Ratib A. Berker

Sur quelques cas d'intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1936

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1936__185__1_0>

THÈSES

PRÉSENTÉES

à la Faculté des Sciences de l'Université de Lille

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

M. A. Ratib BERKER

Licencié ès Sciences,
Ingénieur diplômé
de l'Institut d'Électrotechnique et de Mécanique appliquée de Nancy,
Docent à la Faculté des Sciences et à l'École supérieure d'Ingénieurs
d'Istanbul.

1re THÈSE : SUR QUELQUES CAS D'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT D'UN FLUIDE VISQUEUX INCOMPRESSIBLE.

2e THÈSE : RECHERCHES RÉCENTES SUR LES FONCTIONS PRESQUE-PÉRIODIQUES.

Soutenues le   Avril 1936 devant la Commission d'Examen

MM. KAMPÉ DE FÉRIET, *Président*
GALLISSOT } *Examinateurs*
MAZET }

PARIS-LILLE

IMPRIMERIE A. TAFFIN-LEFORT

—

1936

A MES PARENTS

A MON FRÈRE

Hommage affectueux.

A M. KAMPÉ DE FÉRIET

Professeur à la Faculté des Sciences,

Directeur de l'Institut de Mécanique des Fluides de Lille.

En témoignage de respectueuse gratitude

Qu'il me soit permis de remercier M. le Professeur KAMPÉ DE FÉRIET qui m'a aimablement accueilli à l'INSTITUT DE MÉCANIQUE DES FLUIDES DE LILLE, qui m'a initié aux recherches et qui, durant l'élaboration de ce travail, ne m'a point ménagé ses précieuses suggestions. Qu'il veuille bien accepter l'expression de ma profonde et respectueuse gratitude.

La préparation et l'impression de mon travail ont été rendu possibles grâce à l'aide matérielle du MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE DU GOUVERNEMENT DE LA RÉPUBLIQUE TURQUE. Je lui en exprime ma vive reconnaissance.

R. B.

SUR QUELQUES CAS D'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT D'UN FLUIDE VISQUEUX INCOMPRESSIBLE

L'étude des problèmes aux limites que pose l'intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible ou équations de Navier-Stokes rencontre de grandes difficultés. Aussi les résultats connus relatifs à l'existence, à l'unicité de la solution et aux méthodes qui permettraient sa construction effective sont fort sommaires à l'heure actuelle, surtout si on a en vue les problèmes aux limites qui intéressent directement la pratique.

Dans ce travail je me suis occupé de trouver des " intégrales exactes " des équations de Navier-Stokes. Quoique l'on ne puisse beaucoup espérer aboutir par cette voie à la solution de problèmes aux limites donnés, il est indéniable que l'étude de certaines solutions exactes jette un jour nouveau sur la connaissance que nous avons des équations de Navier-Stokes.

Il est d'abord nécessaire de préciser ce que l'on entend par " intégrale exacte ". — Dans les solutions les plus anciennement connues des équations de Navier-Stokes : mouvements par droites parallèles, mouvements par cercles concentriques, les composantes de la vitesse s'expriment par les transcendantes élémentaires ; du moins il en est ainsi quand le mouvement est permanent, à condition d'excepter le mouvement permanent spatial par droites parallèles sans symétrie axiale. Dans les autres cas les composantes de la vitesse satisfont à des équations aux dérivées partielles très simples : ces équations sont en effet complètement linéaires (c'est-à-dire linéaires par rapport à la fonction inconnue et à ses dérivées) et du second ordre ; elles sont du type elliptique ou du type parabolique.

Dans les solutions de M. Jeffery (1915) apparaissent de nouvelles transcendantes. Les solutions de M. Hamel (1916) : droites concourantes et spirales logarithmiques conduisent à des équations différentielles algébriques non linéaires ; pour le mouvement par droites concourantes l'équation s'intègre par les fonctions elliptiques.

Si on admet comme une " intégrale exacte " le mouvement par spirales logarithmiques de M. Hamel, on ne voit pas de raison plausible de ne pas admettre également la solution de M. von Karman par exemple, solution qui fournit le mouvem [illegible]
indéfini en rotation et pour laquelle la déter [illegible]
vitesses nécessite l'intégration d'un système de trois équations différentielles non linéaires algébriques, respectivement du 3^e, du 2^e et du 1^{er} ordre.

On se trouve amené à préciser l'ensemble des fonctions qui serviront à construire les " intégrales exactes ", en choisissant les équations différentielles ou aux dérivées partielles dont ces fonctions seront solutions. Le critère — très vague à la vérité — qui présidera à ce choix semble devoir être la simplicité : on se bornera à des équations différentielles ou aux dérivées partielles " assez simples ", de telle façon que l'étude numérique des solutions — qui en dernière analyse est la raison d'être de la recherche d'intégrales particulières des équations de Navier-Stokes — que cette étude numérique soit possible, du moins théoriquement parlant, et que les procédés ordinaires de l'Analyse permettent d'attaquer ces équations.

Ces considérations nous conduisent à définir une intégrale exacte de la façon suivante :

Nous appellerons intégrale exacte des équations de Navier-Stokes une solution de ces équations telle que la détermination de son champ de vitesses se ramène à l'intégration d'un nombre fini d'équations appartenant à l'ensemble E *constitué par les équations suivantes :*

1° *les équations différentielles ordinaires, linéaires ou non, mais algébriques ; celles qui sont effectivement rencontrées sont du* 4^e *ordre au plus ;*

2° *les équations aux dérivées partielles complètement linéaires du second ordre du type elliptique ou du type parabolique ; le nombre de variables indépendantes est en fait au plus trois.*

On peut préciser davantage le lien qui unit le champ de vitesses aux équations de l'ensemble E ; soit F l'ensemble des fonctions qui satisfont à ces équations ; les composantes de la vitesse pour une intégrale exacte sont des *polynômes* de fonctions de l'ensemble F.

Il ne faut point se cacher ce que cette définition de l'intégrale exacte a d'arbitraire et en même temps d'imprécis. Il semble préférable toutefois de l'adopter plutôt que d'aborder un problème non défini.

Je passe maintenant rapidement en revue le contenu des divers paragraphes. Le chapitre I est consacré aux généralités et aux intégrales exactes connues. Au § 1er les équations du mouvement sont écrites et les divers systèmes de coordonnées qui seront employés sont indiqués. Je rappelle ensuite quelques résultats classiques se rapportant aux deux cas les plus simples : le cas du mouvement plan (§ 2) et celui du mouvement de révolution (§ 3). Les deux paragraphes suivants sont consacrés à l'énumération des intégrales exactes connues du mouvement permanent (§ 4) et du mouvement non permanent (§ 5). Pour chacun de ces deux cas sont groupées ensemble d'abord les intégrales du mouvement plan, ensuite celles du mouvement de révolution et enfin celles du " mouvement spatial ", c'est-à-dire du mouvement qui n'est ni plan ni de révolution.

A partir du chapitre II j'expose les résultats que je crois nouveaux. Au chapitre II (§ 6) je donne une transformation relative aux solutions des équations de Navier-Stokes, transformation analogue aux transformations bien connues relatives aux solutions de l'équation de Laplace ou à celles de l'équation de la chaleur. Cette transformation permet de tirer de toute solution exacte des équations de Navier-Stokes une nouvelle solution exacte, ceci pourvu que la solution primitive satisfasse à une certaine condition qui laisse d'ailleurs une grande généralité à la transformation ; pour le mouvement plan par exemple la transformation s'applique à tout mouvement sans exception et le résultat peut s'énoncer de la façon suivante : si $\psi(x\ y\ t)$ est une solution des équations de Navier-Stokes, est également solution la fonction :

$$a'.y - b'.x - \frac{\omega}{2}\Big[(x-a)^2 + (y-b)^2\Big]$$

$$+ \psi\Big[(x-a)\cos\omega t + (y-b)\sin\omega t, -(x-a)\sin\omega t + (y-b)\cos\omega t, t\Big],$$

où $a(t)$ et $b(t)$ sont deux fonctions arbitraires (1) du temps t et ω une constante arbitraire.

(1) Elles sont assujetties seulement à certaines conditions de régularité.

Après cette transformation qui s'applique [1] à toutes les catégories de mouvements, j'expose les intégrales exactes que j'ai obtenues, en les groupant en deux chapitres : mouvement permanent (chapitre III), mouvement non permanent (chapitre IV), chaque chapitre se subdivisant en trois parties consacrées respectivement au mouvement plan, au mouvement de révolution et au mouvement spatial. Je vais les passer ici en revue en adoptant la même classification.

1. *Mouvement permanent.*

A. Mouvement permanent plan. — Aux §§ 7, 8, 9 j'examine les mouvements pour lesquels la fonction de courant est de la forme

$$\psi = F(\varphi) + G(\chi),$$

φ et χ désignant deux fonctions harmoniques conjuguées ; je suppose de plus que a et b selon la notation de M. Hamel sont constants, ce qui revient à se limiter à certaines fonctions harmoniques.

Au § 10 j'examine des solutions qui résultent de la superposition d'un mouvement potentiel et d'une partie qu'on pourrait considérer comme une " perturbation ".

B. Mouvement permanent de révolution. — En mouvement plan si on suppose que le tourbillon ne dépend que d'une coordonnée (x ou r) on obtient des solutions qui sont dues à M. Jeffery. Au § 11 un procédé analogue est appliqué au mouvement de révolution. Étant donné la structure de l'équation de compatibilité cinématique pour le cas actuel, ce qui joue ici le rôle du tourbillon c'est la quantité

$$\frac{1}{r^2}\cdot D_2\psi \equiv \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial r}\right],$$

qui est égale au quotient du tourbillon par $\frac{r}{2}$. Je cherche donc les mouvements tels que $\frac{1}{r^2}\cdot D_2\psi$ ne dépende que d'une coordonnée. Parmi les solutions obtenues dans ce paragraphe il en est une très simple qui permet de représenter l'écoulement dans un vase parabolique.

(1) A la restriction énoncée ci-dessus près.

Si φ et χ désignent deux fonctions harmoniques conjuguées il existe en mouvement plan des solutions de la forme :

$$\psi = F(\varphi) \cdot \chi + G(\varphi).$$

Au § 12 je cherche des solutions de la même forme en mouvement de révolution. Ici, ce qui joue le rôle du Laplacien c'est l'opérateur D_2. Les fonctions φ et χ au lieu d'être harmoniques conjuguées seront donc astreintes à être solutions de l'équation

$$D_2 \psi = 0$$

et les courbes $\varphi = c^{te}$ et $\chi = c^{te}$ seront assujetties à être orthogonales.

C. Mouvement permanent spatial. — Un mouvement plan est celui qui par définition satisfait aux deux conditions suivantes :

1° les trajectoires sont situées dans des plans parallèles (au plan xOy par exemple) ;

2° le mouvement est identique dans les divers plans parallèles.

La première propriété se traduit par la condition :

$$w = 0,$$

la deuxième par le fait que les composantes de la vitesse ne dépendent pas de z.

Ces deux propriétés ne sont pas nécessairement liées. Au § 14 je suppose que l'on ne conserve que la première ; on a alors les mouvements " pseudo-plans de première espèce " où les composantes de la vitesse sont de la forme

$$u = u(x\,y\,z), \qquad v = v(x\,y\,z), \qquad w = 0.$$

J'établis la condition de compatibilité cinématique de la classe de mouvements ainsi constituée, classe très générale puisqu'elle contient le mouvement plan proprement dit comme cas particulier. La condition de compatibilité cinématique se traduit par deux équations aux dérivées partielles du 3^e ordre non linéaires que doit vérifier la fonction de courant $\psi(x\,y\,z)$. De nombreuses solutions particulières de ces équations sont données. En particulier j'obtiens un mouvement par droites qui sont parallèles dans un même plan $z = z_0$ (où elles constituent un courant uniforme) mais " tordues " les unes par rapport aux autres dans deux plans différents.

Au § 15 je suppose au contraire que seule la deuxième propriété subsiste. On a alors les mouvements " pseudo-plans de deuxième espèce " où les composantes de la vitesse sont de la forme

$$u = u(x\,y), \qquad v = v(x\,y), \qquad w = w(x\,y).$$

La classe de mouvement qu'on obtient ainsi est remarquable : en effet elle provient de la superposition d'un mouvement plan s'effectuant parallèlement au plan P, mouvement qui satisfait à l'équation de compatibilité cinématique pour le mouvement plan ordinaire et d'un mouvement par droites parallèles normales au plan P et de vitesse w. Ainsi à tout mouvement plan on peut associer un mouvement spatial, ne présentant pas en général de symétrie axiale. Une fois le mouvement plan connu, la détermination de w revient à l'intégration d'une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre du type elliptique. En particulier on peut prendre pour w le tourbillon du mouvement plan primitif, ce qui permet d'associer à tout mouvement plan connu un mouvement spatial sans qu'on ait d'autre calcul à effectuer que des dérivations. On a en même temps une représentation très suggestive du mouvement spatial associé au mouvement plan à l'aide du vecteur tourbillon du mouvement plan.

Aux §§ 16 et 17 j'applique au mouvement de révolution les procédés des §§ 14 et 15. On a d'abord (§ 16) les mouvements " pseudo-de révolution de première espèce " où les composantes de la vitesse sont de la forme

$$v_1 = v_1(r\,\theta\,z), \qquad v_2 = 0, \qquad v_3 = v_3(r\,\theta\,z),$$

et ensuite (§ 17) les mouvements "pseudo-de révolution de deuxième espèce " où les composantes de la vitesse sont :

$$v_1 = v_1(r\,z), \qquad v_2 = v_2(r\,z), \qquad v_3 = v_3(r\,z).$$

Ces derniers mouvements ne sont autres que les mouvements " symétriques par rapport à un axe " des auteurs italiens. Malheureusement on n'a pas ici les mêmes propriétés qu'en mouvement pseudo-plan de deuxième espèce : le mouvement dans le plan méridien n'est pas régit par la même équation que le mouvement de révolution ordinaire.

Au § 18 je cherche les mouvements dont le vecteur tourbillon ne dépend que de x, étendant ainsi à l'espace la solution de M. Jeffery déjà citée. J'obtiens deux familles de solutions spatiales dont l'une peut être explicitée à l'aide des transcendantes élémentaires, la connaissance de l'autre se ramenant à l'intégration de deux équations différentielles de Laplace du second ordre.

2. *Mouvement non permanent.*

A. Mouvement non permanent plan. — Au § 19 je cherche des mouvements plans non permanents tels qu'à chaque instant leur champ de vitesses soit le champ de vitesses d'un mouvement plan permanent. On peut dire des mouvements non permanents qui jouissent de cette propriété qu'ils admettent à chaque instant un mouvement permanent tangent. Je montre qu'il n'existe que deux solutions, qu'on peut expliciter, qui jouissent de cette propriété. Si on met de côté ces classes assez restreintes de mouvements, on voit donc qu'en général un mouvement plan non permanent n'admet pas à chaque instant de mouvement permanent tangent.

Le § 20 est consacré à certains mouvements plan non permanents qui jouissent de la propriété suivante : leurs lignes de courant ne changent pas de forme avec le temps et coïncident avec les trajectoires, tout comme en mouvement permanent ; en un point donné seule la grandeur de la vitesse change avec le temps mais non sa direction.

Les trois paragraphes suivants sont consacrés aux mouvements pour lesquels le tourbillon ne dépend outre le temps t que d'une seule coordonnée x, r, ou θ. On a ainsi l'extension au mouvement plan non permanent cette fois des solutions de M. Jeffery.

Les §§ 24 et 25 sont consacrés aux mouvements qui correspondent en mouvement non permanent aux solutions des §§ 7, 8, 9.

B. Mouvement non permanent de révolution. — Au § 26 je donne quelques mouvements admettant à chaque instant un mouvement permanent tangent.

Les deux paragraphes suivants sont consacrés aux mouvements où la quantité $\frac{1}{r^2}.D_2\psi$ qui joue le rôle du tourbillon au point de vue structure de l'équation de compatibilité ne dépend outre le temps que d'une seule coordonnée.

Au § 29 j'étudie les analogues en mouvement non permanent des solutions du § 12.

C. Mouvement non permanent spatial. — Le § 31 est consacré au mouvement pseudo-plan de première espèce non permanent, c'est-à-dire au mouvement où les composantes de la vitesse sont de la forme

$$u = u(x\, y\, z\, t), \qquad v = v(x\, y\, z\, t), \qquad w = 0.$$

On trouve en particulier un écoulement non permanent par droites qui sont à instant donné parallèles dans un même plan $z = z_0$ (où elles constituent un courant uniforme) mais " tordues " les unes par rapport aux autres dans deux plans différents.

Au § 32 j'étudie le mouvement pseudo-plan de deuxième espèce non permanent, c'est-à-dire le mouvement où les composantes de la vitesse sont de la forme :

$$u = u(x\, y\, t), \qquad v = v(x\, y\, t), \qquad w = w(x\, y\, t).$$

On a ici les mêmes propriétés que pour le mouvement pseudo-plan de deuxième espèce permanent ; on peut associer à tout mouvement plan non permanent s'effectuant parallèlement au plan P un mouvement spatial de la catégorie actuelle en ajoutant à ce mouvemen plan un mouvement par droites parallèles normales au plan P. En particulier on peut prendre comme vitesse du mouvement par droites parallèles le vecteur tourbillon du mouvement plan primitif.

Les §§ 33 et 34 sont consacrés aux mouvements pseudo-de révolution de première de deuxième espèce. Enfin au § 35 je cherche d'une manière analogue à ce qui a été fait en mouvement permanent les mouvements dont le tourbillon ne dépend que de t et de x (1).

(1) La Bibliographie est placée à la fin du mémoire. Les chiffres **en gras** y renvoient. Les ouvrages ou mémoires cités incidemment et qui ne traitent pas du sujet du présent travail figurent dans les notes au bas des pages et n'ont pas été compris dans la Bibliographie finale.

CHAPITRE PREMIER

GÉNÉRALITÉS

INTÉGRALES EXACTES CONNUES

1. Nous nous proposons tout d'abord de rappeler les équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible. En un point M de l'espace et au temps t soient $\vec{V}(M, t)$ la vitesse, $\vec{\gamma}(M, t)$ l'accélération, $p(M, t)$ la pression et $\vec{F}(M)$ la force extérieure rapportée à l'unité de masse ; nous désignons par μ le coefficient de viscosité, par ρ la masse spécifique et par

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

le coefficient de viscosité cinématique du fluide ; ces trois quantités sont des constantes. Les équations du mouvement ou équations de Navier-Stokes s'écrivent sous forme vectorielle (1) :

$$\vec{F} - \vec{\gamma} = \overrightarrow{\text{grad}} \frac{p}{\rho} - \nu . \Delta_2 \vec{V}.$$

A cette équation il faut joindre l'équation de continuité qui se traduit par la condition :

$$\text{div } \vec{V} = 0.$$

Nous supposons que la force F dépend d'un potentiel U, c'est-à-dire que l'on a :

$$\vec{F} = - \overrightarrow{\text{grad}}\, U.$$

En utilisant d'autre part l'expression bien connue de l'accélération et en posant

$$H = \frac{p}{\rho} + U + \frac{V^2}{2},$$

(1) Les notations vectorielles employées sont celles de l'ouvrage suivant : Châtelet et Kampé de Fériet, *Calcul vectoriel*, Paris, 1924.

les équations de Navier-Stokes prennent la forme :

$$-\overrightarrow{\text{grad}}\ H = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{V} \wedge \vec{V} + \nu . \overrightarrow{\text{rot}_2}\ \vec{V}. \qquad (1.\ 1)$$

Le symbole rot_n est défini de la manière suivante :

$$\overrightarrow{\text{rot}_n} = \overrightarrow{\text{rot}} . \overrightarrow{\text{rot}_{n-1}}.$$

Le tourbillon $\vec{\omega}$ que nous n'avons pas introduit dans l'équation (1. 1) est donné par :

$$2\vec{\omega} = \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{V}.$$

On peut éliminer la fonction H de l'équation (1. 1) en prenant le rotationnel des deux membres ; on obtient la relation :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \frac{\partial V}{\partial t} + \overrightarrow{\text{rot}} \left[\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{V} \wedge \vec{V} \right] + \nu . \overrightarrow{\text{rot}_3}\ \vec{V} = 0. \qquad (1.\ 2)$$

Dans cette équation qui exprime la condition de compatibilité des trois équations (1. 1), ne figurent plus que les éléments cinématiques du problème à l'exclusion des éléments dynamiques. Étant donné un champ de vecteurs $\vec{V}(M, t)$, l'équation (1. 2) est la condition nécessaire et suffisante pour que ce champ de vecteurs puisse être le champ de vecteurs vitesses d'un mouvement de fluide visqueux incompressible. Nous appellerons l'équation (1. 2) : " *l'équation de compatibilité cinématique* ".

On voit que la détermination complète d'un mouvement de fluide visqueux incompressible se ramène à deux problèmes successifs : d'abord détermination du champ de vitesses par l'équation de compatibilité cinématique ; ensuite détermination de la pression, c'est-à-dire de la fonction H par l'équation (1. 1), ce second problème n'offrant plus aucune difficulté, puisqu'il s'agit de la détermination d'une fonction $H(x\,y\,z\,t)$ connaissant les valeurs de ses dérivées partielles $\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y}, \frac{\partial H}{\partial z},$ quand on est assuré que ces valeurs sont compatibles ; par ailleurs si on fait abstraction des conditions aux limites et si on ne considère que les équations indéfinies, la fonction H n'est déterminée qu'à une fonction additive de t près.

Remarquons ce fait immédiat sur l'équation (1. 2) que tout mouvement potentiel convient à un fluide visqueux incompressible. Notons encore que s'il s'agit d'un fluide parfait, l'équation du mouvement et l'équation de compatibilité cinématique s'obtiennent en faisant $\nu = 0$ respectivement dans les équations (1. 1) et (1. 2) ; on obtient ainsi les équations :

$$-\overrightarrow{\text{grad}}\ \text{H} = \frac{\partial \vec{\text{V}}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{\text{V}} \wedge \vec{\text{V}},$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \frac{\partial \vec{\text{V}}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{rot}} \left[\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{\text{V}} \wedge \vec{\text{V}} \right] = 0.$$

Nous écrirons les équations (1. 1) et (1. 2) dans les trois systèmes de coordonnées suivants :

1° Le système des coordonnées cartésiennes rectangulaires $x\ y\ z$; dans ce système les composantes de la vitesse seront désignées respectivement par u, v, w et celles du tourbillon par ξ, η, ζ.

2° Le système des coordonnées cylindriques $r\ \theta\ z$; les composantes de la vitesse suivant les vecteurs unitaires $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ de ce système (fig. 1) seront désignées respectivement par v_1, v_2, v_3, celles du tourbillon par ξ_1, ξ_2, ξ_3.

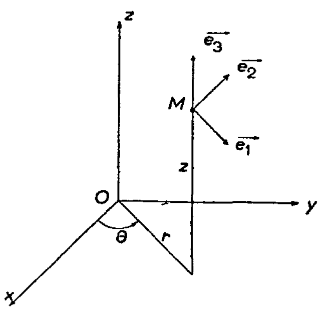

FIG. 1.

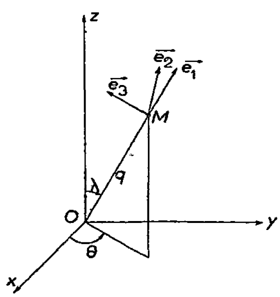

FIG. 2.

3° Le système des coordonnées en σ ; nous appelons ainsi le système de coordonnées $q\ \theta\ \sigma$ déduit des coordonnées polaires dans l'espace $q\ \theta\ \lambda$ en remplaçant λ par son cosinus :

$$\sigma = \cos \lambda.$$

Les composantes de la vitesse suivant les vecteurs unitaires $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ de ce système (fig. 2) seront désignées respectivement par v_1, v_2, v_3, celles du tourbillon par ξ_1, ξ_2, ξ_3 (1).

(1) Les notations employées pour les composantes de la vitesse et celles du tourbillon dans les deux derniers systèmes ne sont pas homogènes avec les notations du premier système où nous avons cru devoir suivre l'usage courant.

Dans le présent travail nous supposerons en général que les solutions considérées sont régulières dans leur domaine d'existence ; une solution $u(xyzt)$, $v(xyzt)$, $w(xyzt)$ sera dite régulière dans un domaine si les composantes $u\,v\,w$ ainsi que celles de leurs dérivées partielles qui figurent dans l'équation du mouvement et dans l'équation de compatibilité cinématique sont continues dans ce domaine. (Il s'agit donc au plus de dérivées partielles du 3e ordre).

2. Mouvement plan.

On suppose que les trajectoires sont contenues dans des plans parallèles au plan xOy et que le mouvement est identique dans ces divers plans parallèles, c'est-à-dire que les composantes de la vitesse ne dépendent pas de z. En coordonnées cartésiennes rectangulaires ces composantes sont donc de la forme :

$$u = u\,(x\,y\,t), \qquad v = v\,(x\,y\,t), \qquad w = 0.$$

L'équation de continuité qui s'écrit ici

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

montre qu'il existe une fonction de courant $\psi(x\,y\,t)$, déterminée à une fonction additive de t près et telle que l'on ait :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{2. 1}$$

Les composantes du tourbillon sont données par

$$2\xi = 0, \qquad 2\eta = 0, \qquad 2\zeta = -\Delta_2\psi,$$

en désignant par $\Delta_2\psi$ le Laplacien de ψ :

$$\Delta_2\psi \equiv \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}.$$

L'équation de compatibilité cinématique (1. 2) devient ici :

$$\nu\Delta_4\psi + \frac{D(\psi, \Delta_2\psi)}{D(x, y)} - (\Delta_2\psi)'_t = 0, \tag{2. 2}$$

où on a posé

$$\Delta_4 = \Delta_2 . \Delta_2 .$$

L'équation (1. 1) montre que la fonction H ne dépend pas de z :

$$H = H(x\,y\,t),$$

et elle donne les deux équations :

$$H'_x = -\psi''_{yt} + \psi'_x . \Delta_2\psi + \nu(\Delta_2\psi)'_y, \tag{2. 3}$$

$$H'_y = \psi''_{xt} + \psi'_y . \Delta_2\psi - \nu(\Delta_2\psi)'_x. \tag{2. 4}$$

Employons maintenant les coordonnées polaires r, θ. Les composantes $v_1\, v_2\, v_3$ de la vitesse suivant les vecteurs unitaires $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ (fig. 1) sont de la forme :

$$v_1 = v_1(r\ \theta\ t), \qquad v_2 = v_2(r\ \theta\ t), \qquad v_3 = 0.$$

L'équation de continuité s'écrit ici :

$$\frac{\partial(rv_1)}{\partial r} + \frac{\partial v_2}{\partial\theta} = 0.$$

Elle montre qu'il existe une fonction de courant $\psi(r\ \theta\ t)$ qui n'est d'ailleurs autre que la transformée de la fonction de courant $\psi\ (x\ y\ t)$ ci-dessus, telle que l'on ait :

$$v_1 = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \qquad v_2 = -\frac{\partial\psi}{\partial r}. \tag{2. 5}$$

L'équation de compatibilité cinématique s'écrit :

$$\nu\Delta_4\psi + \frac{1}{r}\frac{D(\psi,\ \Delta_2\psi)}{D(r,\ \theta)} - (\Delta_2\psi)'_t = 0, \tag{2. 6}$$

où $\Delta_2\psi$ désigne encore le Laplacien de ψ :

$$\Delta_2\psi \equiv \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}.$$

Enfin les équations (2. 3) et (2. 4) sont remplacées par les suivantes qui déterminent la fonction $H = H\ (r,\ \theta,\ t)$:

$$H'_r = -\frac{1}{r}\,\psi''_{\theta t} + \psi'_r\ .\ \Delta_2\psi + \frac{\nu}{r}\cdot(\Delta_2\psi)'_\theta, \tag{2. 7}$$

$$\frac{1}{r}\,H'_\theta = \psi''_{rt} + \frac{1}{r}\,\psi'_\theta\ .\ \Delta_2\psi - \nu(\Delta_2\psi)'_r. \tag{2. 8}$$

Pour qu'un mouvement soit physiquement acceptable il faut que dans tout le domaine occupé par le fluide les composantes de la vitesse et la pression p soient uniformes. Si on suppose que le fluide s'étend à un domaine où θ peut varier de 0 à 2π, il faudra s'assurer que les formules (2. 5) donnent pour les composantes de la vitesse des fonctions uniformes. D'autre part, si nous supposons que le potentiel U des forces extérieures est uniforme, l'uniformité de la pression p nécessite l'uniformité de la fonction H. Il faudra donc s'assurer que les équations (2. 7) et (2. 8) donnent pour H une fonction uniforme. Ces conditions d'uniformité à réaliser pourront imposer dans certains cas à la fonction ψ de satisfaire à des conditions plus restrictives que l'équation (2. 6).

En mouvement permanent les équations (2. 2) et (2. 6) s'écrivent respectivement :

$$\nu \Delta_4 \psi + \frac{D(\psi, \Delta_2 \psi)}{D(x\, y)} = 0, \tag{2. 9}$$

$$\nu \Delta_4 \psi + \frac{1}{r} \frac{D(\psi, \Delta_2 \psi)}{D(r, \theta)} = 0. \tag{2. 10}$$

On peut déduire de l'équation (2. 2) un résultat touchant la symétrie des champs de vitesse de fluides visqueux. On peut considérer deux sortes de symétrie : d'abord celle où en deux points symétriques par rapport à l'axe de symétrie les vecteurs vitesses ont des directions symétriques mais des sens opposés à ceux que donnerait la symétrie ; nous appellerons cette symétrie la symétrie incomplète. En deuxième lieu les vecteurs vitesses en deux points symétriques peuvent avoir les directions et les sens donnés par la symétrie ; nous dirons alors qu'il y a symétrie complète. Par exemple l'écoulement plan potentiel avec une circulation autour d'un cylindre circulaire, la vitesse au loin étant parallèle à Ox, présente une symétrie incomplète par rapport à Oy. L'écoulement à la Helmholtz autour d'une plaque plane placée suivant Oy, la vitesse au loin étant normale à la plaque, présente une symétrie complète par rapport à Ox. Enfin le mouvement plan potentiel sans circulation autour d'un cylindre circulaire, la vitesse au loin étant parallèle à Ox, présente une symétrie incomplète par rapport à Oy et une symétrie complète par rapport à Ox.

Pour qu'il y ait symétrie incomplète par rapport à Oy par exemple, il faut qu'en changeant x en $-x$, ψ ne change pas. On voit facilement sur l'équation (2. 2) que cela n'est pas possible en général et ne le devient que quand le Jacobien qui figure dans cette équation est nul, c'est-à-dire quand on a affaire à des mouvements entièrement déterminés par M. Kampé de Fériet (**21, 23**) [1]. —

[1] Les chiffres **en gras** renvoient à la Bibliographie placée à la fin du mémoire.

Pour qu'il y ait symétrie complète par rapport à Ox par exemple il faut qu'en changeant y en $-y$, ψ se change en $-\psi$. On voit sur l'équation (2. 2) que cela est possible.

En résumé la symétrie incomplète est en général impossible dans les mouvements de fluide visqueux incompressibles alors que la symétrie complète reste possible.

3. Mouvement de révolution.

On suppose que les trajectoires sont contenues dans des plans passant par Oz et que le mouvement est identique dans ces divers plans, c'est-à-dire que les composantes de la vitesse ne dépendent pas de θ. En coordonnées cylindriques (fig. 1) ces composantes sont donc de la forme :

$$v_1 = v_1\,(r\ z\ t), \qquad v_2 = 0, \qquad v_3 = v_3\,(r\ z\ t).$$

L'équation de continuité s'écrit ici :

$$\frac{\partial(rv_1)}{\partial r} + \frac{\partial(rv_3)}{\partial z} = 0.$$

Elle montre qu'il existe une fonction de courant ψ (r, z, t) déterminée à une fonction additive de t près telle que :

$$v_1 = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z}, \qquad v_3 = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r}. \tag{3. 1}$$

Les composantes du tourbillon sont données par :

$$2\xi_1 = 0, \qquad 2\xi_2 = \frac{1}{r}\,D_2\psi, \qquad 2\xi_3 = 0,$$

où on a posé

$$D_2\psi \equiv \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

L'équation de compatibilité cinématique (1. 2) devient ici :

$$\nu D_4\psi + r\,\frac{D\left(\psi,\ \frac{1}{r^2}\,D_2\psi\right)}{D(r, z)} - (D_2\psi)'_t = 0\ ^{(1)}. \tag{3. 2}$$

équation où on a posé :

$$D_4 = D_2\,.\,D_2.$$

---

(1) Si le fluide s'étend jusque sur l'axe Oz et s'il n'existe aucune singularité sur cet axe (sources), Oz doit être une ligne de courant.

L'équation (1. 1) montre que la fonction H ne dépend pas de θ :

$$\mathrm{H} = \mathrm{H}\,(r\,z\,t)$$

et elle donne les deux équations :

$$\mathrm{H}'_r = -\frac{1}{r}\psi''_{zt} + \frac{1}{r^2}\cdot\psi'_r.\mathrm{D}_2\psi + \frac{\nu}{r}(\mathrm{D}_2\psi)'_z, \tag{3. 3}$$

$$\mathrm{H}'_z = \frac{1}{r}\psi''_{rt} + \frac{1}{r^2}\psi'_z.\mathrm{D}_2\psi - \frac{\nu}{r}(\mathrm{D}_2\psi)'_r. \tag{3. 4}$$

Employons maintenant les coordonnées en σ. Les composantes v_1 v_2 v_3 de la vitesse suivant les vecteurs unitaires $\vec{e}_1\,\vec{e}_2\,\vec{e}_3$ (fig. 2) sont de la forme :

$$v_1 = v_1\,(q\,\sigma\,t), \qquad v_2 = 0, \qquad v_3 = v_3\,(q\,\sigma\,t).$$

L'équation de continuité s'écrit ici :

$$\frac{\partial(q^2 v_1)}{\partial q} + \frac{\partial\left(q\sqrt{1-\sigma^2}\,v_3\right)}{\partial\sigma} = 0.$$

Cette équation montre qu'il existe une fonction de courant $\psi(q\,\sigma\,t)$ qui n'est d'ailleurs que la transformée de la fonction de courant $\psi(r\,z\,t)$ ci-dessus, telle que l'on ait :

$$v_1 = \frac{1}{q^2}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}, \qquad v_3 = -\frac{1}{q\sqrt{1-\sigma^2}}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial q}. \tag{3. 5}$$

Les composantes du tourbillon sont données par :

$$2\xi_1 = 0, \qquad 2\xi_2 = \frac{1}{q\sqrt{1-\sigma^2}}.\mathrm{D}_2\psi, \qquad 2\xi_3 = 0,$$

où D_2 est le même opérateur que ci-dessus ; avec les variables actuelles on a :

$$\mathrm{D}_2\psi \equiv \frac{\partial^2\psi}{\partial q^2} + \frac{1-\sigma^2}{q^2}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma^2}.$$

L'équation de compatibilité cinématique (1. 2) devient ici :

$$\nu\mathrm{D}_4\psi + (1-\sigma^2)\,\frac{\mathrm{D}\left[\psi,\ \dfrac{1}{q^2(1-\sigma^2)}\,\mathrm{D}_2\psi\right]}{\mathrm{D}[q,\,\sigma]} - (\mathrm{D}_2\psi)'_t = 0, \tag{3. 6}$$

où l'on a posé

$$\mathrm{D}_4 = \mathrm{D}_2.\mathrm{D}_2.$$

L'équation (1. 1) donne pour déterminer la fonction $H(q\ \sigma\ t)$ les deux équations :

$$H'_q = -\frac{1}{q^2}\cdot\psi''_{\sigma t} + \frac{1}{q^2(1-\sigma^2)}\cdot\psi'_q\cdot D_2\psi + \frac{\nu}{q^2}(D_2\psi)'_\sigma, \quad (3.\ 7)$$

$$H'_\sigma = \frac{1}{1-\sigma^2}\cdot\psi''_{qt} + \frac{1}{q^2(1-\sigma^2)}\cdot\psi'_\sigma\cdot D_2\psi - \frac{\nu}{1-\sigma^2}\cdot(D_2\psi)'_q. \quad (3.\ 8)$$

Si le mouvement est permanent les équations (3. 2) et (3. 6) s'écrivent respectivement :

$$\nu D_4\psi + r\,\frac{D\left(\psi, \frac{1}{r^2}D_2\psi\right)}{D(r, z)} = 0, \qquad (3.\ 9)$$

$$\nu D_4\psi + (1-\sigma^2)\,\frac{D\left[\psi, \frac{1}{q^2(1-\sigma^2)}D_2\psi\right]}{D[q, \sigma]} = 0. \quad (3.\ 10)$$

Comme en mouvement plan on peut déduire de l'équation (3. 2) que la symétrie incomplète par rapport au plan xOy est impossible à moins que le Jacobien qui figure dans cette équation ne soit nul. Par contre la symétrie complète par rapport au plan xOy est possible.

4. Intégrales exactes connues du mouvement permanent.

Nous allons maintenant passer en revue les intégrales exactes connues des équations de Navier-Stokes, sans insister sur celles qui sont banales et depuis longtemps classiques. Le paragraphe actuel sera consacré aux intégrales exactes du mouvement permanent et le paragraphe suivant aux intégrales exactes du mouvement non permanent. Dans chacun de ces deux cas nous distinguerons les intégrales exactes du mouvement plan, celles du mouvement de révolution et enfin celles du " mouvement spatial ", c'est-à-dire du mouvement qui n'est ni plan ni de révolution.

A. Mouvement permanent plan.

L'équation de compatibilité cinématique pour le mouvement plan permanent s'écrit :

$$\nu\Delta_4\psi + \frac{D(\psi, \Delta_2\psi)}{D(x, y)} = 0. \qquad (2.\ 9)$$

Nous allons passer en revue les solutions exactes connues de cette équation.

1° On a d'abord la solution immédiate où le tourbillon est constant partout, c'est-à-dire où l'on a :

$$\Delta_2 \psi = K,$$

K désignant une constante ; les composantes de la vitesse $u(x\ y)$, $v(x\ y)$ sont des fonctions harmoniques.

2° Une solution classique est constituée par le mouvement par droites parallèles (mouvement laminaire) ; si on prend l'axe Ox parallèle à la direction commune des trajectoires, la fonction de courant est de la forme :

$$\psi = Ay^3 + By^2 + Cy, \qquad (4.\ 1)$$

A B C désignant des constantes arbitraires. Les composantes de la vitesse sont de la forme :

$$u = 3Ay^2 + 2By + C, \qquad v = 0.$$

3° Une autre solution également classique est le mouvement par cercles concentriques [1] ; si on suppose les cercles centrés sur l'origine, la fonction de courant est de la forme :

$$\psi = A.r^2 \log r + B \log r + Cr^2, \qquad (4.\ 2)$$

A B C désignant des constantes arbitraires. Toutefois l'uniformité de la quantité $\frac{p}{\rho} + U$ nécessite que l'on prenne dans cette solution $A = 0$; dans ce cas le mouvement est d'ailleurs à tourbillon constant ; les composantes de la vitesse sont en coordonnées polaires :

$$v_1 = 0, \qquad v_2 = -2Cr - \frac{B}{r}.$$

D'autre part si le fluide s'étend jusqu'au point O, il faut prendre $B = 0$ pour éviter la valeur infinie de la vitesse en ce point.

M. Kampé de Fériet a démontré (**21**) que les trois classes de mouvements ci-dessus sont les seuls mouvements plans permanents qui conviennent à la fois aux fluides visqueux et aux fluides parfaits, c'est-à-dire pour lesquels la fonction de courant ψ vérifie en même

---

[1] M. Cisotti a montré (**11**) que tout mouvement spatial — permanent ou non — dont les trajectoires sont des cercles parallèles au plan xOy et ayant leurs centres sur Oz se réduisait nécessairement à un mouvement plan.

temps l'équation (2. 9) et l'équation analogue pour les fluides parfaits qu'on obtient en faisant $\nu = 0$ dans l'équation (2. 9) ; autrement dit ψ doit vérifier les deux équations :

$$\Delta_4 \psi = 0$$

et

$$\frac{D(\psi, \Delta_2 \psi)}{D(x, y)} = 0.$$

On peut dire aussi que ces mouvements sont les seuls mouvements plans permanents de fluides visqueux incompressibles pour lesquels le tourbillon est constant le long d'une ligne de courant.

4° H. Hamel (**16**, p. 35) a recherché les mouvements dont les lignes de courant sont des courbes harmoniques sans que le mouvement soit irrotationnel. Si on prend les coordonnées « isométriques » $\varphi(x\, y)$ et $\chi(x\, y)$, telles que $\varphi + i\chi$ soit une fonction analytique de $x + iy$, l'équation de compatibilité cinématique (2. 9) prend la forme suivante :

$$\nu[\Delta'\Delta'\psi + 2a(\Delta'\psi)'_\varphi - 2b(\Delta'\psi)'_\chi + (a^2 + b^2)\Delta'\psi] + \frac{D(\psi, \Delta'\psi)}{D(\varphi, \chi)} - \Delta'\psi(a\psi'_\chi + b\psi'_\varphi) = 0. \quad (4.\ 3)$$

Dans cette équation on a posé

$$\Delta' = \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\chi^2} ;$$

quant aux quantités a et b elles sont définies de la façon suivante. Posons :

$$\varphi + i\chi = w(x + iy) = w(z) ;$$

$a + ib$ est une fonction analytique définie par l'équation :

$$a + ib = \frac{2\,\dfrac{d^2w}{dz^2}}{\left(\dfrac{dw}{dz}\right)^2}. \qquad (4.\ 4)$$

Un calcul facile permet de voir que l'on a d'autre part :

$$a = (\text{Log } Q)'_\varphi, \qquad b = -(\text{Log } Q)'_\chi,$$

$Q = \Delta_1\varphi = \Delta_1\chi$ désignant le premier paramètre différentiel de la fonction φ.

L'hypothèse de M. Hamel énoncée ci-dessus revient à supposer que la fonction de courant ψ ne dépend que de φ :

$$\psi = F(\varphi). \tag{4. 5}$$

Si on fait cette supposition on peut montrer que l'équation (4. 3) nécessite que a et b soient constants ; les fonctions φ et χ ont alors pour expression en supposant que $a^2 + b^2 \neq 0$:

$$\varphi = -\frac{2}{a^2 + b^2}(a \operatorname{Log} r + b\theta), \quad \chi = \frac{2}{a^2 + b^2}(b \operatorname{Log} r - a\theta). \tag{4. 6}$$

Si $a = b = 0$ les fonctions φ et χ se réduisent respectivement à x et y :

$$\varphi = x, \qquad \chi = y. \tag{4. 7}$$

On obtient donc les mouvements suivants :

1° Le mouvement où les lignes de courant sont des spirales logarithmiques

$$a \operatorname{Log} r + b\theta = C^{te},$$

ayant l'origine comme point asymptote et homothétiques les unes des autres avec leurs dégénérescences : droites concourantes en O, cercles concentriques centrés sur O ;

2° Le mouvement laminaire par droites parallèles qui correspond au cas où $a = b = 0$.

Examinons le mouvement par spirales logarithmiques ; en modifiant légèrement les notations la fonction de courant est de la forme :

$$\psi = F(a \operatorname{Log} r + b\theta).$$

L'équation de compatibilité cinématique (2. 9) donne pour la fonction F l'équation différentielle

$$\nu(a^2 + b^2)F''' - 4a\nu F'' + 4\nu F' + bF'^2 = C, \tag{4. 8}$$

C désignant une constante. Ce mouvement a été étudié par divers auteurs (Cf. **16**, pp. 47-70 ; **17**, **26**, **27**).

Dans le cas particulier du mouvement par droites concourantes la fonction de courant est de la forme :

$$\psi = F(\theta),$$

la fonction F vérifiant l'équation différentielle

$$\nu F''' + 4\nu F' + F'^2 = C.$$

Cette équation s'intègre immédiatement par les fonctions elliptiques ; on obtient :

$$F' = -2\nu + p\left[\frac{i}{\sqrt{6\nu}}(\theta - \theta_0) \; ; \; g_2 \, g_3\right],$$

$\theta_0 \; g_2 \; g_3$ désignant des constantes d'intégration (Cf. **16**, pp. 41-46 ; **7**, pp. 19-21).

5° M. Jeffery a cherché (**19**) les mouvements pour lesquels les lignes d'équation $\Delta_2\psi = C$ qu'on peut appeler lignes iso-tourbillons sont des courbes harmoniques, c'est-à-dire pour lesquels on a

$$\Delta_2\psi = f(\varphi),$$

où φ est une fonction harmonique :

$$\Delta_2\varphi = 0.$$

On trouve [1] qu'il n'y a que deux familles possibles (en mettant de côté le cas banal $\Delta_2\psi = K$), les lignes iso-tourbillons ne pouvant être que des droites parallèles ou des cercles concentriques [2] ; la fonction de courant est donnée pour la première famille par :

$$\psi = \nu(2Ax + B)y + C\int dx \int dx \int e^{Ax^2 + Bx} dx + Dx^2 + Ex, \tag{4. 9}$$

A B C D E désignent des constantes arbitraires. Si $A = B = 0$ on retrouve le mouvement laminaire.

