ABOLGHASSEM GHAFFARI

Étude de l'équation fonctionnelle de Chapman-Kolmogoroff dans le cas d'un domaine d'intégration illimité à une dimension

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1936

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1936__184__1_0>

SÉRIE A, 334
N° D'ORDRE :
358

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS
(SCIENCES MATHÉMATIQUES)

PAR

Abolghassem GHAFFARI
Licencié ès sciences mathématiques
Diplômé d'Analyse supérieure et d'Astronomie

1re THÈSE. — ÉTUDE DE L'ÉQUATION FONCTIONNELLE DE CHAPMAN-KOLMOGOROFF DANS LE CAS D'UN DOMAINE D'INTÉGRATION ILLIMITÉ A UNE DIMENSION.

2e THÈSE. — FORME DES COURBES DÉFINIES PAR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

Soutenues le 8 décembre 1936, devant la Commission d'Examen.

MM. M. FRÉCHET, *Président.*
J. PÉRÈS, G. DARMOIS } *Examinateurs.*

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1936

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

MM.

Doyen honoraire..... M. MOLLIARD.

Doyen.............. C. MAURAIN, *Professeur*, Physique du globe.

Professeurs honoraires

H. LEBESGUE.	GUILLET.	DANGEARD.
A. FERNBACH.	PÉCHARD.	JANET.
A. LEDUC.	FREUNDLER.	LESPIEAU.
Émile PICARD.	AUGER.	MARCHIS.
Rémy PERRIER.	BLAISE.	VESSIOT.
Léon BRILLOUIN.		P. PORTIER.

PROFESSEURS

G. BERTRAND.....	T	Chimie biologique.
M. CAULLERY.....	T	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
G. URBAIN.......	T	Chimie générale.
Émile BOREL.....	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.
Jean PERRIN.....	T	Chimie physique.
H. ABRAHAM.....	T	Physique.
E. CARTAN.......	T	Géométrie supérieure.
M. MOLLIARD.....	T	Physiologie végétale.
L. LAPICQUE.....	T	Physiologie générale.
A. COTTON.......	T	Recherches physiques.
J. DRACH.........	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
Charles FABRY...	T	Enseignement de Physique.
Charles PÉREZ...	T	Zoologie.
Léon BERTRAND..	T	Géologie structurale et géologie appliquée.
E. RABAUD.......	T	Biologie expérimentale.
M. GUICHARD.....		Chimie minérale.
Paul MONTEL.. ..	T	Théorie des fonctions et théorie des transformations.
P. WINTREBERT..	T	Anatomie et histologie comparées.
L. BLARINGHEM...	T	Botanique.
O. DUBOSCQ......	T	Biologie maritime.
G. JULIA.........	T	Mécanique analytique et Mécanique céleste.
C. MAUGUIN......	T	Minéralogie.
A. MICHEL-LÉVY..	T	Pétrographie.
H. BÉNARD.......	T	Mécanique expérimentale des fluides.
A. DENJOY.......	T	Application de l'analyse à la Géométrie.
L. LUTAUD.......	T	Géographie physique et géologie dynamique.
Eugène BLOCH...	T	Physique théorique et physique céleste.
G. BRUHAT.......		Physique.
E. DARMOIS......		Enseignement de Physique.
A. DEBIERNE.....	T	Physique générale et Radioactivité.
A. DUFOUR.......	T	Physique (P. C. B.).
L. DUNOYER......		Optique appliquée.
A. GUILLIERMOND.	T	Botanique.
M. JAVILLIER.....		Chimie biologique.
L. JOLEAUD.......		Paléontologie.
ROBERT-LÉVY.....		Zoologie.
F. PICARD..		Zoologie (Évolution des être organisés).
Henri VILLAT....	T	Mécanique des fluides e applications.
Ch. JACOB........	T	Géologie.
P. PASCAL.......	T	Chimie minérale.
M. FRÉCHET......	T	Calcul différentiel et calc intégral.
E. ESCLANGON...	T	Astronomie.
Mme RAMART-LUCAS.	T	Chimie organique.
H. BÉGHIN.......	T	Mécanique physique et expé rimentale.
FOCH...........		Mécanique expérimentale de fluides.
PAUTHENIER......		Physique (P. C. B.).
De BROGLIE......	T	Théories physiques.
CHRÉTIEN........		Optique appliquée.
P. JOB..........		Chimie générale.
LABROUSTE.......		Physique du globe.
PRENANT...		Zoologie.
VILLEY...		Mécanique physique et exp rimentale.
BOHN...........		Zoologie (P. C. B.).
COMBES..........		Botanique (P. C. B.).
GARNIER.........		Mathématiques générales.
PÉRÈS..........		Mécanique théorique d fluides.
HACKSPILL.......		Chimie (P. C. B.).
LAUGIER.........		Physiologie générale.
TOUSSAINT.......		Technique Aéronautique.
M. CURIE...... ..		Physique (P. C. B.).
G. RIBAUD.......	T	Hautes températures.
CHAZY.......... .	T	Mécanique rationnelle.
GAULT...........		Chimie (P. C. B.).
CROZE.....		Recherches et physiques.
DUPONT......	T	Théories chimiques.
LANQUINE........		Géologie.
VALIRON....... .		Mathématiques générales.
BARRABÉ.		Géologie structurale et gé logie appliquée.
MILLOT..........		Zoologie (P. C. B.).
F. PERRIN........		Théories physiques.
VAVON..........		Chimie organique.
G. DARMOIS......		Calcul des Probabilités et Ph sique Mathématique.

Secrétaire........................ A. PACAUD.

Secrétaire honoraire.............. D. TOMBECK.

A LA MÉMOIRE DE MON PÈRE

A MA MÈRE

A MON MAITRE

MONSIEUR LE PROFESSEUR M. FRÉCHET

PROFESSEUR A LA SORBONNE

Hommage de profonde reconnaissance.

PREMIÈRE THÈSE

ÉTUDE DE L'ÉQUATION FONCTIONNELLE
DE CHAPMAN-KOLMOGOROFF
DANS LE CAS D'UN DOMAINE D'INTÉGRATION ILLIMITÉ A UNE DIMENSION

INTRODUCTION.

L'étude mathématique du *mouvement brownien* et du *phénomène de la diffusion*, dans le cas où le fluide n'est pas homogène, a conduit S. Chapman [1] à introduire l'équation fonctionnelle.

$$(\mathrm{I}) \quad f(\rho, r+r_0, r, t) = \int f(\rho', r, r, t) f(\rho-\rho', r_0, r+\rho', t+r)\, d\rho'.$$

B. Hostinsky [1] en étudiant l'équation fonctionnelle de Smoluchowski, pour le même problème a observé que l'équation fonctionnelle de S. Chapman généralisait l'équation fonctionnelle de Smoluchowski et il a trouvé des solutions générales de l'équation fonctionnelle de S. Chapman en utilisant la méthode d'*intégration des substitutions due à V. Volterra*.

A. Kolmogoroff a mis l'équation fonctionnelle de Chapman sous la forme plus symétrique

$$(\mathrm{II}) \quad f(x_1, x_3, t_1, t_3) = \int_a^b f(x_1, x_2, t_1, t_2) f(x_2, x_3, t_2, t_3)\, dx_2$$

équivalente à celle de Chapman pour le cas où l'espace dans lequel s'effectue la diffusion n'a qu'une dimension.

D'autre part, le même auteur a considéré directement une équation fonctionnelle, très générale, valable pour un domaine à un nombre quelconque de dimensions, se réduisant à l'équation (II) dans le cas d'une dimension et qui peut être considérée comme une forme très générale de l'une des conditions qui se présente dans le problème des probalités en chaîne étudié par Markoff.

De plus, A. Kolmogoroff avait donné des solutions particulières de l'équation (II) et montré que des classes très étendues de ses solutions vérifient des équations aux dérivées partielles linéaires et du second ordre du type parabolique, et c'est lui qui a généralisé l'équation fonctionnelle de Chapman hors du problème spécial de la diffusion, aux probabilités en chaîne.

Pour les raisons exposées ci-dessus, il serait peut-être plus indiqué d'appeler l'équation (II) l'équation fonctionnelle de Chapman-Kolmogoroff.

Mais toutefois, la solution la plus générale de l'équation de Chapmann n'avait pas été donnée.

M. Fréchet a aussi donné des solutions très générales, de formes différentes des formes données par les auteurs précédents, de l'équation fonctionnelle de Chapman-Kolmogoroff.

M. Fréchet a découvert deux méthodes, dont la première [1], [2] est basée sur un procédé employé en physique mathématique et la seconde [3], [4] réduisant la recherche des solutions les plus générales qui sont de carrés doublement sommables à une recherche analogue dans le cas discontinu.

Du reste, les deux méthodes fournissent deux formes distinctes et dont l'équivalence n'est ni apparente ni certaine.

Dans le premier chapitre, nous exposons les résultats généraux relatifs à l'espace à ν dimensions, en suivant la première méthode de M. Fréchet [1], [2].

Dans les chapitres suivants, nous nous proposons d'étudier en détail des exemples effectifs de solutions très générales dans le cas d'une seule dimension. Le cas d'un intervalle fini ayant été déjà traité par M. Fréchet [1], [2], nous considérerons le cas d'un domaine infini dans les deux sens ou dans un sens.

Nous examinons d'abord, dans les Chapitres III et IV, le cas où le domaine d'intégration est l'intervalle $(-\infty, +\infty)$.

A cet effet, il nous sera utile de rappeler d'abord, dans le deuxième chapitre, quelques propriétés des polynomes d'Hermite et de ceux de Laguerre.

Le Chapitre V est consacré à l'étude de l'équation fonctionnelle Chapman-Kolmogoroff relative au domaine $(0, +\infty)$. La méthode est analogue mais fait intervenir les polynomes de Laguerre.

Enfin dans le Chapitre VI, en revenant au domaine $(-\infty, +\infty)$, nous emploierons une autre méthode pour résoudre l'équation fonctionnelle de Chapman-Kolmogoroff en essayant de prendre pour la solution une exponentielle de la forme

$$\text{(III)} \qquad A(s,\, t)e^{-[a(s,\,t)x^2 + 2b(s,\,t)xy + c(s,\,t)y^2]}.$$

Nous verrons que cette dernière méthode nous donne l'expression la plus générale des solutions qui ont la forme exponentielle (III) et nous montrerons que cette solution contient la solution de L. Bachelier comme cas particulier.

