calculées d'après mes indications par M. S. Tomotika [1].

fondamentale

$$(19.6)\quad p'_{2k-1}(x, y) = \frac{\cos(2k-1)x\cosh(2k-1)y + \cosh(2k-1)x\cos(2k-1)y}{\cosh(2k-1)\frac{\pi}{2}},$$

$$(k = 1, 2, \ldots)$$

qui n'est qu'une suite partielle de la suite régulière. La suite (19.6) présente quelques avantages au point de vue du calcul numérique. mais elle ne contient pas la suite adjointe à $\omega_2 = 5$. Pour cette raison la valeur ω_2 figurait dans le spectre de tous les problèmes formés à l'aide de la suite (19.6), et nous avons dû recourir à des considérations supplémentaires pour démontrer que λ_1^* était supérieure à $\omega_2 = 5$ (¹). Ces artifices n'interviennent plus quand on se sert de la suite régulière.

Dans ce cas le procédé est, d'après la règle générale, le suivant.

Pour calculer des bornes inférieures de λ_1^*, posons $m = 3$. On a, pour $j \neq k$, $(p_k, \Delta v_j) = 0$; $j, k = 1, 2, 3$.

Par conséquent, on aura, en écrivant μ^* au lieu de μ,

$$d_3(\mu^*) = (p_1, \Delta v_1)(p_2, \Delta v_2)(p_3, \Delta v_3) = (p_1, \Delta v_1)(p_2, \Delta v_2)^2.$$

La plus petite racine de

$$d_1^{(2)}(\mu^*) = (p_1, \Delta v_1) = 0,$$

c'est-à-dire de l'équation

$$\frac{\pi}{2}\operatorname{tang}\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\sqrt{\mu^* - 1}\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu^* - 1}\right) + \frac{\mu^*}{2 - \mu^*} = 0,$$

est égale à 5.15. De même, la plus petite racine de

$$(19.7)\qquad d_1^{(2)}(\mu^*) = (p_2, \Delta v_2) = 0,$$

est supérieure à 5. On peut aisément démontrer ce fait sans faire le calcul explicite de $d_1^{(2)}$. En effet. les racines de (19.7) sont les valeurs propres, différentes des ω, du problème formé à l'aide de la suite fondamentale p_2, p_3, identique à la suite adjointe à ω_2. Ce problème admet, vu que $(p_2, u_1^{(1)}) = (p_3, u_1^{(1)}) = 0$, la valeur propre 2. Par conséquent, la plus petite racine positive de (19.7) sera égale à la seconde valeur propre de ce problème, donc elle sera, d'après (18.1), supérieure à $\omega_2 = 5$.

(¹) A. Weinstein, [3].

Signalons enfin que $\hat{d}{}_1^{(2)}(5)$ et $d_2^{(1)}(2)$ sont différents de zéro. Ce fait se démontre immédiatement, car on a, pour $(k=1, 2, 3)$, $\hat{p}_k = p_k$, $\hat{d}{}_1^{(2)} = d_1^{(2)}$ et $\hat{d}{}_2^{(1)} = d_2^{(1)}$. En résumé, on obtient, en posant $m=3$, l'inégalité $\lambda_1^* > 5$, et le calcul de (19.5) s'achève comme dans mon travail antérieur.

Revenons au problème des vibrations. Dans deux notes antérieures ([1]), auxquelles je renvoie le lecteur. j'ai indiqué les inégalités suivantes :

$$7{,}1 < \lambda_2 = \lambda_3 < 7{,}73, \qquad 10{,}6 < \lambda_4 < 11.6.$$

(Nous avons désigné par λ la racine positive de λ^2.)