Pour la deuxième famille la fonction de courant est donnée par :

$$\psi = \nu(2A \operatorname{Log} r + B)\theta + C\int \frac{dr}{r} \int r dr \int e^{A(\operatorname{Log} r)^2 + B \operatorname{Log} r} \frac{dr}{r} + Dr^2 + E \operatorname{Log} r, \tag{4. 10}$$

où A B C D E désignent des constantes arbitraires. Si $A = B = 0$ on retrouve le mouvement par cercles concentriques.

Dans le cas du mouvement (4. 10), si θ varie de 0 à 2π, l'uniformité de la vitesse nécessite que l'on ait :

$$A = 0.$$

---

(1) Le problème mathématique a été résolu par G.-N. Watson.

(2) Ceci montre en particulier que les lignes iso-tourbillons ne peuvent être des droites concourantes, c'est-à-dire que l'on ne peut avoir $\Delta_2\psi = f(\theta)$, $(f' \neq 0)$. Il est facile de vérifier ce résultat directement.

L'uniformité de $\frac{p}{\rho} + U$ nécessite que l'on ait de plus :

$$D = 0,$$

et on a finalement les solutions suivantes : si $B \neq -2{,}0$:

$$\psi = \nu B\theta + Cr^{B+2} + E \operatorname{Log} r \qquad (4.\ 11)$$

et si $B = -2$:

$$\psi = -2\nu\theta + C(\operatorname{Log} r)^2 + E \operatorname{Log} r. \qquad (4.\ 12)$$

Ces mouvements ont été aussi rencontrés par M. Hamel (**16**, p. 51).

6° M. Oseen généralise l'hypothèse (4. 5) de M. Hamel en posant (**28** *a*) :

$$\psi = F(\varphi) + C\chi, \qquad (4.\ 13)$$

C désignant une constante et φ et χ les fonctions (4. 6). La fonction F doit satisfaire à l'équation différentielle :

$$\nu F''' + (2a\nu - C)F'' + \left[\nu(a^2 + b^2) - aC\right]F' - \frac{b}{2}F'^2 = K,$$

K désignant une constante d'intégration, équation qui ne diffère de l'équation (4. 8) que par la valeur des coefficients constants. M. Oseen considère le cas particulier où l'on a :

$$C = 2a\nu.$$

Le problème s'intègre par des fonctions elliptiques et conduit en particulier à un mouvement dont les lignes de courant sont curieusement compliquées et qu'on pourrait appeler mouvement « pseudo-turbulent » [1].

7° M. Rosenblatt (**32**) a étudié les mouvements pour lesquels on a :

$$\psi = F(\varphi)\chi + G(\varphi), \qquad (4.\ 14)$$

φ et χ désignant des fonctions harmoniques conjuguées ; on suppose que a et b selon la notation (4. 4) sont constants. En mettant de côté les mouvements irrotationnels et les mouvements du type (4. 13), on trouve qu'il faut que l'on ait :

$$b = 0.$$

---

[1] Cf. Oseen, *Das Turbulenzproblem*, *Congrès de Stockholm*, t. I, pp. 3-22, fig. 1, p. 4.

Si l'on suppose $a \neq 0$ on a alors les solutions de la forme :

$$\psi = F(\text{Log } r)\theta + G(\text{Log } r).$$

L'équation de compatibilité cinématique montre que les fonctions F et G satisfont aux équations :

$$\nu F^{IV} - 4\nu F''' + 4\nu F'' + F'F'' - FF''' + 2FF'' = 0,$$
$$\nu G^{IV} - 4\nu G''' + 4\nu G'' + G'F'' - FG''' + 2FG'' = 0.$$

Si le fluide s'étend à un domaine où θ varie de 0 à 2π, l'uniformité de la vitesse nécessite que l'on prenne :

$$F = C,$$

C désignant une constante et on retombe alors sur les solutions (4. 11) et (4. 12).

8° Mais on peut supposer que l'on a non seulement $b = 0$ mais aussi $a = 0$. Dans ce cas (Cf. 1, p. 247), la fonction de courant est de la forme :

$$\psi = F(x)y + G(x). \qquad (4.\ 15)$$

L'équation de compatibilité cinématique montre que les fonctions F et G vérifient les équations suivantes (qui s'intègrent d'ailleurs immédiatement une fois) :

$$\nu F^{IV} + F'F'' - FF''' = 0, \qquad (4.\ 16)$$
$$\nu G^{IV} + G'F'' - FG''' = 0. \qquad (4.\ 17)$$

Une fois la première de ces équations intégrée, la deuxième est une équation linéaire en G. Cette deuxième équation admet d'ailleurs la solution particulière évidente

$$G = C.\ F,$$

C désignant une constante. Une solution particulière de l'équation (4. 16) est :

$$F = -\frac{6\nu}{x},$$

à laquelle correspond la fonction de courant :

$$\psi = -6\nu\frac{y}{x} + C_1x^3 + \frac{C_2}{x} + \frac{C_3}{x^2}, \qquad (4.\ 18)$$

$C_1\ C_2\ C_3$ désignant des constantes.

Le cas où l'on a $G = 0$, c'est-à-dire celui où la fonction de courant est de la forme

$$\psi = F(x).y$$

peut servir à représenter le mouvement d'un fluide visqueux au voisinage d'un point de stagnation (**5**, p. 65, cf. aussi **31**).

On remarquera que la solution (4. 15) des équations exactes est en même temps solution des équations de la couche limite [1]. A ce titre l'équation (4. 16) a été étudiée et intégrée numériquement (Blasius, Hiemenz).

B. Mouvement permanent de révolution.

L'équation de compatibilité cinématique pour le mouvement permanent de révolution s'écrit :

$$\nu D_4\psi + r\frac{D\left(\psi, \frac{1}{r^2}D_2\psi\right)}{D(r, z)} = 0, \qquad (3.9)$$

où l'on a posé

$$D_2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}.$$

Les solutions connues sont ici moins nombreuses que dans le cas du mouvement plan.

1° On a d'abord la solution bien connue constituée par le mouvement par droites parallèles à Oz (mouvement de Poiseuille) ; la fonction de courant a pour expression :

$$\psi = Ar^2 \operatorname{Log} r + Br^4 + Cr^2, \qquad (4.19)$$

A B C désignant des constantes arbitraires. La vitesse, parallèle à Oz, est donnée par :

$$v_3 = -\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial r} = -2A\operatorname{Log} r - 4Br^2 - (A + 2C).$$

Si le fluide s'étend jusque sur l'axe Oz, il faut prendre $A = 0$ pour éviter la valeur infinie de la vitesse sur cet axe. On a alors la distribution parabolique de la vitesse.

2° M. Crudeli (**13**, **14**, **15**) a déterminé les solutions pour lesquelles on a :

$$D_2\psi = Kr^2, \qquad (4.20)$$

---

(1) A condition d'intervertir x et y si la paroi au voisinage de laquelle se trouve la couche limite est placée suivant Ox comme on le suppose habituellement.

K désignant une constante ; on voit facilement que l'équation (3. 9) est alors satisfaite. Cette solution correspond (du point de vue de la manière de satisfaire aux équations) à la solution à tourbillon constant du mouvement plan. On peut facilement obtenir pour la fonction de courant un développement formel qui s'écrit :

$$\psi = \psi_1 + \sum_k r \left[A_k J_1(kr) + B_k Y_1(kr)\right]\left[C_k e^{kz} + D_k e^{-kz}\right],$$

où J_1 et Y_1 désignent les fonctions de Bessel (1) d'ordre un, de première et de deuxième espèce, $A_k\, B_k\, C_k\, D_k$ des constantes arbitraires, et où ψ_1 désigne une solution particulière de l'équation (4. 20). On peut prendre par exemple (M. Crudeli) :

$$\psi_1 = Er^4 + Fr^2,$$

E et F désignant des constantes.

On remarquera que les deux classes de mouvements ci-dessus conviennent à la fois aux fluides parfaits et aux fluides visqueux. On n'a pas observé jusqu'à présent, du moins à ma connaissance, que le tourbillon sphérique de Hill (2) est un cas particulier de la classe actuelle et convient par conséquent non seulement aux fluides parfaits mais aussi aux fluides visqueux. Dans le tourbillon sphérique de Hill la fonction de courant est de la forme :

$$\psi = Ar^2[a^2 - (r^2 + z^2)],$$

A et a désignant des constantes et par suite l'on a :

$$D_2\psi = -10Ar^2,$$

ce qui est bien de la forme (4. 20).

3° M. Strakhovitch cherche (**38**) les mouvements pour lesquels le tourbillon ne dépend que de r, c'est-à-dire pour lesquels on a :

$$D_2\psi = f(r). \tag{4. 21}$$

On remarquera que cette hypothèse est la généralisation de l'hypothèse (4. 20). Elle correspond à l'hypothèse qui conduit aux solutions (4. 9) et (4. 10) de M. Jeffery pour le mouvement plan. On

(1) Les notations employées pour les fonctions de Bessel dans le présent mémoire sont celles de l'ouvrage de MM. Whittaker et Watson, *Modern Analysis*, 4e éd., 1927, § 17.

(2) Lamb, *Hydrodynamics*, 5e éd. 1924, § 165, p. 227 ; Villat, *Leçons sur la théorie des tourbillons*, p. 199. On sait que dans le tourbillon sphérique de Hill on prend le champ donné ci-dessus à l'intérieur de la sphère ayant pour centre l'origine et pour rayon a. A l'extérieur de cette sphère on prend l'écoulement potentiel avec vitesse uniforme au loin. Par un choix convenable de la constante A il est possible de rendre les vitesses continues au passage de la sphère.

trouve [1] que ces mouvements se composent des mouvements précédents (4. 20) et de la famille ci-dessous :

$$\psi = \nu(2Ar^2 + B)z + C\int rdr \int rI(r)dr + Dr^4 + Er^2, \quad (4.22)$$

où A B C D E désignent des constantes arbitraires et où $I(r)$ désigne la fonction

$$I(r) = \int e^{Ar^2} . r^{B-3} dr,$$

qui n'est autre que la fonction Gamma incomplète [2].

4° MM. Witoszynski et Szymanski (**40**, cf. aussi **37**) ont examiné les mouvements pour lesquels la fonction de courant est de la forme :

$$\psi = A(r)z + B(r). \quad (4.23)$$

L'équation de compatibilité montre que les fonctions A et B satisfont à deux équations différentielles qu'on peut écrire sous la forme suivante en prenant $s = r^2$ comme variable indépendante :

$$2\nu sA''' + 2\nu A'' - AA'' + A'^2 = K_1,$$
$$2\nu sB''' + 2\nu B'' - AB'' + B'A' = K_2,$$

K_1 et K_2 désignant des constantes et les primes des dérivations par rapport à s. La solution (4. 22) est un cas particulier de la famille actuelle. [3]

C. Mouvement permanent spatial.

1° Le mouvement par droites parallèles sans symétrie axiale constitue une solution de la catégorie actuelle ; supposons que l'on ait pris l'axe Oz parallèle à la direction commune des trajectoires ; on a pour les composantes de la vitesse :

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad w = w(x\ y),$$

[1] J'avais donné moi-même (**30**) cette solution sans avoir connaissance du travail de M. Strakhovitch, à qui appartient la priorité.

[2] Whittaker and Watson, *Modern Analysis*, p. 341.

[3] Il convient de citer ici un travail (**41**) de M. Szymanski où cet auteur étudie un mouvement permanent de révolution qu'il utilise pour représenter l'écoulement dans un cône circulaire ; la fonction de courant est donnée sous la forme d'un développement:

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n . f_n(\sigma) . q^{-n},$$

les A_n désignant des constantes. On remarquera que cette solution ne rentre pas dans la définition que nous avons acceptée pour l'intégrale exacte. D'ailleurs M. Szymanski n'a point démontré la convergence du développement ci-dessus.

la fonction $w(x\,y)$ étant solution de l'équation de Poisson :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = K, \tag{4. 24}$$

où K désigne une constante ; la pression est donnée par :

$$\frac{p}{\rho} + U = \nu K z + K_1,$$

où K_1 désigne une constante. Remarquons que ce mouvement convient à la fois à un fluide visqueux et à un fluide parfait.

2° M. Strakhovitch a trouvé (39) certains mouvements spatiaux en supposant que les trajectoires sont tracées sur des cylindres d'axe Oz et que les composantes de la vitesse ne dépendent pas de z. Les composantes de la vitesse sont donc en coordonnées cylindriques :

$$v_1 = 0, \qquad v_2 = f(r\;\theta), \qquad v_3 = g(r\;\theta).$$

L'équation de continuité qui s'écrit en général :

$$\frac{\partial(rv_1)}{\partial r} + \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + \frac{\partial(rv_3)}{\partial z} = 0$$

montre que v_2 ne dépend pas de θ : $v_2 = f(r)$. On trouve que f doit être de la forme :

$$f = A.r \operatorname{Log} r + Br + \frac{C}{r},$$

où A, B, C désignent des constantes. Quant à la fonction g elle est solution de l'équation :

$$\nu \Delta_2 g - f \cdot \frac{1}{r} g'_\theta = E,$$

où E désigne une constante et $\Delta_2 g$ le Laplacien de g. On peut écrire pour g le développement formel suivant :

$$g = A_1 \operatorname{Log} r + B_1 r^2 + C_1 + \sum_k e^{k\theta} . \varphi_k(r),$$

où A_1, B_1, C_1 représentent des constantes et où $\varphi(r)$ est solution de l'équation :

$$\varphi'' + \frac{1}{r}\varphi' + \left(\frac{k^2}{r^2} - \frac{kf}{\nu r}\right)\varphi = 0.$$

On a en particulier le mouvement suivant :

$$v_1 = 0, \quad v_2 = Ar \operatorname{Log} r + Br + \frac{C}{r}, \quad v_3 = A_1 \operatorname{Log} r + B_1 r^2 + C_1. \tag{4.25}$$

Les trajectoires sont des hélices circulaires tracées sur des cylindres coaxiaux d'axe Oz, les hélices tracées sur un même cylindre ayant même pas ; les particules fluides qui se trouvent sur un cylindre déterminé ne changent pas leurs positions relatives, chaque cylindre se déplaçant comme une surface rigide d'un mouvement hélicoïdal uniforme d'axe Oz. Ce mouvement par hélices est très différent de la solution d'ailleurs non permanente de M. Caldonazzo à trajectoires hélicoïdales [(5. 31)] ; en effet ici on n'a pas

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V} = \lambda \vec{V}\,;$$

le vecteur tourbillon n'est pas dans la direction du vecteur vitesse comme dans les mouvements de M. Caldonazzo.

Le mouvement par hélices (4. 25) possède la propriété de convenir aussi bien à un fluide visqueux qu'à un fluide parfait ; d'ailleurs le mouvement (4. 25) résulte de la superposition du mouvement plan par cercles concentriques (4. 2) et du mouvement de révolution par droites parallèles (4. 19) qui jouissent tous les deux de la même propriété. L'uniformité de la pression nécessite que l'on prenne dans les formules (4. 25) :

$$A = 0.$$

La pression est alors donnée par :

$$\frac{p}{\rho} + U = 4\nu B_1 z + \frac{B^2}{2} \cdot r^2 + 2BC \operatorname{Log} r - \frac{C^2}{2} \cdot \frac{1}{r^2} + K,$$

K désignant une constante.

3° M. Oseen a étudié (28 *b*) des mouvements où les composantes u, v, w de la vitesse en coordonnées cartésiennes sont de la forme :

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w = w_1(x, y) + z\, w_2(x, y). \tag{4.26}$$

La condition de continuité donne :

$$u'_x + v'_y + w_2 = 0. \tag{4.27}$$

M. Oseen pose

$$u = F'_x - G'_y, \qquad v = F'_y + G'_x,$$

$F = F(x\,y)$ et $G = G(x\,y)$ désignant deux fonctions de x et y. M. Oseen considère alors une solution particulière du problème en supposant que F et G ne dépendent que de φ, φ et χ étant les fonctions harmoniques conjuguées déjà rencontrées :

$$\varphi = -\frac{2}{a^2+b^2}(a \operatorname{Log} r + b\theta), \qquad \chi = \frac{2}{a^2+b^2}(b \operatorname{Log} r - a\theta). \quad (4.6)$$

On obtient alors pour déterminer les fonctions $F(\varphi)$ et $G(\varphi)$ un système de deux équations différentielles du quatrième ordre non linéaires. Une fois F et G déterminés, w_2 est donné par l'équation (4. 27) ; pour déterminer w_1 on a une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre du type elliptique.

Quand $w_2 = 0$, M. Oseen pose :

$$w_1 = H(\varphi) + K\chi\,;$$

$H(\varphi)$ désigne une fonction de φ et K une constante. On obtient alors pour déterminer la fonction H une équation différentielle du second ordre linéaire. Dans ce cas le mouvement dans le plan xOy est le mouvement (4. 13) de M. Oseen.

Quand $w_2 \neq 0$, M. Oseen pose :

$$w_1 = H(\varphi)\,;$$

on obtient encore pour déterminer H une équation différentielle du second ordre.

4° M. von Karman a donné (**24**, p. 244) une solution pour le mouvement autour d'un disque indéfini tournant d'une manière uniforme autour d'un axe normal à son plan dans un fluide illimité. Employons les coordonnées cylindriques ; M. von Karman cherche à satisfaire l'équation de compatibilité cinématique par le champ de vitesses suivant :

$$v_1 = rf(z), \qquad v_2 = rg(z), \qquad v_3 = h(z). \qquad (4.28)$$

Les projections des trajectoires sur un plan $z = z_0$ sont des spirales logarithmiques puisque le rapport $\frac{v_2}{v_1}$ est constant pour $z = z_0$.

L'équation de continuité donne :

$$2f + h' = 0.$$

L'équation de compatibilité cinématique fournit les deux équations :

$$\nu h''' - hh'' + \frac{1}{2} h'^2 - 2g^2 = K,$$

$$\nu g'' + h'g - hg' = 0,$$

K désignant une constante. Si on suppose de plus que la pression ne dépend que de z, il faut prendre $K = 0$ et la pression est alors donnée par l'équation :

$$\frac{p}{\rho} + U = \nu h' - \frac{1}{2} h^2 + C,$$

C désignant une constante arbitraire.

Le mouvement de rotation n'est notable que dans une couche mince au voisinage du disque mobile ; l'épaisseur de cette " couche limite " est de l'ordre de $\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^{3/2}$, ω désignant la vitesse angulaire du disque.

Si on admet que la solution ci-dessus représente d'une manière suffisamment approchée le mouvement autour d'un disque fini, on peut calculer le couple résistant pour ce disque fini ; on trouve que le couple résistant est proportionnel à $\omega^{3/2}$ (1).

5. Intégrales exactes du mouvement non permanent.

A. Mouvement non permanent plan.

Rappelons que l'équation de compatibilité cinématique s'écrit :

$$\nu \Delta_4 \psi + \frac{D(\psi, \Delta_2 \psi)}{D(x, y)} - (\Delta_2 \psi)'_t = 0. \qquad (2.2)$$

1° On a d'abord le mouvement à tourbillon constant ; la fonction de courant $\psi(x\, y\, t)$ satisfait à l'équation :

$$\Delta_2 \psi = K,$$

K désignant une constante absolue ; les composantes de la vitesse $u\,(x\,y\,t)$, $v\,(x\,y\,t)$ sont des fonctions harmoniques par rapport à x et y.

(1) Un mouvement analogue à celui de M. von Karman mais non permanent a été examiné par M. Batteman (**1**, pp. 283-285).

2° Une solution classique est celle qui est constituée par le mouvement par droites parallèles ; prenons l'axe Ox parallèle à la direction commune de ces droites ; la fonction de courant ne dépend que de y, t : $\psi = \psi(y, t)$ et satisfait à l'équation :

$$\nu\psi^{\mathrm{IV}}_{y^4} - \psi'''_{y^2t} = 0.$$

On peut encore écrire ψ sous la forme :

$$\psi = a(t)y + \varphi(y t), \tag{5. 1}$$

$a(t)$ désignant une fonction arbitraire de t et la fonction φ satisfaisant à l'équation

$$\nu\varphi''_{y^2} - \varphi'_t = 0, \tag{5. 2}$$

ce qui est l'équation de la chaleur.

La pression est donnée par

$$\frac{p}{\rho} + \mathrm{U} = -a'(t)x + k(t).$$

Si on veut que la pression reste partout finie il faut que $a' = 0$ et finalement la vitesse $u = \dfrac{\partial\psi}{\partial y}$ vérifie l'équation :

$$\nu u''_{y^2} - u'_t = 0.$$

3° Une autre solution classique est constituée par le mouvement par cercles concentriques ; si on suppose les cercles centrés sur l'origine la fonction de courant $\psi(r, t)$ satisfait à l'équation :

$$\nu\Delta\Delta\psi - (\Delta\psi)'_t = 0,$$

où on a posé :

$$\Delta\psi = \psi''_{r^2} + \frac{1}{r}\psi'_r.$$

Mais si on écrit que la quantité $\dfrac{p}{\rho} + \mathrm{U}$ doit être uniforme on obtient :

$$\nu\Delta\psi - \psi'_t = 0. \tag{5. 3}$$

La fonction de courant doit donc satisfaire à cette équation plus restrictive que la première.

4° M. Taylor a observé (42) que l'équation (2. 2) admet les solutions suivantes

$$\psi(x\, y\, t) = e^{\nu k t}.\mathrm{F}(x\, y), \tag{5. 4}$$

la fonction F satisfaisant à l'équation

$$\Delta_2 F = k.F. \qquad (5.5)$$

On remarquera que dans les mouvements par droites parallèles, dans ceux par cercles concentriques et dans les mouvements de M. Taylor les lignes de courant ne changent pas de forme avec le temps et coïncident avec les trajectoires bien que le mouvement soit non permanent.

M. Kampé de Fériet a démontré (**23**) que les quatre classes de mouvements ci-dessus sont les seules pour lesquelles le tourbillon est constant le long de chaque ligne de courant, c'est-à-dire pour lesquelles les termes non linéaires disparaissent d'eux-mêmes de l'équation de compatibilité cinématique (2. 2).

5° M. Hamel (**16**, pp. 50-54, cf. aussi **22**) étudie les solutions de la forme :

$$\psi = C\theta + f(r, t), \qquad (5.6)$$

C désignant une constante. Ici encore l'uniformité de la pression donne une équation plus restrictive que l'équation de compatibilité, à savoir :

$$\nu(\Delta_2\psi)'_r - \frac{C}{r}\Delta_2\psi - \psi''_{rt} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\nu(\Delta f)'_r - \frac{C}{r}\Delta f - f''_{rt} = 0. \qquad (5.7)$$

Si on suppose que f ne dépend pas de t, c'est-à-dire que le mouvement est permanent, on obtient les solutions (4. 11) et (4. 12).

En mouvement non permanent M. Hamel pose

$$rf'_r = e^{nt}.\chi_n(r)\,; \qquad (5.8)$$

on voit alors que la fonction χ_n s'exprime par les fonctions de Bessel :

$$\chi_n(r) = C_1 r^\lambda J_\lambda(\alpha) + C_2 r^\lambda J_{-\lambda}(\alpha), \qquad (5.9)$$

où l'on a posé

$$\alpha = \left(-\frac{n}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot r, \qquad \lambda = 1 + \frac{C}{2\nu}\cdot$$

Si λ n'est pas entier les deux solutions $r^\lambda J_{\pm\lambda}$ sont linéairement indépendantes. M. Hamel a aussi obtenu une représentation des solutions de l'équation (5. 7) par des intégrales définies.

6° M. Oseen a cherché (**29**, p. 148) des solutions de la forme :

$$\psi = \mathrm{F}(\alpha) + \varphi.\mathrm{G}(\alpha) + \mathrm{K}\chi,$$

où

$$\alpha = \mathrm{Log}\,\frac{t}{r^2},$$

et où φ et χ désignent les fonctions harmoniques conjuguées (4. 6) ; K est une constante. On obtient pour les fonctions F et G deux équations différentielles non linéaires du quatrième ordre [1]. M. Oseen intègre ces équations dans divers cas particuliers.

M. Oseen cherche aussi (**29**, p. 151) des solutions de la forme :

$$\psi = e^{k(a\varphi - b\chi)}\mathrm{F}(\alpha) + \varphi(\mathrm{A} + \mathrm{B}\alpha) + \mathrm{K}\chi, \qquad (5.\ 10)$$

A et B désignant des constantes. Mais il est aisé de voir que l'expression (5. 10) est de la forme :

$$\psi = (m\,\mathrm{Log}\,r + n)\theta + f(r, t),$$

et il est plus commode de l'aborder directement (cf. § 22).

7° M. Bateman cherche (**1**, p. 247, cf. aussi **31**) des solutions de la forme

$$\psi = \mathrm{A}(x, t)y + \mathrm{B}(x, t). \qquad (5.\ 11)$$

L'équation de compatibilité cinématique montre que les fonctions A (x, t) et B (x, t) doivent vérifier les équations :

$$\nu \mathrm{A}^{\mathrm{IV}}_{x^4} - \mathrm{A}\mathrm{A}'''_{x^3} + \mathrm{A}'_x\mathrm{A}''_{x^2} - \mathrm{A}'''_{x^2t} = 0, \qquad (5.\ 12)$$

$$\nu \mathrm{B}^{\mathrm{IV}}_{x^4} - \mathrm{A}\mathrm{B}'''_{x^3} + \mathrm{B}'_x\mathrm{A}''_{x^2} - \mathrm{B}'''_{x^2t} = 0. \qquad (5.\ 13)$$

Une fois la première équation intégrée, la deuxième est une équation linéaire en B. Cette deuxième équation admet la solution particulière évidente B = K. A, K désignant une constante. Les équations (5. 12) et (5. 13) peuvent d'ailleurs être intégrées une fois par rapport à x.

M. Bateman cherche des solutions des équations (5. 12) et (5. 13) qui soient de la forme :

$$\mathrm{A} = \mathrm{F}(x + \alpha t), \qquad \mathrm{B} = \mathrm{G}(x + \alpha t),$$

[1] Ces équations ne sont pas algébriques. Cette solution ne rentrerait donc pas dans le cadre de l'intégrale exacte telle que nous l'avons définie.

α désignant une constante. En posant

$$H = F(x + \alpha t) + \alpha,$$

on obtient les équations :

$$\nu H^{IV} + H'H'' - HH''' = 0, \tag{5. 14}$$

$$\nu G^{IV} + G'H'' - HG''' = 0, \tag{5. 15}$$

qui ne sont autres que les équations (4. 16) et (4. 17). La fonction de courant s'écrit :

$$\psi = -\alpha y + H(x + \alpha t)y + G(x + \alpha t). \tag{5. 16}$$

L'équation (5. 14) admet les solutions particulières suivantes :

$$H = -\frac{6\nu}{\xi}, \tag{5. 17}$$

$$H = \nu a + Ce^{a\xi}, \tag{5. 18}$$

où l'on a posé $\xi = x + \alpha t$ et où a et C désignent des constantes. Pour la solution (5. 17) l'équation (5. 15) devient une équation d'Euler et on peut facilement expliciter la solution ; on trouve finalement pour la fonction de courant :

$$\psi = -\left[6\nu(x + \alpha t)^{-1} + \alpha\right]y + C_1(x + \alpha t)^3 + C_2(x + \alpha t)^{-1} + C_3(x + \alpha t)^{-2} \tag{5. 19}$$

C_1 C_2 C_3 et α désignant des constantes [1]. Pour la solution (5. 18) l'équation (5. 15) se réduit après quelques transformations à une équation de Laplace.

8° M. Bateman cherche (**1**, pp. 248-250) les mouvements dont la fonction de courant satisfait à la relation :

$$\psi = x.a(t) + \Delta_2\psi.b(t), \tag{5. 20}$$

$a(t)$ et $b(t)$ désignant deux fonctions de t. On trouve que b doit se réduire à une constante ; la fonction de courant est donnée par :

$$\psi = x.a(t) + e^{\nu kt}\Phi(x, y + \int a dt), \tag{5. 21}$$

k désignant une constante et Φ une fonction qui satisfait à l'équation

$$\Delta_2\Phi = k\Phi.$$

---

[1] On verra plus loin (§ 6) le lien qui unit la solution (5. 16) à la solution (4. 15) et en particulier la solution (5. 19) à la solution (4. 18).

On peut expliciter de nombreuses solutions de cette équation ; en posant

$$y_1 = y + \int a dt,$$

on a par exemple les développements formels suivants pour Φ :

si $n^2 > k$: $\Phi = \sum_n (A_n e^{nx} + B_n e^{-nx})(C_n \cos \lambda y_1 + D_n \sin \lambda y_1)$ (5. 22)

avec $\lambda^2 = n^2 - k$;

si $n^2 < k$: $\Phi = \sum_n (A_n e^{nx} + B_n e^{-nx})(C_n e^{\lambda y_1} + D_n e^{-\lambda y_1})$ (5. 23)

avec $\lambda^2 = k - n^2$;

enfin si $n^2 = k$: $\Phi = (A e^{nx} + B e^{-nx})(C y_1 + D)$. (5. 24)

Les grandes lettres désignent des constantes.

Considérons les variables r_1 et θ_1 définies par les relations :

$$r_1 \cos \theta_1 = x, \qquad r_1 \sin \theta_1 = y_1.$$

En posant $k = -\alpha^2$ on a pour Φ le développement formel :

$$\Phi = \sum_n (A_n \cos n\theta_1 + B_n \sin n\theta_1)\Big[C_n J_n(\alpha r_1) + D_n Y_n(\alpha r_1)\Big], \quad (5.25)$$

$J_n(\alpha r_1)$ et $Y_n(\alpha r_1)$ désignant les fonctions de Bessel d'ordre n de première et de deuxième espèce. En posant $k = \alpha^2$ on a de même le développement :

$$\Phi = \sum_n (A_n \cos n\theta_1 + B_n \sin n\theta_1)\Big[C_n I_n(\alpha r_1) + D_n K_n(\alpha r_1)\Big] \quad (5.\ 26)$$

$I_n(\alpha r_1)$ et $K_n(\alpha r_1)$ désignant les fonctions de Bessel modifiées d'ordre n de première et de deuxième espèce (1).

Les expressions (5. 25) et (5. 26) montrent qu'on a en particulier les solutions suivantes :

$$\Phi = C J_0(\alpha r_1) + D Y_0(\alpha r_1),$$
$$\Phi = C I_0(\alpha r_1) + D K_0(\alpha r_1).$$

M. Bateman cherche aussi d'une manière analogue à (5. 20) les mouvements dont la fonction de courant satisfait à la relation :

$$\psi = r^2 . a(t) + \Delta_2 \psi . b(t). \quad (5.\ 27)$$

On trouve que $a(t)$ et $b(t)$ doivent se réduire à des constantes a_0 et b_0 ; la fonction de courant est de la forme :

$$\psi = a_0 r^2 + \Phi(r, \theta + 2a_0 t) e^{\nu k t}, \quad (5.\ 28)$$

(1) Whittaker and Watson, *Modern Analysis*, § 17. 7.

où on a posé $k = \frac{1}{b_0}$ et où Φ désigne une fonction qui satisfait à l'équation :

$$\Delta_2 \Phi = k\Phi.$$

Posons $\theta_1 = \theta + 2a_0 t$; on a pour Φ les développements formels (5. 25) et (5. 26) où il suffit de remplacer r_1 par r [1].

B. Mouvement non permanent de révolution.

Rappelons l'équation de compatibilité cinématique :

$$\nu D_4 \psi + r \frac{D\left(\psi, \frac{1}{r^2} D_2 \psi\right)}{D(r, z)} - (D_2 \psi)'_t = 0 \qquad (3. 2)$$

où le symbole D_2 désigne l'opérateur

$$D_2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}.$$

1° On a d'abord le mouvement par droites parallèles à Oz ; la fonction de courant $\psi = \psi(r\, t)$ doit être de la forme :

$$\psi = a(t) r + \varphi(r, t),$$

$a(t)$ désignant une fonction arbitraire de t et φ satisfaisant à l'équation

$$\nu \left(\varphi''_{r^2} - \frac{1}{r} \varphi'_r\right) - \varphi'_t = 0.$$

La pression est donnée par :

$$\frac{p}{\rho} + U = 2a'(t) z + b(t),$$

$b(t)$ désignant une autre fonction arbitraire de t.

2° D'une manière analogue à (4. 20) on peut avoir des solutions $\psi(r\, z\, t)$ telles que :

$$D_2 \psi = K r^2, \qquad (5. 29)$$

K désignant une constante absolue. Ces mouvements conviennent à la fois aux fluides visqueux et aux fluides parfaits.

---

[1] On verra plus loin (§ 6) le lien qui unit les solutions (5. 21) et (5. 28) à la solution (5. 4) de M. Taylor.

C. Mouvement non permanent spatial.

1° Le mouvement par droites parallèles sans symétrie axiale est une solution de la catégorie actuelle. Prenons l'axe Oz parallèle à la direction commune des trajectoires. On a pour les composantes de la vitesse en tenant compte de la condition de continuité :

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad w = w(x\, y\, t).$$

L'équation de compatibilité cinématique montre que la fonction w doit satisfaire à l'équation :

$$\nu \Delta_2 w - \frac{\partial w}{\partial t} = K(t), \tag{5.30}$$

$K(t)$ désignant une fonction arbitraire de t. La pression est donnée par

$$\frac{p}{\rho} + U = K(t)z + K_1(t),$$

$K_1(t)$ désignant une autre fonction de t.

2° M. Caldonazzo (9) a trouvé un mouvement non permanent où les trajectoires sont des hélices circulaires tracées sur des cylindres d'axe Oz. En employant les coordonnées cylindriques les composantes de la vitesse sont :

$$v_1 = 0, \qquad v_2 = Ae^{-\nu a^2 t} J_1(ar), \qquad v_3 = Ae^{-\nu a^2 t} J_0(ar). \tag{5.31}$$

Dans ces formules J_0 et J_1 indiquent les fonctions de Bessel de première espèce d'ordre zéro et un, A et a sont des constantes absolues. Ce mouvement jouit de la propriété suivante : le vecteur tourbillon a même direction que le vecteur vitesse [1] :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{V} = \lambda . \vec{V}.$$

Les particules fluides qui se trouvent sur un cylindre déterminé ne changent pas leurs positions relatives, le cylindre se déplaçant comme une surface rigide d'un mouvement hélicoïdal ; le cylindre de rayon r tel que ar soit une racine de J_1 est animé d'un mouvement de translation seul, celui dont le rayon r est tel que ar soit une racine

---

[1] Les mouvements qui jouissent de cette propriété ont été étudiés pour la première fois par Beltrami, *Considerazioni idrodinamiche*, *Rend. Ist. Lombardo*, vol. **22**, 1889, pp. 121-130. Beltrami ne s'occupe que de fluides parfaits. M. Caldonazzo, à la suite de Beltrami, appelle mouvements hélicoïdaux les mouvements qui jouissent de la propriété ci-dessus ; il ne semble pas que cette dénomination soit à conserver : le mouvement de M. Strakhovitch (4. 25) montre en effet qu'il peut exister des mouvements à trajectoires hélicoïdales où le vecteur tourbillon n'est pas dirigé suivant le vecteur vitesse.

de J_0 est animé d'un mouvement de rotation seul. Remarquons enfin que les lignes de courant et les trajectoires coïncident quoique le mouvement ne soit pas permanent.

3° La solution précédente rentre dans une famille plus générale qui a été indiquée par M. Trkal (43) et qui est la suivante :

$$\vec{V} = \vec{a}(x\,y\,z)\,e^{-\nu k^2 t}, \tag{5.32}$$

où k désigne une constante absolue et $\vec{a}(x\,y\,z)$ un vecteur qui satisfait à l'équation :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a} = k.\vec{a}. \tag{5.33}$$

Dans ce mouvement [1] les lignes de courant ne changent pas de forme avec le temps et coïncident avec les trajectoires bien que le mouvement soit non permanent. Quant à la pression elle est donnée par :

$$\frac{p}{\rho} + \mathrm{U} = -\frac{1}{2}\vec{a}^{\,2}e^{-2\nu k^2 t} + f(t),$$

$f(t)$ désignant une fonction arbitraire de t.

Remarquons qu'on déduit de l'équation (5. 33) :

$$\Delta_2\vec{a} = k^2.\vec{a}.$$

On notera l'analogie formelle de la solution actuelle et de la solution (5. 4) de M. Taylor ; ces deux solutions sont cependant essentiellement différentes ; dans la solution de M. Taylor le vecteur tourbillon est normal au vecteur vitesse ; dans la solution de M. Trkal il est dirigé suivant le vecteur vitesse.

4° M. Caldonazzo a étudié (**8** *b*, p. 408) les mouvements symétriques par rapport à un axe (cf. § 17 et § 34) tels que le mouvement dans le plan méridien soit potentiel. On trouve que le mouvement dans le plan méridien est régit par la fonction de courant :

$$\psi = (ar^2 + b)z + a_1r^2 + b_1, \tag{5.34}$$

$a\ b\ a_1\ b_1$ désignant des fonctions arbitraires de t ; la composante de la vitesse normale au plan méridien, soit $f(r, t)$ satisfait à une équation aux dérivées partielles qu'on peut écrire en posant $rf = h$ et en prenant $r^2 = s$ comme variable indépendante :

$$4\nu s h''_{s^2} - 2(as + b)h'_s - h'_t = 0. \tag{5.35}$$

[1] Strictement parlant la solution de M. Trkal ne ferait pas partie de l'ensemble des intégrales exactes tel que nous l'avons défini. Par ailleurs l'équation (5. 33) est très simple et bien connue.

CHAPITRE II

TRANSFORMATION OBTENUE PAR LA MÉTHODE DES AXES MOBILES

6. Le but de ce chapitre est d'établir la proposition suivante qui permet de déduire de nouvelles intégrales des équations de Navier-Stokes à partir d'intégrales connues :

Considérons une solution :

$$u^{\mathrm{I}}(x\,y\,z\,t), \qquad v^{\mathrm{I}}(x\,y\,z\,t), \qquad w^{\mathrm{I}}(x\,y\,z\,t)$$

des équations de Navier-Stokes ; soient d'autre part six fonctions arbitraires de t (1) : *les trois fonctions* a(t), b(t), c(t) *et les trois fonctions qui servent à déterminer le tableau de cosinus directeurs* (2) :

$$\begin{array}{lll} \alpha_1(t), & \beta_1(t), & \gamma_1(t), \\ \alpha_2(t), & \beta_2(t), & \gamma_2(t), \\ \alpha_3(t), & \beta_3(t), & \gamma_3(t)\ ; \end{array}$$

soient P(t), Q(t), R(t) *trois fonctions de* t *qui se déduisent de ce tableau par les relations :*

$$\begin{aligned} P(t) &= \alpha_3\alpha_2' + \beta_3\beta_2' + \gamma_3\gamma_2', \\ Q(t) &= \alpha_1\alpha_3' + \beta_1\beta_3' + \gamma_1\gamma_3', \\ R(t) &= \alpha_2\alpha_1' + \beta_2\beta_1' + \gamma_2\gamma_1'\ ; \end{aligned}$$

supposons que la solution des équations de Navier-Stokes considérée satisfasse aux équations :

$$\begin{aligned} P.\frac{\partial u^{\mathrm{I}}}{\partial x} + Q.\frac{\partial u^{\mathrm{I}}}{\partial y} + R.\frac{\partial u^{\mathrm{I}}}{\partial z} &= P', \\ P.\frac{\partial v^{\mathrm{I}}}{\partial x} + Q.\frac{\partial v^{\mathrm{I}}}{\partial y} + R.\frac{\partial v^{\mathrm{I}}}{\partial z} &= Q', \\ P.\frac{\partial w^{\mathrm{I}}}{\partial x} + Q.\frac{\partial w^{\mathrm{I}}}{\partial y} + R.\frac{\partial w^{\mathrm{I}}}{\partial z} &= R'\ ; \end{aligned}$$

(1) Elles sont assujetties seulement à certaines conditions de régularité.
(2) Ces trois fonctions peuvent être par exemple les angles d'Euler.

alors les fonctions :

$$u^{\mathrm{II}}\,(x\;y\;z\;t), \qquad v^{\mathrm{II}}\,(x\;y\;z\;t), \qquad w^{\mathrm{II}}\,(x\;y\;z\;t)$$

définies par les relations :

$$\begin{aligned}
u^{\mathrm{II}}(xyzt) &= a' + \mathrm{Q}_0(z-c) - \mathrm{R}_0(y-b) + u^{\mathrm{I}}(\mathrm{XYZ}t)\alpha_1 + v^{\mathrm{I}}(\mathrm{XYZ}t)\alpha_2 + w^{\mathrm{I}}(\mathrm{XYZ}t)\alpha_3,\\
v^{\mathrm{II}}(xyzt) &= b' + \mathrm{R}_0(x-a) - \mathrm{P}_0(z-c) + u^{\mathrm{I}}(\mathrm{XYZ}t)\beta_1 + v^{\mathrm{I}}(\mathrm{XYZ}t)\beta_2 + w^{\mathrm{I}}(\mathrm{XYZ}t)\beta_3,\\
w^{\mathrm{II}}(xyzt) &= c' + \mathrm{P}_0(y-b) - \mathrm{Q}_0(x-a) + u^{\mathrm{I}}(\mathrm{XYZ}t)\gamma_1 + v^{\mathrm{I}}(\mathrm{XYZ}t)\gamma_2 + w^{\mathrm{I}}(\mathrm{XYZ}t)\gamma_3,
\end{aligned}$$

constituent une nouvelle solution des équations de Navier-Stokes ; dans ces formules X, Y, Z *se déduisent des variables* x, y, z *par les relations :*

$$\begin{aligned}
\mathrm{X} &= (x-a)\alpha_1 + (y-b)\beta_1 + (z-c)\gamma_1,\\
\mathrm{Y} &= (x-a)\alpha_2 + (y-b)\beta_2 + (z-c)\gamma_2,\\
\mathrm{Z} &= (x-a)\alpha_3 + (y-b)\beta_3 + (z-c)\gamma_3,
\end{aligned}$$

et les fonctions $\mathrm{P}_0(\mathrm{t})$, $\mathrm{Q}_0(\mathrm{t})$, $\mathrm{R}_0(\mathrm{t})$ *se déduisent du tableau de cosinus directeurs par les relations :*

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_0(t) &= \beta_1\gamma_1' + \beta_2\gamma_2' + \beta_3\gamma_3',\\
\mathrm{Q}_0(t) &= \gamma_1\alpha_1' + \gamma_2\alpha_2' + \gamma_3\alpha_3',\\
\mathrm{R}_0(t) &= \alpha_1\beta_1' + \alpha_2\beta_2' + \alpha_3\beta_3' \text{ (1)}.
\end{aligned}$$

* * *

Considérons un mouvement où les composantes de la vitesse par rapport aux axes fixes Ox, Oy, Oz sont :

$$u(x\;y\;z\;t), \qquad v(x\;y\;z\;t), \qquad w(x\;y\;z\;t)\;; \tag{6. 1}$$

supposons que ce mouvement soit un mouvement de fluide visqueux incompressible, c'est-à-dire qu'il satisfasse à l'équation de compatibilité cinématique.

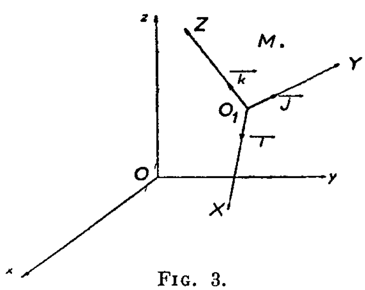

Fig. 3.

Soit maintenant un système d'axes mobiles O_1X, O_1Y, O_1Z ; considérons le mouvement où la vitesse relative par rapport aux axes O_1X, O_1Y, O_1Z a pour composantes selon ces mêmes axes :

$$u(\mathrm{X\;Y\;Z}\;t), \qquad v(\mathrm{X\;Y\;Z}\;t), \qquad w(\mathrm{X\;Y\;Z}\;t),$$

$u(x\;y\;z\;t)$,... désignant les fonctions (6. 1). Ce second mouvement ne sera pas en général un mouvement de fluide visqueux incom-

(1) La proposition ci-dessus est vraie non seulement pour un fluide visqueux incompressible mais aussi pour un fluide parfait incompressible.

pressible ; on conçoit en effet que l'équation de compatibilité cinématique écrite avec les vitesses relatives et en axes mobiles contiendra des termes qui dépendront du mouvement du système d'axes mobiles : les équations aux dérivées partielles qui traduisent cette équation de compatibilité cinématique ne seront pas identiquement celles qu'on obtiendrait en remplaçant $x\,y\,z$ respectivement par X Y Z dans les équations qui correspondent au cas des axes fixes. Nous nous proposons de rechercher les cas exceptionnels où le mouvement obtenu par le procédé ci-dessus est encore un mouvement de fluide visqueux incompressible.