Nous remercions notre maître, M. le professeur M. Fréchet, qui nous a accueilli avec une grande bienveillance et n'a jamais cessé de nous prodiguer ses précieux conseils et suggestions. Qu'il veuille bien accepter l'expression de notre plus haute reconnaissance et de notre profonde gratitude.

CHAPITRE I.

RESULTATS GÉNÉRAUX RELATIFS A L'ESPACE A ν DIMENSIONS.

1. **Généralités.** — Considérons un système matériel dépendant d'un nombre fini, ν, de paramètres et qui peut prendre tous les états Q, formant un certain ensemble V (qu'on peut considérer comme une région de l'espace à ν dimensions). On suppose alors qu'il existe une probabilité déterminée $\varpi(M, s; v, t)$ pour que le système passe de l'état M à l'instant s à un quelconque des états d'un ensemble v à l'instant t.

La fonction $\varpi(M, s; v, t)$ est, en vertu du théorème des probabilités totales, une fonction additive de l'ensemble v. Il est clair que

$$\varpi(M, s; v, s) = \delta(M, v), \tag{1}$$

en désignant par $\delta(M, v)$ un nombre égal à l'unité, si M appartient à v, et à zéro, si M n'appartient pas à v. *Quand $s < t$, on peut* considérer le cas simple (qui n'est pas nécessairement le seul) où la fonction additive de l'ensemble v peut être représentée par une intégrale de Lebesgue

$$\varpi(M, s; v, t) = \int_v f(M, s; Q, t)\, dQ \tag{2}$$

$\left(\text{dans laquelle } dQ \text{ est un élément de l'espace à } \nu \text{ dimensions et où } \int_v \text{ est une intégrale } \nu\text{-uple}\right)$.

Quand on fait cette hypothèse, on trouve qu'en appliquant les théorèmes des probabilités totales et composées, la fonction f satisfait à l'équation fonctionnelle de Chapman-Kolmogoroff

$$\text{(C)} \qquad f(M, s; P, t) = \int_V f(M, s; Q, u)\, f(Q, u; P, t)\, dQ$$

et qui doit être vérifiée pour $s < u < t$.

Pour obtenir une solution très générale de l'équation fonctionnelle (C), nous allons employer une méthode qui est due à M. Fréchet [1], [2]. Cette méthode qui est fondée sur l'emploi d'un procédé très fréquemment usité en Physique mathématique, consiste à chercher d'abord une solution particulière, sous la forme d'un produit de deux fonctions A, B ne dépendant pas des mêmes variables. Les variables intervenant dans le problème sont réparties en deux groupes, la fonction A dépendant d'un groupe, la fonction B de l'autre. Alors une solution plus générale est obtenue comme somme d'un nombre fini ou infini de ces produits.

Dans le problème des probabilités en chaîne, $f(M, s; P, t)\, dP$ est la probabilité élémentaire pour que l'état d'un système physique, déterminé par ν paramètres, et représenté par M à l'instant s, devienne à l'instant t l'un des états d'un certain ensemble élémentaire dP d'états. Naturellement, dans cette interprétation la fonction $f(M, s; P, t)$, densité de probabilité, devra être assujettie à des conditions particulières telles que $f(M, s; P, t) \geqq 0$ et l'on devra supposer $s < u < t$.

Mais pour le moment, nous faisons abstraction des conditions relatives des probabilités en chaîne et nous cherchons seulement à vérifier l'équation fondamentale de Chapman-Kolmogoroff.

2. **Solutions sous formes de sommes d'un nombre fini de produits.** — En appliquant à l'équation fonctionnelle de Chapman-Kolmogoroff la méthode précédente, nous sommes ramené à chercher s'il existe des solutions de l'équation (C) de la forme

$$(3) \qquad f(M, s; P, t) = \sum_{i=0}^{n} A_i(M, s)\, B_i(P, t).$$

Si cette fonction f n'est pas identiquement nulle, il est toujours possible de supposer que les fonctions $A_0(M,s), \ldots, A_n(M, s)$ sont linéairement indépendantes pour au moins une valeur de s quand M se déplace sur v; et de même pour les B_i.

Il suffit de substituer l'expression (3) dans l'équation (C) pour s'assurer que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction de la forme*

$$f(M, s; P, t) = \sum_{i=0}^{n} A_i(M, s) B_i(P, t) \tag{3}$$

vérifie l'équation fonctionnelle

$$f(M, s; P, t) = \int_V f(M, s; Q, u) f(Q, u; P, t)\, dQ \tag{C}$$

est que, pour les valeurs de u telles que $s < u < t$, *les fonctions* $A_j(Q, u)$ *et* $B_j(Q, u$, *forment un système biorthonomé sur* V, *c'est-à-dire que l'on ait*

$$\int_V A_i(Q, u) B_j(Q, u)\, dQ = \delta ij \qquad \text{avec} \quad \delta ij = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j, \\ 0 \text{ si } i \neq j. \end{cases} \tag{4}$$

Nous voyons que des solutions de la forme (3) sont, sans se préoccuper de toutes les conditions qui se présentent dans le problème des probabilités en chaîne, des solutions de l'équation fonctionnelle (C).

Quand nous voudrons faire intervenir les conditions propres au problème des probabilités en chaîne, nous verrons que les solutions (3) ne peuvent convenir, et qu'il faut faire intervenir des séries au lieu de sommes d'un nombre fini de termes. Mais, néanmoins, M. Fréchet [2] a signalé un cas où les solutions que nous venons de trouver sont les plus générales qui vérifient l'équation fonctionnelle de Chapman-Kolmogoroff, quel que soit l'ordre de grandeurs relatives des valeurs s, u et t. Il suffit pour le voir de recourir à l'artifice que M. Fréchet a utilisé dans une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* de Paris [1]. Cet artifice consiste à transformer l'équation de

---

[1] *Comptes rendus*, **198**, 1934, p. 2053.

Chapman-Kolmogoroff de façon à pouvoir lui appliquer un des résultats de la théorie de Fredholm. A cet effet, effectuons avec M. Fréchet, d'abord sur s, u et t une même transformation

$$S = \lambda(s),$$
$$U = \lambda(u),$$
$$T = \lambda(t),$$

où $\lambda(s)$ est une fonction continue et croissante de s et qui varie de zéro à l'unité quand s varie de $-\infty$ à $+\infty$. Alors $f(M, s; P, t)$ devient une fonction de la forme $F(M, s; P, T)$ et l'équation (C) devient

$$\text{(5)} \qquad F(M, S; P, T) = \int_V F(M, S; Q, U)\, F(Q, U; P, T)\, dQ.$$

Cela étant, cherchons maintenant celles des solutions de l'équation (C) qui sont vérifiées, quel que soit l'ordre de grandeurs relatives des valeurs s, u, t. [Dans le problème des probabilités en chaîne, on n'impose à $f(M, s; P, t)$ la condition de vérifier (C) que si $s < u < t$, de sorte que les solutions qu'on va chercher ne sont peut-être pas toutes celles qui résolvent ce problème.]

Dans l'hypothèse faite la variable U qui figure dans (5) peut varier de zéro à 1 quand S et T sont fixes et l'on a, en intégrant dans ces limites par rapport à U,

$$F(M, S; P, T) = \int_0^1 \left[\int_V F(M, S; Q, U)\, F(Q, U; P, T)\, dQ \right] dU.$$

On peut écrire cette équation en appelant α, β, γ les couples M, S; P, T; Q, U et en désignant par W la région de l'espace à $\nu + 1$ dimensions décrite par γ quand Q décrit V et U varie de zéro à 1 et en posant $K_1(\alpha, \beta) = F(M, S; P, T)$. On a alors

$$K_1(\alpha, \beta) = \int_W K_1(\alpha, \gamma)\, K_1(\gamma, \beta)\, d\gamma.$$

En considérant $K_1(\alpha, \beta)$ comme un noyau de *Fredholm* le second membre n'est autre que le premier itéré K_2 de K_1 sur W.

Ainsi lorsque $f(M, s; P, t)$ vérifie l'équation fonctionnelle de Chapman-Kolmogoroff quel que soit u (le raisonnement subsiste si cette équation cesse d'être vérifiée pour des valeurs isolées de u, par exemple pour $u=s$ et $u=t$, ce qui a son intérêt par la suite), le noyau correspondant $K_1(\alpha, \beta)$ est égal à son premier itéré sur W, et par suite aussi à tous ses itérés sur W.

Quand le domaine W et la fonction K_1 sont tels que la théorie de Fredholm s'applique, on sait que l'égalité de K_1 et de K_2 ne peut avoir lieu que si $K_1(\alpha, \beta)$ est de rang fini, c'est-à-dire si K_1 est de la forme d'une somme d'un nombre fini de termes de la forme

$$K_1(\alpha, \beta)=\sum_i \psi_i(\alpha)\,\theta_i(\beta).$$

Dans ce cas, $f(M, s; P, t)$ est nécessairement de la forme (3) et nous avons vu qu'alors les conditions (4) sont nécessairement vérifiées et suffisent pour que (3) soit une solution.

On ne connaît pas de conditions simples à la fois nécessaires et suffisantes pour que les théorèmes fondamentaux de Fredholm s'appliquent. Mais on connaît des cas très généraux où ils sont applicables. C'est par exemple ce qui a lieu, si w étant borné, K_1 est borné sur W ou si plus généralement, l'intégrale multiple de son carré, étendue à W,

$$\int_W \int_W [K_1(\alpha, \beta)]^2\, d\alpha\, d\beta$$

est finie. C'est aussi ce qui a lieu quand W étant borné et $K_1(\alpha, \beta)$ étant borné quand la distance $\alpha\beta$ est supérieure à un nombre positif, l'ordre de K_1 est inférieur à celui de $\frac{1}{(\alpha\beta)^{\nu+1}}$. D'après M. Giraud [1] il en est encore ainsi quand W étant borné et fermé et $K_1(\alpha, \beta)$ étant continu pour $\alpha \neq \beta$, on a

$$K_1(\alpha, \beta) < \frac{g(\alpha\beta)}{(\alpha\beta)^{\nu+1}},$$

---

[1] *Bull. Soc. math. France, C. R. des séances*, **61**, 1933, p. 28.

où $\frac{g(t)}{t^{\nu+1}}$ est une fonction décroissante et où $\int_0 \frac{g(t)}{t}\,dt$ est une intégrale convergente.