Il serait superflu de reproduire ici les détails de ces calculs. N'ayant pas encore précisé la notion de la suite régulière, je me suis servi de suites fondamentales particulières, arbitrairement choisies. Pour obtenir des bornes supérieures de λ_2^2 et de λ_4^2. j'ai calculé le rapport de $I(w)/H(w)$ pour les fonctions

$$(\sin x + \sin 3x)\cos^2 y \quad \text{et} \quad (\sin x + \sin 3x)(\sin y + \sin 3y).$$

Signalons encore que le calcul de λ_2^2 et λ_4^2 revient au fond à l'étude de problèmes mixtes pour des rectangles et des carrés.

20. Analyse des méthodes formelles. — Ainsi que nous l'avons dit dans l'introduction, plusieurs auteurs continuent à se servir pour le carré de solutions formelles.

Nous allons analyser brièvement ce procédé, en prenant comme exemple le calcul de λ_1^2, fait par M. Tomotika ([2]).

Le procédé formel n'utilise pas de problèmes variationnels : il attaque directement l'équation (1.1) $\Delta\Delta w - \lambda^2 w = 0$. Cherchons d'abord, avec M. Tomotika, des solutions particulières de cette équation, nulles sur la frontière du carré S. en posant

$$w = e^{\alpha x}\cos(2k-1)y + e^{\alpha y}\cos(2k-1)x \qquad (k=1, 2\ldots).$$

([1]) A. Weinstein, [4], [5].

([2]) S. Tomotika [2]. Signalons que M. Tomotika avait déjà préalablement calculé λ_1^2 par notre méthode (*voir* S. Tomotika, [1]).

On trouve immédiatement une infinité de fonctions de ce type

$$(20.1)\quad w = w'_{2k-1} = \left[\frac{\cos\left(y\sqrt{\lambda-(2k-1)^2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda-(2k-1)^2}\right)} - \frac{\cosh\left(y\sqrt{\lambda+(2k-1)^2}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda+(2k-1)^2}\right)} \right] \cos(2k-1)x$$

$$+ \left[\frac{\cos\left(x\sqrt{\lambda-(2k-1)^2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda-(2k-1)^2}\right)} - \frac{\cosh\left(x\sqrt{\lambda+(2k-1)^2}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda+(2k-1)^2}\right)} \right] \cos(2k-1)y.$$

Admettons maintenant que la solution de (1.1), satisfaisant aux conditions aux limites (1.2) $w = \dfrac{dw}{dn_e} = 0$, soit donnée par la formule

$$(20.2)\qquad w = \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k-1} w'_{2k-1},$$

les coefficients A_{2k-1} étant inconnus *a priori*. Cherchons à déterminer λ de manière que la dérivée normale soit nulle sur la frontière, c'est-à-dire de manière à satisfaire à la condition $\dfrac{dw}{dx} = 0$ pour $x = \pm \dfrac{\pi}{2}$.

On trouve, en dérivant la série (20.2) terme à terme,

$$(20.3)\qquad \frac{dw}{dx} = \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k-1} \frac{dw'_{2k-1}}{dx}.$$

Développons $\dfrac{dw'_{2k-1}}{dx}$ en série de Fourier

$$\frac{dw'_{2k-1}}{dx} = \sum_{\sigma=0}^{\infty} C_{2k-1,\sigma} \cos 2\sigma y,$$

et introduisons ces séries dans (20.3). On obtient alors l'expression

$$\sum_{\sigma=0}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_{2k-1} C_{2k-1,\sigma}\right)\cos 2\sigma y.$$

Pour satisfaire à la condition $\dfrac{dw}{dx} = 0$, on pose

$$(20.4)\qquad \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k-1} C_{2k-1,\sigma} = 0 \qquad (\sigma = 0, 1, 2\ldots),$$

et l'on écrit l'équation

$$(20.5) \qquad \begin{vmatrix} C_{10} & C_{30} & \dots \\ C_{11} & C_{31} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0,$$

qui exprime que le déterminant (infini) des équations (20.4), à une infinité d'inconnues, est égal à zéro. Calculons la plus petite racine des mineurs principaux à m lignes et m colonnes pour $m = 1, 2, \dots$.