Fixons d'abord quelques notations. Soient $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ les coordonnées de l'origine O_1 du système mobile. Désignons par $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ les vecteurs unitaires des axes O_1X, O_1Y, O_1Z et soient respectivement :

$$\begin{array}{l}\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1,\\ \alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2,\\ \alpha_3\ \beta_3\ \gamma_3,\end{array}$$

les composantes des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, composantes qui forment un tableau de cosinus directeurs. Les coordonnées X Y Z d'un point M dans le système mobile sont données en fonction de ses coordonnés $x\,y\,z$ dans le système fixe par les formules :

$$\begin{aligned} X &= (x-a)\alpha_1 + (y-b)\beta_1 + (z-c)\gamma_1,\\ Y &= (x-a)\alpha_2 + (y-b)\beta_2 + (z-c)\gamma_2, \qquad (6.\,2)\\ Z &= (x-a)\alpha_3 + (y-b)\beta_3 + (z-c)\gamma_3. \end{aligned}$$

Soient $\vec{V}_0(t)$ la vitesse du point O_1 et $\vec{\Omega}(t)$ la rotation instantanée en O_1. Les composantes de $\vec{V}_0(t)$ sur les axes fixes sont :

$$a'(t), \qquad b'(t), \qquad c'(t).$$

Soient $P(t)$, $Q(t)$, $R(t)$ [1] les composantes selon les axes mobiles de la rotation instantanée $\vec{\Omega}(t)$ et soient $P_0(t)$, $Q_0(t)$, $R_0(t)$ ses composantes selon les axes fixes ; ces composantes sont données comme

[1] Contrairement à l'usage nous ne désignerons pas ces composantes par $p\ q\ r$ pour éviter la confusion avec la pression p.

il est bien connu par les formules suivantes :

$$\mathrm{P}(t) = \vec{k}\cdot\frac{d\vec{j}}{dt} = -\vec{j}\cdot\frac{d\vec{k}}{dt} = \alpha_3\alpha_2' + \beta_3\beta_2' + \gamma_3\gamma_2'$$
$$= -(\alpha_2\alpha_3' + \beta_2\beta_3' + \gamma_2\gamma_3'),$$

. . . .

$$\mathrm{P}_0(t) = \beta_1\gamma_1' + \beta_2\gamma_2' + \beta_3\gamma_3' = -(\gamma_1\beta_1' + \gamma_2\beta_2' + \gamma_3\beta_3'),$$

. . . .

Ces notations étant choisies, écrivons l'équation du mouvement d'un fluide visqueux incompressible et l'équation de compatibilité cinématique sous la forme :

$$-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{U} + \frac{p}{\rho}\right) = \vec{\gamma} + \nu.\overrightarrow{\mathrm{rot}}_2\vec{\mathrm{V}}, \tag{6. 3}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\gamma} + \nu.\overrightarrow{\mathrm{rot}}_3\vec{\mathrm{V}} = 0. \tag{6. 4}$$

Soit $\vec{\mathrm{V}}_r$ la vitesse relative rapportée au système mobile $\mathrm{O}_1\,\mathrm{XYZ}$ et soit $\vec{\mathrm{V}}_e$ la vitesse d'entraînement. Soient de même $\vec{\gamma}_r$ et $\vec{\gamma}_e$ les accélérations relative et d'entraînement. On a les relations :

$$\vec{\mathrm{V}} = \vec{\mathrm{V}}_r + \vec{\mathrm{V}}_e, \tag{6. 5}$$

$$\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e + 2\vec{\Omega}\wedge\vec{\mathrm{V}}_r. \tag{6. 6}$$

Écrivons les composantes de la vitesse d'entraînement $\vec{\mathrm{V}}_e$ dont nous aurons besoin. On a :

$$\vec{\mathrm{V}}_e(\mathrm{M},t) = \vec{\mathrm{V}}_0 + \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{\mathrm{O}_1\mathrm{M}}\,;$$

les composantes de $\vec{\mathrm{V}}_e$ selon les axes $\mathrm{O}x$, $\mathrm{O}y$, $\mathrm{O}z$ sont donc respectivement :

$$a' + \mathrm{Q}_0(z-c) - \mathrm{R}_0(y-b),$$
$$b' + \mathrm{R}_0(x-a) - \mathrm{P}_0(z-c),$$
$$c' + \mathrm{P}_0(y-b) - \mathrm{Q}_0(x-a).$$

On en déduit immédiatement que l'on a :

$$-\Delta_2\vec{\mathrm{V}}_e = \overrightarrow{\mathrm{rot}}_2\,\vec{\mathrm{V}}_e = 0. \tag{6 7}$$

Introduisons les expressions (6. 5) et (6. 6) dans les équations (6. 3) et (6. 4) en tenant compte de (6. 7). On obtient ainsi les équations suivantes :

$$-\overrightarrow{\text{grad}}\left(\mathrm{U}+\frac{p}{\rho}\right)=\vec{\gamma}_r+\vec{\gamma}_e+2\vec{\Omega}\wedge\vec{\mathrm{V}}_r+\nu.\overrightarrow{\text{rot}}_2\,\vec{\mathrm{V}}_r, \quad (6.\ 8)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\gamma}_r+\nu.\overrightarrow{\text{rot}}_3\,\vec{\mathrm{V}}_r+\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\gamma}_e+2\,\overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{\Omega}\wedge\vec{\mathrm{V}}_r\right)=0. \quad (6.\ 9)$$

Considérons maintenant un mouvement $\vec{\mathrm{V}}^{\mathrm{I}}$ dont les composantes selon les axes Ox, Oy, Oz sont respectivement :

$$u^{\mathrm{I}}(x\,y\,z\,t), \qquad v^{\mathrm{I}}(x\,y\,z\,t), \qquad w^{\mathrm{I}}(x\,y\,z\,t),$$

et supposons que ce mouvement soit un mouvement de fluide visqueux incompressible, c'est-à-dire qu'il satisfasse à l'équation de compatibilité cinématique (6. 4) ; on a donc :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\gamma}^{\mathrm{I}}+\nu.\overrightarrow{\text{rot}}_3\,\vec{\mathrm{V}}^{\mathrm{I}}=0. \qquad (6.\ 10)$$

A ce mouvement $\vec{\mathrm{V}}^{\mathrm{I}}$ associons un second mouvement $\vec{\mathrm{V}}^{\mathrm{II}}$ tel que la vitesse relative $\vec{\mathrm{V}}_r^{\mathrm{II}}$ par rapport aux axes $\mathrm{O_1XYZ}$ dans ce second mouvement ait pour composantes selon ces mêmes axes :

$$u_r^{\mathrm{II}}(\mathrm{X\,Y\,Z}\,t)=u^{\mathrm{I}}(\mathrm{X\,Y\,Z}\,t), \qquad v_r^{\mathrm{II}}(\mathrm{X\,Y\,Z}\,t)=v^{\mathrm{I}}(\mathrm{X\,Y\,Z}\,t),$$
$$w_r^{\mathrm{II}}(\mathrm{X\,Y\,Z}\,t)=w^{\mathrm{I}}(\mathrm{X\,Y\,Z}\,t). \qquad (6.\ 11)$$

Nous cherchons à quelle condition le mouvement $\vec{\mathrm{V}}^{\mathrm{II}}$ est un mouvement de fluide visqueux incompressible.

Par suite de l'équation (6. 10) on a :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\gamma}_r^{\mathrm{II}}+\nu.\overrightarrow{\text{rot}}_3\,\vec{\mathrm{V}}_r^{\mathrm{II}}=0.$$

Si l'on se reporte alors à l'équation (6. 9), on voit que la condition nécessaire et suffisante pour que le mouvement $\vec{\mathrm{V}}^{\mathrm{II}}$ soit un mouvement de fluide visqueux incompressible est que l'on ait :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\gamma}_e+2\,\overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{\Omega}\wedge\vec{\mathrm{V}}_r^{\mathrm{II}}\right)=0. \qquad (6.\ 12)$$

La vitesse absolue dans le mouvement $\vec{\mathrm{V}}^{\mathrm{II}}$ est définie par :

$$\vec{\mathrm{V}}^{\mathrm{II}}=\vec{\mathrm{V}}_e+\vec{\mathrm{V}}_r^{\mathrm{II}}\ ;$$

les composantes de la vitesse selon les axes Ox, Oy, Oz sont donc pour ce mouvement :

$$\begin{aligned} u^{\text{II}}(x\,y\,z\,t) &= a' + Q_0(z-c) - R_0(y-b) \\ &\quad + u^{\text{I}}(X\,Y\,Z\,t)\alpha_1 + v^{\text{I}}(X\,Y\,Z\,t)\alpha_2 + w^{\text{I}}(X\,Y\,Z\,t)\alpha_3, \\ v^{\text{II}}(x\,y\,z\,t) &= b' + R_0(x-a) - P_0(z-c) \\ &\quad + u^{\text{I}}(X\,Y\,Z\,t)\beta_1 + v^{\text{I}}(X\,Y\,Z\,t)\beta_2 + w^{\text{I}}(X\,Y\,Z\,t)\beta_3, \quad (6.\,13) \\ w^{\text{II}}(x\,y\,z\,t) &= c' + P_0(y-b) - Q_0(x-a) \\ &\quad + u^{\text{I}}(X\,Y\,Z\,t)\gamma_1 + v^{\text{I}}(X\,Y\,Z\,t)\gamma_2 + w^{\text{I}}(X\,Y\,Z\,t)\gamma_3. \end{aligned}$$

Dans ces formules il faut remplacer X Y Z par leurs expressions données en (6. 2).

Nous avons donc déjà obtenu le résultat suivant :

Soit donnée une solution $u^{\text{I}}(x\,y\,z\,t)$, $v^{\text{I}}(x\,y\,z\,t)$, $w^{\text{I}}(x\,y\,z\,t)$ des équations de Navier-Stokes ; supposons en outre que la condition (6. 12) soit satisfaite ; alors les fonctions $u^{\text{II}}(x\,y\,z\,t)$, $v^{\text{II}}(x\,y\,z\,t)$, $w^{\text{II}}(x\,y\,z\,t)$ constituent une nouvelle solution des équations de Navier-Stokes.

Nous appellerons la solution u^{I}, v^{I}, w^{I}, *la solution primitive* et la solution u^{II}, v^{II}, w^{II}, *la solution dérivée* (1).

Explicitons la condition (6. 12). L'accélération d'entraînement $\vec{\gamma}_e$ a pour expression :

$$\vec{\gamma}_e = \vec{\gamma}_0 + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{V}_e - \vec{V}_0\right),$$

en désignant par $\vec{\gamma}_0 = \dfrac{d\vec{V}_0}{dt}$ l'accélération du point O_1. Calculons le rotationnel de $\vec{\gamma}_e$; on obtient facilement :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\gamma}_e = 2.\frac{d\vec{\Omega}}{dt}.$$

(1) Nous dirons aussi : mouvement primitif ou mouvement dérivé pour : solution primitive ou solution dérivée.

L'équation vectorielle (6. 12) projetée sur les axes mobiles O_1X, O_1Y, O_1Z fournit les trois relations :

$$P.\frac{\partial u_r^{II}}{\partial X} + Q.\frac{\partial u_r^{II}}{\partial Y} + R.\frac{\partial u_r^{II}}{\partial Z} = P',$$

$$P.\frac{\partial v_r^{II}}{\partial X} + Q.\frac{\partial v_r^{II}}{\partial Y} + R.\frac{\partial v_r^{II}}{\partial Z} = Q',$$

$$P.\frac{\partial w_r^{II}}{\partial X} + Q.\frac{\partial w_r^{II}}{\partial Y} + R.\frac{\partial w_r^{II}}{\partial Z} = R'.$$

On peut écrire ces trois relations sous la forme suivante où figurent les dérivées des composantes $u^I(x\,y\,z\,t)$, $v^I(x\,y\,z\,t)$, $w^I(x\,y\,z\,t)$ de la solution primitive :

$$\begin{aligned} &P.\frac{\partial u^I}{\partial x} + Q.\frac{\partial u^I}{\partial y} + R.\frac{\partial u^I}{\partial z} = P', \\ &P.\frac{\partial v^I}{\partial x} + Q.\frac{\partial v^I}{\partial y} + R.\frac{\partial v^I}{\partial z} = Q', \\ &P.\frac{\partial w^I}{\partial x} + Q.\frac{\partial w^I}{\partial y} + R.\frac{\partial w^I}{\partial z} = R'. \end{aligned} \tag{6. 14}$$

On voit que la transformation que nous avons obtenue s'applique à toute solution $u^I(x\,y\,z\,t)$, $v^I(x\,y\,z\,t)$, $w^I(x\,y\,z\,t)$ qui vérifie les équations aux dérivées partielles (6. 14).

La proposition énoncée au début du présent paragraphe se trouve donc complètement démontrée.

Il subsiste un grand arbitraire dans la solution dérivée (6. 13) ; il y figure en effet 6 fonctions arbitraires du temps soit les 3 fonctions $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ et les 3 fonctions qui fixent le tableau des cosinus directeurs $\alpha_i\ \beta_i\ \gamma_i$ (donc la rotation instantanée) ; les 3 dernières fonctions doivent seulement être telles que les équations (6. 14) soient satisfaites (1).

Passons maintenant à la partie dynamique du problème et cherchons comment la pression p ou plutôt la quantité $\frac{p}{\rho} + U$ relative

(1) Si l'on se borne à la considération de solutions régulières les 6 fonctions arbitraires dont il est parlé ci-dessus devront être assujetties à certaines conditions de régularité afin que, la solution primitive u^I, v^I, w^I étant régulière il en soit de même de la solution dérivée u^{II}, v^{II}, w^{II}. On voit facilement que ces conditions sont que les 6 fonctions en question soient continues ainsi que leurs dérivées jusqu'au second ordre.

à la solution dérivée est liée à la quantité analogue relative à la solution primitive. Posons pour simplifier :

$$\frac{p}{\rho} + \mathrm{U} = \mathrm{F}.$$

Soit $\mathrm{F}^{\mathrm{I}}(x\,y\,z\,t)$ la fonction F de la solution primitive. L'équation (6. 3) du mouvement s'écrit :

$$-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mathrm{F}^{\mathrm{I}} = \vec{\gamma}^{\mathrm{I}} + \nu.\overrightarrow{\mathrm{rot}}_2\,\vec{\mathrm{V}}^{\mathrm{I}}. \qquad (6.\ 15)$$

Soit $\mathrm{F}^{\mathrm{II}}(x\,y\,z\,t)$ la fonction F de la solution dérivée. L'équation (6. 8) du mouvement prend la forme :

$$-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mathrm{F}^{\mathrm{II}} = \vec{\gamma}_r^{\mathrm{II}} + \nu.\overrightarrow{\mathrm{rot}}_2\,\vec{\mathrm{V}}_r^{\mathrm{II}} + \vec{\gamma}_e + 2\vec{\Omega}\wedge\vec{\mathrm{V}}_r^{\mathrm{II}}. \qquad (6.\ 16)$$

La fonction vectorielle $\vec{\gamma}_e + 2\vec{\Omega}\wedge\vec{\mathrm{V}}_r^{\mathrm{II}}$ a par hypothèse son rotationnel nul en vertu de l'équation (6. 12) ; elle est donc le gradient d'une fonction scalaire que nous désignerons par G :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mathrm{G} = \vec{\gamma}_e + 2\vec{\Omega}\wedge\vec{\mathrm{V}}_r^{\mathrm{II}}. \qquad (6.\ 17)$$

Projetons cette égalité vectorielle sur les axes mobiles $\mathrm{O_1X}$, $\mathrm{O_1Y}$, $\mathrm{O_1Z}$. L'accélération d'entraînement $\vec{\gamma}_e$ a pour expression :

$$\vec{\gamma}_e = \vec{\gamma}_0 + \frac{d\vec{\Omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{\mathrm{O_1M}} + \vec{\Omega}\wedge\left(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{\mathrm{O_1M}}\right)$$

$$= \vec{\gamma}_0 + \frac{d\vec{\Omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{\mathrm{O_1M}} + \left(\vec{\Omega}.\overrightarrow{\mathrm{O_1M}}\right)\vec{\Omega} - \Omega^2.\overrightarrow{\mathrm{O_1M}}.$$

Les projections de l'accélération $\vec{\gamma}_0$ du point $\mathrm{O_1}$ sur les axes fixes sont $a''b''c''$; soient $e\,f\,g$ ses projections sur les axes mobiles qui s'en déduisent bien simplement ; les composantes de l'accélération d'entraînement $\vec{\gamma}_e$ selon les axes mobiles sont donc :

$$e + \mathrm{Q'Z} - \mathrm{R'Y} + (\mathrm{XP} + \mathrm{YQ} + \mathrm{ZR})\mathrm{P} - (\mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2 + \mathrm{R}^2)\mathrm{X},$$

. . . .

Finalement l'égalité vectorielle (6. 17) projetée sur les axes O_1X, O_1Y, O_1Z permet donc d'écrire les trois équations suivantes :

$$\frac{\partial G}{\partial X} = e + Q'Z - R'Y + (XP + YQ + ZR)P$$
$$- (P^2 + Q^2 + R^2)X + 2Qw^{\mathrm{I}}(X\,Y\,Z\,t) - 2Rv^{\mathrm{I}}(X\,Y\,Z\,t),$$
$$\frac{\partial G}{\partial Y} = \dots\dots\dots\dots \qquad (6.\,18)$$
$$\frac{\partial G}{\partial Z} = \dots\dots\dots\dots$$

L'équation (6. 16) s'écrit quand on y introduit G :

$$- \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, F^{\mathrm{II}} = \vec{\gamma}_r^{\mathrm{II}} + \nu . \overrightarrow{\mathrm{rot}_2} \vec{V}_r^{\mathrm{II}} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, G. \qquad (6.\,19)$$

Rapprochons maintenant les équations (6. 15) et (6. 19) en prenant en considération les équations (6. 11) par lesquelles nous avons défini $\vec{V}_r^{\mathrm{II}}$; on en tire :

$$F^{\mathrm{II}}(x\,y\,z\,t) = F^{\mathrm{I}}(X\,Y\,Z\,t) - G(X\,Y\,Z\,t), \qquad (6.\,20)$$

où la fonction G est donnée par les équations (6. 18) ; il faut remplacer au second membre X Y Z par leurs expressions en fonction de $x\,y\,z$ données en (6. 2). On devrait ajouter au second membre de l'équation (6. 20) une fonction arbitraire de t ; cela est toutefois inutile puisque les fonctions F^{I} et F^{II} et la fonction G ne sont déterminées qu'à une fonction additive de t près. La relation (6. 20) fournit le lien entre la quantité $\frac{p}{\rho} + U = F$ relative à la solution dérivée et celle relative à la solution primitive.

Nous allons maintenant examiner la transformation que nous venons d'obtenir dans quelques cas particuliers.

1. *Mouvement plan.*

Considérons le cas où le mouvement primitif et le mouvement dérivé sont tous les deux plans. Dans ce cas l'on a :

$$P(t) = Q(t) = 0.$$

Les équations (6. 14) se réduisent alors à :

$$R' = 0,$$

ce qui montre que l'unique composante R de la rotation instantanée doit être égale à une constante ω :

$$R = \omega.$$

Nous venons donc d'obtenir le résultat suivant : la transformation est applicable à tout mouvement plan sans exception ; la rotation instantanée R est constante.

Le mouvement des axes mobiles O_1X, O_1Y est défini par les coordonnées $a(t)$ et $b(t)$ de l'origine O_1 et par l'angle $\theta(t)$ des axes Ox et O_1X.

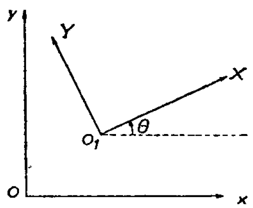

FIG. 4.

La rotation instantanée R est donnée en général par :

$$R = \frac{d\theta}{dt};$$

en choisissant convenablement l'instant initial on a donc :

$$\theta = \omega t.$$

Les formules (6. 2) deviennent ici :

$$\begin{aligned} X &= (x - a) \cos \omega t + (y - b) \sin \omega t, \\ Y &= -(x - a) \sin \omega t + (y - b) \cos \omega t. \end{aligned} \qquad (6.\ 21)$$

Enfin les formules (6.13) qui donnent la solution dérivée $u^{II}(x\,y\,t)$ $v^{II}(x\,y\,t)$ associée à la solution primitive $u^{I}(x\,y\,t)$, $v^{I}(x\,y\,t)$ s'écrivent :

$$\begin{aligned} u^{II}(x\,y\,t) &= a' - \omega(y - b) + u^{I}(X\,Y\,t) \cos \omega t - v^{I}(X\,Y\,t) \sin \omega t, \\ v^{II}(x\,y\,t) &= b' + \omega(x - a) + u^{I}(X\,Y\,t) \sin \omega t + v^{I}(X\,Y\,t) \cos \omega t; \end{aligned}$$
$$(6.\ 22)$$

dans ces formules il faut remplacer au second membre X et Y par leurs expressions (6. 21).

Le résultat obtenu peut donc s'énoncer dans le cas actuel de la manière suivante :

Soit donnée une solution $u^{I}(x\,y\,t)$, $v^{I}(x\,y\,t)$ *des équations de Navier-Stokes pour le cas du mouvement plan ; les fonctions* $u^{II}(x\,y\,t)$, $v^{II}(x\,y\,t)$ *données par* (6.22) *constituent une nouvelle solution de ces équations.*

On voit que la solution dérivée contient deux fonctions arbitraires de t : $a(t)$, $b(t)$ et une constante arbitraire ω [1].

---

[1] Si l'on se borne à la considération de solutions régulières les fonctions $a(t)$ et $b(t)$ devront être assujetties à être continues ainsi que leurs dérivées jusqu'au second ordre.

Passons maintenant à la partie dynamique du problème ; la relation (6. 20) entre les quantités $F = \frac{p}{\rho} + U$ prend ici la forme :

$$F^{II}(x\, y\, t) = F^{I}(X\ Y\ t) - G(X\ Y\ t).$$

Les équations (6. 18) dont l'intégration donne la fonction $G(X\ Y\ t)$ se réduisent aux suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial X} &= e - \omega^2 X - 2\omega\, v^{I}(X\ Y\ t), \\ \frac{\partial G}{\partial Y} &= f - \omega^2 Y + 2\omega\, u^{I}(X\ Y\ t). \end{aligned} \tag{6.23}$$

Tous ces résultats peuvent également s'exprimer en utilisant la fonction de courant $\psi(x\ y\ t)$ liée aux composantes de la vitesse par les relations :

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Soit $\psi^{I}(x\ y\ t)$ la fonction de courant de la solution primitive ; les équations (6. 22) montrent aisément que la fonction de courant $\psi^{II}(x\ y\ t)$ de la solution dérivée a pour expression :

$$\psi^{II}(x\, y\, t) = a'y - b'x - \frac{\omega}{2}\Big[(x-a)^2 + (y-b)^2\Big]$$
$$+ \psi^{I}\big[(x-a)\cos\omega t + (y-b)\sin\omega t,\ \ -(x-a)\sin\omega t + (y-b)\cos\omega t, t\big]. \quad (6.24)$$

Si on utilise la fonction de courant le résultat que nous avons obtenu s'exprime donc de la manière suivante :

Soit donnée une solution $\psi^{I}(x\ y\ t)$ *de l'équation de compatibilité cinématique* (2. 2) ; *la fonction* $\psi^{II}(x\ y\ t)$ *fournie par* (6. 24) *est une nouvelle solution de cette équation.*

Quant à la partie dynamique du problème, les équations (6. 23) s'intègrent immédiatement si on utilise la fonction de courant et on obtient pour la fonction G en remplaçant X et Y par leurs expressions (6. 21) :

$$G = a''x + b''y - \frac{\omega^2}{2}\Big[(x-a)^2 + (y-b)^2\Big]$$
$$+ 2\omega\psi^{I}\big[(x-a)\cos\omega t + (y-b)\sin\omega t,\ \ -(x-a)\sin\omega t + (y-b)\cos\omega t, t\big].$$

Il est facile de voir ce que devient l'expression (6. 24) si on emploie les coordonnées polaires r et θ au lieu des coordonnées cartésiennes ; soit $\psi^{\mathrm{I}}(r\ \theta\ t)$ la solution primitive ; posons :

$$\rho^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2,$$
$$\mathrm{tg}\ \varphi = \frac{y - b}{x - a}.$$

La solution dérivée a pour expression :

$$\psi^{\mathrm{II}}(r\ \theta\ t) = a'y - b'x - \frac{\omega}{2}.\rho^2 + \psi^{\mathrm{I}}(\rho, \varphi - \omega t, t)\ ; \quad (6.\ 25)$$

le second membre de (6. 25) est fonction de $r\ \theta\ t$ par l'intermédiaire de x, y, ρ et φ qui s'expriment bien simplement en fonction de $r\ \theta\ t$.

Nous allons maintenant appliquer la transformation à quelques mouvements plans connus pour en tirer des mouvements nouveaux.

1° Prenons d'abord comme mouvement primitif le mouvement plan permanent par droites parallèles ; on a :

$$\psi^{\mathrm{I}} = \mathrm{A}y^3 + \mathrm{B}y^2 + \mathrm{C}y, \quad (4.\ 1)$$

A B C désignant des constantes arbitraires. La solution dérivée qui s'en déduit s'écrit d'après (6. 24) :

$$\psi^{\mathrm{II}} = a'y - b'x - \frac{\omega}{2}\Big[(x - a)^2 + (y - b)^2\Big] + \mathrm{A}f^3 + \mathrm{B}f^2 + \mathrm{C}f, \quad (6.\ 26)$$

où $a = a(t)$ et $b = b(t)$ désignent des fonctions arbitraires de t et où l'on a posé

$$f = -(x - a)\sin \omega t + (y - b)\cos \omega t.$$

Dans le nouveau mouvement (6. 26) que nous venons d'obtenir la fonction de courant est un polynôme du 3e degré en x et y, les coefficients étant des fonctions de t. Le mouvement (6. 26), tout comme le mouvement (4. 1) dont il dérive, possède la propriété de convenir aussi bien à un fluide parfait qu'à un fluide visqueux.

2° Prenons comme mouvement primitif le mouvement plan permanent par cercles concentriques ; on a :

$$\psi^{\mathrm{I}} = \mathrm{A}r^2 \operatorname{Log} r + \mathrm{B} \operatorname{Log} r + \mathrm{C}r^2, \quad (4.\ 2)$$

A B C désignant des constantes arbitraires. D'après (6. 25) la solution dérivée s'écrit :

$$\psi^{\mathrm{II}} = a'y - b'x + \mathrm{A}\rho^2 \operatorname{Log} \rho + \mathrm{B} \operatorname{Log} \rho + \mathrm{C}\rho^2, \quad (6.\ 27)$$

où a et b désignent des fonctions arbitraires de t et où ρ est donné par

$$\rho^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2.$$

Le mouvement (6. 27), tout comme le mouvement (4. 2) dont il dérive, possède la propriété de convenir aussi bien à un fluide parfait qu'à un fluide visqueux [1].

3° Prenons comme mouvement primitif le mouvement permanent par droites concourantes ; on a :

$$\psi^{\mathrm{I}} = F(\theta),$$

la fonction $F(\theta)$ satisfaisant à l'équation différentielle :

$$\nu F''' + 4\nu F' + F'^2 = C,$$

où C désigne une constante ; comme on l'a vu, F' s'exprime d'ailleurs par la fonction elliptique pu. Si nous appliquons la transformation à ce mouvement, nous obtenons d'après (6. 25) le mouvement dérivé :

$$\psi^{\mathrm{II}} = a'y - b'x - \frac{\omega}{2}\cdot \rho^2 + F(\varphi - \omega t), \qquad (6.\ 28)$$

où a et b désignent des fonctions arbitraires de t et où ρ et φ sont donnés par :

$$\rho^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2, \qquad \varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{y - b}{x - a}.$$

4° On peut encore appliquer la transformation aux mouvements (4. 9) et (4. 10) de M. Jeffery : la fonction de courant du mouvement dérivé s'écrit immédiatement. De même on pourrait prendre comme mouvement primitif le mouvement (4. 13) de M. Oseen : on obtiendrait un mouvement " pseudo-turbulent " non permanent.

5° Prenons comme mouvement primitif le mouvement (4. 15) ; on a :

$$\psi^{\mathrm{I}} = F(x)y + G(x), \qquad (4.\ 15)$$

les fonctions $F(x)$ et $G(x)$ satisfaisant aux équations différentielles

---

(1) Il est aisé de voir que le fait que nous venons de constater sur les solutions (6. 26) et (6. 27) est général : la transformation n'altère pas la propriété du mouvement de convenir à la fois aux fluides parfaits et aux fluides visqueux ; si le mouvement primitif possède cette propriété, il en est de même du mouvement dérivé. La chose est évidente d'après une remarque précédente (3e note du présent paragraphe).

(4. 16) et (4. 17). Appliquons la transformation à ce mouvement ; d'après (6. 24) la solution dérivée s'écrit :

$$\psi^{\mathrm{II}} = a'y - b'x - \frac{\omega}{2}\left[(x-a)^2 + (y-b)^2\right] + \mathrm{F}(\mathrm{X})\mathrm{Y} + \mathrm{G}(\mathrm{X}), \tag{6. 29}$$

où a et b désignent deux fonctions arbitraires du temps et où l'on a :

$$\mathrm{X} = (x-a)\cos\omega t + (y-b)\sin\omega t,$$
$$\mathrm{Y} = -(x-a)\sin\omega t + (y-b)\cos\omega t.$$

La solution (5. 16) donnée par M. Bateman n'est qu'un cas particulier de la solution (6. 29) ; prenons en effet dans cette dernière solution :

$$\omega = 0, \qquad a = -\alpha t, \qquad b = 0,$$

α désignant une constante ; elle s'écrit :

$$\psi^{\mathrm{II}} = -\alpha y + \mathrm{F}(x+\alpha t)y + \mathrm{G}(x+\alpha t),$$

ce qui est bien la solution (5. 16). Cette dernière est donc la transformée dans la transformation actuelle de la solution (4. 15) ; en particulier la solution (5.19) est la transformée de la solution (4. 18).

6° Prenons comme mouvement primitif le mouvement (5. 4) de M. Taylor ; on a donc :

$$\psi^{\mathrm{I}} = e^{\nu k t}.\mathrm{F}(x\ y) \tag{5. 4}$$

la fonction F satisfaisant à l'équation :

$$\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial y^2} = k\mathrm{F}. \tag{5. 5}$$

Appliquons la transformation à ce mouvement ; d'après (6. 24) la solution dérivée s'écrit :

$$\psi^{\mathrm{II}} = a'y - b'x - \frac{\omega}{2}\left[(x-a)^2 + (y-b)^2\right]$$
$$+ e^{\nu k t}.\mathrm{F}\left[(x-a)\cos\omega t + (y-b)\sin\omega t,\ \ -(x-a)\sin\omega t + (y-b)\cos\omega t\right], \tag{6. 30}$$

où a et b désignent deux fonctions arbitraires de t.

La solution (6. 30) que nous venons d'obtenir peut aussi s'écrire sous une autre forme si on utilise les coordonnées polaires ; la solution primitive est dans ce cas de la forme

$$\psi^{\mathrm{I}} = e^{\nu k t}.\mathrm{F}(r\ \theta),$$

la fonction F vérifiant l'équation :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = kF. \qquad (5.\,5\,a)$$

D'après (6. 25) la solution dérivée s'écrit :

$$\psi^{\text{II}} = a'y - b'x - \frac{\omega}{2}\cdot\rho^2 + F(\rho, \varphi - \omega t), \qquad (6.\,31)$$

où l'on a posé

$$\rho^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2,$$

$$\varphi = \text{arc tg}\,\frac{y-b}{x-a}\cdot$$

Les mouvements (5. 21) et (5. 28) donnés par M. Bateman ne sont que des cas particuliers de la solution que nous venons d'obtenir. Supposons en effet que l'on prenne :

$$a = 0, \qquad \omega = 0\,;$$

la solution (6. 30) s'écrit :

$$\psi^{\text{II}} = -\,b'x + e^{\nu kt}.F(x, y-b),$$

la fonction F vérifiant l'équation (5. 5) ; or ceci n'est autre aux notations près que la solution (5. 21) [1].

De même prenons

$$a = b = 0$$

dans la solution (6. 31) ; on a alors :

$$\rho = r, \qquad \varphi = \theta$$

et la solution (6. 31) s'écrit :

$$\psi^{\text{II}} = -\frac{\omega}{2}\cdot r^2 + e^{\nu kt}.F(r, \theta - \omega t),$$

---

[1] On obtient une famille un peu plus générale que la famille (5. 21) de M. Bateman en généralisant l'hypothèse qui y conduit et en posant au lieu de (5. 20) :

$$\psi = a_1(t)x + a_2(t)y + b(t).\Delta_2\psi.$$

On trouve encore que la fonction $b(t)$ doit se réduire à une constante ; la fonction de courant s'écrit tous calculs faits :

$$\psi = a_1(t)x + a_2(t)y + e^{\nu kt}\Phi\left(x - \int a_2 dt,\ y + \int a_1 dt\right), \qquad (5.\,21\,a)$$

k désignant une constante et la fonction Φ satisfaisant à l'équation :

$$\Delta_2\Phi = k\Phi.$$

Cette solution plus générale que (5. 21) se déduit comme elle de la solution (5. 4) de M. Taylor par la transformation ci-dessus ; il suffit de faire $\omega = 0$ dans la solution (6. 30) pour l'obtenir.

la fonction F vérifiant l'équation (5. 5 a), ce qui n'est autre, aux notations près, que la solution (5. 28).

Les solutions (5. 21) et (5. 28) de M. Bateman sont donc les transformées de la solution (5. 4) de M. Taylor.

2. *Mouvement non plan.*

Si le mouvement n'est pas plan la transformation s'applique à la classe des mouvements qui satisfont aux équations (6. 14). Cette classe est très générale comme on va le voir sur les cas particuliers suivants.

1° Supposons que la rotation instantanée $\vec{\Omega}$ soit nulle, c'est-à-dire que l'on ait :

$$P = Q = R = 0\,;$$

autrement dit le mouvement des axes mobiles se réduit à une translation. Dans ce cas les équations (6. 14) sont satisfaites quelle que soit la solution primitive $u^{\text{I}}(x\,y\,z\,t)$, $v^{\text{I}}(x\,y\,z\,t)$, $w^{\text{I}}(x\,y\,z\,t)$. La solution dérivée donnée par (6. 13) est constituée ici par :

$$\begin{aligned} u^{\text{II}}(x\,y\,z\,t) &= a' + u^{\text{I}}(x - a,\ y - b,\ z - c,\ t), \\ v^{\text{II}}(x\,y\,z\,t) &= b' + v^{\text{I}}(x - a,\ y - b,\ z - c,\ t), \\ w^{\text{II}}(x\,y\,z\,t) &= c' + w^{\text{I}}(x - a,\ y - b,\ z - c,\ t); \end{aligned} \qquad (6.32)$$

dans ces expressions $a = a(t)$, $b = b(t)$, $c = c(t)$ désignent des fonctions arbitraires de t. On a donc le résultat suivant :

Soit $u^{\text{I}}(x\,y\,z\,t)$, $v^{\text{I}}(x\,y\,z\,t)$, $w^{\text{I}}(x\,y\,z\,t)$ une solution quelconque des équations de Navier-Stokes ; les fonctions $u^{\text{II}}(x\,y\,z\,t)$, $v^{\text{II}}(x\,y\,z\,t)$, $w^{\text{II}}(x\,y\,z\,t)$ données en (6. 32) constituent une nouvelle solution de ces équations.

2° Supposons ensuite que les composantes P Q R de la rotation instantanée soient des constantes absolues, indépendantes du temps. Sans restreindre la généralité de la question on peut toujours supposer qu'on a fait un changement d'axes de telle manière que l'on ait :

$$P = Q = 0,$$

la composante R étant seule différente de zéro (et constante). Les équations (6. 14) se réduisent alors à :

$$\frac{\partial u^{\text{I}}}{\partial z} = \frac{\partial v^{\text{I}}}{\partial z} = \frac{\partial w^{\text{I}}}{\partial z} = 0,$$

c'est-à-dire que u^{I}, v^{I}, w^{I} doivent être de la forme :

$$u^{\mathrm{I}} = u^{\mathrm{I}}(x\,y\,t), \qquad v^{\mathrm{I}} = v^{\mathrm{I}}(x\,y\,t), \qquad w^{\mathrm{I}} = w^{\mathrm{I}}(x\,y\,t).$$

Il s'agit là d'une classe de mouvements que nous rencontrerons plus loin (§ 15 et § 32) et que nous appellerons mouvements "pseudo-plans de deuxième espèce ". La transformation est donc applicable à tous les mouvements de cette classe pourvu que l'on prenne :

$$\mathrm{P} = \mathrm{Q} = 0, \qquad \mathrm{R} = \mathrm{C}^{te}.$$

La solution dérivée s'obtient par les formules (6. 13) ; elle n'est d'ailleurs elle-même un mouvement pseudo-plan de deuxième espèce que si la direction invariable de l'axe mobile $\mathrm{O_1Z}$ est parallèle à $\mathrm{O}z$.

CHAPITRE III

NOUVELLES INTÉGRALES EXACTES DU MOUVEMENT PERMANENT

A. Mouvement permanent plan.

7. Soient φ et χ deux fonctions harmoniques conjuguées ; nous nous proposons de rechercher les solutions pour lesquelles la fonction de courant est de la forme

$$\psi = F(\varphi) + G(\chi). \qquad (7.1)$$

Nous supposons de plus que a et b selon la notation de M. Hamel sont constants ; rappelons que les quantités a et b sont définies par l'équation :

$$a + ib = \frac{2\dfrac{d^2w}{dz^2}}{\left(\dfrac{dw}{dz}\right)^2}, \qquad (4.4)$$

où $w(z) = w(x + iy)$ désigne la fonction analytique $\varphi + i\chi$. Quand a et b sont constants les fonctions φ et χ ont pour expression :

$$\varphi = -\frac{2}{a^2 + b^2}(a \operatorname{Log} r + b\theta), \quad \chi = \frac{2}{a^2 + b^2}(b \operatorname{Log} r - a\theta) \qquad (4.6)$$

si $a^2 + b^2 \neq 0$ et

$$\varphi = x, \qquad \chi = y \qquad (4.7)$$

si a et b sont tous les deux nuls.

Supposons d'abord qu'aucune des deux quantités a et b ne soit nulle. Nous allons voir que dans ce cas on est conduit comme seule possibilité à la solution de M. Oseen :

$$\psi = F(\varphi) + C\chi. \qquad (4.13).$$

En portant l'expression (7. 1) dans l'équation de compatibilité cinématique (4. 3) on obtient l'équation :

$$\begin{aligned}\nu F^{IV} + 2a\nu F''' + \nu(a^2 + b^2)F'' - bF'F'' \\ + \nu G^{IV} - 2b\nu G''' + \nu(a^2 + b^2)G'' - aG'G'' \\ + F'(G''' - bG'') - G'(F''' + aF'') = 0.\end{aligned} \tag{7. 2}$$

Dérivons cette équation d'abord par rapport à φ et ensuite par rapport à χ. Nous obtenons :

$$F''(G^{IV} - bG''') = G''(F^{IV} + aF'''). \tag{7. 3}$$

Deux cas sont possibles :

1° $F'' = 0$ ou $G'' = 0$; on a alors la solution (4. 13) ;

2° $F''.G'' \neq 0$; l'équation (7. 3) donne alors les deux suivantes :

$$F^{IV} + aF''' - KF'' = 0, \tag{7. 4}$$

$$G^{IV} - bG''' - KG'' = 0, \tag{7. 5}$$

où K désigne une constante. Si on tient compte de ces deux relations, l'équation (7. 2) se décompose en deux autres dont nous n'écrivons que la première :

$$\nu F^{IV} + 2a\nu F''' + \nu(a^2 + b^2)F'' - bF'F'' + AF' = B, \tag{7. 6}$$

A et B désignant des constantes. Il est facile maintenant de voir que les équations (7. 4) et (7. 6) ont pour seule solution commune :

$$F'' = C,$$

C désignant une constante, ceci en supposant comme nous l'avons dit qu'aucune des deux quantités a et b n'est nulle. A cette solution ne correspond d'ailleurs qu'un mouvement irrotationnel.

Donc quand aucune des deux quantités a et b n'est nulle la seule solution possible est la solution (4. 13).

Supposons maintenant que l'une au moins des deux quantités a et b soit nulle. Si l'une de ces quantités seulement est nulle l'expression (7. 1) peut s'écrire :

$$\psi = F(\text{Log}\, r) + G(\theta). \tag{7. 7}$$

Si a et b sont tous les deux nuls l'expression (7. 1) s'écrit :

$$\psi = F(x) + G(y). \tag{7. 8}$$

Nous allons examiner ces deux cas dans les deux paragraphes suivants.

8. Considérons d'abord le cas où la fonction de courant est de la forme :

$$\psi = F(\mathrm{Log}\, r) + G(\theta). \qquad (7.\ 7)$$

L'équation de compatibilité cinématique s'écrit :

$$\nu F^{IV} - 4\nu F''' + 4\nu F'' + \nu G^{IV} + 4\nu G'' + 2G'G'' + F'G''' - G'(F''' - 2F'') = 0. \qquad (8.\ 1)$$

Dérivons d'abord par rapport à Log r, ensuite par rapport à θ ; nous obtenons :

$$F''.G^{IV} = G''(F^{IV} - 2F'''). \qquad (8.\ 2)$$

Trois cas sont possibles :

1° $G'' = 0$; dans ce cas il est facile d'expliciter la solution qui rentre dans une famille connue ; en effet le tourbillon ne dépend que de r puisque l'on a en général :

$$\Delta_2\psi = \frac{1}{r^2}(F'' + G'').$$

On a les mouvements suivants qui sont des cas particuliers de la solution (4. 10) :

$$\psi = \nu B\theta + Cr^{B+2} + Dr^2 + E\,\mathrm{Log}\, r \qquad \text{si } B \neq -2.$$

et $\psi = -2\nu\theta + C(\mathrm{Log}\, r)^2 + Dr^2 + E\,\mathrm{Log}\, r \quad$ si $B = -2$.

On a déjà vu que si on désire que la quantité $\frac{p}{\rho} + U$ soit uniforme, il faut prendre $D = 0$ dans ces solutions.

2° $F'' = 0$; dans ce cas la fonction de courant est de la forme :

$$\psi = A.\mathrm{Log}\, r + G(\theta), \qquad (8.\ 3)$$

A désignant une constante et la fonction $G(\theta)$ satisfaisant à l'équation :

$$\nu G''' + AG'' + 4\nu G' + G'^2 = K. \qquad (8.\ 4)$$

Si le fluide s'étend à un domaine où θ peut varier de 0 à 2π l'uniformité de la vitesse exige que G' soit uniforme ; la pression est alors elle-même uniforme.

Remarquons que cette solution (8. 3) est du type (4. 13) mais ne rentre pas dans les catégories effectivement examinées par M. Oseen puisqu'il faudrait poser pour obtenir (8. 3) $a = 0$ dans les formules (4. 6) ce qui entraînerait avec l'hypothèse $C = 2a\nu$ de M. Oseen : $G = 0$.

3° Enfin supposons que l'on ait $F''.G'' \neq 0$. Alors l'équation (8. 2) donne les deux relations :

$$F''' - 2F'' = KF' + N, \qquad (8.5)$$

$$G''' = KG' + M, \qquad (8.6)$$

K M et N désignant des constantes. En portant ces expressions dans l'équation (8. 1) on voit que l'on doit avoir :

$$(K + 4)\nu G'' + 2G'G'' - NG' = P,$$

P désignant une constante. On se convainc facilement que cette équation et l'équation (8. 6) ne sont compatibles (en mettant de côté une solution à tourbillon constant) que si $G'' = 0$, ce qui a été exclu.

Finalement on voit donc qu'outre des solutions connues on n'obtient comme solution du type (7. 7) que la solution (8. 3)-(8. 4).

9. Cherchons maintenant les solutions pour lesquelles la fonction de courant est de la forme

$$\psi = F(x) + G(y). \qquad (7.8)$$

L'équation de compatibilité cinématique s'écrit :

$$\nu(F^{IV} + G^{IV}) + F'G''' - G'F''' = 0. \qquad (9.1)$$

Une dérivation par rapport à x suivie d'une dérivation par rapport à y donne :

$$F''G^{IV} = G''F^{IV}.$$

Les cas possibles sont les suivants :

1° $G'' = 0$; alors $\Delta_2\psi$ ne dépend que de x ; on a donc un cas particulier de la solution (4. 9) ; d'une manière précise la fonction de courant a pour expression :

$$\psi = \nu By + Ce^{Bx} + Dx^2 + Ex, \qquad (9.2)$$

B C D E désignant des constantes arbitraires.