En retournant à V et f, on voit que *la forme* (3) *obtenue est, moyennant les conditions* (4), *la forme la plus générale de celles des solutions de l'équation de Chapman-Kolmogoroff vérifiée quels que soient* s, u, t, *dans le cas où le domaine* V *étant borné, on se limite aux solutions* f *de* (C), *qui sont assujetties aux conditions très générales suivantes :*

(I). $f(\mathrm{M}, s; \mathrm{P}, t)$ reste borné quand M, P varient sur V et que s et t prennent toutes les valeurs possibles ou, plus généralement,

(II). L'intégrale multiple

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} ds\,dt \int_{\mathrm{V}}\int_{\mathrm{V}} f^2(\mathrm{M}, s; \mathrm{P}, t)\,d\mathrm{M}\,d\mathrm{P}$$

est finie, ou encore

(III). $f(\mathrm{M}, s; \mathrm{P}, t)$ restant borné et continu quand la distance MP ou la quantité $t-s$ restant supérieure à un nombre positif arbitraire, on a

$$|f(\mathrm{M}, s; \mathrm{P}, t)| \leqq \frac{g(\mathrm{MP} + |t-s|)}{[\mathrm{MP} + |t-s|]^{\nu+1}},$$

où $\frac{g(\lambda)}{\lambda^{\nu+1}}$ est une fonction décroissante et où $\int_0 \frac{g(\lambda)}{\lambda}\,d\lambda$ est une intégrale convergente, ou enfin, plus généralement,

(IV). Toutes les fois que V sera tel et que la fonction cherchée f sera supposée telle, que le noyau $\mathrm{K}_1(\alpha, \beta)$ soit justiciable des théories de Fredholm sur le domaine W.

3. **Conditions générales, des fonctions f, relatives au problème des probabilités en chaîne.** — Si l'on avait été conduit par une voie purement mathématique au problème de la résolution de l'équation (C), on se serait tenu comme très satisfait du résultat précédent, où les conditions imposées à $f(\mathrm{M}, s; \mathrm{P}, t)$

auraient paru assez lâches pour se prêter à toutes les applications.

Cependant, comme M. Fréchet [2] l'a démontré, aucune d'elles ne convient au problème des probabilités en chaîne, et aucune des solutions sous la forme (3) de la somme d'un nombre *fini* de produits ne sont alors acceptables.

Comme la fonction $f(M, s; P, t)$ supposée continue représente la densité de probabilité pour le passage de l'état M à l'instant s à l'un quelconque des états P d'un certain ensemble e d'états à l'époque t, elle doit satisfaire à l'équation fonctionnelle (C). Elle sera en outre positive ou nulle

$$(P) \qquad f(M, s; P, t) \geqq 0$$

pour tous les états M et P dans V et pour toute valeur positive de s et de t.

Si le système matériel mobile se meut d'une manière continue, il ne peut franchir une distance finie MP que pendant un temps t fini et différent de s, par conséquent si les états M et P sont deux états différents, on a

$$(6) \qquad f(M, s; P, s) = 0$$

pour $t = s$ et $M \neq P$.

Si l'état P coïncide à l'état M, la fonction $f(M, s; M, t)$ ne sera plus continue, et elle deviendra infiniment grande pour $t = s$,

$$(7) \qquad f(M, s; M, s) = +\infty.$$

Nous voyons que, l'hypothèse de l'existence d'une probabilité élémentaire $f(M, s; P, t)\,dP$ ne peut être acceptée entièrement. Une exception devra être faite pour le cas où l'on a, à la fois, $s = t$ et $M = P$.

Ceci étant, revenons à la probabilité qui pourra être représentée sous la forme $\varpi(M, s; e, t)$. Il est bien clair que, pour $s = t$, cette probabilité sera égale à l'unité quand M appartient à e, et à zéro dans le cas contraire. Une hypothèse différente reviendrait à admettre la possibilité de sauts instantanés (qui, comme les chocs et percussions, ne peuvent être que des conceptions approchées des phénomènes réels).

Demandons-nous si l'on peut représenter $\varpi(M, s; v, s)$ sous la forme d'une intégrale de Lebesgue

$$\varpi(M, s; v, s) = \int_v f(M, s; P, s)\, dP;$$

on remarque que si $P_0 = M$ et si v, entourant P_0 est assez petit pour ne pas contenir M, on aura

$$\int_v f(M, s; P, s)\, dP = 0.$$

Si f est continue en P, près de P_0, et si v tend à se réduire à P_0, cette égalité nous montre que

$$f(M, s; P_0, s) = 0 \tag{8}$$

pour $M = P_0$.

On en conclut *qu'il est impossible* de représenter ϖ pour $s = t$ sous la forme

$$\varpi(M, s; v, s) = \int_v f(M, s; P, s)\, dP$$

quand M *appartient à* v. En effet, dans ce cas, le premier membre est égal à l'unité et le second membre $f(M, s; P, t)$ est nul quand P varie sur tout le domaine d'intégration v, sauf peut-être quand P vient en M. Même si l'on attribuait à $f(M, s; M, s)$ une valeur infinie, l'intégrale du second membre serait nulle et l'on arriverait à l'égalité $1 = 0$. Dès lors nous voyons bien qu'il est possible de faire les hypothèses simplificatrices; que

$$\varpi(M, s; v, t) = \int_v f(M, s; P, t)\, d, \tag{8 bis}$$

et que $f(M, s; P, t)$ est par rapport à P une fonction continue, mais à *condition d'introduire une exception* pour la possibilité de la représentation (8 *bis*) de $\varpi(M, s; v, t)$ quand M appartenant à v, s est égal à t, et pour $f(M, s; P, t)$ quand, à la fois, $M \equiv P$ et $s = t$, *cas où l'existence même de f doit être déniée*, sans qu'il suffise de supposer f discontinu ou même infini pour cet ensemble d'égalités.

Il en résulte en particulier qu'il n'y a pas non plus lieu de supposer l'équation de Chapman-Kolmogoroff vérifiée quant à la fois $M = P$ et $s = t$, ni même de supposer qu'elle ait dans ce cas une signification.

En envisageant le cas des probabilités en chaîne nous allons montrer [1] que la solution (3) doit être rejetée. En effet, remarquons qu'en vertu des conditions (4) on a

$$\int_V A_j(P, s)\left[\sum_{i=0}^{n} A_i(M, s)\,B_i(P, s)\right] dP = \sum_{i=0}^{n} \delta_{ij} A_i(M, s) = A_j(M, s).$$

Or, en vertu de (8) le crochet est nul quand P est distinct de M, si ce crochet représente $f(M, s; P, t)$. La quantité sous le signe $\int$ étant nulle sur V, sauf peut-être quand P vient en M l'intégrale est nulle et par suite $A_j(M, s)$ serait nul quel que soit s, quel que soit M sur V et pour toute valeur entière de j depuis o jusqu'à n. Par suite, contrairement à l'hypothèse, les fonctions $A_j(M, s)$ ne seraient pas linéairement indépendantes.

Donc la représentation de $f(M, s; P, t)$ par une somme de la forme (3) composée d'un nombre *fini* de termes (le cas de $M = P$ et $s = t$ doit être exclu) est *impossible* dans le cas des probabilités en chaîne.

4. **Solutions sous formes de séries de produits** $A_i(M, s)$ $B_i(P, t)$. — Cherchons donc s'il existe des solutions de l'équation fonctionnelle (C) qui seraient de la forme

$$f(M, s; P, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(M, s)\,B_n(P, t), \tag{9}$$

l'égalité n'ayant pas lieu quand les couples M, s et P, t coïncident, cas où f n'est pas définie.

---

(1) *Voir* M. Fréchet [2].

Les termes du second membre seront encore définis dans ce cas, mais la convergence pourra cesser sans inconvénient, quand les couples M, s et P, t coïncident. Puisque dans le cas où $f(M, s;\ P, t)\,dP$ est une probabilité élémentaire, on suppose $s \leqq t$, la convergence de la série du second membre pourra aussi cesser sans inconvénient pour $s > t$.

Nous serons enfin naturellement conduits à nous limiter au cas où, comme précédemment, les fonctions A_n, B_m forment encore un système biorthonormé sur V, c'est-à-dire vérifient les conditions (4).

Mais alors on pourrait recommencer le raisonnement pour prouver que les A_n sont tous nuls si l'on supposait qu'il y eut convergence uniforme de

$$\sum_{i} A_i(M, s)\, B_i(P, s)$$

pour chaque valeur finie de s.

En sorte que nous sommes conduit à nous limiter aux solutions de la forme (3) vérifiant les conditions (4) et pour lesquelles la série

$$\sum_{i=0}^{\infty} A_i(M, s)\, B_i(P, t)$$

est supposée converger uniformément vers $f(M, s;\ P, t)$, quand M et P varient indépendamment sur V pour chaque couple de valeurs fixes de s et t *telles que* $s < t$. On aura alors d'après (8 *bis*) pour $s < t$,

$$\varpi(M, s;\ v, t) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i(M, s) B_i(v, t)$$

avec

$$B_i(v, t) = \int_v B_i(P, t)\, dP,$$

et pour $s = t$ on posera

$$\varpi(M, s;\ v, s) = \delta(M, v), \tag{10}$$

où $\delta(M, v) = 1$ si M appartient à v et $\delta(M, v) = 0$ dans le cas contraire.

Nous avons vu que la fonction $f(\mathrm{M}, s; \mathrm{P}, t)$ (la densité de probabilité) doit être constamment positive ou nulle

$$f(\mathrm{M}, s; \mathrm{P}, t) \geqq 0. \tag{P}$$

Dans le problème des probabilités en chaîne on doit assujettir la fonction f à une autre condition

$$\int_{\mathrm{V}} f(\mathrm{M}, s; \mathrm{P}, t)\, d\mathrm{P} = 1. \tag{T}$$

5. **Calcul des fonctions** $\mathrm{A}_j(\mathrm{M}, s)$, $\mathrm{B}_j(\mathrm{P}, t)$. — Si l'on sait que $f(\mathrm{M}, s; \mathrm{P}, t)$ est de la forme (9) est-il possible de déterminer les fonctions A_j, B_j connaissant f.