M. Tomotika affirme que ces racines donnent des valeurs approchées de λ_1. Le calcul numérique donne, en effet, $\lambda_1^2 = 13.29$, c'est-à-dire une valeur très peu différente de la valeur (19.5), calculée par M. Tomotika par notre procédé.

Il nous paraît superflu d'analyser les détails des procédés formels que nous venons d'exposer, mais nous allons, dans la mesure du possible, tâcher de donner une explication de la coïncidence numérique inattendue des résultats.

Observons, d'abord, qu'on peut poser $w'_{2k-1} = v'_{2k-1} + \bar{v}'_{2k-1}$, les v' et $\bar{v}'$ étant les solutions des équations

$$\begin{aligned} \Delta v_{2k-1} + \lambda v'_{2k-1} &= p'_{2k-1} \qquad (v'_{2k-1} = 0 \text{ sur } C), \\ \Delta \bar{v}'_{2k-1} - \lambda v'_{2k-1} &= p'_{2k-1} \qquad (\bar{v}'_{2k-1} = 0 \text{ sur } C). \end{aligned}$$

Les p'_{2k-1} désignent ici les fonctions de la suite fondamentale (19.6). D'après la méthode développée dans le présent travail, il aurait fallu former la matrice infinie aux éléments

$$(20.6) \quad (p'_{2k-1}, \Delta w'_{2j-1}) = \int_C p'_{2k-1}(s) \frac{dw'_{2j-1}}{dn_e}\, ds = 0 \qquad (j, k = 1, 2, \dots)$$

et déterminer la plus petite racine positive des déterminants principaux. Par cette voie on arrive à l'inégalité $\lambda_1^2 > 13.294$. Or, les éléments du déterminant infini (20.5) sont donnés, à des facteurs près, par les formules

$$\int_C p'_{2j} \frac{dw'_{2k-1}}{dn_e}\, ds \qquad (j = 0, 1, 2, \dots; k = 1, 2, \dots),$$

où $p'_{2j}(s)$ désigne la fonction égale à $\cos 2jx$ pour $y = \pm \frac{\pi}{2}$ et à $\cos 2jy$ pour $x = \pm \frac{\pi}{2}$.

Bien que les éléments du déterminant du procédé formel soient nettement distincts des éléments (20.6), les valeurs numériques des plus petites racines des déterminants principaux sont, par un hasard inexplicable, à peu près identiques. Néanmoins cette coïncidence numérique, qui d'ailleurs n'a pas toujours lieu, ne pourrait être considérée comme une justification des solutions formelles.

Les auteurs des procédés formels ne se prononcent pas sur la possibilité de calculer les valeurs propres d'indices supérieurs. D'après ce que nous avons vu dans le présent travail, cette question ne pourrait être discutée avant d'avoir établi la liaison entre les problèmes de la théorie des plaques et de la théorie de la membrane (1).

En terminant cette rédaction, je tiens à exprimer ici ma profonde reconnaissance aux Savants français dont l'accueil m'a permis de poursuivre mes recherches en France.

---

(1) [Note ajoutée aux épreuves]. M. Iguchi [1], [2] donne, dans des travaux tout à fait récents, quelques résultats numériques, obtenus par des procédés formels. Une rapide inspection de ces résultats montre qu'ils sont — en partie au moins — inexacts. Des applications numériques de notre méthode seront publiées incessamment.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

N. ARONSZAJN et A. WEINSTEIN. — 1. Sur la convergence d'un procédé variationnel d'approximation dans la théorie des plaques encastrées. (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 204, 1937, p. 96).

R. COURANT. — 1. Ueber die Schwingungen eingespannter Platten (*Mathematische Zeitschrift*, 15, 1922, p. 195).

— 2. Ueber die Lösungen der Differentialgleichungen der Physik (*Mathematische Annalen*, 85, 1922, p. 280).