2° $F'' = 0$; on a encore un mouvement du même genre ; la fonction de courant est :

$$\psi = \nu Bx + Ce^{-By} + Dy^2 + Ey. \qquad (9.3)$$

3° $F''.G'' \neq 0$; alors on a les deux équations :

$$F^{IV} - KF'' = 0, \qquad G^{IV} - KG'' = 0,$$

K désignant une constante. Trois cas sont possibles :

a) $K = 0$; on a affaire à un mouvement où $\Delta_4\psi$ et le Jacobien de l'équation (2. 9) s'annulent séparément, c'est-à-dire à un mouvement qui convient à la fois aux fluides visqueux et aux fluides parfaits. On ne peut donc avoir que des mouvements à tourbillon constant (ici $\psi = Ax^2 + By^2 + Cx + Dy$), des mouvements par droites parallèles ou enfin des mouvements par cercles concentriques qui ici sont d'ailleurs à tourbillon constant.

b) $K = \omega^2$, ω désignant une constante réelle. Les fonctions F et G sont de la forme :

$$F = Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x} + Cx, \quad G = A_1 e^{\omega y} + B_1 e^{-\omega y} + C_1 y, \tag{9. 4}$$

les grandes lettres désignant des constantes.

En portant les expressions (9. 4) des fonctions F et G dans l'équation (9. 1) on obtient les mouvements suivants [1] :

$$\left.\begin{aligned} \psi &= \nu\omega(x + y) + C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega y}, \\ \psi &= \nu\omega(x - y) + C_1 e^{-\omega x} + C_2 e^{-\omega y}. \end{aligned}\right\} \tag{9. 5}$$

On obtient en outre des cas particuliers des solutions (9. 2) et (9. 3).

c) $K = -\omega^2$; on voit facilement que dans ce cas on n'a aucune solution nouvelle.

Les solutions du type (7. 8) sont ainsi complètement examinées ; les seuls mouvements nouveaux obtenus sont les mouvements (9. 5). En même temps le problème de la recherche des solutions du type (7. 1) se trouve complètement résolu.

10. Proposons-nous de rechercher des mouvements résultant de la superposition de deux champs de vitesses dont nous supposons le premier potentiel ; le second champ pourra être considéré comme une " perturbation " ; nous nous efforcerons de déterminer cette perturbation par des conditions aussi simples que possible.

La fonction de courant pour un tel mouvement sera de la forme :

$$\psi = \varphi + u,$$

la fonction φ correspondant au mouvement potentiel :

$$\Delta_2 \varphi = 0,$$

et u étant la perturbation. L'équation de compatibilité cinématique s'écrit :

$$\nu\Delta_4 u + \frac{D(\varphi, \Delta_2 u)}{D(x, y)} + \frac{D(u, \Delta_2 u)}{D(x, y)} = 0. \tag{10. 1}$$

[1] Les deux solutions (9. 5) se déduisent l'une de l'autre par une rotation des axes de $\frac{\pi}{2}$.

Si nous imposons à la perturbation u la condition relativement simple :

$$\Delta_2 u = f(u),$$

on voit que l'équation (10. 1) devient linéaire en u. Le système d'équations à satisfaire est finalement le suivant :

$$\Delta_2 \varphi = 0, \tag{10. 2}$$

$$\nu \Delta_4 u + \frac{D(\varphi, \Delta_2 u)}{D(x, y)} = 0, \tag{10. 3}$$

$$\Delta_2 u = f(u). \tag{10. 4}$$

D'ailleurs on pourrait remplacer l'équation (10. 2) par la suivante :

$$\Delta_2 \varphi = k, \tag{10. 5}$$

k désignant une constante sans changer les deux autres équations.

Nous allons donner deux solutions particulières du système ci-dessus.

Considérons d'abord le cas particulier où l'on a :

$$\varphi = ax,$$

a désignant une constante arbitraire. La fonction u doit satisfaire aux deux équations :

$$\Delta_2 u = f(u), \tag{10. 4}$$

$$\nu \Delta_4 u + a \cdot \frac{\partial(\Delta_2 u)}{\partial y} = 0. \tag{10. 6}$$

Nous choisissons une solution particulière de ce système en remplaçant l'équation (10.6) par la suivante :

$$\nu \Delta_2 u + a \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{10. 7}$$

La comparaison des équations (10. 4) et (10. 7) montre que la fonction u est de la forme :

$$u = F(y + \alpha),$$

F désignant une fonction arbitraire de son argument et α une fonction arbitraire de x :

$$\alpha = \alpha(x).$$

Si on porte cette expression de u dans l'équation (10. 7), on voit en mettant de côté les mouvements irrotationnels ou à tourbillon constant, que u est de la forme :

$$u = f(x)e^{Ky},$$

$f(x)$ désignant une fonction de x et K une constante non nulle. Enfin la fonction $f(x)$ se laisse elle-même facilement déterminer et on obtient les solutions suivantes :

1° si $K^2 + \frac{aK}{\nu} < 0$, en posant $\omega^2 = -\left(K^2 + \frac{aK}{\nu}\right)$:

$$\psi = ax + (C_1 \operatorname{ch} \omega x + C_2 \operatorname{sh} \omega x)e^{Ky} ; \tag{10.8}$$

2° si $K^2 + \frac{aK}{\nu} > 0$, en posant $\omega^2 = K^2 + \frac{aK}{\nu}$:

$$\psi = ax + (C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x)e^{Ky} ; \tag{10.9}$$

3° enfin si $K + \frac{a}{\nu} = 0$:

$$\psi = ax + (C_1 x + C_2)e^{-\frac{a}{\nu}y}. \tag{10.10}$$

Dans ces solutions [1] C_1 et C_2 désignent des constantes arbitraires. Des calculs faciles donnent pour chaque cas la pression. On trouve pour la pression, ou plutôt pour la quantité $\frac{p}{\rho} + U$ correspondant respectivement aux solutions (10. 8), (10. 9) et (10. 10) les expressions suivantes :

$$\frac{p}{\rho} + U = 2C_1C_2\omega^2 e^{2Ky} + C_3,$$

$$\frac{p}{\rho} + U = -\frac{1}{2}(C_1^2 + C_2^2)\omega^2 e^{2Ky} + C_3,$$

$$\frac{p}{\rho} + U = -\frac{1}{2}C_1^2 e^{-2\frac{a}{\nu}y} + C_3.$$

Dans ces formules C_3 désigne une constante arbitraire. On voit que la quantité $\frac{p}{\rho} + U$ ne dépend que de y.

(1) Les solutions (9.5) rencontrées précédemment sont des cas particuliers de la solution (10.8) soumise préalablement à un changement d'axes.

Nous allons maintenant indiquer une autre solution particulière du même genre que la précédente. Nous considérons cette fois les équations (10. 3), (10. 4) et (10. 5) au lieu de (10. 2) et nous prenons pour φ la solution particulière suivante de l'équation (10. 5) :

$$\varphi = ar^2,$$

a désignant une constante arbitraire.

La fonction u doit satisfaire aux deux équations :

$$\Delta_2 u = f(u), \tag{10. 4}$$

$$\nu\Delta_4 u + 2a\frac{\partial(\Delta_2 u)}{\partial\theta} = 0. \tag{10. 11}$$

Nous choisissons une solution particulière de ce système en remplaçant l'équation (10.11) par la suivante :

$$\nu\Delta_2 u + 2a\frac{\partial u}{\partial\theta} = 0. \tag{10. 12}$$

La comparaison des équations (10. 4) et (10. 12) montre que u doit être de la forme :

$$u = \mathrm{F}(\theta + \alpha),$$

F désignant une fonction arbitraire de son argument et α une fonction arbitraire de r :

$$\alpha = \alpha(r).$$

En portant cette expression de u dans l'équation (10. 12) on voit en mettant de côté les mouvements irrotationnels que l'on doit avoir :

$$\mathrm{F}'' - \mathrm{K}\mathrm{F}' = 0,$$

K désignant une constante réelle. Si $\mathrm{K} = 0$ on obtient un mouvement où le tourbillon ne dépend que de r, c'est-à-dire un cas particulier de la solution (4. 10). Supposons $\mathrm{K} \neq 0$; la fonction u est de la forme :

$$u = f(r)e^{\mathrm{K}\theta},$$

la fonction $f(r)$ satisfaisant à l'équation :

$$f'' + \frac{1}{r}f' + \left(\frac{2a\mathrm{K}}{\nu} + \frac{\mathrm{K}^2}{r^2}\right)f = 0. \tag{10. 13}$$

Finalement on a donc la solution :

$$\psi = ar^2 + f(r)e^{\mathrm{K}\theta}, \tag{10. 14}$$

la fonction $f(r)$ satisfaisant à l'équation (10. 13) qu'on peut écrire en prenant comme variable indépendante $R = \left(\frac{2aK}{\nu}\right)^{1/2} . r$:

$$\frac{d^2f}{dR^2} + \frac{1}{R} \cdot \frac{df}{dR} + \left(1 + \frac{K^2}{R^2}\right) f = 0 ;$$

la solution de cette équation s'exprime par des fonctions de Bessel d'ordre purement imaginaire. Quant à la pression on trouve l'expression :

$$\frac{p}{\rho} + U = -\left[\frac{1}{2} f'^2 + \left(\frac{K^2}{2r^2} + \frac{aK}{\nu}\right) f^2\right] e^{2K\theta} + 4afe^{K\theta} + 2a^2r^2 + C.$$

Si le fluide s'étend à un domaine où θ peut varier de 0 à 2π les vitesses fournies par la solution (10. 14) ne sont pas uniformes (1).

B. Mouvement permanent de révolution.

11. En mouvement permanent plan où l'équation de compatibilité cinématique s'écrit :

$$\nu \Delta_4 \psi + \frac{D(\psi, \Delta_2 \psi)}{D(x, y)} = 0, \qquad (2.\ 9)$$

si on suppose que le tourbillon ne dépend que de x seul ou de r seul, c'est-à-dire si on fait les hypothèses :

$$\Delta_2 \psi = f(x) \qquad \text{ou} \qquad \Delta_2 \psi = f(r),$$

on obtient les solutions (4. 9) ou (4. 10) de M. Jeffery. Proposons-nous d'appliquer le même procédé au mouvement permanent de révolution. L'équation de compatibilité cinématique s'écrit ici en coordonnées cylindriques :

$$\nu D_4 \psi + r \frac{D\left(\psi, \frac{1}{r^2} \cdot D_2 \psi\right)}{D(r, z)} = 0. \qquad (3.\ 9)$$

On voit qu'au point de vue structure de l'équation ce qui joue maintenant le rôle de $\Delta_2 \psi$ c'est la quantité :

$$\frac{1}{r^2} \cdot D_2 \psi.$$

(1) Les solutions (10. 8), (10. 10) et (10. 14) pourraient aussi être obtenues en faisant en mouvement permanent des hypothèses analogues aux hypothèses (5. 20) et (5. 27) de M. Bateman.

Les hypothèses qui correspondent à celles de Jeffery sont donc les suivantes :

$$\frac{1}{r^2}\cdot D_2\psi = f(r), \qquad (11.\ 1)$$

$$\frac{1}{r^2}\cdot D_2\psi = f(z). \qquad (11.\ 2)$$

Les intégrales qui correspondent à la condition (11. 1) ont été toutes déterminées [(4. 22)]. Proposons-nous d'examiner les mouvements qui satisfont à la condition (11. 2). Si on introduit cette condition dans l'équation de compatibilité cinématique, celle-ci fournit la relation :

$$\nu r f'' + \psi'_r . f' = 0. \qquad (11.\ 3)$$

Deux cas sont possibles :

1° ou bien l'on a $f' = 0$, c'est-à-dire :

$$D_2\psi = Kr^2,$$

K désignant une constante : c'est là une classe de mouvements déjà rencontrée [(4. 20)] ;

2° ou bien l'on a $f' \neq 0$; dans ce cas l'équation (11. 3) montre que la fonction de courant doit être de la forme :

$$\psi = F(z).r^2 + G(z). \qquad (11.\ 4)$$

Examinons directement les mouvements du type (11. 4) sans faire l'hypothèse (11. 2). En tenant compte de la condition (11. 4) l'équation de compatibilité cinématique fournit les deux relations :

$$\nu F^{IV} + 2FF''' = 0, \qquad (11.\ 5)$$
$$G'' = 0.$$

Il s'ensuit que l'on a :

$$D_2\psi = F''(z).r^2,$$

c'est-à-dire une relation de la forme (11. 2) : tous les mouvements du type (11. 4) satisfont donc également à la condition (11. 2). Finalement nous avons donc la solution nouvelle :

$$\psi = F(z).r^2 + Az, \qquad (11.\ 6)$$

A désignant une constante arbitraire et la fonction F(z) satisfaisant à l'équation (11. 5) qu'on peut d'ailleurs intégrer une fois et écrire :

$$\nu F''' + 2FF'' - F'^2 = B ; \qquad (11.\ 7)$$

B désigne une constante arbitraire. La pression se laisse facilement calculer ; on trouve en désignant par C une nouvelle constante arbitraire :

$$\frac{p}{\rho} + U = \frac{B}{2}r^2 - \frac{A}{2}\cdot\frac{1}{r^2} - 2\nu F' - 2F^2 + C.$$

L'équation (11. 7) admet la solution particulière

$$F = \frac{2\nu}{z},$$

à laquelle correspond pour la fonction de courant l'expression :

$$\psi = 2\nu.\frac{r^2}{z} + Az. \qquad (11.\ 8)$$

En faisant $A = 0$ on a en particulier la solution :

$$\psi = 2\nu\frac{r^2}{z}. \qquad (11.\ 9)$$

Cette solution peut servir à représenter l'écoulement à travers un vase parabolique percé d'un orifice en son sommet. Les trajectoires sont des paraboles d'axe Oz et de sommet O ; au point O la vitesse est infinie. Le mouvement est tourbillonnaire ; la composante unique du tourbillon normale au plan rz et dirigée dans le sens des θ croissants a pour valeur :

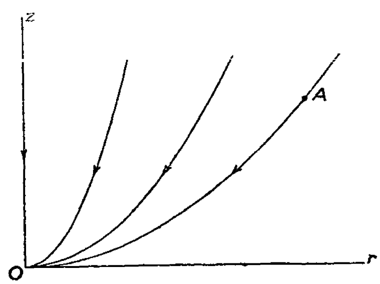

FIG. 5.

$$\xi_2 = 2\nu.\frac{r}{z^3}.$$

Si on suppose que la parabole OA d'équation

$$\frac{r^2}{z} = K$$

est une paroi, le débit à travers le paraboloïde de révolution de méridienne OA est donné par :

$$Q = 4\pi\nu K.$$

A chaque vase correspond donc une seule valeur du débit. Il y a glissement sur la paroi ; la grandeur de la vitesse y est donnée par :

$$V^2 = \frac{4\nu^2 K}{z^3} + \frac{16\nu^2}{z^2}.$$

On voit que pour un débit donné cette vitesse est aussi petite qu'on le veut pour des valeurs suffisamment grandes de z ; d'autre part pour un même z l'adhérence est d'autant plus parfaite que le débit est plus petit. La pression est donnée par :

$$\frac{p}{\rho} + U = -\frac{4\nu^2}{z^2} + C,$$

C désignant une constante.

12. On sait qu'en mouvement plan il existe des solutions de la forme

$$\psi = F(\varphi)\cdot\chi + G(\varphi), \qquad (4.14)$$

φ et χ désignant deux fonctions harmoniques conjuguées. Le rôle du Laplacien dans le mouvement plan est joué dans le mouvement de révolution par l'opérateur D_2. Essayons donc de trouver des mouvements de révolution de la forme (4. 14) où les fonctions φ et χ au lieu d'être harmoniques conjuguées seront astreintes à être solutions de l'équation

$$D_2 u = 0 ;$$

de plus les courbes $\varphi = C^{te}$ et $\chi = C^{te}$ seront supposées orthogonales.

Si on considère les coordonnées cylindriques on peut prendre :

$$\varphi = r^2, \qquad \chi = z.$$

On a donc les solutions de la forme :

$$\psi = F(r)z + G(r),$$

qui ont été rencontrées par MM. Witoszynski et Szymanski [(4. 23)]. On a aussi les solutions de la forme :

$$\psi = F(z)r^2 + G(z) ; \qquad (11.4)$$

elles ont été étudiées au paragraphe précédent.

Si nous passons aux coordonnées en σ, on peut prendre :

$$\varphi = \sigma, \qquad \chi = q.$$

On a les mouvements où la fonction de courant s'écrit :

$$\psi = F(\sigma)\, q + G(\sigma). \qquad (12.\,1)$$

Nous allons examiner ces mouvements. Si nous portons cette expression de ψ dans l'équation de compatibilité cinématique (3. 10), nous obtenons les équations :

$$\nu\Big[(1 - \sigma^2)F''\Big]'' + FF''' + 2\nu F'' + 3F'F'' = 0, \qquad (12.\,2)$$

$$F''G' = 0, \qquad (12.\,3)$$

$$G'' = 0. \qquad (12.\,4)$$

L'équation (12. 3) montre que l'on a ou bien $F'' = 0$, ou bien $G' = 0$. Si l'on prend $F'' = 0$ le mouvement est irrotationnel ; en effet de (12. 1) on déduit que :

$$D_2\psi = \frac{(1 - \sigma^2)F''}{q} + \frac{(1 - \sigma^2)G''}{q^2},$$

et en tenant compte de l'équation (12. 4) :

$$D_2\psi = \frac{1 - \sigma^2}{q} \cdot F''.$$

Reste donc la possibilité $G' = 0$; dans ce cas on peut prendre $G = 0$ puisque la fonction de courant n'est déterminée qu'à une constante additive près. Finalement on voit que la fonction de courant est de la forme :

$$\psi = F(\sigma) . q, \qquad (12.\,5)$$

la fonction F satisfaisant à l'équation différentielle (12. 2).

L'expression (12. 5) montre que les lignes de courant sont des courbes homothétiques de l'une d'entre elles, le centre d'homothétie étant O.

L'équation (12. 2) s'intègre immédiatement trois fois et devient une équation de Riccati :

$$2\nu(1 - \sigma^2)F' + 4\nu\sigma F + F^2 = A\sigma^2 + B\sigma + C, \qquad (12.\,6)$$

A B C désignant des constantes arbitraires (1).

---

(1) Mon manuscrit était achevé quand j'ai eu connaissance du contenu d'un court travail de M. Slioskin. — *Über einen integrierbaren Fall der vollständigen Bewegungsgleichungen einer zähen Flüssigkeit, Wiss. Ber. Moskauer Univ.* H. 2, pp. 89 - 90 (1934) où cet auteur fait l'hypothèse (12. 5) et obtient une équation équivalente à (12. 6).

Les composantes de la vitesse suivant les vecteurs unitaires $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_3$ (fig. 2) ont pour expression :

$$v_1 = \frac{1}{q} F', \qquad v_3 = -\frac{1}{q} \cdot \frac{F}{\sqrt{1 - \sigma^2}}.$$

Si on ne veut pas que l'axe Oz soit une ligne de sources, il faut que l'on ait :

$$F(\pm 1) = 0.$$

L'équation (12. 6) montre qu'une condition nécessaire pour qu'il en soit ainsi est que les constantes A B C satisfassent aux relations :

$$B = 0, \qquad A = -C. \qquad (12.\ 7)$$

L'équation (12. 6) devient alors :

$$2\nu(1 - \sigma^2)F' + 4\nu\sigma F + F^2 = A(\sigma^2 - 1). \qquad (12.\ 8)$$

Supposons d'abord que l'on ait

$$A = 0.$$

La fonction de courant ψ a alors pour expression :

$$\psi = 2\nu . \frac{1 - \sigma^2}{\sigma - a} \cdot q,$$

a désignant une constante. En particulier si on pren fonction de courant s'écrit en revenant aux coordon driques :

$$\psi = 2\nu . \frac{r^2}{z};$$

c'est la solution déjà rencontrée en (11. 9).

Supposons maintenant que

$$A \neq 0.$$

L'équation (12. 8) admet comme solution particulière :

$$F_1 = -4\nu\sigma$$

pourvu que l'on ait : $A = 8\nu^2$; la fonction de courant a dans ce cas pour expression :

$$\psi = 8\nu q\left[(1 - \sigma^2) \operatorname{Log} \frac{1 + \sigma}{1 - \sigma} + b(1 - \sigma^2) + 2\sigma\right]^{-1} - 4\nu q\sigma$$

où b désigne une constante.

Si on ne s'astreint pas aux conditions (12. 7) on a des écoulements où l'axe Oz constitue une ligne de sources. Par exemple l'équation (12. 6) admet la solution particulière

$$F_1 = 2\nu c,$$

c désignant une constante pourvu que l'on ait :

$$A = 0, \qquad B = 8\nu^2 c, \qquad C = 4\nu^2 c^2.$$

On obtient alors pour la fonction de courant l'expression :

$$\psi = \left[2\nu c + 2\,\nu(1 - \sigma^2) + \frac{h'(\sigma)}{h(\sigma)}\right]q,$$

où la fonction $h(\sigma)$ est telle que

$$h'(\sigma) = \left(\frac{\sigma - 1}{\sigma + 1}\right)^c.$$

On pourrait d'une manière analogue et sans difficulté expliciter la solution qui correspond aux valeurs des constantes A, B, C pour lesquelles l'équation (12. 6) admet une solution particulière de la forme :

$$F_1 = a\sigma + b$$

a et b désignant des constantes [1].

13. Si on considère l'équation de compatibilité cinématique (3. 10) écrite en coordonnées en σ, l'hypothèse analogue à (11. 1)-(11. 2) consiste à poser :

$$D_2\psi = q^2 . f(\sigma), \qquad (13.\ 1)$$

ou bien

$$D_2\psi = (1 - \sigma^2) f(q). \qquad (13.\ 2)$$

En faisant ces hypothèses on constate que l'on est conduit à

$$D_2\psi = Kr^2 ;$$

on n'a donc aucune famille nouvelle.

On pourrait aussi comme en mouvement plan (§ 9) essayer de trouver pour le mouvement de révolution des solutions de la forme :

$$\psi = F(r) + G(z). \qquad (13.\ 3)$$

Des calculs faciles montrent que la seule possibilité est :

$$D_2\psi = f(r).$$

On ne trouve donc que des solutions entièrement déterminées [(4. 22)].

---

[1] On trouvera plus loin (§ 29) une solution de la famille ci-dessus rencontrée incidemment.

C. Mouvement permanent spatial.

14. Mouvement pseudo-plan de première espèce.

Un mouvement plan est celui qui par définition satisfait aux deux conditions suivantes :

1° les trajectoires sont situées dans des plans parallèles (par exemple) au plan xOy, c'est-à-dire l'on a :

$$w = 0\,;$$

2° le mouvement est identique dans les divers plans parallèles, c'est-à-dire les composantes de la vitesse ne dépendent pas de z.

Ces deux propriétés ne sont pas nécessairement liées ; on peut examiner les mouvements qui ne possèdent que l'une d'entre elles. On obtiendra deux classes de mouvements dont chacune comprendra comme cas particulier la classe des mouvements plans proprement dits. On aura d'abord les mouvements où les trajectoires sont situées dans des plans parallèles au plan xOy, c'est-à-dire où l'on a :

$$w = 0,$$

mais où les composantes u et v de la vitesse peuvent dépendre de z : nous appellerons ces mouvements les mouvements " *pseudo-plans de première espèce* ". Ensuite on aura les mouvements où les composantes de la vitesse ne dépendent pas de z, les trajectoires pouvant être gauches : nous appellerons ces mouvements les mouvements " *pseudo-plans de deuxième espèce* ". Ces derniers mouvements seront étudiés dans le paragraphe suivant ; le paragraphe actuel sera consacré aux mouvements pseudo-plans de première espèce.

Pour ces mouvements les composantes de la vitesse sont donc de la forme :

$$u = u(x\,y\,z), \qquad v = v(x\,y\,z), \qquad w = 0.$$

La condition de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0\,;$$

elle implique l'existence d'une fonction de courant $\psi = \psi(x\,y\,z)$ telle que l'on ait :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Cette fonction ψ est déterminée à une fonction additive de z près. Le tourbillon n'est plus en général normal au plan xOy comme en mouvement plan proprement dit ; ses composantes sont données par les formules :

$$2\xi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z}, \qquad 2\eta = \frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial z}, \qquad 2\zeta = -\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right).$$

Écrivons maintenant l'équation de compatibilité cinématique. Elle fournit les trois équations suivantes :

$$\nu(\Delta_2'\psi)''_{xz} + \frac{1}{2}(\psi_x'^2 + \psi_y'^2)''_{yz} - (\psi_y'.\Delta_2\psi)'_z = 0, \qquad (14.1)$$

$$\nu(\Delta_2'\psi)''_{yz} - \frac{1}{2}(\psi_x'^2 + \psi_y'^2)''_{xz} + (\psi_x'.\Delta_2\psi)'_z = 0, \qquad (14.2)$$

$$\nu\Delta_2(\Delta_2'\psi) + \frac{D(\psi, \Delta_2\psi)}{D(x, y)} = 0. \qquad (14.3)$$

Dans ces équations l'on a posé :

$$\Delta_2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2},$$

$$\Delta_2'\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}.$$

Les équations (14. 1) et (14. 2) s'intègrent une fois par rapport à z et s'écrivent en désignant par $F(x\,y)$ et $G(x\,y)$ deux fonctions arbitraires qui dépendent de x et y à l'exclusion de z :

$$\nu(\Delta_2'\psi)'_x + \frac{1}{2}(\psi_x'^2 + \psi_y'^2)'_y - \psi_y'.\Delta_2\psi = F(x\,y), \qquad (14.4)$$

$$\nu(\Delta_2'\psi)'_y - \frac{1}{2}(\psi_x'^2 + \psi_y'^2)'_x + \psi_x'.\Delta_2\psi = G(x\,y). \qquad (14.5)$$

Si on dérive l'équation (14. 4) par rapport à x, l'équation (14. 5) par rapport à y et si on ajoute les résultats, on obtient en tenant compte de (14. 3) :

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0.$$

Il s'ensuit que $\Phi(x, y)$ désignant une fonction arbitraire de x et y les équations (14. 4) et (14. 5) s'écrivent :

$$\nu(\Delta_2'\psi)_x' + \frac{1}{2}(\psi_x'^2 + \psi_y'^2)_y' - \psi_y' . \Delta_2\psi = -\Phi_y', \quad (14.\ 6)$$

$$\nu(\Delta_2'\psi)_y' - \frac{1}{2}(\psi_x'^2 + \psi_y'^2)_x' + \psi_x' . \Delta_2\psi = \Phi_x'. \quad (14.\ 7)$$

Comme l'équation (14. 3) est une conséquence des équations (14. 6) et (14. 7), on voit finalement que ces équations (14. 6) et (14. 7) constituent les conditions de compatibilité cinématique de la classe de mouvements envisagée.

Quant à la partie dynamique du problème on obtient facilement :

$$\frac{p}{\rho} + U = \Phi(x\, y). \quad (14.\ 8)$$

On voit que la quantité $\frac{p}{\rho} + U$ ne dépend pas de z tout comme en mouvement plan proprement dit.

***

On obtient une première solution particulière des équations (14. 6) et (14. 7) en supposant que les composantes u et v de la vitesse ne dépendent que de z :

$$u = u(z), \qquad v = v(z) ;$$

cela revient à poser pour la fonction de courant :

$$\psi = F(z)y + G(z)x. \quad (14.\ 9)$$

Les équations (14. 6) et (14. 7) deviennent :

$$\nu G'' = -\Phi_y',$$
$$\nu F'' = \Phi_x'.$$

On en tire pour les fonctions F, G, Φ les expressions :

$$F = az^2 + bz + c,$$
$$G = a_1z^2 + b_1z + c_1,$$
$$\Phi = 2\nu(ax - a_1y),$$

$a\ b\ c$ et $a_1\ b_1\ c_1$ désignant des constantes arbitraires. Finalement on voit que l'on a :

$$\left.\begin{array}{c} \psi = (az^2 + bz + c)y + (a_1z^2 + b_1z + c_1)x\,; \\ u = az^2 + bz + c, \quad v = -(a_1z^2 + b_1z + c_1), \quad w = 0\,; \\ \dfrac{p}{\rho} + \mathrm{U} = 2\nu(ax - a_1y). \end{array}\right\} \quad (14.\ 10)$$

Les composantes du tourbillon sont données par :

$$2\xi = 2a_1z + b_1, \qquad 2\eta = 2az + b, \qquad 2\zeta = 0.$$

Le mouvement dans chaque plan $z = z_0$ est un courant uniforme parallèle à une certaine direction dont l'angle φ avec Ox est donné par :

$$\mathrm{tg}\ \varphi = -\frac{a_1z_0^2 + b_1z_0 + c_1}{az_0^2 + bz_0 + c}\,;$$

mais quand on passe d'un plan $z = z_0$ à un autre cette direction varie. On a ainsi un écoulement par droites, parallèles dans un même plan $z = z_0$ (où elles constituent un courant uniforme), mais " tordues " les unes par rapport aux autres dans des plans différents.

***

Proposons-nous de rechercher comme en mouvement plan proprement dit [(4. 15)] les solutions pour lesquelles la fonction de courant ψ est linéaire en l'une des coordonnées x ou y ; choisissons y par exemple ; on a donc :

$$\psi = \mathrm{F}(x\,z)y + \mathrm{G}(x\,z). \qquad (14\ \ 11)$$

Remarquons que le mouvement (14. 10) est un cas particulier des mouvements actuels.

Si on porte l'expression (14. 11) de la fonction de courant dans les équations de compatibilité cinématique (14. 6) et (14. 7), celles-ci s'écrivent :

$$\left[\nu(\mathrm{F}''_{x} + \mathrm{F}''_{z^2})'_x + \mathrm{F}'^2_x - \mathrm{F}\mathrm{F}''_{x^2}\right]y + \nu(\mathrm{G}''_{x^2} + \mathrm{G}''_{z^2})'_x + \mathrm{G}'_x\mathrm{F}'_x - \mathrm{F}\mathrm{G}''_{x^2} = -\Phi'_y, \quad (14.\ 12)$$

$$\nu(\mathrm{F}''_{x^2} + \mathrm{F}''_{z^2}) - \mathrm{F}\mathrm{F}'_x = \Phi'_x. \qquad (14.\ 13)$$

En dérivant la première de ces équations par rapport à x, la seconde par rapport à y et en ajoutant les résultats ou si l'on veut en portant l'expression (14. 11) dans l'équation (14. 3), on obtient :

$$\nu(F''_{x^2} + F''_{z^2})'_x + F'^2_x - FF''_{x^2} = a, \qquad (14.\ 14)$$

$$\nu(G''_{x^2} + G''_{z^2})'_x + G'_x F'_x - FG''_{x^2} = b, \qquad (14.\ 15)$$

a et b désignant des constantes ; à ces équations il faut joindre l'équation (14. 13) qui s'écrit en désignant par $\varphi(x)$ une fonction de x seul :

$$\nu(F''_{x^2} + F''_{z^2}) - FF'_x = \varphi'(x) ; \qquad (14.\ 16)$$

la fonction Φ a pour expression :

$$\Phi = -\frac{a}{2}y^2 - by + \varphi(x).$$

Les équations (14. 14), (14. 15) et (14. 16) constituent les conditions de compatibilité cinématique des mouvements du type (14. 11).

Des équations (14. 14) et (14. 16) on tire facilement :

$$2F'^2_x = a - \varphi'',$$

ce qui montre que

$$F''_{xz} = 0.$$

La fonction $F(x\ z)$ doit donc être de la forme :

$$F(x\ z) = f(x) + g(z).$$

En portant cette expression dans l'équation (14. 16) et en dérivant par rapport à z l'équation obtenue il vient :

$$\nu g''' - f' . g' = 0. \qquad (14.\ 17)$$

Cette équation montre que deux cas sont possibles :

1° $g' = 0$; alors la fonction F ne dépend que de x :

$$F = F(x) ; \qquad (14.\ 18)$$

2° $g' \neq 0$; l'équation (14. 17) montre alors que l'on a en désignant par K une constante :

$$\nu\frac{g'''}{g'} = f' = K.$$

On déduit pour F l'expression :

$$F(x\,z) = Kx + A_1 e^{\lambda z} + A_2 e^{-\lambda z} + Bz^2 + Cz + D,$$

où les grandes lettres désignent des constantes et où l'on a $\nu\lambda^2 = K$. Reportons cette expression de F dans l'équation (14. 16) ; on voit que F doit être de l'une des deux formes suivantes :

$$F = Bz^2 + Cz + D, \tag{14. 19}$$

$$F = A_1 e^{\lambda z} + A_2 e^{-\lambda z} + Kx + D. \tag{14. 20}$$

Nous allons maintenant examiner séparément les cas (14. 18), (14. 19) et (14. 20).

Supposons d'abord que l'on soit dans le cas (14. 18). La fonction de courant est de la forme :

$$\psi = F(x)y + G(x\,z) ; \tag{14. 21}$$

la fonction $F(x)$ vérifie l'équation (14. 13) qui s'écrit [1] :

$$\nu F''' + F'^2 - FF'' = a \tag{14. 22}$$

et la fonction G vérifie l'équation (14. 15). La pression est donnée par :

$$\frac{p}{\rho} + U = \Phi = -\frac{a}{2}y^2 - by + \nu F' - \frac{1}{2}F^2 + c,$$

c désignant une constante arbitraire.

Supposons maintenant que F soit de la forme (14. 19). La fonction de courant s'écrit alors :

$$\psi = (Bz^2 + Cz + D)y + G(x\,z), \tag{14. 23}$$

la fonction $G(x\,z)$ vérifiant l'équation (14. 15) qui s'intègre une fois par rapport à x et qui devient :

$$\nu(G''_{x^2} + G''_{z^2}) - (Bz^2 + Cz + D)G'_x = bx. \tag{14. 24}$$

En écrivant cette équation on a utilisé le fait que la fonction de courant ψ et par conséquent G ne sont déterminés qu'à une fonction additive de z près. La pression est donnée par :

$$\frac{p}{\rho} + U = \Phi = -by + 2\nu Bx + c,$$

c désignant une constante arbitraire.

---

[1] L'équation (14. 22) n'est autre que l'équation (4. 16).

Supposons enfin que F soit de la forme (14. 20). La fonction de courant s'écrit :

$$\psi = (A_1 e^{\lambda z} + A_2 e^{-\lambda z} + Kx + D)y + G(x\, z), \quad (14.\ 25)$$

la fonction $G(x\, z)$ vérifiant l'équation (14. 15) qui s'intègre une fois par rapport à x et s'écrit :

$$\nu(G''_{x^2} + G''_{y^2}) - (A_1 e^{\lambda z} + A_2 e^{-\lambda z} + Kx + D)G'_x + 2KG = bx. \quad (14.\ 26)$$

La pression est donnée par :

$$\frac{p}{\rho} + U = \Phi = -\frac{K}{2}(x^2 + y^2) - by - KDx + c.$$

c désignant une constante arbitraire.

On se trouve ainsi avoir épuisé tous les cas. On voit que les mouvements pseudo-plans de première espèce du type (14. 11) se composent des trois familles (14. 21), (14. 23) et (14. 25).

On pourrait expliciter de nombreux cas particuliers de ces solutions. Contentons-nous de considérer le cas où la fonction de courant est de la forme :

$$\psi = Cy + G(x\, z), \quad (14.\ 27)$$

qui est un cas particulier de chacune des familles (14. 21), (14. 23) et (14. 25). La fonction G satisfait à l'équation :

$$\nu(G''_{x^2} + G''_{z^2}) - C.G'_x = bx. \quad (14.\ 28)$$

La pression est donnée par :

$$\frac{p}{\rho} + U = -by + c.$$

Posons :

$$h(x\, z) = G(x\, z) + \frac{b}{2C}x^2 + \frac{\nu b}{C^2}x\,;$$

la fonction h satisfait à l'équation suivante qui se déduit aisément de (14. 27) :

$$\nu(h''_{x^2} + h''_{z^2}) - Ch'_x = 0.$$

On pourrait expliciter de nombreuses solutions de cette équation. On a par exemple pour h le développement formel suivant :

$$h = e^{\frac{C}{\nu}x}(Pz + Q) + \sum_r (M_r e^{\omega_1 x} + N_r e^{\omega_2 x})\,(P_r e^{rz} + Q_r e^{-rz}),$$

où ω_1 et ω_2 sont les racines de l'équation :

$$\nu\omega^2 - C\omega + \nu r^2 = 0,$$

et où les grandes lettres désignent des constantes arbitraires. L'expression correspondante pour la fonction de courant est :

$$\psi = Cy - \frac{b}{2C}x^2 - \frac{\nu b}{C^2}x + e^{\frac{C}{\nu}x}(Pz + Q)$$
$$+ \sum_r (M_r e^{\omega_1 x} + N_r e^{\omega_2 x})(P_r e^{rz} + Q_r e^{-rz}). \quad (14.29)$$

***

Nous venons de déterminer les solutions pour lesquelles la fonction de courant est linéaire en l'une des coordonnées x ou y. Proposons-nous maintenant de rechercher les solutions pour lesquelles la fonction de courant est linéaire en z, c'est-à-dire où l'on a :

$$\psi = A(x\,y)z + B(x\,y). \quad (14.30)$$

Si on introduit l'expression (14. 30) dans les équations de compatibilité cinématique (14. 6) et (14. 7), on obtient les équations suivantes :

$$(\Delta_1 A)'_x - 2A'_x . \Delta_2 A = 0, \quad (14.31)$$

$$(\Delta_1 A)'_y - 2A'_y . \Delta_2 A = 0, \quad (14.32)$$

$$\nu(\Delta_2 A)'_x + [\Delta_1(A, B)]'_y - A'_y . \Delta_2 B - B'_y . \Delta_2 A = 0, \quad (14.33)$$

$$\nu(\Delta_2 A)'_y - [\Delta_1(A, B)]'_x + A'_x . \Delta_2 B + B'_x . \Delta_2 A = 0, \quad (14.34)$$

$$\nu(\Delta_2 B)'_x + \frac{1}{2}(\Delta_1 B)'_y - B'_y . \Delta_2 B = -\Phi'_y, \quad (14.35)$$

$$\nu(\Delta_2 B)'_y - \frac{1}{2}(\Delta_1 B)'_x + B'_x . \Delta_2 B = \Phi'_x. \quad (14.36)$$

Dans ces équations les symboles ont leur signification usuelle :

$$\Delta_2 A = A''_{x^2} + A''_{y^2}, \qquad \Delta_1 A = A'^2_x + A'^2_y, \qquad \Delta_1(A, B) = A'_x B'_x + A'_y B'_y.$$

En dérivant l'équation (14. 31) par rapport à y et l'équation (14 32) par rapport à x et en retranchant membre à membre les équations obtenues on a :

$$\frac{D(A, \Delta_2 A)}{D(x, y)} = 0. \quad (14.37)$$

Multiplions l'équation (14. 31) par A'_y et l'équation (14. 32) par

A'_x et retranchons membre à membre les équations obtenues ; il vient :

$$\frac{D(A, \Delta_1 A)}{D(x, y)} = 0. \qquad (14.38)$$

Enfin dérivons l'équation (14. 35) par rapport à x et l'équation (14. 36) par rapport à y et ajoutons les résultats, on obtient :

$$\nu\Delta_4 B + \frac{D(B, \Delta_2 B)}{D(x, y)} = 0. \qquad (14.39)$$

L'équation (14. 39) montre que la fonction $B(x\,y)$ est la fonction de courant d'un mouvement plan proprement dit.

Les équations (14. 37) et (14. 38) montrent que ou bien A se réduit à une constante, ou bien l'on a l'un des cas suivants :

$$A = A(x),$$
$$A = A(r).$$

Si A se réduit à une constante, comme ψ est déterminé à une fonction additive de z près, on peut prendre cette constante nulle et on retombe sur un mouvement plan proprement dit. Si l'on a $A = A(r)$ l'une ou l'autre des équations (14. 31) et (14. 32) montre que A doit se réduire à une constante. Il ne reste donc que le cas où $A = A(x)$. Les équations (14. 31) et (14. 32) sont alors satisfaites d'elles-mêmes. L'équation (14. 34) se réduit à

$$A' . B''_y = 0.$$

Nous laissons de côté le cas où l'on a $A' = 0$, c'est-à-dire où A se réduit à une constante. On a donc :

$$B''_{y^2} = 0,$$

c'est-à-dire :

$$B = F(x)y + C(x).$$

On voit donc que la fonction de courant est d'une forme examinée ci-dessus, elle est linéaire en y :

$$\psi = F(x)y + A(x)z + C(x). \qquad (14.40)$$

On a donc affaire à un cas particulier de la solution (14. 19). Les fonctions $F(x)$, $A(x)$, $C(x)$ vérifient les équations :

$$\left.\begin{aligned} &\nu F''' + F'^2 - FF'' = a, \\ &\nu A''' + F'A' - FA'' = 0, \\ &\nu C''' + F'C' - FC''' = b, \end{aligned}\right\} \qquad (14.41)$$

a et b désignant des constantes. La pression est donnée par :

$$\frac{p}{\rho} + \mathrm{U} = \Phi = -\frac{a}{2}y^2 - by + \nu\mathrm{F}' - \frac{1}{2}\mathrm{F}^2 + c,$$

c désignant une nouvelle constante.

La seule solution du type (14. 30) est donc la solution (14. 40)-(14. 41).

15. Mouvement pseudo-plan de deuxième espèce.

Nous allons examiner maintenant les mouvements que nous avons appelé au début du paragraphe précédent mouvements pseudo-plans de deuxième espèce ; ce sont les mouvements pour lesquels les composantes de la vitesse ne dépendent pas de z sans d'ailleurs que les trajectoires soient assujetties à être planes. Les composantes de la vitesse sont donc de la forme :

$$u = u(x\,y), \qquad v = v(x\,y), \qquad w = w(x\,y)\ (^1).$$

L'équation de continuité fournit la condition :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Il s'ensuit que l'on a en désignant par $\psi = \psi(x\,y)$ une fonction de x et y déterminée à une constante additive près :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

On voit donc que le mouvement dans les plans parallèles au plan $x\mathrm{O}y$ est encore régit par une fonction de courant ψ liée aux composantes u, v de la vitesse par les mêmes formules qu'en mouvement plan proprement dit.

Le tourbillon n'est plus normal au plan $x\mathrm{O}y$ comme dans le mouvement plan proprement dit ; ses composantes sont données par :

$$2\xi = \frac{\partial w}{\partial y}, \qquad 2\eta = -\frac{\partial w}{\partial x}, \qquad 2\zeta = -\Delta_2\psi.$$

(1) En fluide parfait les solutions de cette forme ont été étudiées par M. Cisotti, *Moti fluidi spaziali basati sopra moti piani*, *Atti della Pontif. Accad. Sc. Nuovi Lincei*, t. 86, pp. 430-457 (1933) : M. Cisotti suppose en outre que la quantité $\frac{p}{\rho} + \mathrm{U}$ ne dépend pas non plus de z (c'est-à-dire que $\mathrm{K} = 0$) ; il s'occupe surtout des mouvements pour lesquels le mouvement plan primitif (cf. plus loin) est irrotationnel.

Écrivons l'équation de compatibilité cinématique ; elle fournit ici les deux équations :

$$\nu\Delta_4\psi + \frac{D(\psi, \Delta_2\psi)}{D(x, y)} = 0, \qquad (15.\ 1)$$

$$\nu\Delta_2 w + \frac{D(\psi, w)}{D(x, y)} = K, \qquad (15.\ 2)$$

K désignant une constante arbitraire. L'équation (15. 1) qui n'est autre que l'équation (2. 9) montre que ψ est la fonction de courant d'un mouvement plan proprement dit.

Une fois ψ déterminé, l'équation (15. 2) est une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre en w. Si on fait $K = 0$ l'équation (15. 2) est satisfaite en particulier par l'expression :

$$w = C.\Delta_2\psi, \qquad (15.\ 3)$$

C désignant une constante.

Les mouvements de la classe actuelle apparaissent donc comme la superposition :

1° d'un mouvement plan ordinaire s'effectuant parallèlement au plan xOy et que nous appellerons *mouvement plan primitif* ;

2° d'un mouvement par droites parallèles à Oz de vitesse w.

Dans le mouvement spatial résultant, les trajectoires sont des courbes gauches dont les projections sur le plan xOy sont les trajectoires du mouvement plan primitif.

Une fois le mouvement plan primitif connu, la détermination de w revient à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles linéaire du second ordre du type elliptique. On a donc là un moyen relativement commode pour associer à toute solution exacte connue du mouvement plan une solution exacte du mouvement spatial ; cette solution n'aura pas en général de symétrie axiale, c'est-à-dire qu'elle appartiendra à la classe pour laquelle on connaît le moins d'intégrales exactes.

Si le mouvement plan primitif n'est pas irrotationnel, on peut prendre en particulier pour w l'expression (15. 3), c'est-à-dire à une constante multiplicative près le tourbillon du mouvement plan primitif [1] : on voit qu'on peut ainsi associer à tout mouvement plan

---

[1] Dans ce cas on peut même dire que le *vecteur* vitesse du mouvement par droites parallèles n'est autre (à une constante multiplicative près) que le *vecteur* tourbillon du mouvement plan primitif.

connu un mouvement spatial sans qu'il y ait d'autre calcul à effectuer que celui du tourbillon du mouvement plan.