Nous supposons que les A_j, B_j soient biorthonormées sur V, et la série (9) est uniformément convergente sur V pour s et t fixes *tels que* $s < t$. On voit que *chaque fonction* $\mathrm{A}_j(\mathrm{M}, s)$ *est une des solutions de l'équation fonctionnelle*

$$\mathrm{X}(\mathrm{M}, s) = \int_{\mathrm{V}} f(\mathrm{M}, s; \mathrm{Q}, u)\, \mathrm{X}(\mathrm{Q}, u)\, d\mathrm{Q}, \tag{H}$$

quel que soit le nombre $u > s$. De même *chaque fonction* $\mathrm{B}_j(\mathrm{P}, t)$ *est une des solutions de l'équation fonctionnelle associée*

$$\mathrm{Y}(\mathrm{P}, t) = \int_{\mathrm{V}} f(\mathrm{Q}, u; \mathrm{P}, t)\, \mathrm{Y}(\mathrm{Q}, u)\, d\mathrm{Q}, \tag{H'}$$

où $u < t$.

Inversement, supposons seulement que $f(\mathrm{M}, s; \mathrm{P}, t)$ soit une solution non identiquement nulle de l'équation (C) pour $s < u < t$, *sans savoir* si f est de la forme (9). Cela suffit pour assurer l'existence de solutions non identiquement nulles de (H) et de (H'). En effet, puisque f n'est pas identiquement nulle, il existe M_0, s_0, et P_0, t_0, tels que $f(\mathrm{M}_0, s_0; \mathrm{P}_0, t_0) \neq 0$, *on aura alors la solution particulière, non identiquement nulle, de* (H)

$$\mathrm{X}(\mathrm{M}, s) = f(\mathrm{M}, s; \mathrm{P}_0, t_0),$$

au moins pour $s < u < t_0$, et de même, *on aura la solution* *particulière, non identiquement nulle, de* (H′)

$$Y(P, t) = f(M_0, s_0 ; P, t),$$

au moins pour $s_0 < u < t$.

Connaissant une solution X(M, s) de (H), on en déduit une infinité d'autres en la multipliant par un nombre indépendant de M et de s. Et même, si l'on connaît plusieurs solutions (en nombre fini ou infini) de (H),

$$X_0(M, s), \quad X_1(M, s), \quad \ldots,$$

toute combinaison linéaire de ces solutions

$$a_0 X_0(M, s) + a_1 X_1(M, s) + \ldots$$

(supposée uniformément convergente sur V quand leur nombre est infini) à coefficients a_0, a_1, ... indépendants de M et s, *sera aussi solution de* (H). Nous énonçons ici une propriété évidente, qui appartient aussi aux solutions d'une équation homogène de Fredholm, mais on notera que l'équation (H) n'est pas de ce type bien qu'elle lui ressemble beaucoup.

En faisant varier P_0, t_0 la fonction $f(M, s; P_0, t_0)$ fournit une infinité de solutions. On observera que ces solutions ne peuvent se réduire à une seule par multiplication d'une constante. *Et même, si l'on suppose que* $f(M, s; P, t)$ *est une densité de probabilité, solution non identiquement nulle de l'équation fonctionnelle* (C), *on peut en déduire l'existence et la forme d'une infinité de solutions de* (H) *qui sont linéairement indépendantes.*

Nous savons [1] que pour chaque choix du couple P, t quand celui-ci est fixé, la fonction

$$X(M, s) = f(M, s; P, t)$$

est solution de l'équation (H).

Remarque. — Il n'existe aucune solution X(M, s) de (H)

---

[1] Pour les démonstrations de tout ce qui suit, dans ce paragraphe, *voir* M. Fréchet [2], p. 525-530.

qui soit orthogonale sur V à toutes les solutions de (H′), sans être identiquement nulle. Et de même, il n'existe aucune solutions $Y(P, t)$ de (H′) qui soit orthogonale sur V à toutes les solutions de (H) sans être identiquement nulle.

Ceci étant, revenons maintenant au cas, où, *de plus*, f est de la forme (9). Alors, parmi les solutions linéairement indépendantes, en nombre infini de (H), on pourra en choisir une suite formant un système *complet* de solutions de (H), c'est-à-dire un système de solutions de (H) en nombre infini.

$$X_1(M, s), \quad X_2(M, s), \quad \ldots,$$

telles que :

1° Aucune combinaison linéaire d'un nombre fini ou infini (et alors supposée uniformément convergente sur V) ne soit identiquement nulle sans avoir tous ses coefficients nuls.

2° Toute solution non identiquement nulle de (H) soit une combinaison linéaire des X_n.

De même l'équation (H′) possédera au moins un système *complet* de solutions

$$Y_1(P, t), \quad Y_2(P, t), \quad \ldots, \quad Y_n(P, t), \quad \ldots.$$

Nous avons déjà vu qu'aucune des solutions $X(M, s)$, non identiquement nulles, de (H) ne pourra être orthogonale à toutes les solutions de (H′) et de même en permutant (H) et (H′). En vertu d'une propriété connue, il en résulte alors que, connaissant les X_n, Y_n, *on peut former*, par un procédé régulier connu, *des combinaisons linéaires de ceux-ci constituant également des systèmes complets de solutions de* (H) *et de* (H′), *mais qui seront biorthonormés sur* V.

En résumé, nous voyons que :

1° *Si une densité de probabilité* $f(M, s; P, t)$ *satisfait à l'équation fonctionnelle de Chapman-Kolmogoroff, chacune des équations fonctionnelles* (H) *et* (H′) *admet une infinité de solutions linéairement indépendantes, et aucune solution non identi-*

quement nulle de l'une n'est orthogonale à toutes les solutions de l'autre.

2° *Pour qu'une densité de probabilité* $f(\mathrm{M}, s; \mathrm{P}, t)$, *satisfaisant à l'équation de Chapman-Kolmogoroff, puisse être mise, au moins d'une façon, sous la forme*

$$f(\mathrm{M}, s; \mathrm{P}, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{A}j(\mathrm{M}, s)\,\mathrm{B}j(\mathrm{P}, t), \tag{9}$$

où la convergence est uniforme pour $s < t$, *et où les* $\mathrm{A}j$, $\mathrm{B}j$ *forment un système biorthonormé sur* V, *il faut et il suffit que parmi les systèmes de solutions de* (H) *il en existe un qui soit complet, et de même pour* (H'). *Si cette condition est réalisée on saura par un procédé régulier connu, déduire de ces deux systèmes, deux systèmes biorthonormés grâce auxquels on pourra mettre* f *sous la forme* (9).

D'ailleurs il existe (p. 60) des solutions f ne satisfaisant pas à la condition ci-dessus.

Pour appliquer la condition précédente, il faut pouvoir déterminer *toutes* les solutions de (H) et de (H').

6. **Calcul des solutions de (H) et de (H').** — Nous connaissons déjà les solutions particulières non identiquement nulles

$$\mathrm{X}(\mathrm{M}, s) = f(\mathrm{M}, s; \mathrm{P}_0, t_0)$$

et

$$\mathrm{Y}(\mathrm{P}, t) = f(\mathrm{M}_0, s_0; \mathrm{P}, t).$$

On peut déterminer toutes les solutions de (H) et de (H') valables pour s et t dans un intervalle déterminé (α, β) de la manière suivante.

Toute solution $\mathrm{X}(\mathrm{M}, s)$ de (H) dans cet intervalle sera telle que

$$\mathrm{X}(\mathrm{M}, s) = \int_{\mathrm{V}} f(\mathrm{M}, s; \mathrm{P}, \beta)\,\mathrm{X}(\mathrm{P}, \beta)\, d\mathrm{P}.$$

Inversement, prenons pour $\mathrm{X}(\mathrm{P}, \beta)$ une fonction arbitraire de P, soit $\Phi(P)$ et considérons la fonction

$$X(M, s) = \int_V f(M, s; P, \beta)\, \Phi(P)\, dP.$$

Elle définit pour $s < \beta$ une fonction bien déterminée de M et de s. Cette fonction vérifie l'équation (H) pour $s < u < \beta$. Car on a

$$\begin{aligned}
X(M, s) & - \int_V f(M, s; Q, u)\, X(Q, u)\, dQ \\
&= \int_V f(M, s; P, \beta)\, \Phi(P)\, dP \\
&\quad - \int_V f(M, s; Q, u) \left[\int_V f(Q, u; P, \beta) \Phi(P)\, dP \right] dQ \\
&= \int_V \left\{ f(M, s; P, \beta) - \int_V f(M, s; Q, u) f(Q, u; P, \beta)\, dQ \right\} \Phi(P) dP = 0.
\end{aligned}$$

De même, *on obtiendra la solution la plus générale de* (H′) *pour* $t > \alpha$, *sous la forme*

$$Y(P, t) = \int_V f(M, \alpha; P, t)\, \psi(M)\, dM,$$

où $\psi(M)$ *est une fonction arbitraire de* M.

CHAPITRE II.

CAS DE L'ESPACE À UNE DIMENSION.

7. **L'équation fonctionnelle de Chapman-Kolmogoroff dans un domaine illimité à une dimension.** — Nous allons étudier, en détail, des cas effectifs des solutions très générales dans le cas d'une seule dimension ($\nu = 1$).

En employant les notations ordinaires x, y et z au lieu de M, P et Q l'équation fonctionnelle de Chapman-Kolmogoroff s'écrit

$$(\mathrm{C}) \qquad f(x, s; y, t) = \int_{\mathrm{V}} f(x, s; z, u) f(z, u; y, t)\, dz.$$

Conformément à la théorie générale, exposée dans le premier Chapitre, nous cherchons comme solutions formelles de l'équation (C) des solutions de la forme

$$(11) \qquad f(x, s; y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{A}_n(x, s) \mathrm{B}_n(y, t),$$

où les A_n et B_n forment un système biorthonormé sur V; on y arrive en particulier en prenant

$$\mathrm{A}_n(x, s) = a_n(s)\varphi_n(x),$$
$$\mathrm{B}_n(y, t) = b_n(t)\varphi_n(y),$$

où les φ_n forment un système orthonormé dans l'intervalle V, c'est-à-dire que l'on ait

$$\int_{\mathrm{V}} \varphi_m(x)\varphi_n(x)\, dx = \delta_{m,n}$$

et

$$1 = \int_V A_n(x, s) B_n(x, s)\, dx = a_n(s) b_n(s);$$

d'où

$$b_n(s) = \frac{1}{a_n(s)},$$

par suite

$$(12) \qquad f(x, s; y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(s)}{a_n(t)} \varphi_n(x) \varphi_n(y).$$

Un exemple de solution ayant été déjà fourni dans le cas où V est un segment fini, nous allons chercher des exemples de solutions dans le cas où le domaine V d'intégration s'étend à l'infini, soit dans les deux sens, soit dans un sens.

a. Cherchons un système orthonormé simple sur $(-\infty + \infty)$, un tel système, entre autre, est comme nous le verrons plus loin (p. 25).

$$\varphi_n(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)}{\sqrt{\gamma_n}},$$

où $H_n(x)$ est le $n^{\text{ième}}$ polynome d'Hermite, défini par la relation (16) ci-dessus et où on a posé $\gamma_n = 2^n n! \sqrt{\pi}$.