R. COURANT und D. HILBERT. — 1. Methoden der Mathematischen Physik (Berlin, 1931).

K. FRIEDRICHS. — 1. Die Randwert- und Eigenwertprobleme aus der Theorie der elastischen Platten (*Mathematische Annalen*, 98, 1928, p. 205).

J. HADAMARD. — 1. Sur un problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées. Mémoires présentés par divers savants étrangers à l'Académie des Sciences, 33, n° 4, 1908.

H. HERRMANN. — 1. Beziehungen zwischen den Eigenwerten und Eigenfunktionen verschiedener Eigenwertprobleme (*Mathematische Zetschrift*, 40, 1935, p. 221).

M. JANET. — 1. Détermination explicite de certains minima (*Congrès International des Mathématiciens*, Zurich, 1932).

L. LICHTENSTEIN. — 1. Grundlagen der Hydromechanik (Berlin, 1929).

E. PICARD. — 1. Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles (Paris, Gauthier-Villars, 1930).

M. PLANCHEREL. — 1. Sur la méthode d'intégration de Ritz (*Bulletin des Sciences Mathématiques*, 2e série, 47, 1923; 48, 1924).

W. RITZ. — 1. *Œuvres* (Paris, Gauthier-Villars. 1911, p. 192).

S. TOMOTIKA. — 1. On the transverse vibration of a square plate with four clamped edges (*Report of the Aeronautical Research Institute*, Tôkyô Imperial University, n° 129, 1935).

E. TREFFTZ. — 1. Die Bestimmung der Knicklast gedrückter, recteckiger Platten (*Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 15, 1935, p. 339).

— 2. Die Bestimmung der Knicklast gedrückter, rechteckiger Platten (*ibid.*, 16, 1936, p. 64).

A. WEINSTEIN. — 1. Sur la stabilité des plaques encastrées (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 200, 1935, p. 107).

— 2. On a minimal problem in the theory of elasticity (*Journal of the London Mathematical Society*, 10, 1935, p. 184).

— 3. On the symmetries of the solutions of a certain variational problem (*Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 33, 1936, p. 96).

— 4. Sur l'équation des vibrations d'une plaque (*Comptes rendus de la Société de Physique*, Genève, 53, 1936, p. 62).

— 5. Sur l'équation des vibrations d'une plaque encastrée (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 202, 1936, p. 1899).

— 6. Sur le spectre de l'équation des vibrations d'une plaque encastrée (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 205, 1937, p. 707).

H. Weyl. — 1. Ueber die Abhängigkeit der Eingenschwingungen einer Membran von deren Begrenzung (*Journal für reine und angewandte Mathematik*, 141, 1912, p. 1).

Solutions formelles.

O. H. Faxén. — 1. Die Knickfestigkeit rechteckiger Platten (*Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 15, 1935, p. 268).

S. Iguchi. — 1. Allgemeine Lösung der Knickungsaufgabe für rechteckige Platten (*Ingenieur-Archiv*, 7, 1936, p. 207).

— 2. Die Biegungsschwingungen der vierseitig eingespannten rechteckigen Platte (*Ibid.*, 8, 1937).

K. Sezawa and W. Watanabe. — 1. Buckling of a rectangular plate with four clamped edges reexamined with an improved theory (*Report of the Aeronautical Research Institute*, Tôkyô Imperial University, n° 143, 1936).

G. I. Taylor. — 1. The buckling load for a rectangular plate with four clamped edges (*Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 13, 1933, p. 147).

S. Tomotika. — 2. The transverse vibration of a square plate clamped at four edges (*Philosophical Magazine*, 7e série, 21, 1936, p. 745).

Vu et approuvé :

Paris, le 12 juillet 1937.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

Ch. MAURAIN.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 12 juillet 1937.

Le Recteur de l'Académie de Paris,

S. CHARLÉTY.

TABLE DES MATIÈRES.