Passons maintenant à la partie dynamique du problème ; des calculs faciles montrent que la pression est donnée par :

$$\frac{p}{\rho} + U = Kz + \Phi(x\,y), \tag{15. 4}$$

la fonction $\Phi(x\,y)$ n'étant autre que la quantité $\frac{p}{\rho} + U$ du mouvement plan primitif [1] ; en d'autres termes si l'on pose

$$H = \Phi + \frac{1}{2}(\psi_x'^2 + \psi_y'^2),$$

on a les équations suivantes qui ne sont autres que les équations (2. 3) et (2. 4) écrites pour le mouvement permanent :

$$\begin{aligned} H_x' &= \psi_x'.\Delta_2\psi + \nu.(\Delta_2\psi)_y', \\ H_y' &= \psi_y'.\Delta_2\psi - \nu(\Delta_2\psi)_x'. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant passer en revue les principales solutions connues de l'équation (15. 1), c'est-à-dire les principales solutions connues du mouvement plan et nous examinerons les mouvements spatiaux qu'on peut leur associer en prenant pour w soit l'expression (15. 3), soit une autre solution de l'équation (15. 2).

1. Supposons d'abord que le mouvement plan primitif soit irrotationnel, c'est-à dire que l'on ait :

$$\Delta_2\psi = 0\,;$$

la composante w satisfait à l'équation :

$$\nu\Delta_2 w + \frac{D(\psi, w)}{D(x, y)} = K\,; \tag{15. 2}$$

---

[1] Si on prend $K = 0$ on voit donc que la pression dans le mouvement spatial est la même que la pression dans le mouvement plan primitif. (Pour simplifier nous supposons qu'il n'y a pas de forces extérieures) Considérons alors un solide cylindrique de génératrices parallèles à Oz immergé dans le fluide ; nous supposons qu'au loin le mouvement est par exemple un courant uniforme parallèle à Ox. On voit alors facilement que la résistance éprouvée par le cylindre (et aussi la portance) dans le mouvement plan est la même que celle éprouvée dans le mouvement spatial associé à ce mouvement plan : en effet les seules composantes du tenseur des efforts qui interviennent dans le calcul de la résistance et de la portance à savoir P_{xx}, P_{xy}, P_{yy} ont les mêmes valeurs dans les deux mouvements.

on n'a point ici la solution (15. 3). Les composantes du tourbillon sont données par :

$$2\xi = w'_y, \qquad 2\eta = -w'_x, \qquad 2\zeta = 0.$$

Le vecteur tourbillon est donc contenu dans le plan xOy. La pression est donnée par l'équation :

$$\frac{p}{\rho} + U + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) = Kz + K_1,$$

K_1 désignant une constante ; si $K = 0$ cette équation se réduit à la formule de Bernoulli. Dans le cas où l'on prend $K = 0$, l'équation (15. 2) peut d'ailleurs s'écrire sous une forme plus simple si on emploie les coordonnées isométriques φ et ψ, φ désignant la fonction harmonique conjuguée de ψ, telle que $\varphi + i\psi$ soit une fonction analytique de $x + iy$; φ est le potentiel des vitesses du mouvement plan primitif. L'équation (15. 2) devient avec ces variables φ et ψ :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} - \frac{1}{\nu}\cdot\frac{\partial w}{\partial \varphi} = 0.$$

Cette équation admet les solutions formelles suivantes :

$$w = \sum_\lambda (A_\lambda e^{r_1\varphi} + B_\lambda e^{r_2\varphi})(C_\lambda e^{\lambda\psi} + D_\lambda e^{-\lambda\psi}), \tag{15. 5}$$

$$w = \sum_\lambda (A_\lambda e^{r_1\varphi} + B_\lambda e^{r_2\varphi})(C_\lambda \cos \lambda\psi + D_\lambda \sin \lambda\psi), \tag{15. 6}$$

$$w = (Ae^{\frac{1}{\nu}\varphi} + B)(C\psi + D), \tag{15. 7}$$

où les grandes lettres désignent des constantes et où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation

$$\nu r^2 - r + \nu\lambda^2 = 0$$

pour la solution (15. 5) et de l'équation

$$\nu r - r - \nu\lambda^2 = 0$$

pour la solution (15. 6).

2. Prenons comme mouvement plan primitif le mouvement par droites parallèles :

$$\psi = Ay^3 + By^2 + Cy. \tag{4. 1}$$

L'équation (15. 2) devient :

$$\nu\Delta_2 w - (3Ay^2 + 2By + C)\frac{\partial w}{\partial x} = K.$$

Cherchons une solution w de cette équation qui ne dépende que de y ; on obtient :

$$w = A_1 y^2 + B_1 y + C_1,$$

$A_1 B_1 C_1$ désignant des constantes dont la première est liée à K par la relation :

$$2A_1 \nu = K.$$

Cette solution contient comme cas particulier celle qu'on aurait en prenant l'expression (15. 3). Finalement les composantes de la vitesse dans le mouvement obtenu sont :

$$u = 3Ay^2 + 2By + C, \qquad v = 0, \qquad w = A_1 y^2 + B_1 y + C_1.$$

Avec des notations différentes cette solution n'est autre que celle déjà obtenue en (14. 10).

3. Prenons comme mouvement plan primitif le mouvement par cercles concentriques :

$$\psi = A . r^2 \operatorname{Log} r + B \operatorname{Log} r + Cr^2. \qquad (4.\ 2)$$

L'équation (15. 2) devient :

$$\nu \Delta_2 w + \left[2A \operatorname{Log} r + \frac{B}{r^2} + A + 2C \right] \frac{\partial w}{\partial \theta} = K.$$

Cherchons une solution w de cette équation qui ne dépende que de r ; on obtient :

$$w = A_1 \operatorname{Log} r + B_1 r^2 + C_1,$$

$A_1 B_1 C_1$ désignant des constantes dont la deuxième est liée à K par la relation :

$$4B_1 \nu = K.$$

Cette solution contient comme cas particulier celle qu'on aurait en prenant l'expression (15. 3). Finalement les composantes de la vitesse en coordonnées cylindriques dans le mouvement ainsi obtenu sont :

$$v_1 = 0, \qquad v_2 = A_0 . r \operatorname{Log} r + B_0 r + \frac{C_0}{r},$$

$$w_3 \equiv w = A_1 \operatorname{Log} r + B_1 r^2 + C_1.$$

Ce mouvement n'est autre que le mouvement par hélices circulaires (4. 25) de M. Strakhovitch.

4. Prenons comme mouvement plan primitif le mouvement par droites concourantes. La fonction de courant est de la forme :

$$\psi = F(\theta),$$

la fonction $F(\theta)$ satisfaisant à l'équation :

$$\nu F''' + 4\nu F' + F'^2 = A,$$

A désignant une constante ; F' s'exprime par la fonction elliptique pu :

$$F' = -2\nu + p\left[\frac{i}{\sqrt{6\nu}}(\theta - \theta_0) ; g_2, g_3\right].$$

A ce mouvement plan primitif associons un mouvement spatial en prenant pour w l'expression (15. 3) ; nous obtenons :

$$w = \frac{C}{r^2} \cdot F''.$$

Finalement les composantes de la vitesse en coordonnées cylindriques dans le mouvement obtenu sont :

$$v_1 = \frac{1}{r} \cdot F', \qquad v_2 = 0, \qquad v_3 \equiv w = \frac{C}{r^2} \cdot F''. \quad (15.8)$$

Les trajectoires sont contenues dans des plans passant par Oz ; le mouvement n'est d'ailleurs pas un mouvement de révolution proprement dit puisque les vitesses dépendent de θ : c'est un mouvement " pseudo-de révolution de première espèce " (§ 16).

5. Prenons comme mouvement plan primitif le mouvement par spirales logarithmiques ; la fonction de courant est de la forme :

$$\psi = F(a \operatorname{Log} r + b\theta),$$

la fonction F vérifiant l'équation différentielle :

$$\nu(a^2 + b^2)F''' - 4a\nu F'' + 4\nu F' + bF'^2 = A, \qquad (4.8)$$

où A désigne une constante.

Associons à ce mouvement plan primitif un mouvement spatial en prenant pour w l'expression (15. 3) ; nous obtenons :

$$w = \frac{C_1}{r^2} \cdot F'',$$

C_1 désignant une constante. Les trajectoires sont tracées sur des cylindres ayant pour section droite des spirales logarithmiques.

6. Prenons pour mouvements plans primitifs les mouvements (4. 9) et (4. 10) de M. Jeffery. Considérons d'abord le mouvement (4. 9) :

$$\psi = \nu(2Ax + B)y + C\int dx \int dx \int e^{Ax^2 + Bx} dx + Dx^2 + Ex. \tag{4. 9}$$

Associons à ce mouvement plan un mouvement spatial en prenant pour w une solution de l'équation (15. 2) qui ne dépende que de x ; on trouve :

$$w = \frac{K}{\nu}\int e^{Ax^2 + Bx}\left[\int e^{-Ax^2 - Bx} dx\right] dx + F\int e^{Ax^2 + Bx} dx + G, \tag{15. 9}$$

F et G désignant des constantes arbitraires. Cette solution contient comme cas particulier celle qu'on aurait en prenant pour w l'expression (15. 3). Dans le mouvement spatial (4. 9)-(15. 9) les composantes du tourbillon ne dépendent que de x, tout comme dans le mouvement plan (4. 9) de M. Jeffery.

Dans le cas particulier où $A = 0$, les expressions de ψ et de w deviennent :

$$\psi = \nu By + Ce^{Bx} + Dx^2 + Ex,$$

$$w = \frac{K}{\nu}x + F\,e^{Bx} + G.$$

On remarquera que dans cette solution les trois composantes de la vitesse ne dépendent que de x : les plans $x = x_0$ sont des surfaces isotachyques.

Passons maintenant à la solution (4. 10) :

$$\psi = \nu(2A \operatorname{Log} r + B)\theta + C\int \frac{dr}{r}\int r dr \int e^{A(\operatorname{Log} r)^2 + B \operatorname{Log} r}\frac{dr}{r} + Dr^2 + E \operatorname{Log} r. \tag{4. 10}$$

Associons à ce mouvement plan un mouvement spatial en prenant pour w une solution de l'équation (15. 2) qui ne dépende que de r ; on trouve pour w l'expression :

$$w = \frac{K}{\nu}\int e^{\alpha(r)}\left[\int e^{-\alpha(r)} dr\right] dr + F\int e^{\alpha(r)} dr + G, \tag{15. 10}$$

où $\alpha(r) = A\,(\operatorname{Log} r)^2 + (B - 1) \operatorname{Log} r$ et où F et G désignent des constantes arbitraires. Cette solution contient comme cas particulier qu'on aurait en prenant pour w l'expression (15. 3). Dans le mouvement spatial (4. 10)–(15. 10) les composantes du tourbillon en coordonnées cylindriques ne dépendent que de r, propriété analogue à celle du mouvement plan (4. 10) de M. Jeffery.

Si le fluide s'étend à une région où θ peut varier de 0 à 2π, l'uniformité des vitesses fournies par la fonction de courant (4. 10) nécessite que l'on prenne

$$A = 0.$$

Dans ce cas particulier la solution (4. 10)–(15. 10) se réduit aux trois solutions suivantes où v_1 v_2 v_3 désignent les composantes de la vitesse en coordonnées cylindriques :

$$\left.\begin{array}{lll} v_1 = \dfrac{2\nu}{r}, & v_2 = A_1 r^3 + B_1 r + \dfrac{C_1}{r}, & v_3 \equiv w = A_2 r^2 \operatorname{Log} r + B_2 r^2 + C_2 ; \\ v_1 = -\dfrac{2\nu}{r}, & v_2 = A_1 \dfrac{\operatorname{Log} r}{r} + B_1 r + \dfrac{C_1}{r}, & v_3 = \dfrac{A_2}{r^2} + B_2 r^2 + C_2 ; \\ v_1 = \dfrac{\nu B}{r}, & v_2 = A_1 r^{B+1} + B_1 r + \dfrac{C_1}{r}, & v_3 = A_2 r^B + B_2 r^2 + C_2 ; \end{array}\right\} \quad (15.\ 11)$$

les grandes lettres désignent des constantes arbitraires ; dans la dernière solution on suppose que

$$B \neq -2,\ 0,\ +2.$$

Le cas $B = 0$ est exclu car alors la solution (4. 10) se réduit au mouvement par droites parallèles et on retombe sur la solution (4. 25).

Dans les mouvements que nous venons d'obtenir les trois composantes de la vitesse en coordonnées cylindriques ne dépendent que de r ; les cylindres d'axe Oz sont des surfaces isotachyques et le champ des vecteurs vitesses admet une symétrie de rotation par rapport à Oz : les mouvements (15. 11) rentrent dans la catégorie des mouvements pseudo-de révolution de deuxième espèce (§ 17).

Notons enfin que l'uniformité de $\dfrac{p}{\rho} + U$ nécessite que l'on prenne $B_1 = 0$ dans les solutions (15. 11).

7. Prenons pour mouvement plan primitif le mouvement (4. 13) de M. Oseen :

$$\psi = F(\varphi) + C\chi ; \qquad (4.\ 13)$$

C désigne une constante, φ et χ les fonctions harmoniques conjuguées (4. 6) et la fonction F satisfait à une équation différentielle du 3^e ordre.

Associons à ce mouvement plan un mouvement spatial en prenant pour w l'expression (15. 3) ; on obtient :

$$w = \frac{A}{r^2} \cdot F'', \tag{15. 12}$$

A désignant une constante.

La fonction F a été évaluée par M. Oseen dans divers cas ; la solution spatiale que nous venons d'obtenir se trouve toute déterminée dans ces cas (1).

Les trajectoires du mouvement spatial (4. 13)–(15. 12) sont des courbes gauches tracées sur des cylindres dont les sections droites sont des trajectoires tortueuses du mouvement " pseudo-turbulent " de M. Oseen ; ce mouvement spatial est donc au moins aussi " turbulent " que le mouvement de M. Oseen.

8. Prenons pour mouvement plan primitif le mouvement (4. 15) :

$$\psi = F(x)y + G(x) ;$$

les fonctions $F(x)$ et $G(x)$ satisfont aux équations (4. 16) et (4. 17).

Ainsi qu'on l'a remarqué ce mouvement satisfait aux équations de la couche limite plane.

Associons à ce mouvement plan un mouvement spatial en prenant pour w l'expression (15. 3) ; on obtient :

$$w = C(F''y + G'').$$

En particulier à la solution (4. 18) on peut superposer la vitesse :

$$w = C\left[-12\nu . \frac{y}{x} + 6C_1 x + \frac{2C_2}{x^3} + \frac{6C_3}{x^4}\right].$$

9. Prenons en dernier lieu comme mouvements plans primitifs les mouvements (10. 8) à (10. 10). Associons-leur des mouvements spatiaux en prenant pour w l'expression (15. 3). On obtient les solutions suivantes :

1° $$\psi = ax + (C_1 \operatorname{ch} \omega x + C_2 \operatorname{sh} \omega x)e^{Ky},$$

$$w = k(C_1 \operatorname{ch} \omega x + C_2 \operatorname{sh} \omega x)e^{Ky}, \quad \omega^2 = -K_2 - \frac{aK}{\nu};$$

(1) M. Oseen a aussi donné une solution analogue à la solution (4.13)-(5.12) ainsi qu'on l'a noté au § 4 (C, 3°) ; mais la détermination de w dans cette solution, différente de la solution (4.13)-(5.12), nécessite l'intégration d'une nouvelle équation.

2° $$\psi = ax + (C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x)e^{Ky},$$

$$w = k(C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x)e^{Ky}, \qquad \omega^2 = K^2 + \frac{aK}{\nu};$$

3° $$\psi = ax + (C_1 x + C_2)e^{-\frac{a}{\nu}y}, \qquad w = k(C_1 x + C_2)e^{-\frac{a}{\nu}y};$$

dans ces expressions k désigne une constante arbitraire.

16. Mouvement pseudo-de révolution de première espèce.

De la même manière que nous avons défini au § 14 à côté du mouvement plan les mouvements pseudo-plans de première et de deuxième espèce, nous allons maintenant définir à côté du mouvement de révolution les mouvements " pseudo-de révolution de première et de deuxième espèce ".

Un mouvement de révolution est celui par définition qui possède les deux propriétés suivantes :

1° les trajectoires sont contenues dans des plans passant par Oz ;

2° le mouvement est identique dans les divers plans méridiens.

Utilisons les coordonnées cylindriques ; la première propriété se traduit par la condition

$$v_2 = 0,$$

la deuxième par le fait que les composantes v_1 et v_3 ne dépendent pas de θ.

Les deux propriétés ci-dessus ne sont pas nécessairement liées ; nous allons considérer les mouvements qui ne possèdent que l'une d'entre elles ; nous aurons ainsi les deux classes suivantes de mouvements qui comprendront chacune comme cas particulier la classe des mouvements de révolution proprement dits :

1° les mouvements dont les trajectoires sont contenues dans des plans passant par Oz, les vitesses pouvant d'ailleurs dépendre de θ ; nous appellerons ces mouvements les " *mouvement pseudo-de révolution de première espèce* " ;

2° les mouvements pour lesquels les composantes de la vitesse en coordonnées cylindriques ne dépendent pas de θ, les trajectoires n'étant d'ailleurs pas nécessairement contenues dans des plans passant par Oz ; nous appellerons ces mouvements les " *mouvements pseudo-de révolution de deuxième espèce* ".

Laissant pour le paragraphe suivant les mouvements pseudo-de révolution de deuxième espèce, nous nous occuperons dans le présent paragraphe des mouvements pseudo-de révolution de première espèce.

Pour un tel mouvement les composantes de la vitesse en coordonnées cylindriques sont de la forme :

$$v_1 = v_1(r\,\theta\,z), \qquad v_2 = 0, \qquad v_3 = v_3(r\,\theta\,z).$$

L'équation de continuité fournit la condition

$$\frac{\partial}{\partial r}(rv_1) + \frac{\partial}{\partial z}(rv_3) = 0,$$

qui implique l'existence d'une fonction de courant $\psi = \psi(r\,\theta\,z)$ telle que l'on ait :

$$v_1 = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial z}, \qquad v_3 = -\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial r};$$

cette fonction ψ est déterminée à une fonction additive de θ près. Le tourbillon n'est plus en général normal au plan méridien rz comme en mouvement de révolution proprement dit ; ses composantes sont données par les formules :

$$2\xi_1 = -\frac{1}{r^2}\cdot\psi''_{r\theta}, \qquad 2\xi_2 = \frac{1}{r}\cdot D_2\psi, \qquad 2\xi_3 = -\frac{1}{r^2}\cdot\psi''_{z\theta}.$$

Écrivons maintenant l'équation de compatibilité cinématique. Par un calcul analogue à celui qui a conduit en mouvement pseudo-plan de première espèce aux équations (14. 6) et (14. 7), on voit que l'équation de compatibilité cinématique se traduit par les deux équations suivantes :

$$\nu(D_2'\psi)'_r + \frac{1}{2r}(\psi_r'^2 + \psi_z'^2)'_z - \frac{1}{r}\psi'_z\cdot D_2\psi + \frac{2\nu}{r}\psi''_{z^2} + \frac{2\nu}{r^3}\cdot\psi''_{\theta^2} = -r.\Phi'_z, \qquad (16.\ 1)$$

$$\nu(D_2'\psi)'_z - \frac{1}{2r}(\psi_r'^2 + \psi_z'^2)'_r + \frac{1}{r^2}(\psi_r'^2 + \psi_z'^2) + \frac{1}{r}\cdot\psi'_r\cdot D_2\psi - \frac{2\nu}{r}\cdot\psi''_{rz} + \frac{4\nu}{r^2}\cdot\psi'_z = r\Phi'_r. \qquad (16.\ 2)$$

Dans ces équations Φ désigne une fonction arbitraire de r et z à l'exclusion de θ :

$$\Phi = \Phi(r, z);$$

les symboles $D_2\psi$ et $D_2'\psi$ ont les significations suivantes :

$$D_2\psi = \psi''_{z^2} + \psi''_{r^2} - \frac{1}{r}\psi'_r,$$

$$D_2'\psi = \psi''_{z^2} + \psi''_{r^2} - \frac{1}{r}\psi'_r + \frac{1}{r^2}\psi''_{\theta^2}.$$

Des calculs faciles donnent la pression ; on trouve :

$$\frac{p}{\rho} + U = \frac{2\nu}{r^2}\psi'_z + \Phi(r\,z). \tag{16. 3}$$

On voit que $\frac{p}{\rho} + U$ ne peut dépendre de θ que par l'intermédiaire de ψ'_z. Si le fluide s'étend à un domaine où θ peut varier de 0 à 2π, l'uniformité des vitesses nécessite que ψ'_r et ψ'_z soient uniformes ; s'il en est ainsi $\frac{p}{\rho} + U$ est également uniforme.

***

Une première famille de solutions des équations (16. 1) et (16. 2) analogue à la solution (14. 9) du mouvement pseudo-plan de première espèce, s'obtient en posant

$$\psi = F(\theta)z + G(\theta)r ; \tag{16. 4}$$

les composantes de la vitesse ont alors pour expression :

$$v_1 = \frac{1}{r}\cdot F(\theta), \qquad v_3 = -\frac{1}{r}\cdot G(\theta).$$

Les équations (16. 1) et (16. 2) se réduisent à :

$$\nu F'' + 4\nu F + F^2 = K, \tag{16. 5}$$

$$\nu G'' + \nu G + FG = 0, \tag{16. 6}$$

K désignant une constante ; la fonction Φ est donnée par :

$$\Phi = -\frac{K}{2}r^2 + K_1,$$

K_1 désignant une autre constante. La pression est fournie d'après (16. 3) par la relation :

$$\frac{p}{\rho} + U = \frac{2\nu}{r^2}\cdot F(\theta) - \frac{K}{2}r^2 + K_1.$$

L'équation (16. 5) s'intègre immédiatement à l'aide de la fonction elliptique pu de Weierstrass. Elle admet en particulier la solution

$$F = A,$$

A désignant une constante. Dans ce cas l'équation (16. 6) permet d'expliciter G et on a finalement pour la fonction de courant :

1° si $A < -\nu$:

$$\psi = Az + (C_1 e^{\omega\theta} + C_2 e^{-\omega\theta})r, \tag{16. 7}$$

avec

$$\omega^2 = -\left(1 + \frac{A}{\nu}\right);$$

2° si $A = -\nu$:

$$\psi = -\nu z + (C_1\theta + C_2)r; \tag{16. 8}$$

3° si $A > -\nu$:

$$\psi = Az + (C_1 \cos\omega\theta + C_2 \sin\omega\theta)r, \tag{16. 9}$$

avec

$$\omega^2 = 1 + \frac{A}{\nu}.$$

Dans les deux premières de ces solutions les vitesses ne sont pas uniformes quand θ varie de 0 à 2π ; dans la dernière les vitesses sont uniformes. Pour toutes ces solutions les trajectoires dans chaque plan $\theta = \theta_0$ sont des droites parallèles à une certaine direction, mais quand on passe d'un plan $\theta = \theta_0$ à un autre, cette direction varie ; l'axe Oz est une ligne de sources.

***

Proposons-nous de rechercher comme pour le mouvement de révolution proprement dit [(4. 23)] les solutions pour lesquelles la fonction de courant ψ est linéaire en z ; on a donc :

$$\psi = F(r\ \theta)z + G(r\ \theta). \tag{16. 10}$$

Remarquons que les solutions (16. 4) précédemment examinées constituent un cas particulier de la famille (16. 10).

Portons l'expression (16. 10) dans les équations de compatibilité cinématique (16. 1) et (16. 2). Si nous posons pour plus de simplicité :

$$\Delta F = F''_{r^2} - \frac{1}{r}F'_r, \qquad \Delta' F = F''_{r^2} - \frac{1}{r}F'_r + \frac{1}{r^2}F''_{\theta^2},$$

les équations de compatibilité cinématique fournissent les deux équations :

$$\left[\nu(\Delta'F)'_r + \frac{1}{r}F'^2_r - \frac{1}{r}F.\Delta F + \frac{2\nu}{r^3}\cdot F''_{\theta^2}\right]z$$
$$+\left[\nu(\Delta'G)'_r + \frac{1}{r}F'_rG'_r - \frac{1}{r}F\cdot\Delta G + \frac{2\nu}{r^3}\cdot G''_{\theta^2}\right] = -r\Phi'_z,$$
$$\nu\Delta'F - \frac{1}{r}FF'_r + \frac{1}{r^2}F^2 - \frac{2\nu}{r}F'_r + \frac{4\nu}{r^2}F = r\Phi'_r.$$

Ces deux équations sont de la forme :

$$M(r\ \theta)z + N(r\ \theta) = -r\Phi'_z(r\ z),$$
$$P(r\ \theta) = r\Phi'_r(r\ z).$$

Il est aisé d'en déduire que l'on a, en désignant par a et b deux constantes et par $\varphi(r)$ une fonction de r seul :

$$\nu(\Delta'F)'_r + \frac{1}{r}F'^2_r - \frac{1}{r}F\cdot\Delta F + \frac{2\nu}{r^3}F''_{\theta^2} = ar, \qquad (16.\ 11)$$

$$\nu(\Delta'G)'_r + \frac{1}{r}F'_rG'_r - \frac{1}{r}F\cdot\Delta G + \frac{2\nu}{r^3}G''_{\theta^2} = br, \qquad (16.\ 12)$$

$$\nu.\Delta'F - \frac{1}{r}FF'_r + \frac{1}{r^2}F^2 - \frac{2\nu}{r}F'_r + \frac{4\nu}{r^2}F = \varphi(r). \qquad (16.\ 13)$$

La fonction Φ a pour expression :

$$\Phi = \int\frac{1}{r}\cdot\varphi(r)dr - \frac{a}{2}\cdot z^2 - bz. \qquad (16.\ 14)$$

Les équations (16. 11), (16. 12) et (16. 13) constituent les conditions de compatibilité cinématique des mouvements du type (16. 10).

Les équations (16. 11) et (16. 13) vont nous permettre tout d'abord de préciser la forme de la fonction F. Dérivons l'équation (16. 13) par rapport à r puis retranchons-la de l'équation (16. 11) ; de l'équation ainsi obtenue retranchons l'équation (16. 13) ; il vient :

$$F'^2_r = \frac{r}{2}(ar - \varphi') - \varphi,$$

d'où on déduit :

$$F''_{r\theta} = 0.$$

La fonction F est donc de la forme :

$$F = f(r) + g(\theta).$$

Si nous reportons cette expression dans l'équation (16. 13) et si nous dérivons l'équation obtenue d'abord par rapport à θ, ensuite par rapport à r, nous obtenons :

$$g'\left(f'' - \frac{1}{r}f'\right) = 0.$$

Deux cas sont donc possibles :

1° $g' = 0$; la fonction F ne dépend alors que de r :

$$F = F(r)\ ;$$

2° $f'' - \frac{1}{r}f' = 0$; en désignant par A une constante la fonction F est alors de la forme :

$$F = Ar^2 + g(\theta). \tag{16. 15}$$

Nous allons examiner ces deux cas séparément.

1° Supposons d'abord que F soit fonction de r seul ; la fonction de courant est alors de la forme :

$$\psi = F(r)z + G(r\ \theta)\ ; \tag{16. 16}$$

la fonction F doit satisfaire à l'équation (16. 11) qui s'écrit :

$$\nu(\Delta F)' + \frac{1}{r}\cdot F'^2 - \frac{1}{r}F\cdot\Delta F = ar, \tag{16. 17}$$

et la fonction $G(r\ \theta)$ à l'équation (16. 12) qui devient :

$$\nu(\Delta' G)'_r + \frac{1}{r}F'\cdot G'_r - \frac{1}{r}F\cdot\Delta G + \frac{2\nu}{r^3}\cdot G''_{\theta^2} = br. \tag{16. 18}$$

Quant à l'équation (16. 13) elle n'introduit dans le cas actuel aucune condition supplémentaire et sert simplement à définir la fonction φ.

La pression est fournie par l'équation (16. 3) qui donne :

$$\frac{p}{\rho} + U = \frac{\nu}{r}F' - \frac{1}{2r^2}F^2 - \frac{a}{2}z^2 - bz + c.$$

On voit que $\frac{p}{\rho} + U$ ne dépend pas de θ, tout comme en mouvement de révolution proprement dit.

2° Supposons maintenant que F soit de la forme (16. 15) ; la fonction de courant s'écrit :

$$\psi = \Big[Ar^2 + g(\theta)\Big] z + G(r\ \theta)\ ; \qquad (16.\ 19)$$

l'équation (16. 13) montre que la fonction g vérifie l'équation :

$$\nu g'' + 4\nu g + g^2 = K, \qquad (16.\ 20)$$

qui s'intègre par la fonction elliptique pu ; la fonction G vérifie l'équation (16. 12) qui devient :

$$\nu(\Delta' G)'_r + 2AG'_r - \frac{1}{r}(Ar^2 + g)\Delta G + \frac{2\nu}{r^3} G''_{\theta^2} = br. \qquad (16.\ 21)$$

Quant à l'équation (16. 11) elle se réduit à :

$$a = 4A^2.$$

La pression se calcule aisément ; on trouve :

$$\frac{p}{\rho} + U = \frac{2\nu}{r^2}\cdot g(\theta) - \frac{A^2}{2}\cdot r^2 - \frac{K}{2}\cdot\frac{1}{r^2} - 2A^2 z - bz + c,$$

c désignant une constante arbitraire.

Nous avons ainsi épuisé tous les mouvements du type (16. 10) qui soient possibles : ils sont constitués par les deux familles (16. 16) et (16. 19).

On peut expliciter de nombreux cas particuliers de ces solutions [1]. Supposons par exemple que l'on prenne dans la solution (16. 19) :

$$A = 0\ ;$$

si l'on suppose de plus $b = 0$, on peut trouver des solutions de l'équation (16. 21) de la forme :

$$G = r^n.h_n(\theta), \qquad (n \neq 0)\ ;$$

la fonction $h(\theta)$ vérifie l'équation différentielle :

$$\nu h'' + (n-2)\Big[\nu(n-2) - g(\theta)\Big] h = 0.$$

On a donc pour la fonction de courant le développement formel :

$$\psi = g(\theta)z + \sum_n r^n.h_n(\theta). \qquad (16.\ 22)$$

---

[1] Parmi les mouvements pseudo-plans de deuxième espèce nous avions obtenu un mouvement (15. 8) qui était un mouvement pseudo-de révolution de première espèce. Il est facile de voir que ce mouvement (15. 8) est un cas particulier de la famille (16. 19) où l'on a posé A = 0.

En particulier pour $n = 2$ on a la solution :

$$\psi = g(\theta)z + (C_1\theta + C_2)r^2,$$

C_1 et C_2 désignant deux constantes arbitraires.

Si l'on prend pour g la solution particulière

$$g = k,$$

(k désignant une constante) de l'équation (16. 20), les solutions (16. 22) deviennent :

1° si n est intérieur à l'intervalle $\left(2, 2 + \frac{k}{\nu}\right)$:

$$\psi = kz + \sum_n r^n \,(C_1 e^{m\theta} + C_2 e^{-m\theta}), \qquad (16.\ 23)$$

avec

$$m^2 = (2 - n)\left(n - 2 - \frac{k}{\nu}\right);$$

2° si n est extérieur à l'intervalle $\left(2, 2 + \frac{k}{\nu}\right)$:

$$\psi = kz + \Sigma r^n (C_1 \cos m\theta + C_2 \sin m\theta), \qquad (16.\ 24)$$

avec

$$m^2 = (n - 2)\left(n - 2 - \frac{k}{\nu}\right);$$

3° enfin si l'on a $n = 2$ ou $n = 2 + \frac{k}{\nu}$:

$$\left.\begin{aligned} \psi &= kz + r^2(C_1\theta + C_2), \\ \psi &= kz + r^{2+\frac{k}{\nu}}(C_1\theta + C_2)\,; \end{aligned}\right\} \qquad (16.\ 25)$$

dans toutes ces expressions C_1 et C_2 désignent des constantes arbitraires. Les solutions (16. 7), (16. 8), (16. 9) sont des cas particuliers des solutions ci-dessus.

Pour toutes les solutions (16. 23) à (16. 25) la pression est donnée par :

$$\frac{p}{\rho} + U = -\frac{k^2}{2}\cdot\frac{1}{r^2} + c.$$

17. Mouvement pseudo-de révolution de deuxième espèce.

Nous allons maintenant examiner les mouvements pseudo-de révolution de deuxième espèce, c'est-à-dire les mouvements pour lesquels les composantes de la vitesse en coordonnées cylindriques ne dépendent pas de θ, sans que les trajectoires soient assujetties à être contenues dans des plans méridiens. Ces mouvements ne sont autres que les mouvements " symétriques par rapport à un axe " des auteurs italiens.

Les composantes de la vitesse sont donc de la forme :

$$v_1 = v_1(r\,z), \qquad v_2 = v_2(r\,z), \qquad v_3 = v_3(r\,z).$$

L'équation de continuité s'écrit ici :

$$\frac{\partial(rv_1)}{\partial r} + \frac{\partial(rv_3)}{\partial z} = 0.$$

On en déduit, en désignant par $\psi = \psi(r\,z)$ une fonction de r et z déterminée à une constante additive près, que l'on a :

$$v_1 = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial z}, \qquad v_3 = -\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial r}.$$

On voit que le mouvement dans le plan méridien est encore régit par une fonction de courant ψ liée aux composantes v_1 et v_3 de la vitesse par les mêmes formules qu'en mouvement de révolution proprement dit.

Le tourbillon n'est plus normal au plan méridien comme en mouvement de révolution proprement dit ; si l'on désigne par f la composante de la vitesse normale au plan méridien :

$$v_2 = f(r\,z),$$

les composantes du tourbillon sont données par :

$$2\xi_1 = -f'_z, \qquad 2\xi_2 = \frac{1}{r}\cdot D_2\psi, \qquad 2\xi_3 = f_r + \frac{1}{r}f.$$

Écrivons maintenant l'équation de compatibilité cinématique ; des calculs faciles montrent qu'elle fournit les deux équations :

$$\nu D_4\psi + r\,\frac{D\left(\psi, \frac{1}{r^2}\cdot D_2\psi\right)}{D(r, z)} + 2ff'_z = 0, \qquad (17.\,1)$$

$$\nu D_2(rf) + \frac{1}{r}\cdot\frac{D(\psi, rf)}{D(r, z)} = K, \qquad (17.\,2)$$

où K désigne une constante. D'autre part si nous écrivons l'équation du mouvement elle-même, nous voyons que la fonction H est de la forme :

$$H = K\theta + H_1(r\,z),$$

où K est précisément la constante de l'équation (17. 2). Si donc le fluide s'étend à un domaine où θ peut varier de 0 à 2π, l'uniformité de la fonction H nécessite que l'on prenne :

$$K = 0.$$

Finalement les équations de compatibilité cinématique de la classe de mouvements envisagée sont donc :

$$\nu D_4\psi + r\frac{D\left(\psi, \frac{1}{r^2}\cdot D_2\psi\right)}{D(r, z)} + 2ff'_z = 0, \qquad (17.1)$$

$$\nu D_2(rf) + \frac{1}{r}\cdot\frac{D(\psi, rf)}{D(r, z)} = 0. \qquad (17.3)$$

On voit qu'ici à la différence de ce qui se passe pour le mouvement pseudo-plan de deuxième espèce, la fonction de courant ψ qui régit le mouvement dans le plan méridien ne satisfait point à la même équation que dans le cas du mouvement de révolution proprement dit : l'équation (17. 1) diffère de l'équation (3. 9) par le terme $2ff'_z$. Par conséquent le procédé de superposition utilisé pour les mouvements pseudo-plans de deuxième espèce ne s'applique pas ici en général.

Quant à la partie dynamique du problème, des calculs faciles conduisent aux deux équations suivantes dont l'intégration donne la fonction $H = H(r\,z)$:

$$H'_r = f\left(f'_r + \frac{1}{r}f\right) + \frac{1}{r^2}\cdot\psi'_r\cdot D_2\psi + \frac{\nu}{r}\cdot(D_2\psi)'_z,$$

$$H'_z = ff'_z + \frac{1}{r^2}\cdot\psi'_z\cdot D_2\psi - \frac{\nu}{r}\cdot(D_2\psi)'_r.$$

Parmi les intégrales exactes des équations de Navier-Stokes qui ont été énumérées au § 4, celles qui rentrent dans la catégorie actuelle sont :

1° le mouvement par hélices circulaires de M. Strakhovitch où les composantes de la vitesse sont données par :

$$v_1 = 0, \qquad v_2 = Ar \operatorname{Log} r + Br + \frac{C}{r},$$

$$v_3 = A_1 \operatorname{Log} r + B_1 r^2 + C_1 ; \qquad (4.25)$$

2° le mouvement (4. 28) de M. von Karman.

On vérifie aisément que ces mouvements satisfont bien aux équations (17. 1) et (17. 3). Des mouvements pseudo-de révolution de deuxième espèce ont aussi été donnés en (15. 11).

Proposons-nous maintenant de déterminer les solutions des équations (17. 1) et (17. 3) telles que la composante $v_2 = f$ de la vitesse ne dépende que de r. Dans ce cas l'équation (17. 1) devient précisément identique à l'équation (3. 9) et ψ est la fonction de courant d'un mouvement proprement dit. Posons :

$$h(r) = r.f\,;$$

l'équation (17. 3) s'écrit :

$$\nu h'' - \frac{\nu}{r} h' - \frac{1}{r} \cdot \psi'_z . h' = 0. \tag{17. 4}$$

Deux cas sont possibles :

1° $h' = 0$; alors l'équation (17. 4) est satisfaite et l'on a :

$$v_2 = f = \frac{C}{r},$$

C désignant une constante. On obtient donc le résultat suivant : on peut superposer à tout mouvement de révolution proprement dit le mouvement irrotationnel :

$$v_1 = 0, \qquad v_2 = \frac{C}{r}, \qquad v_3 = 0\,; \tag{17. 5}$$

on obtient encore une solution exacte ; le champ (17. 5) n'est autre que le champ de vitesses d'un tourbillon ponctuel en mouvement plan.

2° $h' \neq 0$; l'équation (17. 4) montre que ψ est de la forme :

$$\psi = F(r)z + G(r),$$

c'est-à-dire que le mouvement dans le plan méridien n'est autre que le mouvement (4. 23) de MM. Witoszynski et Szymanski. L'équation (17. 4) donne pour h l'expression :

$$h = rf = K \int e^{\frac{1}{\nu}\int \frac{F(r)}{r} dr} .r dr + K_1, \tag{17. 6}$$

K et K_1 désignant des constantes arbitraires. Ainsi à tout mouvement de révolution du type (4. 23) on peut associer un mouvement spatial de la catégorie actuelle en ajoutant au premier mouvement une rotation $v_2 = f$ où f est donné par l'équation (17. 6).

Considérons par exemple le mouvement (4. 22) qui est un cas particulier de la famille (4. 23) :

$$\psi = \nu(2\mathrm{A}r^2 + \mathrm{B})z + \mathrm{C}\int rdr \int rdr \int e^{\mathrm{A}r^2}.r^{\mathrm{B}-3}.dr + \mathrm{D}r^4 + \mathrm{E}r^2. \tag{4. 22}$$

L'équation (17. 6) donne dans ce cas pour f l'expression :

$$v_2 = f = \frac{\mathrm{K}}{r}\int e^{\mathrm{A}r^2}.r^{\mathrm{B}-1}dr + \frac{\mathrm{K}_1}{r}. \tag{17. 7}$$

18. Proposons-nous de rechercher les mouvements tels que les composantes du vecteur tourbillon en coordonnées cartésiennes rectangulaires $x\,y\,z$ ne dépendent que d'une seule coordonnée, x par exemple ; pour un tel mouvement en tous les points d'un plan $x = x_0$ les vecteurs tourbillons sont équipollents. Si on fait la même hypothèse en mouvement plan, on est conduit à la solution (4. 9) de M. Jeffery.

Soient $u(x\,y\,z)$, $v(x\,y\,z)$, $w(x\,y\,z)$ les composantes de la vitesse $\vec{\mathrm{V}}$ et $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ celles du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{V}}$. La condition

$$\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{V}}\right) = 0$$

exige que $a(x)$ se réduise à une constante a_0. L'équation de compatibilité cinématique fournit ensuite les trois équations suivantes :

$$a_0u'_x + bu'_y + cu'_z = 0, \tag{18. 1}$$

$$a_0v'_x + bv'_y + cv'_z - b'u + \nu b'' = 0, \tag{18. 2}$$

$$a_0w'_x + bw'_y + cw'_z - c'u + \nu c'' = 0. \tag{18. 3}$$

D'autre part, en exprimant que a_0, b, c sont les composantes du rotationnel de $\vec{\mathrm{V}}(u, v, w)$ on obtient les trois équations :

$$w'_y - v'_z = a_0, \tag{18. 4}$$

$$u'_z - w'_x = b, \tag{18. 5}$$

$$v'_x - u'_y = c. \tag{18. 6}$$

Enfin la condition de continuité s'écrit :

$$u'_x + v'_y + w'_z = 0. \tag{18. 7}$$

Il s'agit de résoudre le système (18. 1)-(18. 7). Commençons par noter quelques relations assez simples qui découlent des équations

(18. 1)–(18. 7). Dérivons l'équation (18. 2) par rapport à z et l'équation (18. 3) par rapport à y, retranchons membre à membre les relations obtenues; il vient :

$$c'.u'_y - b'.u'_z = 0. \tag{18. 8}$$

Dérivons (18. 7) par rapport à x, (18. 6) par rapport à y et (18. 5) par rapport à z et ajoutons membre à membre les relations obtenues ; il vient :

$$u''_{x^2} + u''_{y^2} + u''_{z^2} = 0. \tag{18. 9}$$

On voit que la composante u de la vitesse est harmonique. De façon analogue on obtient les relations

$$v''_{x^2} + v''_{y^2} + v''_{z^2} = c', \tag{18. 10}$$

$$w''_{x^2} + w''_{y^2} + w''_{z^2} = -b'. \tag{18. 11}$$

Supposons d'abord que b et c se réduisent à des constantes b_0 et c_0, c'est-à-dire que le vecteur tourbillon soit constant ; dans ce cas on peut toujours choisir les axes de manière que l'on ait :

$$a_0 = b_0 = 0,$$

et on voit facilement alors que le mouvement se réduit au mouvement plan à tourbillon constant. Ce cas, qui est une solution immédiate et banale du problème, étant mis de côté, des calculs faciles montrent que le système (18. 1)–(18. 7) n'admet des solutions que dans les deux cas suivants :

Cas I : $u = \mathrm{K}$, K désignant une constante ;

Cas II : $a_0 = 0$.

Dans toutes les autres éventualités on aboutit à des impossibilités. Nous allons maintenant considérer en détail les deux cas ci-dessus.

Cas I. — $u = \mathrm{K}$; les équations (18. 6) et (18. 5) donnent alors respectivement :

$$v = \int c dx + f(y\,z), \qquad w = -\int b dx + g(y\,z), \tag{18. 12}$$

f et g désignant des fonctions arbitraires (pour le moment) de leurs arguments. Si on porte les expressions (18. 12) dans les équations (18. 4) et (18. 7), on obtient :

$$g'_y - f'_z = a_0, \tag{18. 13}$$

$$f'_y + g'_z = 0. \tag{18. 14}$$

Enfin les équations (18. 2) et (18. 3) donnent :

$$bf'_y + cf'_z = \mathrm{K}b' - a_0 c - \nu b'', \qquad (18.15)$$

$$bg'_y + cg'_z = \mathrm{K}c' + a_0 b - \nu c''. \qquad (18.16)$$

On déduit des équations (18. 13) à (18. 16) les expressions suivantes pour les fonctions f et g :

$$f = \mathrm{A}y + \mathrm{B}z + \mathrm{C},$$

$$g = (\mathrm{B} + a_0)y - \mathrm{A}z + \mathrm{D},$$

A B C D désignant des constantes arbitraires. On a donc finalement pour les composantes de la vitesse les expressions suivantes :

$$u = \mathrm{K}, \qquad (18.17)$$

$$v = c_1(x) + \mathrm{A}y + \mathrm{B}z + \mathrm{C}, \qquad (18.18)$$

$$w = -b_1(x) + (\mathrm{B} + a_0)y - \mathrm{A}z + \mathrm{D}, \qquad (18.19)$$

b_1 et c_1 représentant respectivement les primitives de b et de c:

$$b_1 = \int b dx, \qquad c_1 = \int c dx,$$

et les fonctions b et c satisfaisant aux équations :

$$\nu b'' - \mathrm{K}b' + \mathrm{A}b + (\mathrm{B} + a_0)c = 0, \qquad (18.20)$$

$$\nu c'' - \mathrm{K}c' + \mathrm{B}b - \mathrm{A}c = 0. \qquad (18.21)$$

Suivant les valeurs des constantes A, B, a_0, K qui figurent dans ces deux équations, on obtient pour la fonction $b_1(x)$ l'une des expressions suivantes :

$$b_1 = \mathrm{C}_1 e^{r_1 x} + \mathrm{C}_2 e^{r_2 x} + \mathrm{C}_3 e^{r_3 x} + \mathrm{C}_4 e^{r_4 x},$$

$$b_1 = (\mathrm{C}_1 x + \mathrm{C}_2) e^{\frac{\mathrm{K}}{2\nu}x} + \mathrm{C}_3 e^{r_1 x} + \mathrm{C}_4 e^{r_2 x},$$

$$b_1 = (\mathrm{C}_1 x + \mathrm{C}_2) e^{\frac{\mathrm{K}}{\nu}x} + \mathrm{C}_3 x^2 + \mathrm{C}_4 x,$$

$$b_1 = \mathrm{C}_1 x^4 + \mathrm{C}_2 x^3 + \mathrm{C}_3 x^2 + \mathrm{C}_4 x,$$

et pour la fonction $c_1(x)$ des expressions analogues ; dans ces formules $\mathrm{C}_1\ \mathrm{C}_2\ \mathrm{C}_3\ \mathrm{C}_4$ sont des constantes arbitraires, $r_1\ r_2\ r_3\ r_4$ sont les racines de l'équation :

$$\nu^2 r^4 - 2\mathrm{K}\nu r^3 + \mathrm{K}^2 r^2 - \left[\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}(\mathrm{B} + a_0)\right] = 0.$$

Des calculs faciles donnent la pression ; elle est fournie par une équation de la forme :

$$\frac{p}{\rho} + U = My^2 + Nz^2 + Py + Qz + R,$$

M N P Q R désignant des constantes dont les quatre premières sont liées d'une manière simple aux constantes qui figurent dans le champ de vitesses, la dernière étant arbitraire.