Donc

$$(A) \qquad \begin{cases} A_n(x, s) = a_n(s) \varphi_n(x) = a_n(s) \dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)}{\sqrt{\gamma_n}}, \\[2ex] B_n(y, t) = b_n(t) \varphi_n(y) = \dfrac{1}{a_n(t)} \dfrac{e^{-\frac{y^2}{2}} H_n(y)}{\sqrt{\gamma_n}}, \end{cases}$$

par conséquent (12) devient

$$(13) \qquad f(x, s; y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(s)}{a_n(t)} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)}{\sqrt{\gamma_n}} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}} H_n(y)}{\sqrt{\gamma_n}}$$

$$= e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(s)}{a_n(t)} \frac{H_n(x) H_n(y)}{\gamma_n}.$$

b. Comme nous verrons dans la suite (p. 34) le système

$$\psi_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n+1)}{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n+\alpha+1)} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}} \mathrm{L}_n^{(\alpha)}(x) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, \alpha > -1)$$

est un système orthonormé sur $(0, +\infty)$, et $\mathrm{L}_n^{(\alpha)}(x)$ est le $n^{\text{ième}}$ polynome de Laguerre qui sera défini par la suite (p. 30).

Nous avons donc

$$(\mathrm{B}) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{A}_n(x, s) &= a_n(s)\psi_n^{(\alpha)}(x) = a_n(s)\frac{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n+1)}{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n+\alpha+1)} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}} \mathrm{L}_n^{(\alpha)}(x), \\ \mathrm{B}_n(y, t) &= b_n(t)\psi_n^{(\alpha)}(y) = \frac{1}{a_n(t)} \frac{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n+1)}{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n+\alpha+1)} e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{\alpha}{2}} \Gamma_n^{(\alpha)}(y); \end{aligned} \right.$$

par suite, la relation (12) devient

$$(14) \qquad \begin{aligned} f(x, s; y, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(s)}{a_n(t)} \psi_n^{(\alpha)}(x)\, \psi_n^{(\alpha)} y \\ &= e^{-\frac{x+y}{2}} (xy)^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(s)}{a_n(t)} \frac{\mathrm{L}_n^{(\alpha)}(x)\, \mathrm{L}_n^{(\alpha)}(y)}{\lambda_n} \end{aligned}$$

avec

$$\lambda_n = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)}.$$

Dans la suite, nous aurons besoin de quelques propriétés des polynomes d'Hermite et de ceux de Laguerre, par conséquent, nous allons les rappeler sommairement.

RAPPEL DE QUELQUES PROPRIÉTÉS DES POLYNOMES D'HERMITE ET DE CEUX DE LAGUERRE.

8. **Les polynomes d'Hermite à une variable.** — Hermite [1] a introduit une famille de polynomes à une variable qu'il définit comme les coefficients des puissances successives de a dans le développement de la fonction e^{2ax-a^2} (dite la fonction généra-

trice d'Hermite)

$$e^{2ax-a^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \mathrm{H}_n(x) \tag{15}$$

pour x quelconque dans $(-\infty + \infty)$ et $|a| < \infty$.

Hermite a montré que le polynome $\mathrm{H}_n(x)$ s'exprime d'une manière élégante par la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonctiou e^{-x^2}

$$\mathrm{H}_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{dn}{dx^n}(e^{-x^2}). \tag{16}$$

De cette dernière relation on tire

$$\mathrm{H}_n(-x) = (-1)^n \mathrm{H}_n(x). \tag{17}$$

On voit que les polynomes $\mathrm{H}_n(x)$ sont pairs ou impairs suivant que l'indice n est pair ou impair.

Certains auteurs ont considéré les polynomes d'Hermite $\mathrm{H}_n(x)$, avec le poids $e^{-\frac{x^2}{2}}$, définis par

$$\mathrm{H}_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{dn}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right). \tag{16'}$$

9. **Formules de récurrence et équation différentielle des polynomes** $\mathrm{H}_n(x)$. — L'une des propriérés remarquables des polynomes $\mathrm{H}_n(x)$ est que la suite de polynomes $\mathrm{H}_n(x)$ forme une *suite harmonique*, au sens de Niels Nielsen [1], c'est-à-dire que la dérivée de l'un d'eux est égale au polynome antécédent multiplié par un facteur constant.

En effet, en dérivant la fonction génératrice (15) par rapport à x, puis en remplaçant dans le premier membre l'exponentielle par son développement, on obtient la relation

$$\frac{d\mathrm{H}_n(x)}{dx} = 2n\mathrm{H}_{n-1}(x), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{18}$$

En dérivant la fonction génératrice (15) par rapport au paramètre a, et en identifiant dans les deux membres le coefficient de a^{n-1}, on obtient une relation de récurrence liant trois polynomes consécutifs H_n, H_{n-1} et H_{n-2}

$$(19) \quad H_n(x) - 2xH_{n-1}(x) + 2(n-1)H_{n-2}(x) = 0 \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Niels Nielsen [1] a démontré que la seule suite de polynomes, vérifiant simultanément l'équation fonctionnelle (18) et l'équation aux différences finies (19), était la suite des polynomes d'Hermite, de sorte que l'ensemble des deux relations (18) et (19) est caractéristique des polynomes d'Hermite.

Connaissant les polynomes $H_0 = 1$, $H_1 = 2x$ la relation (19) nous donne, de proche en proche, les polynomes $H_2, \ldots, H_n, \ldots$, et l'on obtient aisément l'expression générale du polynome $H_n(x)$

$$H_n(x) = (2x)^n - \frac{n(n-1)}{1-2}(2x)^{n-2} + \ldots$$

ou

$$(20) \qquad H_n(x) = \sum_{K=0}^{\frac{n}{2}} (-1)^K \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(K+1)\Gamma(n-2K+1)}(2x)^{n-2K}.$$

Donc $H_n(x)$ est un polynome de degré n qui ne contient que des termes de même parité que x^n.

En remplaçant dans la relation (19) les polynomes $H_{n-1}(x)$ et $H_{n-2}(x)$ par les expressions équivalentes

$$\frac{H'_n(x)}{2n} \quad \text{et} \quad \frac{H''_n(x)}{4n(n-1)}.$$

On voit que le polynome H_n vérifie l'équation différentielle du second ordre et homogène

$$(21) \quad H''_n(x) - 2xH'_n(x) + 2nH_n(x) = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Dans la formule (13) figurent des fonctions

$$(22) \qquad D_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x),$$

de telles fonctions sont appelées souvent sous le nom de *fonctions du cylindre parabolique*, elles s'introduisent dans l'intégration de l'équation de Laplace $\Delta U = 0$ (cas de l'espace à trois dimensions) dans le *système des coordonnées paraboles homofocales*.

L'équation différentielle (21) se ramène, en introduisant la fonction du cylindre parabolique, définie par (22), à la forme réduite

$$D''_n(x) + [(2n+1) - x^2]\, D_n(x) = 0, \tag{23}$$

c'est l'équation d'Hermite ou de Weber.

Par suite les fonctions

$$\varphi_n(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)}{\sqrt{\gamma_n}} = \frac{D_n(x)}{\sqrt{\gamma_n}}$$

satisfont à l'équation différentielle d'Hermite

$$\varphi''_n(x) + [(2n+1) - x^2]\,\varphi_n(x) = 0. \tag{23 bis}$$

10. **Orthogonalité des polynomes** $H_n(x)$. — Hermite a établi pour ses polynomes $H_n(x)$ une propriété d'orthogonalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_m(x)\, H_n(x)\, dx = 0, \qquad \text{avec} \quad m \neq n \tag{24}$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n^2(x)\, dx = 2^n n!\sqrt{\pi}, \qquad \text{avec} \quad m = n \tag{25}$$

pour $m, n = 0, 1, 2, \ldots$.

En tenant compte de ces relations on peut voir facilement que les fonctions $D_n(x)$ forment un système orthogonal sur $(-\infty, +\infty)$.

La relation (25) nous permet de trouver le facteur γ_n pour normaliser les fonctions $\varphi_n(x)$.

Ceci étant, rappelons que la suite

$$\varphi_0(x), \quad \varphi_1(x), \quad \ldots, \quad \varphi_n(x), \quad \ldots$$

est une suite illimitée de fonctions qui forme un *système orthonormé et complet* (*ou fermé*) sur $(-\infty, +\infty)$, c'est-à-dire que :

a. Les fonctions $\varphi_n(x)$ sont de carrés intégrables sur

$(-\infty, +\infty)$, en d'autres termes

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n^2(x)\,dx$$

est finie;

b. On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m(x)\,\varphi_n(x)\,dx = \delta_{m,n};$$

c. Le système de fonctions $\varphi_n(x)$ est complet (¹) sur $(-\infty, +\infty)$, c'est-à-dire que pour toute fonction $F(x)$ de carré sommable sur $(-\infty, +\infty)$, on a l'égalité de Parséval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F^2(x)\,dx = \sum_{j=0}^{\infty} C_j^2$$

avec

$$C_j = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,\varphi_j(x)\,dx.$$

Remarquons que (²) l'intégralité bien connue

$$H_n(x) = O\left[\frac{e^{\frac{x^2}{2}}\sqrt{2^n n!}}{\sqrt[4]{n}}\right] \tag{26}$$

est valable pour x quelconque dans $(-\infty, +\infty)$; cela veut dire que

$$\left|\frac{H_n(x)}{\dfrac{e^{\frac{x^2}{2}}\sqrt{2^n n!}}{\sqrt[4]{n}}}\right| < K, \tag{27}$$

où K est une constante indépendante de x, sa valeur est calculée par C. V. L. Charlier [1], *a*, p. 52, *b*, p. 57,

$$K = 1{,}086435,$$

on voit même qu'elle est indépendante de n.