Dans le cas particulier où l'on a $K = 0$ le mouvement (18. 17)-(18. 19) est un mouvement pseudo-plan de première espèce (§ 14).

Cas II. — Passons maintenant au cas $a_0 = 0$. Les équations (18. 1) et (18. 8) montrent que l'on doit avoir ou bien

$$u'_y = u'_z = 0, \tag{18. 22}$$

ou bien une autre condition ; mais quand cette dernière est réalisée on retrouve encore (18. 22) ; u ne dépend donc que de x. L'équation (18. 9) montre alors que u doit être de la forme :

$$u = K_1x + K,$$

K_1 et K désignant des constantes arbitraires. Les équations (18. 6) et (18. 5) donnent respectivement pour v et w les expressions :

$$v = \int c\,dx + f(y\ z),$$
$$w = -\int b\,dx + g(y\ z),$$

f et g désignant des fonctions arbitraires (pour le moment) de leurs arguments. En portant ces expressions dans les équations (18. 4), (18. 7), (18. 2) et (18. 3), on obtient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} g'_y - f'_z &= 0, \\ f'_y + g'_z &= -K_1, \\ bf'_y + cf'_z &= (K_1x + K)b' - \nu b'', \\ bg'_y + cg'_z &= (K_1x + K)c' - \nu c''. \end{aligned}$$

Ces relations montrent que les fonctions f et g sont de la forme :

$$\begin{aligned} f &= Ay + Bz + C, \\ g &= By - (A + K_1)z + D, \end{aligned}$$

A B C D désignant des constantes arbitraires. On a donc finalement pour les composantes de la vitesse les expressions suivantes :

$$u = K_1 x + K, \tag{18. 23}$$

$$v = c_1(x) + Ay + Bz + C, \tag{18. 24}$$

$$w = - b_1(x) + By - (A + K_1)z + D, \tag{18. 25}$$

b_1 et c_1 représentant respectivement les primitives de b et c :

$$b_1 = \int b dx, \qquad c_1 = \int c dx,$$

et les fonctions b et c satisfaisant aux équations suivantes qui sont des équations de Laplace :

$$\nu b'' - (K_1 x + K)b' + Ab + Bc = 0, \tag{18. 26}$$

$$\nu c'' - (K_1 x + K)c' + Bb - (A + K_1)c = 0. \tag{18. 27}$$

On remarquera que le cas précédent [(18. 17) à (18. 21)] n'est pas un cas particulier du cas actuel : quand on fait $K_1 = 0$ dans la solution (18. 23)-(18. 27) on n'obtient pas exactement la solution (18. 17)-(18. 21).

Des calculs faciles donnent la pression ; elle est fournie par une équation de la forme :

$$\frac{p}{\rho} + U = Lx^2 + My^2 + Nyz + Pz^2 + Qx + Ry + Sz + T,$$

les grandes lettres désignant des constantes qui, la dernière exceptée, sont liées d'une manière simple aux constantes qui figurent dans le champ de vitesses.

Le problème proposé est ainsi complètement résolu ; les seuls mouvements dont les vecteurs tourbillons ne dépendent que de x sont les deux familles (18. 17)-(18. 21) et (18. 23)-(18. 27).

On vérifie facilement que le mouvement plan (4. 9) dont le tourbillon ne dépend que de x est un cas particulier des mouvements (18. 23)-(18. 27). On remarquera que les mouvements obtenus possèdent la propriété d'être composables avec un courant uniforme parallèle à une direction quelconque du plan yOz, ceci en vertu de la présence des constantes arbitraires C et D dans les formules (18 18), (18. 19) et (18. 24), (18. 25).

CHAPITRE IV

NOUVELLES INTÉGRALES EXACTES DU MOUVEMENT NON PERMANENT

A. Mouvement non permanent plan.

19. Proposons-nous de rechercher les mouvements plans non permanents tels qu'à chaque instant leur champ de vitesses soit le champ de vitesses d'un mouvement plan permanent. On peut dire des mouvements non permanents qui jouissent de cette propriété qu'ils admettent à chaque instant un mouvement permanent tangent.

Soit $\psi(x\,y\,t)$ la fonction de courant du mouvement non permanent admettant à chaque instant un mouvement permanent tangent ; elle satisfait d'abord à l'équation de compatibilité cinématique pour le mouvement plan non permanent, c'est-à-dire à l'équation :

$$\nu\Delta_4\psi + \frac{D(\psi,\, \Delta_2\psi)}{D(x,\, y)} - (\Delta_2\psi)'_t = 0. \qquad (2.\ 2)$$

D'autre part, d'après l'hypothèse faite, si on y considère t comme un paramètre, $\psi(x\,y\,t)$ doit être la fonction de courant d'un mouvement permanent, quelle que soit la valeur de t ; elle doit donc satisfaire à l'équation :

$$\nu\Delta_4\psi + \frac{D(\psi,\, \Delta_2\psi)}{D(x,\, y)} = 0. \qquad (2.\ 9)$$

Des deux équations (2. 2) et (2. 9) on déduit que l'on a :

$$\frac{\partial(\Delta_2\psi)}{\partial t} = 0,$$

c'est-à-dire que

$$\Delta_2\psi = \alpha(x\,y), \qquad (19.\ 1)$$

$\alpha(x\,y)$ désignant une fonction de x et y à l'exclusion de t. On peut donc déjà affirmer le résultat suivant : un mouvement plan non permanent où le tourbillon en un point donné varie avec le temps ne saurait admettre à chaque instant un mouvement permanent tangent.

Nous allons maintenant déterminer toutes les fonctions ψ du problème, c'est-à-dire toutes les fonctions ψ qui satisfont aux conditions (2. 9) et (19. 1).

Dérivons l'équation (2. 9) par rapport au temps t en tenant compte de (19. 1) ; il vient :

$$\frac{D(\psi'_t, \alpha)}{D(x, y)} = 0 ;$$

on en déduit que l'on a :

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = H(\alpha, t),$$

d'où pour la fonction de courant une expression de la forme :

$$\psi = F(\alpha, t) + G(x, y). \tag{19. 2}$$

On en tire pour le Laplacien de ψ :

$$\Delta_2\psi = F''_{\alpha^2}.\Delta_1\alpha + F'_{\alpha}.\Delta_2\alpha + \Delta_2 G.$$

Écrivons que $\Delta_2\psi$ ne dépend pas de t ; il vient :

$$F'''_{\alpha^2 t}.\Delta_1\alpha + F''_{\alpha t}.\Delta_2\alpha = 0. \tag{19. 3}$$

Nous écartons le cas ou l'on aurait :

$$\Delta_1\alpha = 0,$$

c'est-à-dire où $\Delta_2\psi = \alpha$ se réduirait à une constante, ce qui est une solution banale et immédiate du problème. Alors l'équation (19. 3) montre que $\dfrac{F'''_{\alpha^2 t}}{F''_{\alpha t}}$ ne dépend que de α, c'est-à-dire que la fonction $F(\alpha, t)$ est de la forme :

$$F(\alpha\, t) = f(t).g(\alpha) + h(\alpha),$$

en négligeant une fonction additive de t, ce qu'on peut faire puisque la fonction de courant ψ n'est déterminée qu'à une fonction additive de t près. Pour être satisfaite l'équation (19. 3) exige d'ailleurs que l'on ait ou bien

$$f'(t) = 0 ;$$

mais alors ψ ne dépendrait plus de t, nous laissons ce cas de côté ; ou bien que

$$g''.\Delta_1\alpha + g'.\Delta_2\alpha = 0,$$

c'est-à-dire que

$$\Delta_2 g = 0.$$

Finalement l'expression (19. 2) s'écrit donc :

$$\psi = f(t) . g(\alpha) + \varphi(x\, y), \tag{19. 4}$$

avec

$$\Delta_2 g = 0,$$

et

$$\alpha = \Delta_2 \psi = \Delta_2 \varphi.$$

La condition (19. 1) est maintenant satisfaite ; il reste l'équation (2. 9) ; portons-y l'expression (19. 4) ; on obtient :

$$\nu \Delta_4 \varphi + \frac{D(\varphi, \Delta_2 \varphi)}{D(x, y)} = 0.$$

Donc la fonction φ satisfait à l'équation (2. 9). D'autre part de :

$$g = g(\alpha),$$

on tire :

$$\alpha = \alpha(g),$$

c'est-à-dire

$$\Delta_2 \varphi = \Phi(g),$$

g étant d'autre part harmonique. La fonction φ est donc la fonction de courant d'un mouvement plan permanent et son tourbillon est fonction d'une fonction harmonique ; or toutes les fonctions qui satisfont à ces conditions ont été déterminées dans le mémoire de M. Jeffery (**19**) ; il n'y en a que deux à savoir :

$$\varphi = \nu(2Ax + B)y + C \int dx \int dx \int e^{Ax^2 + Bx} dx + Dx^2 + Ex,$$

$$\varphi = \nu(2A \operatorname{Log} r + B)\theta + C \int \frac{dr}{r} \int r dr \int e^{A(\operatorname{Log} r)^2 + B \operatorname{Log} r} . \frac{dr}{r} + Dr^2 + E \operatorname{Log} r,$$

les grandes lettres désignant des constantes ; ces fonctions ne sont d'ailleurs autres que les fonctions (4. 9) et (4. 10). La fonction g a respectivement pour valeur dans ces deux cas :

$$g = x,$$
$$g = \operatorname{Log} r.$$

Si on se reporte maintenant à l'expression (19. 4) on voit que l'on a pour la fonction de courant ψ les deux expressions :

$$\psi = \nu(2\mathrm{A}x + \mathrm{B})y + \mathrm{C}\int dx \int dx \int e^{\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}x} dx + \mathrm{D}x^2 + f(t)x, \tag{19. 5}$$

$$\psi = \nu(2\mathrm{A} \operatorname{Log} r + \mathrm{B})\theta + \mathrm{C}\int \frac{dr}{r} \int r dr \int e^{\mathrm{A}(\operatorname{Log} r)^2 + \mathrm{B} \operatorname{Log} r} . \frac{dr}{r} + \mathrm{D}r^2 + f(t) \operatorname{Log} r\ ; \tag{19. 6}$$

dans ces expressions les grandes lettres désignent des constantes arbitraires et $f(t)$ une fonction arbitraire de t.

Notre problème est ainsi résolu : les seuls mouvements plans non permanents qui admettent à chaque instant un mouvement permanent tangent sont donc :

1° les mouvements où l'on a :

$$\Delta_2 \psi = \mathrm{K},$$

K désignant une constante absolue ;

2° les deux mouvements (19. 5) et (19. 6).

A part ces classes assez restreintes de mouvements, on voit donc que les mouvements plans non permanents ne peuvent admettre à chaque instant un mouvement permanent tangent.

On remarquera l'analogie des solutions (19. 5) et (19. 6) avec les solutions permanentes (4. 9) et (4. 10) [1].

Si le fluide s'étend à un domaine où θ peut varier de 0 à 2π, l'uniformité de la vitesse nécessite que l'on prenne dans la solution (19. 6) : $\mathrm{A} = 0$. Cette solution s'écrit alors si $\mathrm{B} \neq -2, 0$:

$$\psi = \nu\mathrm{B}\theta + \mathrm{C}r^{\mathrm{B}+2} + \mathrm{D}r^2 + f(t). \operatorname{Log} r,$$

si $\mathrm{B} = -2$:

$$\psi = -2\nu\theta + \mathrm{C}(\operatorname{Log} r)^2 + \mathrm{D}r^2 + f(t) \operatorname{Log} r,$$

et enfin si $\mathrm{B} = 0$:

$$\psi = \mathrm{C}r^2 \operatorname{Log} r + \mathrm{D}r^2 + f(t) \operatorname{Log} r\ ;$$

ce dernier mouvement est un mouvement par cercles concentriques.

[1] La solution (19. 5) est un cas particulier de la transformée par la transformation du § 6 de la solution (4. 9). En effet, appliquons à la solution (4. 9) cette transformation où l'on a pris : $a = 0$, $\omega = 0$; l'expression (6. 24) de la solution dérivée montre que l'on obtient précisément la solution (19. 5).

D'autre part l'uniformité de $\frac{p}{\rho} + U$ nécessite que l'on prenne dans les 3 solutions ci-dessus respectivement :

$$f'(t) = -4\nu BD, \qquad f'(t) = 8\nu D, \qquad f'(t) = 4\nu C.$$

20. En mouvement non permanent les lignes de courant ne coïncident pas en général avec les trajectoires et elles changent de forme avec le temps. Il existe cependant des mouvements non permanents où les lignes de courant ne changent pas de forme avec le temps et coïncident avec les trajectoires : en un point donné la grandeur du vecteur vitesse change avec le temps mais non sa direction. Comme on l'a déjà remarqué, c'est ce qui a lieu pour les mouvements non permanents par droites parallèles ou par cercles concentriques et pour les mouvements (5. 4) de M. Taylor. Nous nous proposons d'indiquer quelques nouvelles solutions de cette catégorie en examinant les mouvements où la fonction de courant est de la forme :

$$\psi(x\, y\, t) = G(t) . F(x\, y), \qquad (20.\ 1)$$

mouvements qui possèdent la propriété énoncée, comme on le voit immédiatement [1].

Portons l'expression (20. 1) dans l'équation de compatibilité cinématique (2. 2) ; nous obtenons l'équation :

$$\nu \Delta_4 F + G . \frac{D(F, \Delta_2 F)}{D(x, y)} - \frac{G'}{G} . \Delta_2 F = 0. \qquad (20.\ 2)$$

Dérivons cette équation par rapport à t ; nous voyons que l'on doit avoir :

$$\left(\frac{G'}{G}\right)' = K_1 . G',$$

K_1 désignant une constante absolue ou encore :

$$\frac{G'}{G} = K_1 G + K_2, \qquad (20.\ 3)$$

---

[1] Il est facile de voir que la condition générale pour qu'il en soit ainsi est que la fonction de courant soit de la forme :

$$\psi = \Phi(\alpha, t)$$

$\alpha = \alpha(x\, y)$ désignant une fonction de x et y seuls.

K_2 désignant une nouvelle constante absolue. L'intégration de l'équation (20. 3) est immédiate ; elle donne pour la fonction G les résultats suivants en désignant par C et t_0 des constantes arbitraires :

1° si $K_1 = 0$: $G = Ce^{K_2 t}$,

2° si $K_1 \neq 0,\ K_2 = 0$: $G = -\dfrac{1}{K_1(t - t_0)}$,

3° si $K_1 . K_2 \neq 0$: $G = \dfrac{K_2}{K_1} . \dfrac{Ce^{K_2 t}}{1 - Ce^{K_2 t}}$.

Il reste maintenant à déterminer la fonction F. En tenant compte de l'équation (20. 3) on voit que l'équation (20. 2) donne les deux suivantes :

$$\nu \Delta_4 F - K_2 . \Delta_2 F = 0, \qquad (20.\ 4)$$

$$\frac{D(F, \Delta_2 F)}{D(x, y)} - K_1 . \Delta_2 F = 0. \qquad (20.\ 5)$$

La fonction F doit satisfaire à ces deux équations. Supposons d'abord que l'on ait $K_1 = 0$; on a alors :

$$\frac{D(F, \Delta_2 F)}{D(x, y)} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{D(\psi, \Delta_2 \psi)}{D(x, y)} = 0.$$

Or tous les mouvements plans non permanents qui satisfont à cette condition ont été déterminés par M. Kampé de Fériet (**23**) ; ceux qui conviennent ici sont : la solution (5. 4) de M. Taylor et des cas particuliers de la forme (20. 1) des mouvements non permanents par droites parallèles ou par cercles concentriques.

Supposons maintenant que $K_1 \neq 0$; l'élimination de $\Delta_2 F$ entre les deux équations (19. 4) et (19. 5) donne :

$$\nu \Delta_4 F - \frac{K_2}{K_1} . \frac{D(F, \Delta_2 F)}{D(x, y)} = 0. \qquad (20.\ 6)$$

Cette équation est de la même forme que l'équation de compatibilité cinématique (2. 9) pour le mouvement plan permanent : il suffit de multiplier dans cette dernière le coefficient de viscocité cinématique ν par une constante pour obtenir l'équation (20. 6). On conçoit donc que de toute solution de l'équation de compatibilité cinématique (2. 9), on puisse tirer une solution de l'équation (20. 6).

Outre la condition $K_1 \neq 0$ supposons que $K_2 \neq 0$; alors les équations (20. 4) et (20. 5) sont équivalentes aux équations (20. 6) et (20. 4). Par conséquent on voit que de toute solution de l'équation de compatibilité (2. 9) — c'est-à-dire de tout mouvement plan permanent — qui vérifie en outre une équation de la forme (20. 4), on peut tirer sans aucun calcul une solution de la catégorie actuelle.

La solution permanente (10. 8)–(10. 10) donnée précédemment vérifie justement une équation de la forme (20. 4). On peut donc en tirer, en aménageant convenablement les constantes qui y figurent, une solution des équations (20. 4) et (20. 5). On obtient facilement pour la fonction F les expressions suivantes :

1° si $\frac{K_1^2}{a^2} - \frac{K_2}{\nu} < 0$, en posant $\omega^2 = \frac{K_2}{\nu} - \frac{K_1^2}{a^2}$:

$$F = ax + (C_1 \operatorname{ch} \omega x + C_2 \operatorname{sh} \omega x) e^{\frac{K_1}{a} y} ;$$

2° si $\frac{K_1^2}{a^2} - \frac{K_2}{\nu} > 0$, en posant $\omega^2 = \frac{K_1^2}{a^2} - \frac{K_2}{\nu}$:

$$F = ax + (C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x) e^{\frac{K_1}{a} y} ;$$

3° si $\frac{K_1^2}{a^2} - \frac{K_2}{\nu} = 0$:

$$F = ax + (C_1 x + C_2) e^{\frac{K_1}{a} y} .$$

Dans ces expressions a, C_1, C_2 désignent des constantes. Les expressions correspondantes de la fonction de courant

$$\psi = G(t) . F(x y)$$

sont les suivantes [1] :

$$\psi = \frac{K_2}{K_1} \cdot \frac{C e^{K_2 t}}{1 - C e^{K_2 t}} \left[ax + (C_1 \operatorname{ch} \omega x + C_2 \operatorname{sh} \omega x) e^{\frac{K_1}{a} y} \right] ; \qquad (20.\ 7)$$

$$\psi = \frac{K_2}{K_1} \cdot \frac{C e^{K_2 t}}{1 - C e^{K_2 t}} \left[ax + (C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x) e^{\frac{K_1}{a} y} \right] ; \qquad (20.\ 8)$$

$$\psi = \frac{K_2}{K_1} \cdot \frac{C e^{K_2 t}}{1 - C e^{K_2 t}} \left[ax + (C_1 x + C_2) e^{\frac{K_1}{a} y} \right] . \qquad (20.\ 9)$$

---

[1] Les solutions (20. 7) à (20. 9) sont des cas particuliers de la solution (6. 30) déduite de la solution de M. Taylor par la transformation du § 6.

21. En mouvement plan permanent si on suppose que le tourbillon ne dépend que d'une coordonnée x ou r, c'est-à-dire que l'on a :

$$\Delta_2\psi = f(x) \qquad \text{ou} \qquad \Delta_2\psi = f(r),$$

on est conduit aux mouvement (4. 9) et (4. 10) de M. Jeffery. D'autre part l'hypothèse

$$\Delta_2\psi = f(\theta)$$

conduit à une impossibilité, si on met de côté bien entendu le cas banal du tourbillon constant.

En appelant lignes iso-tourbillons les lignes d'équation

$$\Delta_2\psi = C^{te},$$

les hypothèses qui conduisent aux mouvements (4. 9) et (4. 10) reviennent à supposer que les lignes iso-tourbillons sont des droites parallèles ou des cercles concentriques.

En mouvement plan non permanent on est conduit d'une manière analogue à examiner les mouvements où le tourbillon ne dépend que d'une seule coordonnée x, r ou θ et en outre du temps t ; c'est-à-dire les mouvements où la fonction de courant $\psi(x\, y\, t)$ satisfait à l'une des conditions :

$$\Delta_2\psi = f(x, t), \qquad \Delta_2\psi = f(r, t), \qquad \Delta_2\psi = f(\theta, t).$$

Pour ces mouvements les lignes iso-tourbillons sont à chaque instant soit des droites parallèles, soit des cercles concentriques, soit des droites concourantes. La deuxième et la troisième hypothèse seront examinées dans les deux paragraphes suivants. Dans le paragraphe actuel nous supposerons que l'on a :

$$\Delta_2\psi = f(x, t). \tag{21. 1}$$

Introduisons la condition (21. 1) dans l'équation de compatibilité cinématique (2. 2) ; celle-ci s'écrit :

$$\nu f''_{x^2} - \psi'_y \cdot f'_x - f'_t = 0. \tag{21. 2}$$

Deux cas sont possibles :

1° $f'_x = 0$; dans ce cas on voit que f doit se réduire à une constante absolue K ; on retrouve la solution banale du problème :

$$\Delta_2\psi = K ;$$

2° $f'_x \neq 0$; alors l'équation (21. 2) montre que la fonction de courant ψ doit être de la forme :

$$\psi = F(x, t)y + G(x, t).$$

Pour que la condition (21. 1) soit satisfaite on doit d'ailleurs avoir :

$$F(x, t) = a(t)x + b(t),$$

$a(t)$ et $b(t)$ désignant des fonctions arbitraires de t. On a donc affaire à un cas particulier de la solution (5. 11)–(5.13).

La fonction de courant s'écrit :

$$\psi = \Big[a(t)x + b(t)\Big]y + G(x, t),$$

la fonction $G(x, t)$ vérifiant l'équation :

$$\nu G^{IV}_{x^4} - \Big[a(t)x + b(t)\Big]G'''_{x^3} - G'''_{x^2t} = 0 ;$$

cette équation s'intègre d'ailleurs immédiatement deux fois par rapport à x et en posant :

$$G(x, t) = c(t)x + g(x, t),$$

où $c(t)$ désigne une fonction arbitraire de t, on voit que la fonction $g(x t)$ doit vérifier l'équation aux dérivées partielles du second ordre du type parabolique :

$$\nu g''_{x^2} - \Big[a(t)x + b(t)\Big]g'_x - g'_t + 2a(t)g = 0. \qquad (21.3)$$

Finalement la fonction de courant s'écrit :

$$\psi = \Big[a(t)x + b(t)\Big]y + c(t)x + g(x, t), \qquad (21.4)$$

la fonction $g(x, t)$ étant solution de l'équation (21. 3).

La seule solution pour laquelle les lignes iso-tourbillons sont à chaque instant des droites parallèles, c'est-à-dire pour laquelle on ait

$$\Delta_2\psi = f(x, t),$$

est donc, en mettant de côté le cas banal $\Delta_2\psi = K$, la solution (21. 4) [1].

On peut expliciter de nombreuses solutions de l'équation (21. 3) [2]. Nous le ferons dans deux cas particuliers. Supposons d'abord que les fonctions $a(t)$ et $b(t)$ se réduisent à des constantes a_0 et b_0. L'équation (21. 3) admet alors des solutions de la forme :

$$g(x, t) = e^{kt}.f_k(x),$$

---

[1] La solution (21. 4) a été obtenue par une voie différente (superposition d'un mouvement par droites parallèles et d'un mouvement potentiel) par M. Kampé de Fériet dans son Cours d'Aérodynamique et d'Hydrodynamique Supérieures (année 1930-1931) ; il en est de même de la solution (27. 7).

[2] La solution (19. 5) précédemment rencontrée et qui admet un mouvement permanent tangent est un cas particulier de la solution (21. 4) ; on l'obtient en supposant que la fonction g ne dépend que de x.

où k désigne une constante et où la fonction $f_k(x)$ est solution de l'équation :

$$\nu f'' - (a_0 x + b_0) f' + (2a_0 - k) f = 0,$$

qui est une équation de Laplace. On a donc pour la fonction de courant le développement formel suivant :

$$\psi(x\, y\, t) = (a_0 x + b_0) y + c(t) x + \sum_k e^{kt} . f_k(x). \qquad (21.5)$$

Supposons ensuite que l'on ait

$$a(t) = 0,$$

$b(t)$ restant une fonction arbitraire de t. Cette fois l'équation (21. 3) admet des solutions de la forme :

$$g(x, t) = e^{\lambda x + \nu\lambda^2 t - \lambda \int b dt}$$

λ désignant une constante et l'on a pour la fonction de courant le développement formel :

$$\psi(x\, y\, t) = b(t) y + c(t) x + \sum_\lambda e^{\lambda x + \nu\lambda^2 t - \lambda \int b dt}. \qquad (21.6)$$

22. Passons maintenant à la deuxième hypothèse énoncée au début du § 21, c'est-à-dire aux mouvements pour lesquels la fonction de courant $\psi(r\, \theta\, t)$ satisfait à la condition :

$$\Delta_2 \psi = f(r, t)\,; \qquad (22.1)$$

~~autrement dit les lignes iso-tourbillons sont à chaque instant des~~ cercles concentriques.

Portons la condition (22. 1) dans l'équation de compatibilité cinématique (2. 6) ; on obtient :

$$\nu\left(f''_{r^2} + \frac{1}{r} f'_r\right) - \frac{1}{r} \psi'_\theta . f'_r - f'_t = 0. \qquad (22.2)$$

Deux cas sont possibles :

1° $f'_r = 0$; on est alors conduit à la solution banale

$$\Delta_2 \psi = K,$$

K désignant une constante absolue ;

2° $f'_r \neq 0$; dans ce cas l'équation (22. 2) exige que la fonction de courant ψ soit de la forme :

$$\psi = F(r, t)\theta + G(r, t).$$

Pour que la condition (22. 1) soit satisfaite la fonction $F(r\ t)$ doit être de la forme :

$$F(r, t) = a(t) \operatorname{Log} r + b(t),$$

$a(t)$ et $b(t)$ désignant des fonctions arbitraires de t. La fonction de courant s'écrit donc :

$$\psi = \Big[a(t) \operatorname{Log} r + b(t)\Big]\theta + G(r,t)\,; \qquad (22.3)$$

on a :

$$f = \Delta_2 G = G''_{r^2} + \frac{1}{r}\cdot G'_r$$

et la fonction f satisfait à l'équation

$$\nu f''_{r^2} - \Big[a(t) \operatorname{Log} r + b(t) - \nu\Big]\frac{1}{r} f'_r - f'_t = 0. \quad (22.\ 4)$$

Si le fluide s'étend à un domaine où θ peut varier de 0 à 2π, l'uniformité de la vitesse nécessite que l'on prenne dans la solution (22. 3) :

$$a(t) = 0.$$

L'uniformité de $\frac{p}{\rho} + U$ nécessite de plus que l'on ait :

$$\nu(\Delta_2 G)'_r - \frac{b(t)}{r}\cdot\Delta_2 G - G''_{rt} = 0, \qquad (22.\ 5)$$

équation qui est un cas particulier de l'équation (22. 4).

Finalement la fonction de courant est donc de la forme :

$$\psi = b(t)\theta + G(r, t), \qquad (22.\ 6)$$

la fonction $G(r, t)$ satisfaisant à l'équation (22. 5). Or les mouvements (22. 6), si on y fait la restriction $b(t) = C^{te}$, ne sont autres que les mouvements (5. 6) de M. Hamel.

Tous les mouvements qui correspondent à l'hypothèse (22. 1) sont donc déjà connus.

23. Enfin occupons-nous des mouvements qui correspondent à la troisième hypothèse faite au début du § 21 :

$$\Delta_2\psi = f(\theta, t)\,; \qquad (23.\ 1)$$

les lignes iso-tourbillons sont ici à chaque instant des droites concourantes.

Portons la condition (23. 1) dans l'équation de compatibilité cinématique (2. 6) ; on obtient :

$$\frac{\nu}{r^2}\cdot f''_{\theta^2} + \frac{1}{r}\cdot \psi'_r \cdot f'_\theta - f'_t = 0. \qquad (23.\ 2)$$

Cette équation montre que deux cas sont possibles :

1° $f'_\theta = 0$; on aboutit encore aux mouvements à tourbillon constant ;

2° $f'_\theta \neq 0$; l'équation (23. 2) montre alors que ψ est de la forme :

$$\psi = F(\theta, t) \operatorname{Log} r + G(\theta, t) r^2 + H(\theta, t).$$

Pour que la condition (23. 1) soit satisfaite il faut que les fonctions $F(\theta, t)$ et $H(\theta, t)$ soient de la forme :

$$F(\theta, t) = a(t)\theta + b(t),$$
$$H(\theta, t) = c(t)\theta,$$

$a(t)$, $b(t)$ et $c(t)$ désignant des fonctions arbitraires de t. Finalement la fonction de courant s'écrit donc :

$$\psi = \Big[a(t)\theta + b(t)\Big] \operatorname{Log} r + G(\theta, t) r^2 + c(t)\,.\,\theta\,; \qquad (23.\ 3)$$

l'on a d'autre part

$$\Delta_2 \psi = G''_{\theta^2} + 4G = f. \qquad (23.\ 4)$$

Portons l'expression (23. 3) dans l'équation de compatibilité (2. 6) ; on obtient les deux équations :

$$\nu f''_{\theta^2} + \Big[a(t)\theta + b(t)\Big] f'_\theta = 0, \qquad (23.\ 5)$$
$$2G\,.\,f'_\theta - f'_t = 0. \qquad (23.\ 6)$$

La fonction G doit donc satisfaire à ces deux équations auxquelles il faut joindre l'équation (23. 4) qui fournit la relation entre f et G ; nous allons voir que cela la détermine complètement. Nous distinguerons trois cas :

1° Supposons d'abord que l'on ait :

$$a(t) = 0, \qquad b(t) = 0.$$

L'équation (23. 5) montre alors que la fonction f est de la forme :

$$f(\theta, t) = m(t)\theta + n(t),$$

$m(t)$ et $n(t)$ désignant des fonctions arbitraires de t. L'équation (23. 4) donne ensuite pour G l'expression :

$$G(\theta, t) = C_1(t) \cos 2\theta + C_2(t) \sin 2\theta + \frac{m(t)}{4}\theta + \frac{n(t)}{4},$$

$C_1(t)$ et $C_2(t)$ désignant des fonctions arbitraires de t. Il reste enfin l'équation (23. 6) ; quand on y porte les expressions ci-dessus de f et G on obtient les relations suivantes entre les fonctions arbitraires :

$$m.C_1 = 0, \qquad m.C_2 = 0, \qquad m^2 = 2m', \qquad mn = 2n'.$$

Ou bien l'on a : $m(t) = 0$; mais on retrouve alors le mouvement à tourbillon constant ; ou bien l'on a $m(t) \neq 0$; d'après les relations ci-dessus on a alors :

$$C_1 = C_2 = 0, \qquad m = \frac{2}{t_0 - t}, \qquad n = \frac{K}{t_0 - t},$$

K et t_0 désignant des constantes d'intégration. Finalement la fonction $G(\theta, t)$ a pour expression :

$$G(\theta, t) = \frac{1}{2(t_0 - t)} \cdot (\theta + K),$$

et la fonction de courant s'écrit :

$$\psi = \frac{\theta + K}{2(t_0 - t)} . r^2 + c(t)\theta \,; \qquad (23.\ 7)$$

dans cette solution figurent une fonction arbitraire $c(t)$ et deux constantes arbitraires K et t_0 (1). Si le fluide s'étend à un domaine où θ peut varier de 0 à 2π, la solution (23. 7) fournit des vitesses qui ne sont pas uniformes.

2° Supposons maintenant que $a(t) = 0$ mais que $b(t) \neq 0$. De l'équation (23. 5) on tire pour f l'expression :

$$f(\theta, t) = m(t)e^{-\frac{b}{\nu}\theta} + n(t),$$

$m(t)$ et $n(t)$ désignant des fonctions arbitraires de t. L'équation (23. 4) donne ensuite pour G :

$$G(\theta, t) = C_1(t) \cos 2\theta + C_2(t) \sin 2\theta + \frac{\nu^2}{b^2 + 4\nu^2} . m(t)e^{-\frac{b}{\nu}\theta} + \frac{n(t)}{4}.$$

Il reste enfin l'équation (23. 6) ; elle exige que

$$m(t) = 0 \,;$$

dans ce cas on retombe sur le cas banal :

$$\Delta_2\psi = K,$$

---

(1) La solution (23. 7) possède la propriété de convenir aussi bien à un fluide parfait qu'à un fluide visqueux.

K désignant une constante. Excepté ce cas, il n'y a donc aucune solution avec l'hypothèse $a(t) = 0$, $b(t) \neq 0$.

3° Supposons enfin que $a(t) \neq 0$. On est également conduit à une impossibilité dans ce cas. Des calculs un peu longs, mais sans difficultés, permettent de s'en rendre compte de la façon suivante. De l'équation (23. 5) on tire :

$$f'_\theta = C(t)e^{-\left(\frac{a}{2\nu}\theta^2 + \frac{b}{\nu}\theta\right)}, \qquad (23.\ 8)$$

C(t) désignant une fonction arbitraire de t, non nulle. L'équation (23. 6) donne alors pour G :

$$G = \frac{1}{2C(t)} . e^{\frac{a}{2\nu}\theta^2 + \frac{b}{\nu}\theta} . f'_t. \qquad (23.\ 9)$$

Considérons l'équation (23. 4) dérivée par rapport à θ :

$$G'''_{\theta^3} + 4G'_\theta = f'_\theta$$

et portons-y l'expression (23. 9) de G. On obtient tous calculs faits une relation de la forme :

$$f'_t = \frac{1}{P_3} . e^{-2\left(\frac{a}{2\nu}\theta^2 + \frac{b}{\nu}\theta\right)} + \frac{P_4}{P_3} . e^{-\left(\frac{a}{2\nu}\theta^2 + \frac{b}{\nu}\theta\right)} \qquad (23.\ 10)$$

P_3 et P_4 désignant des polynômes en θ dont les degrés sont indiqués par les indices. Enfin comparons les deux expressions de $f''_{\theta t}$ tirées respectivement des relations (23. 8) et (23. 10) ; nous voyons facilement que l'on doit avoir :

$$a(t) = 0.$$

L'hypothèse $a(t) \neq 0$ conduit donc à une impossibilité.

Nous avons ainsi épuisé tous les cas. Si l'on met de côté la solution banale à tourbillon constant, on voit donc que la seule solution dont les lignes iso-tourbillons sont à chaque instant des droites concourantes est la solution (23. 7).

24. En mouvement permanent nous avons trouvé (§ 9) des solutions de la forme :

$$\psi = F(x) + G(y).$$

D'une manière analogue nous nous proposons de rechercher en mouvement non permanent les solutions de la forme :

$$\psi = F(x, t) + G(y, t). \qquad (24.\ 1)$$

Introduisons la condition (24. 1) dans l'équation de compatibilité cinématique (2. 2) ; on obtient :

$$\nu F^{IV}_{x^4} + \nu G^{IV}_{y^4} - F'''_{x^2t} - G'''_{y^2t} + F'_x . G'''_{y^3} - G'_y . F'''_{x^3} = 0. \quad (24.\ 2)$$

Dérivons cette équation d'abord par rapport à x, ensuite par rapport à y ; il vient :

$$F''_{x^2} . G^{IV}_{y^4} = G''_{y^2} . F^{IV}_{x^4}. \qquad (24.\ 3)$$

Trois cas sont possibles :

1° $G''_{y^2} = 0$; alors le tourbillon ne dépend que de x et t :

$$\Delta_2\psi = f(x, t).$$

On a donc affaire à un cas particulier des mouvements rencontrés au § 21. Pour obtenir les mouvements de la catégorie actuelle on doit faire $a = 0$ dans la solution (21. 4). La fonction de courant a donc pour expression :

$$\psi = b(t)y + c(t)x + g(x, t), \qquad (24.\ 4)$$

la fonction g vérifiant l'équation :

$$\nu g''_{x^2} - b(t) . g'_x - g'_t = 0.$$

On a en particulier les solutions formelles (21. 6).

2° $F''_{x^2} = 0$; alors le tourbillon n'est fonction que de y et t ; ce cas ne diffère du précédent que formellement.

3° $F''_{x^2} . G''_{y^2} \neq 0$; dans ce cas l'équation (24. 3) fournit les deux suivantes :

$$F^{IV}_{x^4} - a(t) . F''_{x^2} = 0, \qquad G^{IV}_{y^4} - a(t) . G''_{y^2} = 0, \qquad (24.\ 5)$$

$a(t)$ désignant une fonction arbitraire de t.

Supposons d'abord que $a = 0$; les équations (24. 5) montrent que les fonctions F et G sont des polynômes du 3e degré en x ou en y, les coefficients étant des fonctions de t. Si on porte ces polynômes dans l'équation (24. 2), on s'aperçoit qu'outre des cas particuliers des cas précédents, on n'obtient que le mouvement à tourbillon constant.

Supposons maintenant que la fonction $a(t)$ ne soit pas nulle. En posant

$$a = \omega^2,$$

ω pouvant être imaginaire, les équations (24. 5) fournissent pour les fonctions F et G les expressions :

$$F = C_1(t)e^{\omega x} + C_2(t)e^{-\omega x} + C_3(t)x, \qquad (24.\ 6)$$

$$G = D_1(t)e^{\omega y} + D_2(t)e^{-\omega y} + D_3(t)y, \qquad (24.\ 7)$$

les C_i et les D_i désignant des fonctions arbitraires de t (qui ne sont pas nécessairement réelles). Portons ces expressions dans l'équation de compatibilité cinématique (24. 2) ; on obtient comme premier résultat que la fonction $\omega(t)$, donc la fonction $a(t)$ doivent se réduire à des constantes.

Si la constante a est positive, ω est réel et on a pour F et G les expressions (24. 6) et (24. 7) où les C_i et les D_i désignent cette fois des fonctions arbitraires réelles. Portons ces expressions dans l'équation (24. 2) ; on voit que les fonctions C_i et D_i vérifient les équations suivantes :

$$\begin{aligned} &C_1' - (\nu\omega^2 - \omega D_3)C_1 = 0, \quad D_1' - (\nu\omega^2 + \omega C_3)D_1 = 0, \\ &C_2' - (\nu\omega^2 + \omega D_3)C_2 = 0, \quad D_2' - (\nu\omega^2 - \omega C_3)D_2 = 0. \end{aligned} \tag{24. 8}$$

Finalement la fonction de courant a pour expression :

$$\psi = C_3(t)x + C_1(t)e^{\omega x} + C_2(t)e^{-\omega x} + D_3(t)y + D_1(t)e^{\omega y} + D_2(t)e^{-\omega y}, \tag{24. 9}$$

où ω désigne une constante arbitraire et où les 6 fonctions C_i D_i sont seulement assujetties à vérifier les équations (24. 8). Si par exemple l'on se donne arbitrairement $C_3(t)$ et $D_3(t)$, les équations (24. 8) fournissent C_1 C_2 D_1 D_2 avec pour chacune d'entre elles une constante multiplicative arbitraire.

Supposons maintenant que la constante a soit négative ; posons

$$a = -\omega^2\,;$$

ω désigne une constante réelle ; les équations (24. 5) montrent que les fonctions F et G ont pour expression :

$$\begin{aligned} F &= C_1(t)\cos\omega x + C_2(t)\sin\omega x + C_3(t)x, \\ G &= D_1(t)\cos\omega y + D_2(t)\sin\omega y + D_3(t)y, \end{aligned}$$

les C_i et D_i désignant des fonctions arbitraires de t. Portons ces expressions dans l'équation (24. 2) ; on voit que les fonctions C_i et D_i vérifient les équations suivantes :

$$\begin{aligned} &C_1' + \nu\omega^2 C_1 + \omega D_3 C_2 = 0, \quad D_1' + \nu\omega^2 D_1 - \omega C_3 D_2 = 0, \\ &C_2' + \nu\omega^2 C_2 - \omega D_3 C_1 = 0, \quad D_2' + \nu\omega^2 D_2 + \omega C_3 D_1 = 0. \end{aligned} \tag{24. 10}$$

Finalement la fonction de courant a pour expression :

$$\psi = C_3(t)x + C_1(t)\cos\omega x + C_2(t)\sin\omega x + D_3(t)y + D_1(t)\cos\omega y + D_2(t)\sin\omega y, \tag{24. 11}$$

où ω désigne une constante arbitraire où les 6 fonctions C_i D_i sont seulement assujetties à vérifier les équations (24. 10) [1].

Nous avons ainsi épuisé l'examen de tous les cas. Les seules solutions possibles sont, en mettant de côté le mouvement à tourbillon constant :

1° le mouvement (24. 4), cas particulier des solutions du § 21 ;

2° les mouvements (24. 9) et (24. 11).

25. En mouvement permanent nous avons examiné (§ 8) des mouvements de la forme :

$$\psi = F(\mathrm{Log}\, r) + G(\theta).$$

D'une manière analogue nous sommes conduits en mouvement non permanent à chercher les mouvements de la forme :

$$\psi = F(\mathrm{Log}\, r, t) + G(\theta, t). \qquad (25.\ 1)$$

Posons pour simplifier l'écriture :

$$s = \mathrm{Log}\, r.$$

Le tourbillon est donné par :

$$\Delta_2\psi = \frac{1}{r^2}(F''_{s^2} + G''_{\theta^2}). \qquad (25.\ 2)$$

Portons l'expression (25. 1) dans l'équation de compatibilité cinématique (2. 2) ; nous obtenons l'équation :

$$\nu[F^{IV}_{s^4} - 4F'''_{s^3} + 4F''_{s^2} + G^{IV}_{\theta^4} + 4G''_{\theta^2}] + F'_s . G'''_{\theta^3}$$
$$- G'_\theta[F'''_{s^3} - 2F''_{s^2} - 2G''_{\theta^2}] - e^{2s}[F'''_{s^2 t} + G'''_{\theta^2 t}] = 0. \qquad (25.\ 3)$$

Dérivons cette équation d'abord par rapport à s, ensuite par rapport à θ ; on obtient :

$$e^{-2s}\Big[F''_{s^2} . G^{IV}_{\theta^4} - (F^{IV}_{s^4} - 2F'''_{s^3})G''_{\theta^2}\Big] - 2G^{IV}_{\theta^3 t} = 0. \qquad (25.\ 4)$$

Dérivons cette équation par rapport à s ; il vient :

$$(F'''_{s^3} - 2F''_{s^2})G^{IV}_{\theta^4} = (F^{V}_{s^5} - 4F^{IV}_{s^4} + 4F'''_{s^3})G''_{\theta^2}. \qquad (25.\ 5)$$

L'équation (25. 5) montre que trois cas sont possibles :

1° Supposons d'abord que $G''_{\theta^2} = 0$; alors l'expression (25. 2) montre que le tourbillon ne dépend que de r et t :

$$\Delta_2\psi = f(r, t).$$

---

[1] Les solutions (24. 9) et (24. 11) sont des cas particuliers de la solution (6. 30) qu'on déduit de la solution (5. 4) de M. Taylor par la transformation du § 6 ; plus précisément elles sont des cas particuliers de la solutions (5. 21 *a*).

On a donc affaire à un cas particulier des mouvements du § 22. Il faut prendre $a(t) = 0$ dans la solution (22. 3) pour avoir les mouvements de la catégorie actuelle.