(¹) On trouvera des indications sur ce point dans le livre de G. Vitali et G. Sansone [1], p. 25, 211.

(²) *Voir* E. Kogbetliantz [1], p. 140 et M. Jacob [1], p. 6.

Observons enfin que F. G. Mehler [1] a trouvé la relation

$$(28) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)\,H_n(y)}{2^n n!\sqrt{\pi}}\,\theta^n = \frac{e^{-\frac{\theta^2 x^2 - 2\theta xy + \theta^2 y^2}{1-\theta^2}}}{\sqrt{\pi(1-\theta^2)}} = \Phi(x, y, \theta),$$

où $|\theta| < 1$.

11. **Les polynomes d'Hermite à deux variables.** — Les polynomes $H_n(x)$ sont définis par le développement

$$e^{-\varphi(x-h)} = e^{-\varphi(x)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} H_n(x),$$

où $\varphi(x)$ est une forme quadratique à une variable

$$\varphi(x) = x^2.$$

Introduisons la forme quadratique à deux variables

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2$$

définie et positive.

L'invariant ou plutôt le discriminant de $\varphi(x, y)$ est

$$\Delta = 1 > 0.$$

Si l'on prend le développement de l'exponentielle

$$e^{-\varphi(x-h,\, y-k)},$$

selon les puissances des constantes h et k (arbitraires) comme fonction génératrice de polynomes à deux variables, qu'on désigne (d'après Hermite) par le symbole $H_{m,n}(x, y)$,

$$(29) \qquad e^{-\varphi(x-h,\, y-k)} = e^{-\varphi(x,y)} \sum \frac{h^m}{m!}\,\frac{k^n}{n!}\,H_{m,n}(x, y)$$

avec

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2.$$

Si l'on applique la formule de Taylor à (29) on aura

$$(30) \qquad H_{m,n}(x, y) = (-1)^{m+n} e^{(x^2+y^2)} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\, \partial y^n}\left[e^{-(x^2+y^2)}\right].$$

analogue à

$$(16) \qquad H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}).$$

La forme $\varphi(x, y)$ est identique à son adjointe (¹) par conséquent $H_{m,n}(x, y)$ se confond avec son polynome adjoint, au sens d'Hermite, et $H_{m,n}(x, y)$ dégénère en un produit des polynomes H à une variable

$$(31) \qquad H_{m,n}(x, y) = H_m(x)\, H_n(y).$$

En se reportant au (31) on voit que, quand l'un des indices est nul, $H_{m,n}(x, y)$ s'exprime simplement par un polynome H à une variable

$$H_{m,0}(x, y) = H_m(x), \qquad \text{car} \quad H_0(y) = 1,$$
$$H_{0,n}(x, y) = H_n(y), \qquad \text{car} \quad H_0(x) = 1.$$

12. **Orthogonalité des polynomes $H_{m,n}(x, y)$.** — La propriété d'orthogonalité des polynomes $H_n(x)$ s'étend aux polynomes $H_{m,n}(x, y)$ par un raisonnement facile on peut démontrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, H_{m,n}^2(x, y)\, dx\, dy = 2^{m+n}\, m\,!\, n\,!\, \pi.$$

D'une façon générale l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, H_{m,n}(x, y)\, H_{p,q}(x, y)\, dx\, dy$$

est nulle tant que l'on n'a pas à la fois

$$m = p, \qquad n = q.$$

Il est bon de remarquer qu'en général le polynome $H_{m,n}(x, y)$ vérifie un système de deux équations aux dérivées partielles du second ordre données par Hermite, mais grâce à la forme particulière de la forme quadratique $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$, le système d'équations aux dérivées partielles du second ordre dégénère à

(¹) *Voir* HERMITE [1]; APPELL et KAMPÉ DE FÉRIET [1], p. 363 et suiv.

un système d'équations différentielles linéaires du second ordre et homogènes

$$(32)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 H_{m,n}(x,y)}{\partial x^2} - 2x\dfrac{\partial H_{m,n}(x,y)}{\partial x} + 2m\,H_{m,n}(x,y) = 0, \\ \dfrac{\partial^2 H_{m,n}(x,y)}{\partial y^2} - 2y\dfrac{\partial H_{m,n}(x,y)}{\partial y} + 2n\,H_{m,n}(x,y) = 0. \end{cases}$$

Tandis que ces deux équations contiennent séparément les indices m, n l'équation obtenue en faisant la somme

$$(33)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial^2 H_{m,n}(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_{m,n}(x,y)}{\partial y^2} \\ &\quad - 2\left[x\frac{\partial H_{m,n}(x,y)}{\partial x} + y\frac{\partial H_{m,n}(x,y)}{\partial y}\right] \\ &\quad\quad + 2(m+n)\,H_{m,n}(x,y) = 0, \end{aligned}$$

ne dépend que du degré $(m+n)$ de ce polynome, l'équation (32) est donc vérifiée par les polynomes $H_{m,n}(x,y)$ d'un degré $(m+n)$ donné.

Si l'on considère seulement la première équation de (32),

$$(29')\quad \frac{\partial^2 H_{m,n}(x,y)}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial H_{m,n}(x,y)}{\partial x} + 2m\,H_{m,n}(x,y) = 0,$$

elle est vérifiée par

$$H_m(x)\,\psi(y).$$

Si l'on substitue cette solution dans la deuxième équation de (29), on voit que

$$\psi(y) = H_n(y),$$

de façon que

$$H_m(x)\,H_n(y) = H_{m,n}(x,y)$$

est une intégrale du système (32) et par suite de (33).

Si nous posons

$$D_{m,n}(x,y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,H_{m,n}(x,y),$$

et si nous substituons $D_{m,n}(x,y)$ dans le système (32), nous aurons

$$(32')\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 D_{m,n}}{\partial x^2} + [(2m+1) - x^2]\, D_{m,n} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 D_{m,n}}{\partial y^2} + [(2n+1) - y^2]\, D_{m,n} = 0. \end{cases}$$

En faisant la somme on a

$$(33')\qquad \frac{\partial^2 D_{m,n}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D_{m,n}}{\partial y^2} + [2(m+n+1) - (x^2+y^2)]\, D_{m,n} = 0.$$

On peut montrer, comme précédemment, que

$$(34)\qquad \begin{aligned} D_{m,n}(x, y) &= e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\, H_{m,n}(x, y) \\ &= e^{-\frac{x^2}{2}}\, H_m(x)\, e^{-\frac{y^2}{2}}\, H_n(y) = D_m(x)\, D_n(y) \end{aligned}$$

est une intégrale du système (32′) et de l'équation (33′).

13. **Les polynomes de Laguerre.** — On définit les polynomes de Laguerre comme les coefficients des puissances de z dans le développement de la fonction génératrice $(1-z)^{-(\alpha+1)}\, e^{-\frac{xy}{1-z}}$

$$(35)\qquad (1-z)^{-(\alpha+1)}\, e^{-\frac{xy}{1-z}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x)\, z^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x)\, z^n$$

pour x quelconque dans $(0, +\infty)$ et $|z| < 1$; on trouve que

$$(36)\qquad (-1)^n L_n^{(\alpha)} = \frac{x^n}{n!} + \sum_{m=1}^{n} (-1)^m \frac{(\alpha+n)(\alpha+n-1)\ldots(\alpha+n-m+1)}{m!(n-m)!}\, x^{n-m}$$

ou encore

$$(36')\qquad (-1)^n L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{m!(n-m!\,\Gamma(\alpha+n-m+1)}\, x^{n-m}$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots),$$

où $\Gamma(\alpha)$ indique la fonction *Gamma*, appelée aussi *intégrale* *eulérienne de seconde espèce*, définie par

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\,e^{-x}\,dx,$$

pour $\alpha > 0$.

Pour $x=0$, on a

$$(37)\quad L_n^{(\alpha)}(0)=\frac{(\alpha+n)(\alpha+n-1)(\alpha+n-2)\ldots(\alpha+1)}{n!}=A_n^{(\alpha)},$$

où $A_n^{(\alpha)}$ est le coefficient de z^n dans le développement de binome $(1-z)^{-\alpha-1)}$.

La relation (36′) nous permet de trouver (¹) l'expression différentielle des polynomes $L_n^{(\alpha)}(x)$

$$(38)\qquad L_n^{(\alpha)}(x)=\frac{x^{-\alpha}e^{x}}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^{n+\alpha}e^{-x})\qquad (n=1, 2, 3, \ldots).$$

Si l'on pose

$$(39)\qquad \varphi(x, z)=(1-z)^{-(\alpha+1)}e^{-\frac{xz}{1-z}},$$

on aura

$$(40)\qquad (1-z)^2\frac{\partial\varphi}{\partial z}=[(\alpha+1)(1-z)-x]\varphi,$$

En dérivant la relation (35) par rapport au paramètre z et en identifiant dans les deux membres, en tenant compte des relations (39) et (40), le coefficient de z^n, on aura

$$(41)\quad (n+1)L_{n+1}^{(\alpha)}(x)-(2n+\alpha+1-x)L_n^{(\alpha)}(x)+(n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x)=0 \qquad (n=0, 1, 2, \ldots),$$

en convenant que

$$L_{-1}^{(\alpha)}(x)=0.$$

Comme

$$L_0^{(\alpha)}(x)=1$$

et

$$-L_1^{(\alpha)}(x)=\frac{x}{1!}-\frac{(\alpha+1)}{1!},$$

(¹) On consultera surtout pour tout ce qui concerne les polynomes de Laguerre le livre de G. Vitali et G. Sansone [1] (p. 183-242); de Laguerre [1] ainsi que les trois memoires [1], [2], [3], de E. Kogbetliantz.

la relation récurrente (41) permet de calculer de proche en proche les polynomes $L_n^{(\alpha)}(x)$.