2° Supposons ensuite que $F'''_{s^3} - 2F''_{s^2} = 0$; la fonction $F(s, t)$ a alors pour expression :

$$F = a(t)s + b(t)e^{2s}. \qquad (25.\ 6)$$

Si on porte cette expression dans l'équation (25. 3) on voit d'abord que la fonction $b(t)$ doit se réduire à une constante B et on obtient les deux équations :

$$\nu G^{IV}_{\theta^4} + a(t)G'''_{\theta^3} + 4\nu G''_{\theta^2} + 2G'_{\theta}G''_{\theta^2} = 0, \qquad (25.\ 7)$$

$$2B . G'''_{\theta^3} - G'''_{\theta^2 t} = 0. \qquad (25.\ 8)$$

L'équation (25. 8) montre que la fonction G est de la forme :

$$G = \varphi(\theta + 2Bt) + c(t)\theta. \qquad (25.\ 9)$$

Portons cette expression de G dans l'équation (25. 7) ; celle-ci s'écrit :

$$\nu\varphi^{IV} + a(t)\varphi''' + 4\nu\varphi'' + 2\varphi''\left[\varphi' + c(t)\right] = 0. \quad (25.\ 10)$$

Dans cette équation $\theta + 2Bt$ d'une part et t d'autre part sont des variables indépendantes ; dérivons l'équation par rapport à la deuxième variable indépendante t ; on obtient :

$$a' . \varphi''' + 2c' . \varphi'' = 0. \qquad (25.\ 11)$$

~~Cette équation montre que trois cas sont possibles :~~

α) $\varphi'' = 0$; mais alors on voit sur l'expression (25. 9) de G que $G''_{\theta^2} = 0$; on retombe dans le cas examiné ci-dessus.

β) $\varphi'' \neq 0$, $a' = 0$; l'équation (25. 11) montre que l'on a alors $c' = 0$. Donc les fonctions $a(t)$ et $c(t)$ se réduisent à des constantes A et C ; la fonction G a pour expression

$$G = \varphi(\theta + 2Bt) + C\theta, \qquad (25.\ 12)$$

la fonction φ satisfaisant à l'équation différentielle :

$$\nu\varphi^{IV} + A\varphi''' + 4\nu\varphi'' + 2\varphi''(\varphi' + C) = 0. \quad (25.\ 13)$$

La fonction de courant ψ et par conséquent la fonction G ne sont déterminées qu'à une fonction additive de t près ; on peut donc ajouter à l'expression de G en (25. 12) une fonction convenable de t et écrire :

$$G = \Phi(\theta + 2Bt), \qquad (25.\ 14)$$

la fonction Φ vérifiant l'équation suivante qu'on déduit facilement de (25. 13) :

$$\nu\Phi^{\text{IV}} + A\Phi''' + 4\nu\Phi'' + 2\Phi'\Phi'' = 0.$$

Cette équation s'intègre immédiatement une fois et devient en désignant par K une constante absolue :

$$\nu\Phi''' + A\Phi'' + 4\nu\Phi' + \Phi'^2 = K. \qquad (25.\ 15)$$

Finalement la fonction de courant $\psi = F + G$ s'écrit en utilisant les expressions (25. 6) et (25. 14) de F et G :

$$\psi = A \operatorname{Log} r + Br^2 + \Phi(\theta + 2Bt), \qquad (25.\ 16)$$

la fonction Φ satisfaisant à l'équation (25. 15).

γ) Enfin on peut avoir $\varphi'' \neq 0$, $a' \neq 0$; dans ce cas l'équation (25. 11) montre que l'on a :

$$\varphi''' = k\varphi'', \qquad 2c' = -kb',$$

k désignant une constante absolue. Mais alors l'équation (25. 10) montre que l'on doit avoir $\varphi'' = 0$.

L'examen du cas $F'''_{s^3} - 2F''_{s^2} = 0$ est ainsi achevé.

3° Supposons pour terminer que l'on a :

$$G''_{\theta^2} \neq 0, \qquad F'''_{s^3} - 2F''_{s^2} \neq 0.$$

Nous allons voir que l'on n'obtient dans ce cas aucune solution nouvelle. L'équation (25. 5) donne en désignant par $\alpha(t)$ une fonction arbitraire de t :

$$G^{\text{IV}}_{\theta^4} = \alpha(t).G''_{\theta^2} \qquad (25.\ 17)$$

$$\left[F'''_{s^3} - 2F''_{s^2}\right]\alpha(t) = F^{\text{V}}_{s^5} - 4F^{\text{IV}}_{s^4} + 4F'''_{s^3}. \qquad (25.\ 18)$$

En utilisant ces deux équations l'équation (25. 4) donne la relation :

$$2G^{\text{IV}}_{\theta^3 t} + \beta(t).G''_{\theta^2} = 0, \qquad (25.\ 19)$$

où $\beta(t)$ désigne une fonction arbitraire de t. Enfin si on utilise les relations (25. 17), (25. 18) et (25. 19) l'équation (25. 3) fournit deux équations dont nous n'écrivons qu'une :

$$\nu G^{\text{IV}}_{\theta^4} + 4\nu G''_{\theta^2} + \gamma(t)G'_\theta + 2G'_\theta G''_{\theta^2} = \delta(t), \qquad (25.\ 20)$$

$\gamma(t)$ et $\delta(t)$ désignant des fonctions arbitraires de t. Il ne subsiste maintenant aucune difficulté pour voir que les équations (25. 17),

(25. 19) et (25. 20) admettent comme seule solution commune :

$$G''_{\theta^2} = 0 ;$$

on est ramené au cas examiné en premier lieu.

Les cas possibles sont ainsi épuisés. On voit que les seuls mouvements du type (25. 1) sont les suivants :

1° un cas particulier des mouvements du § 22 où l'on a :

$$\Delta_2\psi = f(r, t) ;$$

2° le mouvement (25. 16) :

$$\psi = \mathrm{A}\,\mathrm{Log}\,r + \mathrm{B}r^2 + \Phi(\theta + 2\mathrm{B}t), \qquad (25.\ 16)$$

où la fonction Φ vérifie l'équation (25. 15).

La solution (25. 16) est la transformée par la transformation du § 6 de la solution (8. 3) qu'on obtient avec l'hypothèse analogue à (25. 1) en mouvement permanent. En effet, prenons dans la transformation du § 6 : $a = b = 0$; l'expression (6. 25) de la solution dérivée déduite d'une solution primitive $\psi^{\mathrm{I}}(r\ \theta\ t)$ devient :

$$\psi^{\mathrm{II}}(r\ \theta\ t) = -\frac{\omega}{2}\cdot r^2 + \psi^{\mathrm{I}}(r, \theta - \omega t, t),$$

ω désignant une constante arbitraire. Appliquons cette transformation à la solution (8. 3) ; nous obtenons précisément la solution (25. 16) ; l'équation (25. 15) n'est autre que l'équation (8. 4).

B. Mouvement non permanent de révolution.

26. D'une manière analogue à ce que nous avons fait en mouvement plan (§ 19), proposons-nous de rechercher les mouvements de révolution non permanents tels qu'à chaque instant leur champ de vitesses soit le champ de vitesses d'un mouvement de révolution permanent ; autrement dit, nous nous proposons de rechercher les mouvements de révolution non permanents qui admettent à chaque instant un mouvement permanent tangent.

Le raisonnement dans le cas actuel est très analogue à celui qui a été employé dans le cas du mouvement plan. Soit $\psi(r\ z\ t)$ la fonction de courant du mouvement de révolution non permanent admettant à chaque instant un mouvement permanent tangent ; la fonction ψ doit satisfaire à l'équation de compatibilité cinématique pour le mouvement de révolution non permanent :

$$\nu \mathrm{D}_4\psi + r\,\frac{\mathrm{D}\left(\psi, \dfrac{1}{r^2}\cdot \mathrm{D}_2\psi\right)}{\mathrm{D}(r, z)} - (\mathrm{D}_2\psi)'_t = 0, \qquad (3.\ 2)$$

et aussi, quelle que soit la valeur de t, à l'équation de compatibilité cinématique pour le mouvement de révolution permanent :

$$\nu D_4\psi + r \frac{D\left(\psi, \frac{1}{r^2}\cdot D_2\psi\right)}{D(r, z)} = 0. \qquad (3.9)$$

Finalement la fonction ψ doit donc satisfaire à l'équation (3. 9) et à la suivante :

$$\frac{\partial(D_2\psi)}{\partial t} = 0,$$

d'où il résulte que :

$$\frac{1}{r^2}\cdot D_2\psi = \alpha(r, z), \qquad (26.1)$$

$\alpha(r\ z)$ désignant une fonction de r et z à l'exclusion de t. Dérivons l'équation (2. 9) par rapport au temps t en tenant compte de la condition (26. 1) ; il vient :

$$\frac{D(\psi'_t, \alpha)}{D(r, z)} = 0.$$

On en déduit que l'on a :

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = H(\alpha, t),$$

d'où pour la fonction de courant une expression de la forme :

$$\psi = F(\alpha, t) + G(r, z). \qquad (26.2)$$

On en tire pour $D_2\psi$ l'expression :

$$D_2\psi = F''_{\alpha^2}\cdot\Delta_1\alpha + F'_\alpha\cdot D_2\alpha + D_2G,$$

où $\Delta_1\alpha$ désigne le premier paramètre différentiel de α :

$$\Delta_1\alpha = \alpha_r'^2 + \alpha_z'^2.$$

Écrivons que $D_2\psi$ ne dépend pas de t ; il vient :

$$F'''_{\alpha^2 t}\cdot\Delta_1\alpha + F''_{\alpha t}\cdot D_2\alpha = 0. \qquad (26.3)$$

Nous écartons le cas où on aurait :

$$\Delta_1\alpha = 0\ ;$$

dans ce cas on a $\alpha = K$, K désignant une constante, c'est-à-dire :

$$D_2\psi = Kr^2.$$

Ce cas mis de côté, l'équation (26. 3) montre que $\frac{F'''_{\alpha^2 t}}{F''_{\alpha t}}$ ne dépend que de α, c'est-à-dire que la fonction $F(\alpha, t)$ est de la forme :

$$F(\alpha, t) = f(t) . g(\alpha) + h(\alpha),$$

en négligeant une fonction additive de t. Si on porte cette expression de F dans l'équation (26. 3) on voit que l'on doit avoir, ou bien

$$f'(t) = 0,$$

mais alors le mouvement est permanent, ψ ne dépendant plus de t, ou bien

$$g'' . \Delta_1 \alpha + g' . D_2 \alpha = 0,$$

c'est-à-dire

$$D_2 g = 0.$$

Finalement, l'expression (26. 2) de la fonction de courant prend donc la forme :

$$\psi = f(t) . g(\alpha) + \varphi(r, z), \qquad (26.\ 4)$$

avec

$$D_2 g = 0,$$

et

$$\alpha = \frac{1}{r^2} \cdot D_2 \psi = \frac{1}{r^2} \cdot D_2 \varphi.$$

La condition (26. 1) est maintenant satisfaite ; il reste l'équation ~~(3. 9) ; portons-y l'expression (26. 4) ; on obtient l'équation :~~

$$\nu D_4 \varphi + r \frac{D\left(\varphi, \frac{1}{r^2} D_2 \varphi\right)}{D(r, z)} = 0,$$

qui n'est autre que l'équation (3. 9) elle-même. D'autre part de :

$$g = g(\alpha),$$

on tire

$$\alpha = \alpha(g),$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{r^2} \cdot D_2 \varphi = \Phi(g), \qquad (26.\ 5)$$

g satisfaisant d'autre part à l'équation :

$$D_2 g = 0. \qquad (26.\ 6)$$

Finalement il s'agit donc de trouver une fonction φ qui est la fonction de courant d'un mouvement de révolution permanent et qui satisfait en outre aux conditions (26. 5) et (26. 6). Voici quelques solutions du problème.

1° Supposons d'abord que la fonction g ne dépende que de z ; la condition (26. 6) montre qu'il faut prendre, en négligeant des constantes, ce qui ne change rien à ψ :

$$g = z.$$

La condition (26. 5) devient :

$$\frac{1}{r^2}\cdot D_2\varphi = \Phi(z).$$

Or les mouvements qui satisfont à cette condition ont été déterminés au § 11. L'expression de φ est donnée en (11. 6) :

$$\varphi = F(z)r^2 + Az, \tag{11. 6}$$

A désignant une constante arbitraire et la fonction $F(z)$ satisfaisant à l'équation différentielle

$$\nu F''' + 2FF'' - F'^2 = B, \tag{11. 7}$$

où B désigne une constante arbitraire. La fonction de courant du problème actuel, donnée par (26. 4), s'écrit donc :

$$\psi = F(z)r^2 + f(t)z, \tag{26. 7}$$

où $f(t)$ désigne une fonction arbitraire de t. En particulier à la solution :

$$\varphi = 2\nu.\frac{r^2}{z} + Az, \tag{11. 8}$$

cas particulier de (11. 6) correspond ici la solution :

$$\psi = 2\nu.\frac{r^2}{z} + f(t)z. \tag{26. 8}$$

2° Supposons que la fonction g ne dépende que de r ; l'équation (26. 6) montre qu'on a alors, en supprimant des constantes qui ne changent rien au résultat :

$$g = r^2.$$

La relation (26. 5) prend la forme :

$$\frac{1}{r^2}\cdot D_2\varphi = \Phi(r).$$

Or les solutions de l'équation (3. 9) qui satisfont à cette condition ont été déterminées et ont pour expression :

$$\varphi = \nu(2\mathrm{A}r^2 + \mathrm{B})z + \mathrm{C}\int rdr \int rdr \int e^{\mathrm{A}r^2} . r^{\mathrm{B}-3} dr + \mathrm{D}r^4 + \mathrm{E}r^2, \quad (4.\ 22)$$

où les grandes lettres désignent des constantes. L'expression de la fonction de courant qui y correspond pour le problème actuel est d'après (26. 4) :

$$\psi = \nu(2\mathrm{A}r^2 + \mathrm{B})z + \mathrm{C}\int rdr \int rdr \int e^{\mathrm{A}r^2} . r^{\mathrm{B}-3} dr + \mathrm{D}r^4 + f(t)r^2, \quad (26.\ 9)$$

où $f(t)$ désigne une fonction arbitraire de t (1).

Nous avons ainsi trouvé deux solutions non permanentes : la solution (26. 7) et la solution (26. 9) qui jouissent de la propriété d'admettre à chaque instant un mouvement permanent tangent (2).

27. En mouvement plan nous avons généralisé les hypothèses :

$$\Delta_2\psi = f(x), \qquad \Delta_2\psi = f(r), \qquad (27.\ 1)$$

et examiné (§§ 21, 22, 23) les mouvements où l'on a l'une des conditions :

$$\Delta_2\psi = f(x, t), \qquad \Delta_2\psi = f(r, t), \qquad \Delta_2\psi = f(\theta, t).$$

En mouvement de révolution, étant donnée la structure de l'équation de compatibilité cinématique, ce qui correspond aux hypothèses (27. 1) ce sont les suivantes, comme on l'a vu au § 11 :

$$\frac{1}{r^2} \cdot \mathrm{D}_2\psi = f(r), \qquad \frac{1}{r^2} \cdot \mathrm{D}_2\psi = f(z). \qquad (27.\ 2)$$

Les intégrales qui correspondent à la première de ces conditions ont été données par M. Strakhovitch [(4. 22)] et celles qui correspondent à la deuxième condition ont été étudiées au § 11.

(1) La solution (26. 9) se déduit de la solution permanente (4. 22) par la transformation du § 6. Considérons en effet le cas particulier de cette transformation donné en (6. 32) et faisons-y $a = b = 0$; si on l'applique à un mouvement de révolution, on voit que de toute solution primitive $\psi^{\mathrm{I}}(r\ z\ t)$, on peut déduire une solution dérivée s'exprimant de la façon suivante :

$$\psi^{\mathrm{II}}(r\ z\ t) = -\frac{c'}{2} . r^2 + \psi^{\mathrm{I}}(r, z - c, t),$$

où $c = c(t)$ désigne une fonction arbitraire de t. Si on applique cette transformation à (4. 22), on trouve précisément la solution (26. 9).

(2) On rencontrera plus loin (29. 8) un autre mouvement de révolution non permanent qui jouit de la même propriété.

Généralisons maintenant les hypothèses (27. 2) en mouvement non permanent ; nous sommes conduits à rechercher les mouvements de révolution non permanents pour lesquels la fonction de courant $\psi(r\ z\ t)$ satisfait à l'une des conditions :

$$\frac{1}{r^2}\cdot D_2\psi = f(r,\ t), \qquad \frac{1}{r^2}\cdot D_2\psi = f(z,\ t).$$

La deuxième condition sera examinée au paragraphe suivant ; le présent paragraphe sera consacré aux mouvements où l'on a :

$$\frac{1}{r^2}\cdot D_2\psi = f(r,t). \tag{27. 3}$$

Introduisons la condition (27. 3) dans l'équation de compatibilité cinématique (3. 2) ; nous obtenons l'équation :

$$\nu(rf''_{r^2} + 3f'_r) - \psi'_z.f'_r - rf'_t = 0. \tag{27. 4}$$

Cette équation montre que deux cas sont possibles :

1° $f'_r = 0$; f se réduit alors à une constante K et on retombe sur les mouvements où l'on a :

$$D_2\psi = Kr^2,$$

ce qui est une solution banale du problème ;

2° $f'_r \neq 0$; alors l'équation (27. 4) montre que la fonction de courant est de la forme :

$$\psi = F(r,\ t)z + G(r,\ t).$$

Pour que la condition (27. 4) soit satisfaite il faut que la fonction F soit de la forme :

$$F(r,\ t) = a(t)r^2 + b(t),$$

où $a(t)$ et $b(t)$ désignent deux fonctions arbitraires de t. La fonction de courant est donc de la forme :

$$\psi = \left[a(t)r^2 + b(t)\right]z + G(r,\ t). \tag{27. 5}$$

Portons cette expression dans l'équation de compatibilité (3. 2) ; nous voyons que la fonction G vérifie une équation qu'on peut écrire en prenant comme variable indépendante $r^2 = s$ au lieu de r :

$$4\nu s G^{IV}_{s^4} + 8\nu G'''_{s^3} - 2\left[a(t)s + b(t)\right]G'''_{s^3} - G'''_{s^2t} = 0.$$

Cette équation s'intègre immédiatement deux fois par rapport à s et si l'on pose :

$$G(s,\ t) = c(t)s + g(s,\ t),$$

où $c(t)$ désigne une fonction arbitraire de t, on voit que la fonction g vérifie l'équation du type parabolique :

$$4\nu s g''_{s^2} - 2\left[a(t)s + b(t)\right]g'_s - g'_t + 4ag = 0. \quad (27.\ 6)$$

Finalement la fonction de courant s'écrit donc :

$$\psi = \left[a(t)r^2 + b(t)\right]z + c(t)r^2 + g(r^2, t) \quad (27.\ 7)$$

la fonction $g(s, t)$ vérifiant l'équation (27. 6) [1].

Le seul mouvement du type (27. 3) est donc en dehors des mouvements où l'on a

$$D_2\psi = Kr^2,$$

le mouvement (27. 7) [2].

On peut expliciter de nombreuses solutions de l'équation (27. 6). Supposons par exemple que les fonctions $a(t)$ et $b(t)$ se réduisent à des constantes a_0 et b_0 ; l'équation (27. 6) admet des solutions de la forme :

$$g = e^{kt}.f_k(s)$$

où k désigne une constante et où la fonction $f_k(s)$ satisfait à l'équation différentielle :

$$4\nu s f'' - 2(a_0 s + b_0)f' + (4a_0 - k)f = 0,$$

qui est une équation du type de Laplace. On a donc pour la fonction de courant le développement formel :

$$\psi = (a_0 r^2 + b_0)z + c(t)r^2 + \sum_k e^{kt} f_k(s).$$

28. Passons maintenant aux mouvements où l'on a :

$$\frac{1}{r^2}.D_2\psi = f(z, t). \quad (28.\ 1)$$

Si nous portons cette expression dans l'équation de compatibilité cinématique (3. 2), nous obtenons l'équation :

$$\nu r f''_{z^2} + \psi'_r . f'_z - r f'_t = 0. \quad (28.\ 2)$$

Deux cas sont possibles :

1° $f'_z = 0$; on retrouve une fois de plus les mouvement où l'on a :

$$D_2\psi = Kr^2 ;$$

---

(1) Cf. la solution (21. 4), note.

(2) Le mouvement (26. 9) précédemment rencontré et qui admet un mouvement tangent est un cas particulier de la solution (27. 7).

2° $f'_z \neq 0$; alors l'équation (28. 2) montre que la fonction de courant est de la forme :

$$\psi = F(z\, t)r^2 + G(z\, t). \qquad (28.\ 3)$$

Faisons directement cette hypothèse sans faire l'hypothèse (28. 1) ; en portant l'expression (28. 3) dans l'équation de compatibilité cinématique on obtient tout d'abord :

$$G''_{z^2} = 0\ ;$$

on a donc :

$$D_2\psi = F''_{z^2}.r^2,$$

c'est-à-dire que la condition (28. 1) est réalisée ; la condition (28. 3) entraîne donc la condition (28. 1). Finalement la fonction de courant s'écrit :

$$\psi = F(z\, t)r^2 + a(t)z, \qquad (28.\ 4)$$

$a(t)$ désignant une fonction arbitraire de t et la fonction $F(z\, t)$ vérifiant l'équation :

$$\nu F^{IV}_{z^4} + 2FF'''_{z^3} - F'''_{z^2t} = 0. \qquad (28.\ 5)$$

La seule solution du type (28. 1) est donc, en dehors des solutions où l'on a $D_2\psi = Kr^2$, la solution (28. 4) (¹).

L'équation (28. 5) admet des solutions de la forme :

$$F = \frac{\alpha'}{2} + \Phi\Big[z + \alpha(t)\Big],$$

où $\alpha(t)$ désigne une fonction arbitraire de t, la fonction Φ vérifiant l'équation

$$\nu\Phi^{IV} + 2\Phi\Phi''' = 0$$

qui s'intègre une fois et s'écrit, en désignant par B une constante :

$$\nu\Phi''' + 2\Phi\Phi'' - \Phi'^2 = B\ ;$$

cette équation n'est autre que l'équation (11. 7). La fonction de courant s'écrit :

$$\psi = \frac{\alpha'}{2}.r^2 + \Phi\Big[z + \alpha(t)\Big]r^2 + a(t)z.$$

Cette solution n'est d'ailleurs que la transformée de la solution (26. 7) par la transformation du § 6 [cf. § 26, 1re note].

(¹) La solution (26. 7) précédemment rencontrée et qui admet un mouvement tangent est un cas particulier de la solution (28. 4).

29. Proposons-nous d'examiner les mouvements où la fonction de courant est de la forme :

$$\psi = F(\sigma, t)q + G(\sigma, t). \qquad (29.\ 1)$$

Cette condition est l'analogue en mouvement non permanent de la condition (12. 1).

On a d'abord :

$$D_2\psi = \frac{(1-\sigma^2)F''_{\sigma^2}}{q} + \frac{(1-\sigma^2)G''_{\sigma^2}}{q^2}.$$

Portons la condition (29. 1) dans l'équation de compatibilité cinématique (3. 6) ; nous obtenons les 4 relations :

$$G''_{\sigma^2} = 0, \qquad F''_{\sigma^2}.G'_{\sigma} = 0, \qquad F'''_{\sigma^2 t} = 0, \qquad (29.\ 2)$$

$$\nu\Big[(1-\sigma^2)F''_{\sigma^2}\Big]''_{\sigma^2} + 2\nu F''_{\sigma^2} + FF'''_{\sigma^3} + 3F'_{\sigma}F''_{\sigma^2} = 0. \quad (29.\ 3)$$

La deuxième équation (29. 2) montre que l'on a $F''_{\sigma^2} = 0$ ou bien $G'_{\sigma} = 0$. Si l'on a $F''_{\sigma^2} = 0$, on voit que $D_2\psi = 0$ et le mouvement est irrotationnel. Supposons donc que $G'_{\sigma} = 0$; G se réduit à une fonction de t seul ; mais on peut négliger cette fonction, puisque la fonction de courant n'est déterminée qu'à une fonction additive de t près. Finalement la fonction de courant affecte donc la forme :

$$\psi = F(\sigma\ t)q,$$

la fonction F vérifiant l'équation (29. 3) et la troisième équation ~~(29. 2). Ces deux équations vont nous permettre de la déterminer.~~ Dérivons l'équation (29. 3) par rapport à t en tenant compte de la troisième équation (29. 2) ; on obtient :

$$F'_t.F'''_{\sigma^3} + 3F''_{\sigma t}.F''_{\sigma^2} = 0.$$

Si on multiplie cette équation par F'^2_t, elle s'intègre immédiatement par rapport à σ ; il vient :

$$F''_{\sigma^2}.F'^3_t = \alpha(t), \qquad (29.\ 4)$$

$\alpha(t)$ désignant une fonction arbitraire de t. En combinant cette équation avec l'équation

$$F'''_{\sigma^2 t} = 0, \qquad (29.\ 5)$$

on voit que la fonction $F(\sigma, t)$ doit être de la forme :

$$F(\sigma, t) = f(t)\,(\sigma - \sigma_0) + g(\sigma),$$

σ_0 désignant une constante.

En reportant cette expression dans l'équation (29. 4) on obtient pour la fonction $g(\sigma)$ l'expression :

$$g(\sigma) = \frac{a}{\sigma - \sigma_0} + b\sigma + c,$$

$a\ b\ c$ désignant des constantes. Finalement la fonction $F(\sigma, t)$ a donc pour expression :

$$F(\sigma,t) = f(t)(\sigma - \sigma_0) + \frac{a}{\sigma - \sigma_0} + c.$$

Les équations (29. 4) et (29. 5) sont vérifiées. Portons cette expression de F dans l'équation (29. 3) ; on voit que cette équation est satisfaite pourvu que l'on ait :

$$a = 2\nu(1 - \sigma_0^2),$$
$$c = -4\nu\sigma_0.$$

La fonction de courant a donc pour expression :

$$\psi(q, \sigma, t) = \left[f(t)(\sigma - \sigma_0) + \frac{2\nu(1 - \sigma_0^2)}{\sigma - \sigma_0} - 4\nu\sigma_0\right]q \quad (29.\ 6)$$

où $f(t)$ désigne une fonction arbitraire de t et σ_0 désigne une constante.

La seule solution du type (29. 1) est donc la solution (29. 6) [1].

Remarquons que le tourbillon de la solution (29. 6) ne dépend pas de t ; on a :

$$\frac{\partial(D_2\psi)}{\partial t} = 0.$$

On peut d'ailleurs voir ce fait grâce à la première et à la troisième équation (29. 2). On a donc affaire à un mouvement de révolution non permanent admettant à chaque instant un mouvement permanent tangent (§ 26). On se rappelle que l'on a montré que pour un tel mouvement la fonction de courant est de la forme suivante :

$$\psi(q\ \sigma\ t) = f(t).g(\alpha) + \varphi(q\ \sigma), \qquad (29.\ 7)$$

où $f(t)$ désigne une fonction arbitraire de t, où l'on a

$$D_2 g = 0,$$

et où α est donné par :

$$\alpha = \frac{1}{r^2}\cdot D_2\varphi = \frac{1}{q^2(1 - \sigma^2)}\cdot D_2\varphi,$$

[1] Si on fait $\sigma_0 = 0$ dans la solution (29. 6) et si on revient aux coordonnées cylindriques r et z, on voit facilement que l'on obtient la solution (26. 8).

φ étant d'autre part la fonction de courant d'un mouvement permanent. La solution (29. 6) est bien de la forme (29. 7) et l'on a :

$$g = q(\sigma - \sigma_0),$$
$$\varphi = \left[\frac{2\nu(1 - \sigma_0^2)}{\sigma - \sigma_0} - 4\nu\sigma_0\right]q,$$
$$\alpha = \frac{4\nu(1 - \sigma_0^2)}{q^3(\sigma - \sigma_0)^3}.$$

D'autre part cette remarque nous permet d'affirmer que la fonction

$$\psi = \left[\frac{2\nu(1 - \sigma_0^2)}{\sigma - \sigma_0} - 4\nu\sigma_0\right]q \tag{29. 8}$$

est une solution de l'équation de compatibilité cinématique pour le cas permanent. La solution (29. 8) est de la catégorie examinée au § 12 ; elle est bien de la forme (12. 5) et on constate que la quantité entre crochets vérifie l'équation (12. 6).

30. On pourrait essayer de trouver les mouvements de révolution non permanents qui satisfont à l'une des conditions :

$$D_2\psi = q^2.f(\sigma\, t),$$
$$D_2\psi = (1 - \sigma^2)f(q\, t),$$

analogues aux conditions (13. 1) et (13. 2) en mouvement de révolution permanent. On voit facilement qu'on est conduit comme seule possibilité à :

$$D_2\psi = Kq^2(1 - \sigma^2) = Kr^2,$$

K désignant une constante ; on n'a donc aucune famille nouvelle.

On pourrait aussi comme en (13. 3) chercher les solutions où la fonction de courant est de la forme :

$$\psi = F(r, t) + G(z, t).$$

Des calculs faciles montrent que l'on doit avoir alors :

$$D_2\psi = f(r, t) \;;$$

on a donc affaire à un cas particulier des solutions du § 27.

C. Mouvement non permanent spatial.

31. Mouvement pseudo-plan de première espèce.

Comme en mouvement permanent (§ 14) nous allons examiner les mouvements pseudo-plans de première espèce, c'est-à-dire les mouvements dont les trajectoires sont contenues dans des plans parallèles au plan xOy, les composantes de la vitesse pouvant d'ailleurs dépendre de z. Ces composantes sont donc de la forme suivante :

$$u = u(x\,y\,z\,t), \qquad v = v(x\,y\,z\,t), \qquad w = 0.$$

La condition de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0\,;$$

elle implique l'existence d'une fonction de courant $\psi = \psi(x\,y\,z\,t)$, déterminée à une fonction additive de z et t près et telle que l'on ait :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Le tourbillon n'est plus en général normal au plan $x\,O\,y$ comme en mouvement plan proprement dit ; ses composantes sont données par :

$$2\xi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z}, \qquad 2\eta = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z}, \qquad 2\zeta = -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right).$$

Écrivons maintenant l'équation de compatibilité cinématique. Elle donne les trois équations suivantes :

$$\nu(\Delta_2'\psi)''_{xz} + \frac{1}{2}(\psi_x'^2 + \psi_y'^2)''_{yz} - (\psi_y'.\Delta_2\psi)'_z - \psi'''_{xzt} = 0, \qquad (31.\,1)$$

$$\nu(\Delta_2\psi)''_{yz} - \frac{1}{2}(\psi_x'^2 + \psi_y'^2)''_{xz} + (\psi_x'.\Delta_2\psi)'_z - \psi'''_{yzt} = 0, \qquad (31.\,2)$$

$$\nu\Delta_2(\Delta_2'\psi) + \frac{D(\psi, \Delta_2\psi)}{D(x, y)} - (\Delta_2\psi)'_t = 0. \qquad (31.\,3)$$

Dans ces équations l'on a posé :

$$\Delta_2\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2},$$

$$\Delta_2'\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}.$$

Les équations (31. 1) et (31. 2) s'intègrent par rapport à z et s'écrivent en désignant par F $(x\,y\,t)$ et $G(x\,y\,t)$ des fonctions arbitraires qui dépendent de x, y, t à l'exclusion de z :

$$\nu(\Delta_2'\psi)_x' + \frac{1}{2}(\psi_x'^2 + \psi_y'^2)_y' - \psi_y'.\Delta_2\psi - \psi_{xt}'' = F(x\,y\,t), \quad (31.\,4)$$

$$\nu(\Delta_2'\psi)_y' - \frac{1}{2}(\psi_x'^2 + \psi_y'^2)_x' + \psi_x'.\Delta_2\psi - \psi_{yt}'' = G(x\,y\,t). \quad (31.\,5)$$

Si on dérive l'équation (31. 4) par rapport à x, l'équation (31. 5) par rapport à y et qu'on ajoute les résultats, on obtient en tenant compte de l'équation (31. 3) :

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0.$$

Il s'ensuit que, $\Phi(x\,y\,t)$ désignant une fonction arbitraire qui dépend de x, y, t à l'exclusion de z, les équations (31. 4) et (31. 5) s'écrivent :

$$\nu(\Delta_2'\psi)_x' + \frac{1}{2}(\psi_x'^2 + \psi_y'^2)_y' - \psi_y'.\Delta_2\psi - \psi_{xt}'' = -\Phi_y', \quad (31.\,6)$$

$$\nu(\Delta_2'\psi)_y' - \frac{1}{2}(\psi_x'^2 + \psi_y'^2)_x' + \psi_y'.\Delta_2\psi - \psi_{yt}'' = \Phi_x'. \quad (31.\,7)$$

Comme l'équation (31. 3) est une conséquence des équations (31. 6) et (31. 7), on voit finalement que ces équations (31. 6) et (31. 7) constituent les conditions de compatibilité cinématique de la classe des mouvements pseudo-plans de première espèce non permanents.

Quant à la partie dynamique du problème, on obtient facilement :

$$\frac{p}{\rho} + U = \Phi(x\,y\,t). \quad (31.\,8)$$

On voit que la quantité $\frac{p}{\rho} + U$ ne dépend pas de z, tout comme en mouvement plan proprement dit.

***

On a une première solution particulière des équations (31. 6) et (31. 7) en supposant que les composantes de la vitesse ne dépendent que de z et t :

$$u = u(z\,t), \qquad v = v(z\,t)\;;$$

la fonction de courant est donc de la forme :

$$\psi = F(z, t)y + G(z, t)x. \qquad (31.9)$$

Cette solution est l'analogue de la solution permanente (14. 9). Les équations de compatibilité cinématique (31. 6) et (31. 7) deviennent avec l'hypothèse (31. 9) :

$$\nu F''_{z^2} - F'_t = \Phi'_x,$$

$$\nu G''_{z^2} - G'_t = - \Phi'_y.$$

On en tire pour la fonction Φ l'expression :

$$\Phi = a(t)x - a_1(t)y,$$

$a(t)$ et $a_1(t)$ désignant des fonctions arbitraires de t. Les fonctions F et G satisfont aux équations suivantes du type parabolique :

$$\nu F''_{z^2} - F'_t = a(t), \qquad (31.10)$$

$$\nu G''_{z^2} - G'_t = a_1(t). \qquad (31\ 11)$$

Finalement la fonction de courant est donnée par l'expression (31. 9), les fonctions F et G satisfaisant respectivement aux équations (31. 10) et (31. 11). Les composantes de la vitesse sont données par :

$$u = F(z\ t), \qquad v = - G(z\ t).$$

Le mouvement dans chaque plan $z = z_0$ est un courant uniforme parallèle à un instant t à une direction qui fait avec Ox un angle φ donné par :

$$\operatorname{tg} \varphi = - \frac{G(z_0, t)}{F(z_0, t)};$$

mais, toujours pour un même instant t, quand on passe d'un plan $z = z_0$ à un autre cette direction varie. On a ainsi un écoulement non permanent par droites qui sont parallèles dans un même plan $z = z_0$ à un instant déterminé, mais qui sont " tordues " les unes par rapport aux autres dans des plans différents, toujours à un même instant.

***

Proposons-nous de rechercher comme en mouvement permanent [(14. 11)] les solutions pour lesquelles la fonction de courant ψ est linéaire en l'une des coordonnées x ou y ; choisissons y par exemple ; on a donc :

$$\psi = F(x\ z\ t)y + G(x\ z\ t). \qquad (31.12)$$

Remarquons que le mouvement (31. 9) précédemment examiné est un cas particulier des mouvements (31. 12).

Portons l'expression (31. 12) dans les équations de compatibilité cinématique (31. 6) et (31. 7) ; nous obtenons les deux équations :

$$\left[\nu(F''_{x^2} + F''_{z^2})'_x + F'^2_x - FF''_{x^2} - F''_{xt}\right] y$$
$$+ \nu(G''_{x^2} + G''_{z^2})'_x + F'_x G'_x - FG''_{x^2} - G''_{xt} = - \Phi'_y, \quad (31.13)$$
$$\nu(F''_{x^2} + F''_{z^2}) - FF'_x - F'_t = \Phi'_x. \quad (31.14)$$

Dérivons la première de ces équations par rapport à x, la seconde par rapport à y et ajoutons les résultats ou, si l'on veut, portons l'expression (31. 12) dans l'équation (31. 3) ; on obtient les deux équations :

$$\nu(F''_{x^2} + F''_{z^2})'_x + F'^2_x - FF''_{x^2} - F''_{xt} = a(t), \quad (31.15)$$
$$\nu(G''_{x^2} + G''_{z^2})'_x + F'_x G'_x - FG''_{x^2} - G''_{xt} = b(t), \quad (31.16)$$

$a(t)$ et $b(t)$ désignant des fonctions arbitraires de t. L'équation (31. 13) est satisfaite et donne pour la fonction Φ :

$$\Phi = - \frac{a(t)}{2} y^2 - b(t) y + \varphi(x\,t).$$

Il faut joindre aux équations (31. 15) et (31. 16) l'équation (31. 14) qui devient :

$$\nu(F''_{x^2} + F''_{z^2}) - FF'_x - F'_t = \varphi'_x. \quad (31.17)$$

Les équations (31. 15), (31. 16) et (31. 17) forment les conditions de compatibilité cinématique des mouvements du type (31. 12).

Les équations (31. 15) et (31. 17) vont nous permettre tout d'abord de préciser la forme de la fonction $F(x\,z\,t)$; nous tirons de ces deux équations :

$$2F'^2_x = a - \varphi''_{x^2},$$

ce qui montre que l'on a :

$$F''_{xz} = 0.$$

La fonction $F(x\,z\,t)$ est donc de la forme :

$$F = f(x\,t) + g(z\,t).$$

Portons cette expression dans l'équation (31. 17) ; il vient :

$$\nu(f''_{x^2} + g''_{z^2}) - (f + g) f'_x - f'_t - g'_t = \varphi'_x.$$

Dérivons cette équation par rapport à z ; on obtient :

$$\nu g'''_{z^3} - g''_{zt} - g'_z \cdot f'_x = 0. \qquad (31.18)$$

Deux cas sont possibles :

1° $g'_z = 0$; alors la fonction F ne dépend que de x et t :

$$F = F(x\,t)\,; \qquad (31.19)$$

2° $g'_z \neq 0$; alors l'équation (31. 18) montre que l'on a :

$$\frac{\nu g'''_{z^3} - g''_{zt}}{g'_z} = f'_x = m(t),$$

$m(t)$ désignant une fonction arbitraire de t ; la fonction f est donc de la forme :

$$f = m(t)x + n(t),$$

et la fonction $g(z\,t)$ vérifie l'équation :

$$\nu g'''_{z^3} - g''_{zt} - m(t)g'_z = 0.$$

Cette équation s'intègre une fois et finalement la fonction F est de la forme :

$$F = m(t)x + n(t) + g(z\,t), \qquad (31.20)$$

la fonction $g(z\,t)$ satisfaisant à l'équation du type parabolique :

$$\nu g''_{z^2} - g'_t - m(t)g = 0. \qquad (31.21)$$

Examinons maintenant séparément les deux cas (31. 19) et (31. 20). Si l'on est dans le cas (31. 19) la fonction de courant s'écrit :

$$\psi = F(x\,t)y + G(x\,z\,t)\,; \qquad (31.22)$$

la fonction $F(x\,t)$ satisfait à l'équation (31. 15) qui devient :

$$\nu F'''_{x^3} + F'^2_x - FF''_{x^2} - F''_{xt} = a(t),$$

et la fonction $G(x\,z\,t)$ vérifie l'équation (31. 16). L'équation (31. 17) n'apporte aucune condition supplémentaire et fournit simplement l'expression de la fonction φ.

Supposons maintenant que l'on soit dans le cas (31. 20). La fonction de courant s'écrit :

$$\psi = \Big[m(t)x + n(t) + g(z\,t)\Big]y + G(x\,z\,t), \qquad (31.23)$$

où la fonction $g(z\,t)$ satisfait à l'équation (31. 21) et $G(x\,z\,t)$ à l'équation (31. 16) qui s'intègre une fois par rapport à x et s'écrit :

$$\nu(G''_{x^2} + G''_{z^2}) - \Big[m(t)x + n(t)\Big]G'_x - G'_t + 2m(t)G = b(t)x.$$

L'équation (31. 15) se réduit à :

$$m^2 - m' = a,$$

et l'équation (31. 17) ne donne aucune condition supplémentaire mais fournit l'expression de la fonction φ.

Les seules solutions du type (31. 12) sont donc les deux solutions (31. 22) et (31. 23).

Examinons le cas particulier de la solution (31 23) — qui est d'ailleurs aussi bien un cas particulier de la solution (31. 22) — où l'on a :

$$\psi = Ky + G(x\,z\,t),$$

K désignant une constante absolue. La fonction G satisfait à l'équation :

$$\nu(G''_{x^2} + G''_{z^2}) - KG'_x - G'_t = b(t)x.$$

On peut expliciter de nombreuses solutions de cette équation. Posons :

$$h(x\,z\,t) = G(x\,z\,t) - c(t)x - d(t)\ ;$$

la fonction $h(x\,z\,t)$ vérifie l'équation

$$\nu(h''_{x^2} + h''_{z^2}) - Kh'_x - h'_t = 0,$$

pourvu que l'on ait $c' = -b, \quad d' = -Kc$.

On a par exemple pour h le développement formel suivant :

$$h = e^{kt} \sum_{\lambda}(A_\lambda e^{\omega_1 x} + B_\lambda e^{\omega_2 x})\,(C_\lambda e^{\lambda z} + D_\lambda e^{-\lambda z}),$$

k et λ désignant des constantes et ω_1 et ω_2 étant les racines de l'équation :

$$\nu\omega^2 - K\omega + \nu\lambda^2 - k = 0\ ;$$

les grandes lettres sont des constantes arbitraires. L'expression correspondante de la fonction de courant est :

$$\psi = Ky + c(t)x + e^{kt} \sum_{\lambda}(A_\lambda e^{\omega_1 x} + B_\lambda e^{\omega_2 x})\,(C_\lambda e^{\lambda z} + D_\lambda e^{-\lambda z}).$$

32. Mouvement pseudo-plan de deuxième espèce.

Nous allons examiner les mouvements pseudo-plans de deuxième espèce non permanents, c'est-à-dire les mouvements pour lesquels les composantes de la vitesse ne dépendent pas de z, sans d'ailleurs que les trajectoires soient assujetties à être planes. Les composantes de la vitesse sont donc de la forme :

$$u = u(x\,y\,t), \qquad v = v(x\,y\,t), \qquad w = w(x\,y\,t).$$

L'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0\ ;$$

elle montre qu'il existe une fonction de courant $\psi = \psi(x\ y\ t)$, déterminée à une fonction additive de t près et telle que l'on ait :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Écrivons l'équation de compatibilité cinématique ; elle fournit les deux équations :

$$\nu \Delta_4 \psi + \frac{D(\psi, \Delta_2 \psi)}{D(x, y)} - (\Delta_2 \psi)'_t = 0, \qquad (32.\ 1)$$

$$\nu \Delta_2 w + \frac{D(\psi, w)}{D(x, y)} - w'_t = K(t), \qquad (32.\ 2)$$

où $K(t)$ désigne une fonction arbitraire de t.

L'équation (32. 1), qui n'est autre que l'équation (2. 2), montre que ψ est la fonction de courant d'un mouvement plan proprement dit. Une fois ψ déterminé, l'équation (32. 2) que vérifie w est une équation linéaire aux dérivées partielles, du second ordre. Si l'on prend $K(t) = 0$, on voit que l'équation (32. 2) est satisfaite en particulier par :

$$w = C.\Delta_2 \psi, \qquad (32.\ 3)$$

C désignant une constante absolue.

D'autre part, si $K(t) \neq 0$ l'équation (32. 2) admet la solution particulière :

$$w = \lambda(t),$$

où $\lambda(t)$ désigne une fonction arbitraire de t liée à la fonction $K(t)$ par la relation :

$$\lambda' = -K.$$

En ajoutant cette solution $w = \lambda(t)$ à la solution (32. 3) on voit que l'équation (32. 2) admet la solution :

$$w = C.\Delta_2 \psi + \lambda(t). \qquad (32.\ 4)$$

Les mouvements de la classe actuelle apparaissent ainsi comme la superposition :

1° d'un mouvement plan ordinaire (non permanent) s'effectuant parallèlement au plan xOy et que nous appellerons *mouvement plan primitif* ;

2° d'un mouvement par droites parallèles à Oz de vitesse w.

Dans le mouvement spatial résultant les trajectoires sont des courbes gauches dont les projections sur le plan xOy sont les trajectoires du mouvement plan primitif. De même les lignes de courant du mouvement spatial à un instant t sont des courbes gauches dont les projections sur le plan xOy sont les lignes de courant du mouvement plan primitif à l'instant t.

Une fois le mouvement plan primitif connu, la détermination de w revient à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles linéaire du second ordre du type parabolique. On a donc là un moyen relativement commode pour tirer de toute solution exacte connue du mouvement plan une solution exacte du mouvement spatial ; cette solution n'aura pas en général de symétrie axiale, c'est-à-dire qu'elle appartiendra à la classe pour laquelle on connaît le moins d'intégrales exactes.

Si le mouvement plan primitif n'est pas irrotationnel, on peut prendre en particulier pour w l'expression (32. 3), c'est-à-dire à une constante multiplicative près le tourbillon du mouvement plan primitif : on voit qu'on peut ainsi associer à tout mouvement plan connu un mouvement spatial, sans qu'il y ait d'autre calcul à effectuer que celui du tourbillon du mouvement plan primitif.

Passons maintenant à la partie dynamique du problème ; des calculs faciles montrent que la pression est donnée par :

$$\frac{p}{\rho} + \mathrm{U} = \mathrm{K}(t)z + \Phi(x\, y\, t),$$

la fonction $\Phi(x\, y\, t)$ n'étant autre que la quantité $\frac{p}{\rho} + \mathrm{U}$ du moument plan primitif ; en d'autres termes si l'on pose :

$$\mathrm{H} = \Phi + \frac{1}{2}(\psi_x'^2 + \psi_y'^2),$$

on a pour la fonction H les équations suivantes qui ne sont autres que les équations (2. 3) et (2. 4) :

$$\begin{aligned} \mathrm{H}'_x &= -\psi''_{yt} + \psi'_x . \Delta_2\psi + \nu . (\Delta_2\psi)'_y, \\ \mathrm{H}'_y &= \quad \psi''_{xt} + \psi'_y . \Delta_2\psi - \nu(\Delta_2\psi)'_x. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant passer en revue les principales solutions connues de l'équation (32. 1), c'est-à-dire les principales solutions connues du mouvement plan non permanent [1] et nous examinerons les mouvements spatiaux qu'on peut leur associer en prenant pour w une solution de l'équation (32. 2).

1. Supposons d'abord que le mouvement plan primitif soit irrotationnel, c'est-à-dire que l'on ait :

$$\Delta_2\psi = 0\ ;$$

la composante w satisfait à l'équation

$$\nu\Delta_2 w + \frac{D(\psi, w)}{D(x, y)} - w'_t = K(t)\ ; \qquad (32.\ 2)$$

on n'a point ici la solution (32. 3) mais il serait facile d'écrire d'autres solutions de l'équation (32. 2). Les composantes du tourbillon sont données par :

$$2\xi = w'_y, \qquad 2\eta = -w'_x, \qquad 2\zeta = 0.$$

Le vecteur tourbillon est donc contenu dans le plan xOy. La pression est donnée par l'équation :

$$\frac{p}{\rho} + U + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) = K(t)z - \varphi'_t(x\ y\ t) + K_1(t), \quad (32.\ 5)$$

où $K_1(t)$ désigne une fonction arbitraire de t et $\varphi(x\ y\ t)$ le potentiel des vitesses pour le mouvement plan primitif : $\varphi + i\psi$ est une fonction analytique de $x + iy$. Si l'on prend $K(t) = 0$ l'équation (32. 5) n'est autre que le théorème de Bernoulli pour le mouvement plan primitif.

2. Prenons comme mouvement plan primitif le mouvement plan non permanent par droites parallèles. On a :

$$\psi = a(t) + \varphi(y\ t), \qquad (5.\ 1)$$

$a(t)$ désignant une fonction arbitraire de t et la fonction φ satisfaisant à l'équation :

$$\nu\varphi''_{y^2} - \varphi'_t = 0. \qquad (5.\ 2)$$

[1] On pourrait aussi prendre des mouvements plans primitifs permanents : $\psi = \psi(x\ y)$ et leur associer une composante $w = w(x\ y\ t)$ non permanente ou inversement associer à des mouvements plans non permanents $\psi = \psi(x\ y\ t)$ un composante $w = w(x\ y)$ permanente.

Associons à ce mouvement plan primitif un mouvement spatial en prenant pour w la solution (32. 4) ; il vient :

$$w = C_1 . \varphi''_{y^2} + \lambda(t),$$

ce qu'on peut encore écrire en vertu de l'équation (5. 2) :

$$w = C . \varphi'_t + \lambda(t).$$

Finalement les composantes de la vitesse dans le mouvement pseudo-plan de deuxième espèce que nous venons d'obtenir sont :

$$u = \varphi'_y + a(t), \qquad v = 0, \qquad w = C\varphi'_t + \lambda(t).$$

Les trajectoires dans ce mouvement sont planes : ce mouvement est donc pseudo-plan de première espèce. Ce n'est d'ailleurs autre aux notations près que le mouvement (31. 9)–(31. 11) ; l'équation (5. 2) montre en effet que les composantes u et w satisfont aux équations :

$$\nu u''_{y^2} - u'_t = - a'(t),$$
$$\nu w''_{y^2} - w'_t = - \lambda'(t).$$

3° Prenons comme mouvement plan primitif le mouvement par cercles concentriques. La fonction de courant $\psi(r\, t)$ satisfait à l'équation :

$$\nu\Delta\Delta\psi - (\Delta\psi)'_t = 0, \tag{5. 3 a}$$

où l'on a posé $\Delta\psi = \psi''_{r^2} + \frac{1}{r}\psi'_r$. Si on veut que $\frac{p}{\rho} + U$ soit uniforme, ψ doit vérifier l'équation :

$$\nu\Delta\psi - \psi'_t = 0, \tag{5. 3}$$

qui est un cas particulier de l'équation (5. 3 a).

Associons à ce mouvement un mouvement spatial en prenant pour w la solution (32. 4) ; il vient :

$$w = C_1 . \Delta\psi + \lambda(t),$$

ce qu'on peut encore écrire en utilisant l'équation (5. 3) :

$$w = C . \psi'_t + \lambda(t).$$

Les composantes de la vitesse pour le mouvement que nous venons d'obtenir sont donc en coordonnées cylindriques :

$$v_1 = 0, \qquad v_2 = - \psi'_r, \qquad v_3 = C . \psi'_t + \lambda(t). \tag{32. 6}$$

la fonction $\psi(r\, t)$ satisfaisant à l'équation (5. 3).

Les lignes de courant sont à chaque instant des hélices circulaires tracées sur des cylindres d'axe Oz. Le mouvement est un mouvement pseudo-de révolution de deuxième espèce (§ 34).

On peut obtenir des développements formels pour la fonction de courant ψ qui vérifie l'équation (5. 3). On a par exemple les développements suivants :

$$\psi(r, t) = A_0 \operatorname{Log} r + \sum_{k=1}^{\infty}\Big[A_k J_0(kr) + B_k Y_0(kr)\Big]e^{-\nu k^2 t}, \quad (32.\ 7)$$

$$\psi(r, t) = A_0 \operatorname{Log} r + \sum_{k=1}^{\infty}\Big[A_k I_0(kr) + B_k K_0(kr)\Big]e^{\nu k^2 t}, \quad (32.\ 8)$$

où A_0, A_k et B_k désignent des constantes arbitraires, J_0 et Y_0 les fonctions de Bessel d'ordre zéro, de première et de deuxième espèce, I_0 et K_0 les fonctions de Bessel modifiées d'ordre zéro, de première et de deuxième espèce. On en déduit pour le mouvement spatial associé (32. 6) les solutions formelles :

$$v_1 = 0, \quad v_2 = -\frac{A_0}{r} + \sum_{k=1}^{\infty} k\Big[A_k J_1(kr) + B_k Y_1(kr)\Big]e^{-\nu k^2 t},$$

$$v_3 = \lambda(t) + C\sum_{k=1}^{\infty} k^2\Big[A_k J_0(kr) + B_k Y_0(kr)\Big]e^{-\nu k^2 t}, \quad (32.\ 9)$$

et :

$$v_1 = 0, \qquad v_2 = -\frac{A_0}{r} - \sum_{k=1}^{\infty} k\Big[A_k I_1(kr) + B_k K_1(kr)\Big]e^{\nu k^2 t},$$

$$v_3 = \lambda(t) + C\sum_{k=1}^{\infty} k^2\Big[A_k I_0(kr) + B_k K_0(kr)\Big]e^{\nu k^2 t}. \quad (32.\ 10)$$

Pour écrire ces expressions on a utilisé les relations connues :

$$\frac{d}{dz}\Big[J_0(z)\Big] = -J_1(z), \qquad \frac{d}{dz}\Big[I_0(z)\Big] = I_1(z), \ldots$$

Le mouvement par trajectoires hélicoïdales (5. 31) de M. Caldonazzo n'est qu'un cas particulier de la solution (32. 9). Faisons en effet dans la solution (32. 9) :

$$A_0 = 0, \qquad \lambda(t) = 0\ ;$$

prenons un seul terme dans le développement en laissant la constante k indéterminée et enfin prenons $B_k = 0$, $C.k = 1$. On obtient le champ de vitesses :

$$v_1 = 0, \qquad v_2 = kA_kJ_1(kr)e^{-\nu k^2 t}, \qquad v_3 = kA_kJ_0(kr)e^{-\nu k^2 t},$$

ce qui est bien aux notations près le mouvement (5. 31).

Plus généralement si on cherche toutes les solutions du type (32. 6) dont les trajectoires sont des hélices circulaires, on trouve les deux cas particuliers suivants des solutions (32. 9) et (32. 10) :

$$v_1 = 0, \qquad v_2 = \Big[A_kJ_1(kr) + B_kY_1(kr)\Big]e^{-\nu k^2 t},$$
$$v_3 = C\Big[A_kJ_0(kr) + B_kK_0(kr)\Big]e^{-\nu k^2 t}, \quad (32.\ 11)$$

$$v_1 = 0, \qquad v_2 = \Big[A_kI_1(kr) + B_kK_1(kr)\Big]e^{\nu k^2 t},$$
$$v_3 = C\Big[A_kI_0(kr) + B_kK_0(kr)\Big]e^{\nu k^2 t}. \quad (32.\ 12)$$

La solution de M. Caldonazzo est un cas particulier des solutions à trajectoires hélicoïdales (32. 11) et (32. 12). D'ailleurs quand $C^2 \neq 1$, on n'a point dans ces solutions :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V} = \lambda.\vec{V},$$

comme dans la solution de M. Caldonazzo.

4° Prenons comme mouvement plan primitif la solution de M. Taylor :

$$\psi(x\,y\,t) = e^{\nu kt}.F(x\,y), \qquad (5.\ 4)$$

la fonction F satisfaisant à l'équation :

$$\Delta_2 F = kF. \qquad (5.\ 5)$$

Associons à ce mouvement un mouvement spatial en prenant pour w l'expression (32. 4) ; il vient :

$$w = C_1 e^{\nu kt}.\Delta_2 F + \lambda(t),$$

ou en utilisant l'équation (5. 5) :

$$w = Ce^{\nu kt}.F + \lambda(t).$$

Finalement nous avons obtenu le mouvement spatial suivant :

$$u = e^{\nu kt}.F'_y, \qquad v = -\,e^{\nu kt}.F'_x, \qquad w = Ce^{\nu kt}.F + \lambda(t), \quad (32.\ 13)$$

où la fonction F vérifie l'équation (5. 5).

Si on prend dans la solution (32. 13) : $\lambda(t) = 0$, on a un mouvement dont les lignes de courant ne changent pas de forme avec le temps et coïncident avec les trajectoires bien que le mouvement soit non permanent. Si l'on prend

$$\lambda(t) = 0, \qquad k = -C^2,$$

on voit que l'on a

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V} = C.\overrightarrow{V}\ ;$$

d'autre part :

$$\overrightarrow{V} = e^{\nu k t}.\,\overrightarrow{a}(x\,y)\ ;$$

on a donc affaire à un cas particulier du mouvement (5. 32) de M. Trkal.

5° Prenons comme mouvement plan primitif le mouvement (5. 6) de M. Hamel ; on a :

$$\psi = C\theta + f(r, t), \qquad (5.\,6)$$

où la fonction f satisfait à l'équation (5. 7).

Associons à ce mouvement un mouvement spatial en prenant pour w l'expression (32. 4) ; on a pour w :

$$w = K\left(f''_{r^2} + \frac{1}{r}f'_r\right) + \lambda(t),$$

K désignant une constante arbitraire. Les composantes de la vitesse dans le mouvement spatial obtenu sont en coordonnées cylindriques :

$$v_1 = \frac{C}{r}, \qquad v_2 = -f'_r, \qquad w \equiv v_3 = K\left(f''_{r^2} + \frac{1}{r}f'_r\right) + \lambda(t). \quad (32.\,14)$$

On remarquera que les trois composantes de la vitesse en coordonnées cylindriques ne dépendent que de r et t. Ce mouvement est donc un mouvement pseudo-de révolution de deuxième espèce [1].

6° Prenons comme mouvement plan primitif le mouvement (5. 11) ; on a :

$$\psi = A(x\,t)y + B(x\,t) \qquad (5.\,11)$$

[1] Le mouvement (32. 6) précédemment obtenu est un cas particulier du mouvement (32. 14) qu'on obtient en faisant $C = 0$.

les fonctions $A(x\, t)$ et $B(x\, t)$ satisfaisant aux équations (5. 12) et (5. 13).

Associons à ce mouvement un mouvement spatial en prenant pour w l'expression (32. 4) ; on obtient le mouvement spatial suivant :

$$u = A, \qquad v = -(A'_x y + B'_x), \qquad w = K(A''_{x^2} y + B''_{x^2}) + \lambda(t). \tag{32. 15}$$

7° On pourrait prendre comme mouvement primitif les mouvements (5. 21) et (5. 28) de M. Bateman. Prenons plutôt le mouvement plus général (6. 30). On a donc :

$$\psi = a'y - b'x - \frac{\omega}{2}\Big[(x-a)^2 + (y-b)^2\Big] + e^{\nu k t}.F(X, Y), \tag{6.30}$$

où X et Y sont donnés par :

$$X = (x-a)\cos\omega t + (y-b)\sin\omega t,$$
$$Y = -(x-a)\sin\omega t + (y-b)\cos\omega t\,;$$

ω désigne une constante arbitraire, $a = a(t)$ et $b = b(t)$ deux fonctions arbitraires de t, la fonction $F(X, Y)$ vérifie l'équation :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} = kF.$$

Associons à ce mouvement un mouvement spatial en prenant pour w l'expression (32. 4) ; il vient :

$$w = Ce^{\nu k t}.F(X, Y) + \lambda(t). \tag{32. 16}$$

On a ainsi obtenu un mouvement spatial donné par (6. 30) et (32. 16) [1].

---

[1] La solution spatiale (6. 30)-(32. 16) a été obtenue :

1° en appliquant à la solution (5. 4) de M. Taylor la transformation du § 6, ce qui donne (6. 30) ;

2° en associant à (6. 30) un mouvement pseudo-plan de deuxième espèce par l'expression (32. 4).

Mais on pourrait aussi obtenir cette solution (6. 30)-(32. 16) en inversant l'ordre de ces deux opérations, c'est-à-dire :

1° en associant à la solution (5. 4) un mouvement pseudo-plan de deuxième espèce par l'expression (32. 4) : on obtient le mouvement (32. 13) ;

2° en appliquant à ce mouvement la transformation du § 6 où l'on pose $P = Q = 0$, $R = \omega$; on sait en effet (§ 6, *in fine*) que dans ces conditions la transformation du § 6 s'applique aux mouvements pseudo-plans de deuxième espèce. On prendra de plus dans sa transformation [Cf. (6. 13)] : $\alpha_3 = \beta_3 = 0$.

33. Mouvement pseudo-de révolution de première espèce.

Nous allons maintenant examiner comme en mouvement permanent (§ 16) les mouvements pseudo-de révolution de première espèce non permanents ; ce sont les mouvements dont les trajectoires sont contenues dans des plans passant par Oz sans que le mouvement soit identique dans ces divers plans.

En coordonnées cylindriques les composantes de la vitesse sont donc de la forme :

$$v_1 = v_1(r\ \theta\ z\ t), \qquad v_2 = 0, \qquad v_3 = v_3(r\ \theta\ z\ t).$$

L'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial(rv_1)}{\partial r} + \frac{\partial(rv_3)}{\partial z} = 0\,;$$

elle montre qu'il existe une fonction de courant $\psi = \psi(r\ \theta\ z\ t)$ telle que l'on ait :

$$v_1 = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial z}, \qquad v_3 = -\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial r}\,;$$

cette fonction ψ est déterminée à une fonction additive de θ et t près.

Écrivons maintenant l'équation de compatibilité cinématique. Par un calcul analogue à celui qui a conduit en mouvement permanent aux équations (16. 1) et (16. 2), on obtient les deux équations suivantes qui constituent les conditions de compatibilité cinématique de la classe de mouvements envisagée :

$$\nu(D_2'\psi)_r' + \frac{1}{2r}(\psi_r'^2 + \psi_z'^2)_z' - \frac{1}{r}\psi_z'.D_2\psi$$
$$+ \frac{2\nu}{r}\psi_{z^2}'' + \frac{2\nu}{r^3}\cdot\psi_{\theta^2}'' - \psi_{rt}'' = -r\Phi_z', \quad (33.\ 1)$$

$$\nu(D_2'\psi)_r' - \frac{1}{2r}(\psi_r'^2 + \psi_z'^2)_r' + \frac{1}{r^3}(\psi_r'^2 + \psi_z'^2) + \frac{1}{r}\psi_r'.D_2\psi$$
$$- \frac{2\nu}{r}\psi_{rz}'' + \frac{4\nu}{r^2}\psi_z' - \psi_{zt}'' = r\Phi_r'. \quad (33.\ 2)$$

Dans ces équations Φ désigne une fonction arbitraire qui dépend de $r\ z\ t$ à l'exclusion de θ :

$$\Phi = \Phi(r, z, t) ;$$

les symboles $D_2\psi$ et $D'_2\psi$ ont les significations suivantes :

$$D_2\psi = \psi''_{z^2} + \psi''_{r^2} - \frac{1}{r}\psi'_r,$$

$$D'_2\psi = \psi''_{z^2} + \psi''_{r^2} - \frac{1}{r}\psi'_r + \frac{1}{r^2}\psi''_{\theta^2}.$$

Des calculs faciles donnent la pression ; on trouve :

$$\frac{p}{\rho} + U = \frac{2\nu}{r^2}\cdot\psi'_z + \Phi(r\ z\ t). \tag{33. 3}$$

On voit que $\frac{p}{\rho} + U$ ne peut dépendre de θ que par l'intermédiaire de ψ'_z. Si le fluide s'étend à un domaine où θ peut varier de 0 à 2π, l'uniformité des vitesses nécessite que ψ'_r et ψ'_z soient uniformes ; s'il en est ainsi $\frac{p}{\rho} + U$ est également uniforme.

***

Si on cherche une solution des équations (33. 1) et (33. 2) analogue à la solution (16. 4), c'est-à-dire de la forme :

$$\psi = F(\theta\ t)z + G(\theta\ t)r,$$

on aboutit soit à un mouvement irrotationnel, soit à un mouvement permanent, c'est-à-dire précisément à la solution (16. 4).

Plus généralement cherchons comme en (16. 10) les mouvements pour lesquels la fonction de courant est linéaire en z ; nous supposerons que ψ est de la forme :

$$\psi = F(\theta\ t)z + G(r\ \theta\ t) ; \tag{33. 4}$$

nous faisons donc la restriction supplémentaire consistant en ce que F ne dépend pas de r. Portons l'expression (33. 4) dans les équations de compatibilité cinématique (33. 1) et (33. 2) ; par un calcul analogue à celui qui a conduit aux équations (16. 11) à (16. 13), nous obtenons les deux équations suivantes :

$$\nu F''_{\theta^2} + 4\nu F + F^2 - r^2 F'_t = r^2 . \varphi(r\, t), \qquad (33.\ 5)$$

$$\nu(\Delta G)'_r + \frac{\nu}{r^2} \cdot G'''_{r\theta^2} - \frac{1}{r} F . \Delta G - G''_{rt} = b(t) r, \qquad (33.\ 6)$$

où l'on a posé $\Delta G = G''_{r^2} - \frac{1}{r} G'_r$. La fonction Φ est donnée par :

$$\Phi = \int \varphi(r\, t) \cdot \frac{dr}{r} - b(t) z. \qquad (33.\ 7)$$

De l'équation (33. 5) on tire les deux relations :

$$F''_{\theta t} = 0, \qquad (33.\ 8)$$

$$(\nu F''_{\theta^2} + 4\nu F + F^2)'_\theta = 0. \qquad (33.\ 9)$$

L'équation (33. 8) montre que la fonction F est de la forme :

$$F = f(\theta) + g(t).$$

Si on porte cette expression dans l'équation (33. 9) et qu'on dérive l'équation obtenue par rapport à t, on obtient :

$$f' . g' = 0.$$

On voit que la fonction F doit être fonction soit de θ seul, soit de t seul. Nous allons examiner ces deux cas séparément.

1° Supposons d'abord que F soit fonction de θ seul ; la fonction de courant est alors de la forme :

$$\psi = F(\theta) z + G(r\, \theta\, t), \qquad (33.\ 10)$$

la fonction F satisfaisant à l'équation (33. 9) qui s'écrit :

$$\nu F'' + 4\nu F + F^2 = K,$$

K désignant une constante ; cette équation n'est autre que l'équation (16. 5) et s'intègre par la fonction elliptique pu de Weierstrass ; quant à la fonction G elle vérifie l'équation (33. 6). Il est facile d'obtenir φ, Φ, puis $\frac{p}{\rho} + U$ par l'équation (33. 3) ; on trouve :

$$\frac{p}{\rho} + U = \frac{2\nu}{r^2} \cdot F(\theta) - \frac{K}{2} \cdot \frac{1}{r^2} - b(t) z + c(t),$$

$c(t)$ désignant une fonction arbitraire de t.

2° Supposons maintenant que la fonction F ne dépende que de t ; la fonction de courant s'écrit :

$$\psi = F(t)z + G(r\ \theta\ t)\ ; \tag{33. 11}$$

la fonction $F(t)$ est arbitraire et la fonction $G(r\ \theta\ t)$ vérifie l'équation (33. 6). On calcule aisément φ et Φ et l'équation (33. 3) donne pour $\frac{p}{\rho} + U$:

$$\frac{p}{\rho} + U = -F'.\mathrm{Log}\, r - \frac{1}{2r^2}\cdot F^2 - b(t)z + c(t).$$

Les seuls mouvements du type (33. 4) sont donc les mouvements (33. 10) et (33. 11). On pourrait en déduire pour la fonction de courant ψ de nombreuses expressions explicites. Contentons-nous d'examiner le cas — qui est un cas particulier du cas (33. 10) comme du cas (33. 11) — où l'on a :

$$\psi = Kz + G(r\ \theta\ t), \tag{33. 12}$$

K désignant une constante absolue. La fonction G vérifie l'équation (33. 6) qui s'écrit :

$$\nu(\Delta G)'_{r} + \frac{\nu}{r^2}\cdot G'''_{r\theta^2} - \frac{K}{r}\cdot\Delta G - G''_{rt} = b(t)r. \tag{33. 13}$$

La pression est donnée par :

$$\frac{p}{\rho} + U = -\frac{K^2}{2r^2} - b(t)z + c(t).$$

Si l'on prend $b(t) = 0$ l'équation (33. 13) admet des solutions de la forme :

$$G = e^{kt}.f(r).g(\theta).$$

On en déduit pour ψ le développement formel :

$$\psi = Kz + \sum_{k} e^{kt}.f_k(r).(A_k e^{\omega\theta} + B_k e^{-\omega\theta}),$$

où k désigne une constante réelle, ω une constante réelle ou imaginaire pure, A_k et B_k des constantes arbitraires, la fonction f_k vérifiant l'équation linéaire :

$$\nu f''' - \frac{K+\nu}{r} f'' + \left[\frac{K+\nu+\nu\omega^2}{r^2} - k\right] f' = 0.$$

34. Mouvement pseudo-de révolution de deuxième espèce.

Occupons-nous maintenant comme en mouvement permanent (§ 17) des mouvements pseudo-de révolution de deuxième espèce non permanents, c'est-à-dire des mouvements pour lesquels les composantes de la vitesse en coordonnées cylindriques ne dépendent pas de θ, sans que les trajectoires soient assujetties à être contenues dans des plans méridiens. Les composantes de la vitesse en coordonnées cylindriques sont donc de la forme :

$$v_1 = v_1(r\, z\, t), \qquad v_2 = v_2(\,r\, z\, t), \qquad v_3 = v_3(r\, z\, t).$$

L'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial(rv_1)}{\partial r} + \frac{\partial(rv_3)}{\partial z} = 0\,;$$

elle montre qu'il existe une fonction de courant $\psi = \psi(r\, z\, t)$ déterminée à une fonction additive de t près et telle que l'on ait :

$$v_1 = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial z}, \qquad v_3 = -\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial r}.$$

Nous désignerons par f la composante de la vitesse normale au plan méridien :

$$v_2 = f(r\, z\, t).$$

Écrivons l'équation de compatibilité cinématique ; des calculs faciles montrent qu'elle fournit les deux équations suivantes :

$$\nu D_4\psi + r\,\frac{D\left(\psi, \dfrac{1}{r^2}\,D_2\psi\right)}{D(r,\, z)} - (D_2\psi)'_t + 2ff'_z = 0, \quad (34.\,1)$$

$$\nu D_2(rf) + \frac{1}{r}\,\frac{D(\psi,\, rf)}{D(r,\, z)} - (rf)'_t = 0. \qquad (34.\,2)$$

En écrivant l'équation (34. 2) on a annulé au second membre une fonction arbitraire de t, ce qui est nécessaire pour assurer l'uniformité de $\frac{p}{\rho} + U$ quand θ varie de 0 à 2π.

L'équation (34. 1) diffère de l'équation (3. 2) par le terme $2ff'_z$; la fonction de courant ψ qui régit le mouvement dans le plan méridien n'est donc pas la fonction de courant d'un mouvement de révolution proprement dit. On ne peut donc en général appliquer ici un procédé de superposition comme en mouvement pseudo-plan de deuxième espèce.

Quant à la partie dynamique du problème, des calculs faciles montrent que la fonction $H = H(r\, z\, t)$ satisfait aux équations :

$$H'_r = f\left(f'_r + \frac{1}{r} f\right) - \frac{1}{r} \cdot \psi''_{zt} + \frac{1}{r^2} \cdot \psi'_r . D_2\psi + \frac{\nu}{r} \cdot (D_2\psi)'_z,$$

$$H'_z = f f'_z + \frac{1}{r} \cdot \psi''_{rt} + \frac{1}{r^2} \cdot \psi'_z . D_2\psi - \frac{\nu}{r} \cdot (D_2\psi)'_r.$$

Parmi les intégrales exactes des équations de Navier-Stokes qui ont été énumérées au § 5, celles qui rentrent dans la catégorie actuelle sont les suivantes :

1° le mouvement par trajectoires hélicoïdales (5. 31) de M. Caldonazzo ;

2° le mouvement (5. 34)-(5. 35) de M. Caldonazzo.

Des mouvements pseudo-de révolution de deuxième espèce non permanents ont été aussi trouvés en (32. 6) et (32. 14).

Proposons-nous maintenant de déterminer les solutions des équations (34. 1) et (34. 2) telles que la composante $v_2 = f$ de la vitesse ne dépende que de r et t :

$$v_2 = f(r, t).$$

L'équation (34. 1) se réduit alors à l'équation (3. 2) et ψ est la fonction de courant d'un mouvement de révolution proprement dit. Posons :

$$h = rf\,;$$

l'équation (34. 2) s'écrit :

$$\nu\left(h''_{r^2} - \frac{1}{r} h'_r\right) - \frac{1}{r} \cdot \psi'_z . h'_r - h'_t = 0. \qquad (34.\ 3)$$

Cette équation montre que deux cas sont possibles :

1° $h' = 0$; alors l'équation (34. 3) est satisfaite et on a :

$$v_2 = f = \frac{C(t)}{r},$$

$C(t)$ désignant une fonction arbitraire de t. On obtient donc le résultat suivant : on peut superposer à tout mouvement de révolution proprement dit non permanent le mouvement irrotationnel :

$$v_1 = 0, \qquad v_2 = \frac{C(t)}{r}, \qquad v_3 = 0\,; \tag{34. 4}$$

on obtient encore une solution exacte ; le champ (34. 4) n'est autre que le champ de vitesses d'un tourbillon ponctuel en mouvement plan.

2° $h' \neq 0$; alors l'équation (34. 3) montre que la fonction ψ est de la forme :

$$\psi = F(r, t)z + G(r, t). \tag{34. 5}$$

Il s'agit d'une classe de mouvements de révolution analogues aux mouvements (4. 23) mais non permanents. Les fonctions $F(r\ t)$ et $G(r\ t)$ doivent vérifier deux équations qui s'écrivent en prenant pour variable indépendante $r^2 = s$:

$$4\nu s F'''_{s^3} + 4\nu F''_{s^2} - 2FF''_{s^2} + 2F'^2_s - F''_{st} = K_1(t), \tag{34. 6}$$

$$4\nu s G'''_{s^3} + 4\nu G''_{s^2} - 2FG''_{s^2} + 2F'_sG'_s - G''_{st} = K_2(t), \tag{34. 7}$$

$K_1(t)$ et $K_2(t)$ désignant deux fonctions arbitraires de t. L'équation (34. 3) s'écrit :

$$4\nu s h''_{s^2} - 2F(s, t)h'_s - h'_t = 0. \tag{34. 8}$$

Ainsi à tout mouvement de révolution du type (34. 5) où les fonctions F et G satisfont aux équations (34. 6) et (34. 7) on peut associer un mouvement pseudo-de révolution de deuxième espèce en ajoutant au premier mouvement une rotation :

$$v_2 = \frac{h}{r},$$

où la fonction h est solution de l'équation (34. 8).

35. D'une manière analogue à ce que nous avons fait en mouvement permanent (§ 18), nous nous proposons d'examiner les mouvements non permanents pour lesquels les composantes du vecteur tourbillon en coordonnées cartésiennes rectangulaires $x\,y\,z$ ne dépendent que d'une seule coordonnée, x par exemple, et en outre du temps t ; pour un tel mouvement en tous les points d'un plan $x = x_0$ et à un instant déterminé les vecteurs tourbillons sont équipollents. Remarquons qu'en particulier en mouvement plan l'hypothèse conduit aux mouvements du § 21 où l'on a :

$$\Delta_2\psi = f(x, t).$$

Soient $u(x\,y\,z\,t)$, $v(x\,y\,z\,t)$, $w(x\,y\,z\,t)$ les composantes de la vitesse $\vec{V}$ et $a(x\,t)$, $b(x\,t)$, $c(x\,t)$ celles du vecteur $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}$. La condition

$$\text{div}\,(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}) = 0$$

exige que $a(x\,t)$ ne dépende que de t. L'équation de compatibilité cinématique fournit ensuite les trois équations suivantes :

$$au'_x + bu'_y + cu'_z - a'_t = 0, \qquad (35.\,1)$$

$$av'_x + bv'_y + cv'_z - b'_x.u + \nu b''_{x^2} - b'_t = 0, \qquad (35.\,2)$$

$$aw'_x + bw'_y + cw'_z - c'_x.u + \nu c''_{x^2} - c'_t = 0. \qquad (35.\,3)$$

D'autre part en exprimant que a, b, c sont les composantes du rotationnel de $\vec{V}(u, v, w)$, on obtient les trois équations :

$$w'_y - v'_z = a, \qquad (35.\,4)$$

$$u'_z - w'_x = b, \qquad (35.\,5)$$

$$v'_x - u'_y = c. \qquad (35.\,6)$$

Enfin la condition de continuité s'écrit :

$$u'_x + v'_y + w'_z = 0. \qquad (35.\,7)$$

Les équations (35. 1)–(35. 7) constituent les conditions de compatibilité cinématique de la classe de mouvements envisagée. Commençons par noter quelques relations assez simples qui découlent des équations ci-dessus. Dérivons l'équation (34. 2) par rapport à z et l'équation (34. 3) par rapport à y, retranchons membre à membre les relations obtenues, il vient :

$$c'_x.u'_y - b'_x.u'_z = 0. \qquad (35.\,8)$$

Dérivons les équations (35. 7), (35. 6) et (35. 5) respectivement par rapport à x, y et z et ajoutons membre à membre les relations obtenues ; il vient :

$$u''_{x^2} + u''_{y^2} + u''_{z^2} = 0. \qquad (35.\,9)$$

On voit que la composante u de la vitesse est harmonique par rapport aux variables $x\,y\,z$. De façon analogue on obtient les équations :

$$v''_{x^2} + v''_{y^2} + v''_{z^2} = c'_x, \qquad (35.\,10)$$

$$w''_{x^2} + w''_{y^2} + w''_{z^2} = -\,b'_x. \qquad (35.\,11)$$

Nous nous contenterons d'étudier le cas où u ne dépend que de x et t :

$$u = u(x\,t).$$

Ce cas correspond aux deux cas seuls possibles pour le problème analogue en mouvement permanent (§ 18).

L'équation (35. 9) montre que u doit être de la forme :

$$u = \mathrm{K}_1(t)x + \mathrm{K}(t),$$

$\mathrm{K}_1(t)$ et $\mathrm{K}(t)$ désignent des fonctions arbitraires de t. L'équation (35. 1) donne alors pour a l'expression :

$$a = a_0 e^{\int \mathrm{K}_1 . dt},$$

où a_0 désigne une constante arbitraire. Des équations (35. 6) et (35. 5) on tire ensuite pour v et w les expressions :

$$v = \int c(x\,t)dx + f(y\,z\,t),$$
$$w = -\int b(x\,t)dx + g(y\,z\,t),$$

où f et g désignent des fonctions arbitraires (pour le moment) de leurs arguments. Portons ces expressions de v et w dans les équations (35. 4), (35. 7), (35. 2) et (35. 3) ; nous obtenons les relations :

$$g'_y - f'_z = a(t),$$
$$f'_y + g'_z = -\mathrm{K}_1(t),$$
$$bf'_y + cf'_z + \nu b''_{x^2} - (\mathrm{K}_1 x + \mathrm{K})b'_x - b'_t + ac = 0,$$
$$bg'_y + cg'_z + \nu c''_{x^2} - (\mathrm{K}_1 x + \mathrm{K})c'_x - c'_t - bc = 0.$$

De ces quatre équations on tire d'abord que les fonctions f et g sont de la forme :

$$f = \mathrm{A}(t)y + \mathrm{B}(t)z + \mathrm{C}(t),$$
$$g = \Big[\mathrm{B}(t) + a(t)\Big]y - \Big[\mathrm{A}(t) + \mathrm{K}_1(t)\Big]z + \mathrm{D}(t),$$

où $\mathrm{A}(t)$, $\mathrm{B}(t)$, $\mathrm{C}(t)$ et $\mathrm{D}(t)$ désignent des fonctions arbitraires de t. On voit d'autre part que les fonctions $b(x\,t)$ et $c(x\,t)$ vérifient les équations :

$$\nu b''_{x^2} - (\mathrm{K}_1 x + \mathrm{K})b'_x - b'_t + \mathrm{A}b + (\mathrm{B} + a)c = 0,$$
$$\nu c''_{x^2} - (\mathrm{K}_1 x + \mathrm{K})c'_x - c'_t + \mathrm{B}b - (\mathrm{A} + \mathrm{K}_1)c = 0.$$

Finalement, si on résume tous les résultats, on voit en modifiant légèrement les notations qu'on a obtenu le champ de vitesses suivant :

$$u = K_1(t)x + K(t),$$
$$v = \gamma(x\,t) + A(t)y + B(t)z + C(t),$$
$$w = -\beta(x\,t) + \left[B(t) + a(t)\right]y - \left[A(t) + K_1(t)\right]z + D(t),$$

où l'on a :

$$a(t) = a_0 e^{\int K_1 . dt}$$

et où les fonctions $\beta(x\,t)$ et $\gamma(x\,t)$ vérifient les deux équations suivantes du type parabolique :

$$\nu\beta''_{x^2} - (K_1x + K)\beta'_x - \beta'_t + (A + K_1)\beta + (B + a)\gamma = E,$$
$$\nu\gamma''_{x^2} - (K_1x + K)\gamma'_x - \gamma'_t + B\beta - A\gamma = F,$$

$E = E(t)$ et $F = F(t)$ désignant des fonctions arbitraires de t.

On vérifie facilement que les mouvements plans (21. 3) constituent un cas particulier de la solution ci-dessus.

BIBLIOGRAPHIE

Ouvrages.

1. DRYDEN (H.-L.), MURNAGHAN (F.-D.), BATEMAN (H.). Report of the Committee on Hydrodynamics. *Bulletin of the Nat. Research Council*, nº 84, Washington, 1932, 634 p.
2. LAMB (H.). Hydrodynamics, 5ᵉ éd., Cambridge, 1924.
3. MÜLLER (W.). Einfuhrung in die Theorie der reibenden Flüssigkeiten, Leipzig, 1932.
4. NOETHER (F.). Integrationsprobleme der Navier-Stokesschen Differentialgleichungen. *Handbuch der phys. u. tech. Mechanik*, Hrsg. von AUERBACH (F.) u. HORT (W.), Leipzig, 1927-1931, 7 Bde, Bd 5, 1931, pp. 719-796.
5. PRANDTL (L.). The Mechanics of Viscous Fluids. *Aerodynamic Theory* DURAND (W.-F.) Editor-in-Chief. Berlin, 1934-1936, 6 vol.; vol. III, 1935, Div. G, pp. 34-208.
6. ROSENBLATT (A.). Sur certains mouvements des liquides visqueux incompressibles. Paris, 1933, 41 p.
7. ROSENBLATT (A.). Solutions exactes des équations du mouvement des liquides visqueux. *Mém. des Sc. Math.*, fasc. 72, Paris, 1935, 66 p.

Mémoires (¹).

8. CALDONAZZO (B.). Sui moti di un liquido viscoso simmetrici ad un asse.
   8 *a*. *Rend. Ist. Lomb.* 2ᵉ s., t. 57, pp. 778-786, 1924.
   8 *b*. » » » 2ᵉ s., t. 58, pp. 403-412, 1925.
9. CALDONAZZO (B.). Moti elicoidali simmetrici ad un asse di liquidi viscosi. *Rend. Ist. Lomb.*, 2ᵉ s., t. 59, pp. 657-665, 1926.
10. CALDONAZZO (B.). Un osservazione a proposito di moti viscosi simmetrici rispetto ad un asse. *Rend. Acc. Lincei*, 6ᵉ s., t. 5, pp. 152-156, 1927.
11. CISOTTI (U.). Rotazioni viscose. *Rend. Acc. Lincei*, 5ᵉ s., t. 33. pp. 161-167, 1924.
12. CISOTTI (U.). Sull' integrazione dell' equazione delle rotazioni viscose. *Rend. Acc. Lincei*, 5ᵉ s., t. 33, pp. 253-257, 1924.

(¹) Les mémoires relatifs aux solutions banales et depuis longtemps classiques (mouvements par droites parallèles, par cercles concentriques) n'ont pas été compris dans la Bibliographie ci-dessus.

13. Crudeli (U.). Sui moti di un liquido viscoso (omogeneo) simmetrici rispetto ad un asse. *Rend. Acc. Lincei*, 6e s., t. 5, pp. 500-504, 1927.
14. Crudeli (U.). Una nuova categoria di moti stazionari dei liquidi (pesanti) viscosi entro tubi cilindrici (rotondi) verticali. *Rend. Acc. Lincei*, 6e s., t. 5, pp. 783-789, 1927.
15. Crudeli (U.). Sopra una categoria di moti stazionari dei liquidi pesanti viscosi entro tubi cilindrici (rotondi) verticali. *Rend. Acc. Lincei*, 6e s., t. 6, pp. 397-401, 1927.
16. Hamel (G.). Spiralförmige Bewegungen zäher Flüssigkeiten. *Jahresb. der Deutschen Math. Ver.*, t. 25, pp. 34-60, 1916.
17. Hamel (G.). Neuer Beweis eines Satzes aus der Theorie zäher Flüssigkeiten (zugleich ein Satz über gedämpfte Schwingungen eines nichtlinearen Systems). *Jahresb. der Deutschen Math. Ver.*, t. 43, pp. 132-140, 1933.
18. Jeffery (G.-B.). On the equations of motion of a viscous fluid. *Phil. Mag.*, 6e s., t. 29, pp. 445-454, 1915.
19. Jeffery (G.-B.). On the two dimensional steady motion of a viscous fluid. *Phil. Mag.*, 6e s., t. 29, pp. 455-464, 1915.
20. Kampé de Fériet (J.). Sur quelques cas d'intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible. *Comptes Rendus du* 3e *Congrès Int. de Méc. appl.*, Stockholm, 1930, t. 1, pp. 334-338, 1931.
21. Kampé de Fériet (J.). Sur quelques cas d'intégration des équations du mouvement plan d'un fluide visqueux incompressible. *Annales de la Soc. Sc. de Bruxelles*, t. 50 A, pp. 77-80, 1930.
22. Kampé de Fériet (J.). Sur une classe de mouvements plans d'un fluide visqueux incompressible. *Annales de la Soc. Sc. de Bruxelles*, t. 51 A, pp. 7-11, 1931.
23. Kampé de Fériet (J.). Détermination des mouvements plans d'un fluide visqueux incompressible où le tourbillon est constant le long des lignes de courant. *Comptes Rendus du* 9e *Congrès Int. des Math.*, Zurich, 1932, t. 2, pp. 298-299.
24. Von Karman (T.). Über laminare und turbulente Reibung. *Zeitschr. für angew. Math. und Mech.*, t. 1, pp. 233-252, 1921.
25. Millikan (C.-B.). Logarithmic spiral flow of an incompressible fluid. *Math. Annalen*, t. 101, pp. 446-451, 1929.
26. Olsson (O.), Faxen (H.). Laminare Bewegung zäher Flüssigkeit in logarithmischen Spiralen. *Zeitschr. für angew. Math. und Mech.*, t. 7, pp. 496-498, 1927.
27. Olsson (O.). Om integrationen av Hamels differentialekvation för sega vätskors rörelse. *Arkiv för Mat.*, t. 20 A, no 29, 12 p., 1928.
28. Oseen (C.-W.). Exakte Lösungen der hydrodynamischen Differentialgleichungen.
    28 *a* : *Arkiv för Mat.*, t. 20 A, no 14, 24 p., 1927.
    28 *b* : » » t. 20 A, no 22, 9 p., 1927.
29. Oseen (C.-W.). Exakte Lösungen der hydrodynamischen Differentialgleichungen. *Opuscula Mathematica A. Wiman dedicata*, pp. 147-156, Lund, 1930.

30. Ratip (A.) [Berker]. Sur des intégrales exactes des équations de Navier-Stokes. *Comptes Rendus du* 4e *Congrès Int. de Méc. appl.*, Cambridge (Angl.), 1934, pp. 280-281, 1935.
31. Riabouchinsky (D.). Quelques considérations sur les mouvements plans rotationnels d'un liquide. *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 179, pp. 1133-1136, 1924.
32. Rosenblatt (A.). Sopra certi moti permanenti dei liquidi viscosi incompressibili. *Atti del Congresso di Bologna*, 1928, t. 5, pp. 165-173, 1931.
33. Rosenblatt (A.). Sur certains mouvements stationnaires des fluides visqueux incompressibles. *Comptes Rendus du* 3e *Congrès Int. de Méc. appl.*, Stockholm, 1930, t. 1, pp. 351-354, 1931.
34. Rosenblatt (A.). Sur certains mouvements plans des liquides visqueux. *Bull. Sc. Math.*, 2e s., t. 55, pp. 175-192, 1931.
35. Rosenblatt (A.). Sur les mouvements des liquides visqueux symétriques autour d'un axe. *Bull. Soc. Math. de Grèce*, t. 13, i, pp. 17-28, 1932.
36. Rosenblatt (A.). Über die Hamelsche nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. *Bull. Soc. Math. de Grèce*, t. 14, ii, pp. 21-26, 1933.
37. Rosenblatt (A.). Sur certaines classes de mouvements symétriques par rapport à un axe d'un liquide visqueux incompressible. *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 201, pp. 1012-1014, 1935.
38. Strakhovitch (C.). Sur un cas de mouvement d'un liquide visqueux incompressible. *Applied Math. and Mech.*, (Leningrad et Moscou) vol. 2, no 1, pp. 74-81, 1934.
39. Strakhovitch (C.). Hydrodynamics of a viscous liquid. *Applied Math. and Mech.*, (Leningrad et Moscou) vol. 2, no 1, pp. 127-142, 1934.
40. Szymanski (P.), Witoszynski (C.). Sur une intégrale particulière des équations de Stokes. *Comptes Rendus du* 3e *Congrès Int. de Méc. appl.*, Stockholm, 1930, t. 1, pp. 355-357, 1931.
41. Szymanski (P.). Un écoulement du fluide visqueux par le tuyau conique. *Trav. Inst. Aérodyn. Varsovie*, fasc. 6, pp. 97-105, 1932.
42. Taylor (G.-I.). On the decay of vortices in a viscous fluid. *Phil. Mag.*, 6e s., t. 46, pp. 671-674, 1923.
43. Trkal (V.). Poznámka k hydrodynamice vazkých tekutin. *Časopis pro Pěstování Matematiky a Fisiky* (Praha), t. 48, pp. 302-311, 1919.