14. **Relations différentielles entre les polynomes $L_n^{(\alpha)}(x)$.** — *a*. En dérivant la relation (36′) par rapport à x, on a

$$(42)\qquad (-1)^n \frac{d}{dx} L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha+n-m)}{m\,!\,(n-m-1)\,!\,\Gamma(\alpha+n-m)} x^{n-m-1}$$

et aussi

$$(-1)^{n-1} \frac{d}{dx} L_{n-1}^{(\alpha)}(x) = \sum_{m=0}^{n-2} (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha+n)}{m\,!\,(n-m-2)\,!\,(\alpha+n-m)} x^{n-m-2}.$$

Si l'on somme ces deux relations, on aura

$$(-1)^n \frac{d}{dx} [L_n^{(\alpha)}(x) - L_{n-1}^{(\alpha)}(x)] = \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha+n)}{m\,!\,(n-m-1)\,!\,\Gamma(\alpha+n-m)} x^{n-m-1},$$

c'est-à-dire

$$(43)\qquad L_{n-1}^{(\alpha)}(x) = \frac{d}{dx} [L_{n-1}^{(\alpha)}(x) - L_n^{(\alpha)}(x)] \qquad (n = 0,\ 1,\ 2\ldots).$$

b. Remarquons que le second membre de (42) représente

$$(-1)^{n-1} L_{n-1}^{(\alpha+1)};$$

on a donc

$$(44)\qquad \frac{d}{dx} L_n^{(\alpha)}(x) = -L_{n+1}^{(\alpha+1)} \qquad (n = 0,\ 1,\ 2\ldots),$$

par suite, nous voyons que la suite des polynomes de Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$ ne forme pas une « *suite harmonique* », au sens de Niel Nielsen (p. 23).

c. Dérivons l'expression (41) par rapport à x et tenons compte de relation (43), on a

$$x \frac{d}{dx} L_n^{(\alpha)}(x) = n L_n^{(\alpha)}(x) - (n+\alpha) L_{n-1}^{(\alpha)}(x). \tag{45}$$

Les deux relations (43) et (45) nous donnent

$$(n+\alpha) \frac{d}{dx} L_{n-1}^{(\alpha)}(x) = n L_n^{(\alpha)}(x) + (n+\alpha-x) \frac{d}{dx} L_n^{(\alpha)}(x). \tag{46}$$

En dérivant (45) par rapport à x et en remplaçant $(n+\alpha) \frac{d}{dx} L_{n-1}^{(\alpha)}(x)$ par sa valeur tirée de (46) on aura l'équation différentielle des polynomes $L_n^{(\alpha)}(x)$

$$x \frac{d^2 L_n^{(\alpha)}(x)}{dx^2} + (\alpha - x + 1) \frac{dL_n^{(\alpha)}(x)}{dx} + n L_n^{(\alpha)}(x) = 0, \tag{47}$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots)$$

ou encore

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\alpha+1} e^{-x} \frac{dL_n^{(\alpha)}(x)}{dx}\right] + n e^{-x} x^\alpha L_n^{(\alpha)}(x) = 0. \tag{48}$$

15. **Orthogonalité des polynomes $L_n^{(\alpha)}(x)$.** — La relation (48) nous permet de démontrer les deux relations suivantes :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} L_m^{(\alpha)}(x) L_n^{(\alpha)}(x)\, dx = 0 \tag{49}$$

$$(m \neq n;\ \alpha > -1)$$

et

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^\alpha [L_n^{(\alpha)}(x)]^2\, dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)} = A_n^{(\alpha)} \Gamma(\alpha+1) \tag{50}$$

$$(\alpha > -1,\ n = 0, 1, 2 \ldots).$$

Cette dernière relation nous permet de trouver le facteur

$$\lambda_n = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)},$$

pour normaliser les fonctions $\psi_n^{(\alpha)}(x)$ que nous avons introduites (p. 22).

Ceci étant, rappelons que la suite illimitée de fonctions

$$\psi_1^{(\alpha)}(x), \quad \psi_2^{(\alpha)}(x), \quad \ldots, \quad \psi_n^{(\alpha)}(x), \quad \ldots$$

où

$$\psi_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n+1)}{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n+\alpha+1)} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}} L_n^{(\alpha)}(x)$$

forme un système *orthonormé et complet* (*ou fermé*) sur $(0, +\infty)$, c'est-à-dire que

a. Les fonctions $\psi_n^{(\alpha)}(x)$ sont de carrés intégrables sur $(0, +\infty)$, ou ce qui revient au même

$$\int_0^{+\infty} [\psi_n^{(\alpha)}(x)]^2 dx$$

est finie;

b. On a

$$\int_0^{+\infty} L_m^{(\alpha)}(x) L_n^{(\alpha)}(x) \, dx = \delta_{m,n};$$

c. Le système de fonctions $L_n^{(\alpha)}(x)$ est complet (¹) sur $(0, +\infty)$, c'est-à-dire que, pour toute fonction $G(x)$ de carré sommable sur $(0, +\infty)$, on a *la relation de fermeture*

$$\int_0^{+\infty} G^2(x) \, dx = \sum_{j=0}^{\infty} C_j^2$$

avec

$$C_j = \int_0^{+\infty} G(x) \psi_j^{(\alpha)}(x) \, dx.$$

Récemment E. Kogbetliantz [1], (p. 149-158); a démontré l'inégalité

$$L_n^{(\alpha)}(x) = O\left[\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}} \left(\frac{n}{x}\right)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right], \tag{51}$$

qui est valable pour toute valeur de α et quel que soit x

(¹) *Voir* G. Vitali et G. Sansone [1], p. 210.

dans $(0, +\infty)$. On voit de même que

$$\left| \frac{L_n^{(\alpha)}(x)}{\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}\left(\frac{n}{x}\right)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}} \right| < T, \tag{52}$$

où T est une constante indépendante de x.

Remarquons enfin que, d'après E. Kogbetliantz [3], p. 11; on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} L_n^{(\alpha)}(x) L_n^{(\alpha)}(y)\theta^n = \frac{(\theta x y)^{-\frac{\alpha}{2}}}{1-\theta} e^{-\frac{\theta(x+y)}{1-\theta}} I_\alpha\left[\frac{2(\theta x y)^{\frac{1}{2}}}{1-\theta}\right], \tag{53}$$

en posant $z = \frac{2(\theta x y)^{\frac{1}{2}}}{1-\theta}$ le symbole $I_\alpha(z)$ désigne comme toujours la fonction de Bessel

$$I_\alpha(z) = i^{-\alpha} J_\alpha(iz), \qquad \text{avec} \quad i = \sqrt{-1}$$

ou encore, d'après une propriété des fonctions de Bessel (¹),

$$I_\alpha(z) = i^{-\alpha} J_\alpha(iz) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^{\alpha+2n}}{n!(\alpha+n)!}, \tag{54}$$

où z est positif et a est un entier.

Si nous prenons, en particulier, pour α des entiers positifs ou nuls, auquel cas correspondrait

$$I_{-\alpha}(z) = I_\alpha(z),$$

on voit d'après (54) que le premier membre de (53) sera bien positif.

16. Sommabilité des séries d'Hermite et de celles de Laguerre. — Dans les chapitres qui vont suivre nous rencon-

(¹) *Voir* E.-T. Whittaker and G. N. Watson [1], Chap. XVII, p. 372-373.

trerons des séries dites des séries-noyaux telles que

$$(\mathrm{H}) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{H}_n(x)\,\mathrm{H}_n(y)}{2^n n!\sqrt{\pi}} \qquad (x \neq y)$$

et

$$(\mathrm{L}) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \mathrm{L}_n^{(\alpha)}(x)\,\mathrm{L}_n^{(\alpha)}(y) \qquad (x \neq y, \alpha > -1),$$

relatives aux systèmes de polynomes d'Hermite $\mathrm{H}_n(x)$ et de ceux de Laguerre $\mathrm{L}_n^{(\alpha)}(x)$ dont les premiers sont orthogonaux avec le poids e^{-x^2} dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ et les deuxièmes avec le poids $x^\alpha e^{-x}$ dans l'intervalle $(0, +\infty)$, en supposant $\alpha > -1$.

E. Kogbetliantz [2] a démontré que ces séries (H) et (L) représentent zéro partout, pourvu que l'on ait $x \neq y$. En effet, bien qu'elles soit divergentes, elles sont néanmoins sommables par la méthode des moyennes arithmétiques et sommables avec une somme nulle

$$(55) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{H}_n(x)\,\mathrm{H}_n(y)}{2^n n!\sqrt{\pi}} \sim 0 \qquad (x \neq y)$$

et

$$(56) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+a+1)} \mathrm{L}_n^{(\alpha)}(x)\,\mathrm{L}_n^{(\alpha)}(y) \sim 0 \qquad (x \neq y, \alpha > -1).$$

Observons en passant que l'étude des séries-noyaux des différents systèmes orthogonaux a abouti jusqu'à maintenant au même résultat qui *paraît être général*, une série-noyau du type (H) ou (L) représente zéro pour $x \neq y$, même si elle diverge, car elle est sommable par tel ou tel procédé de sommation régulière avec une somme nulle.

Il serait extrêmement important de former un système de fonctions orthogonales tel que la série-noyau correspondante à ce système soit sommable pour $x \neq y$, mais avec une *somme non nulle partout*, car un tel système, s'il peut exister, présenterait sûrement des propriétés bien curieuses en ce qui concerne les développements suivant les fonctions de ce système.

Remarquons enfin que, d'après le même auteur, pour $x = y$ les séries-noyaux (H) et (L) divergent essentiellement c'est-à-dire que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[H_n(x)]^2}{2^n n! \sqrt{\pi}} = +\infty \tag{57}$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} [L_n^{(\alpha)}(x)]^2 = +\infty. \tag{58}$$

L'étude des différents systèmes orthogonaux indique que les séries-noyaux du type (H) et (L), généralement divergentes, sont sommables pour $x \neq y$ avec une somme nulle, sauf pour $x = y$ quand elles divergent essentiellement.

CHAPITRE III.

SOLUTION DE L'ÉQUATION FONCTIONNELLE DE CHAPMAN-KOLMOGOROFF SOUS FORME DE SÉRIE DE PRODUITS DES POLYNOMES D'HERMITE.

17. **Solution sous forme de série de fonctions du cylindre parabolique.** — En tenant compte de la relation (34), $f(x, s; y, t)$ se met sous la forme

$$f(x, s; y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(s)}{a_n(t)} \frac{D_n(x)\, D_n(y)}{\gamma_n}, \tag{59}$$

où $D_n(x)$ est une fonction du cylindre parabolique, définie par (22).

Reprenons la relation

$$f(x, s; y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(s)}{a_n(t)} \varphi_n(x) \varphi_n(y), \tag{12}$$

où le système φ_n est un système orthonormé et complet sur $(-\infty, +\infty)$.

En posant

$$\theta_n(s, t) = \frac{a_n(s)}{a_n(t)},$$

la série (12) s'écrit

$$f(x, s; y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n(s, t) \varphi_n(x) \varphi_n(y). \tag{60}$$

18. **La convergence uniforme.** — Avant d'aborder la question de convergence uniforme de série (60) pour $s < t$, faisons quelques remarques générales sur les fonctions $a_n(s)$.

Les fonctions $a_n(s)$ étant supposées toujours différentes de zéro $\left[\text{pour qu'on puisse former le rapport } \frac{a_n(s)}{a_n(t)}\right]$, si l'on veut se borner au cas simple où elles sont continues, ces fonctions seront d'un même signe constant. Et comme la série (60) ne change pas en remplaçant les $a_n(s)$ par $-a_n(s)$ *on pourra supposer que toutes les fonctions* $a_n(s)$ *sont constamment positives.*

Puisque nous cherchons seulement un exemple, nous nous contentons de prendre le cas où

$$\theta_n(s, t) = \frac{a_n(s)}{a_n(t)} = [\theta(s, t)]^n \tag{61}$$

avec

$$\theta(s, t) = \frac{a(s)}{a(t)}, \tag{62}$$

quel que soit n, et en supposant les *fonctions* $a(s)$ *positives et constamment croissantes.*

En tenant compte de ces considérations la série (60) devient

$$\begin{aligned} f(x, s; y, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n(s, t)\varphi_n(x)\varphi_n(y) \\ &= e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{a(s)}{a(t)}\right]^n \frac{H_n(x)H_n(y)}{2^n n!\sqrt{\pi}} \\ &= \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}}{\sqrt{\pi}} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a(s)}{a(t)}\right]^n \frac{H_n(x)H_n(y)}{2^n n!} \right\}. \end{aligned} \tag{63}$$

Occupons-nous maintenant de la convergence uniforme de la série (63) pour $s < t$, puisque c'est ce cas qui se présente dans le problème des probabilités en chaîne.

Comme $a(s)$ est une fonction différente de zéro positive et croissante on a

$$a(s) < a(t) \qquad \text{pour} \quad s < t.$$

Donc

$$\theta(s, t) = \frac{a(s)}{a(t)} < 1;$$

par suite $\theta^n(s, t)$ tend vers zéro lorsque $n \to \infty$.

Cela étant, d'après les inégalités (26), (27) on a

$$\left| e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{H}_n(x) \right| < \mathrm{K} \frac{\sqrt{2^n n!}}{\sqrt{n}},$$

donc

$$| \varphi_n(x) | = \left| \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{H}_n(x)}{\sqrt{\gamma_n}} \right| < \mathrm{K} \left(\frac{2^n n!}{\gamma_n} \right)^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{1}{4}};$$

ensuite

$$| \varphi_n(x) \varphi_n(y) | < \mathrm{K}^2 \frac{2^n n!}{\gamma_n} n^{-\frac{1}{2}} = \frac{\mathrm{K}^2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

et

$$\theta^n(s, t) \varphi_n(x) \varphi_n(y) \leqslant \frac{\mathrm{K}^2}{\sqrt{\pi}} \frac{\theta^n(s, t)}{\sqrt{n}} < \frac{\mathrm{K}^2}{\sqrt{\pi}} \theta^n(s, t).$$

La série $\sum \frac{\mathrm{K}^2}{\sqrt{\pi}} \theta^n = \frac{\mathrm{K}^2}{\sqrt{\pi}} \sum \theta^n(s, t)$ étant une progression géométrique de raison inférieure à l'unité, la série (63) est absolument convergente. Comme $\theta(s, t)$ est indépendante de x, y, la série (63) est *normalement* convergente, au sens de R. Baire, quand s, t restant fixes, x et y varient arbitrairement.

En résumé, nous voyons que *la série* (63) *est normalement convergente, donc uniformément et absolument convergente pour s, t fixes et $s < t$, x, y variant arbitrairement.*

19. **Conditions** (P) **et** (T). — Comme le cas de $s < t$ se présente en calcul des probabilités en chaîne, voyons si la fonction $f(x, s; y, t)$, représentée par la série (63), vérifie les conditions (P), (T).

Pour se rendre compte que la fonction $f(x, s; y, t)$ vérifie la condition (P) pour $s < t$, remarquons que, d'après la formule de F. G. Mehler [1], on a

$$(28) \qquad \Phi(x, y, \theta) = \frac{e^{-\frac{\theta^2 x^2 - 2\theta x y + \theta^2 y^2}{1 - \theta^2}}}{\sqrt{\pi(1 - \theta^2)}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{H}_n(x) \mathrm{H}_n(y)}{2^n n! \sqrt{\pi}} \theta^n$$

pour $|\theta| < 1$.

En multipliant les deux membres de (28) par $e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$, on aura

$$\frac{e^{-\left(\frac{x^2+y^2}{2}+\frac{\theta^2 x^2-2\theta xy+\theta^2 y^2}{1-\theta^2}\right)}}{\sqrt{\pi(1-\theta^2)}}=e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{H}_n(x)\mathrm{H}_n(y)}{2^n n!\sqrt{\pi}}\theta^n,$$

ou encore en prenant $\theta=\theta(s, t)$

$$(64)\qquad \frac{e^{-\alpha^2(x^2+y^2)+2\beta xy}}{\sqrt{\pi(1-\theta^2)}}=e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{H}_n(x)\mathrm{H}_n(y)}{2^n n!\sqrt{\pi}}\theta^n$$

$$=f(x, s; y, t)=e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\Phi(x, y, \theta)$$

avec

$$\alpha^2=\frac{1}{2}+\frac{\theta^2}{1-\theta^2}=\frac{1+\theta^2}{2(1-\theta^2)}$$

et

$$\beta=\frac{\theta}{1-\theta^2}.$$

Le premier membre de (64) est évidemment positif quelles que soient les valeurs finies de x et y, par suite la fonction $f(x, s; y, t)$ est bien d'un signe constant et positif.

La série (63) est bien uniformément convergente et par suite intégrable terme à terme, néanmoins elle ne vérifie pas la condition (T).

Remarque. — Maintenant que la convergence de la série (63) est établie, pour $s<t$, observons que, d'après la façon dont nous avons obtenu la fonction $f(x, s; y, t)$, sous la forme (13), elle satisfait à l'équation fonctionnelle de Chapman-Kolmogoroff

$$(\mathrm{C})\qquad f(x, s; y, t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x, s; z, u)f(z, u; y, t)\,dz$$

pour $s<u<t$.

Mais on peut s'assurer de ce fait par une vérification directe.

En effet, en substituant à f, au second membre de (C), son expression (13), on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(s)\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{\gamma_n}}\mathrm{H}_n(x)\frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{a_n(u)\sqrt{\gamma_n}}\mathrm{H}_n(z)\right.$$
$$\left.\times\sum_{p=0}^{\infty} a_p(u)\frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{\gamma_p}}\mathrm{H}_p(z)\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{a_p(t)\sqrt{\gamma_p}}\mathrm{H}_p(z)\right]dz$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{\substack{n=0\\p=0}}^{\substack{n=\infty\\p=\infty}} a_n(s)\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{H}_n(x)}{\sqrt{\gamma_n}}\frac{e^{-\frac{z^2}{2}}\mathrm{H}_n(z)}{a_n(u)\sqrt{\gamma_n}}\right.$$
$$\left.\times a_p(u)\frac{e^{-\frac{z^2}{2}}\mathrm{H}_p(z)}{\sqrt{\gamma_p}}\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{H}_p(y)}{a_p(t)\sqrt{\gamma_p}}\right]dz.$$

Nous avons déjà démontré que les séries $\sum\limits_n$, $\sum\limits_p$ sous le signe $\int$ sont uniformément et absolument convergentes, par conséquent leur produit $\sum\limits_{n,p}$ est aussi uniformément et absolument convergent. Admettons un instant que la série $\sum\limits_{n,p}$ sous le signe $\int$ puisse être intégrée terme à terme. Alors l'expression précédente devient

$$\sum_{\substack{n=0\\p=0}}^{\substack{n=\infty\\p=\infty}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[a_n(s)\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{H}_n(x)}{\sqrt{\gamma_n}}\frac{e^{-\frac{z^2}{2}}\mathrm{H}_n(z)}{a_n(u)\sqrt{\gamma_n}}a_p(u)\frac{e^{-\frac{z^2}{2}}\mathrm{H}_p(z)}{\sqrt{\gamma_p}}\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{H}_p(y)}{a_p(t)\sqrt{\gamma_p}}\right]dz$$
$$=\sum_{\substack{n=0\\p=0}}^{\substack{n=\infty\\p=\infty}}\frac{a_n(s)}{a_n(u)}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{H}_n(x)}{\sqrt{\gamma_n}}\frac{a_p(u)}{a_p(t)}\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{H}_p(y)}{\sqrt{\gamma_p}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-z^2}\mathrm{H}_n(z)\,\mathrm{H}_p(z)}{\sqrt{\gamma_n\gamma_p}}dz.$$

Mais en tenant compte des relations (24), (25) l'expression précédente s'écrit

$$\sum_{n=p=0}^{\infty}\frac{a_n(s)}{a_n(t)}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{H}_n(x)}{\sqrt{\gamma_n}}\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{H}_n(y)}{\sqrt{\gamma_n}}=f(x,s;y,t).$$

Nous voyons que la série intégrée est la série (13), par suite, elle est uniformément et absolument convergente.

Reste à prouver que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n,\,p=0}^{\infty} = \sum_{n,\,p=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tag{65}$$

Or le théorème relatif à l'intégration des séries cesse d'être exact lorsque le domaine d'intégration s'étend à l'infini. Mais toutefois nous allons voir qu'on peut démontrer la relation (65).

Auparavant rappelons le lemme suivant (¹) :

Lemme. — Soit la série $\Sigma u_n(x)$. *Supposons que* $u_n(x) \geqq 0$ *pour toutes les valeurs de* n *et de* x *et que*

$$\int_a^c \left\{ \sum u_n(x) \right\} dx = \sum \int_a^c u_n(x)\, dx \tag{66}$$

pour toutes les valeurs de $c < b$ (*ou pour toute valeur finie de* c). *On a alors*

$$\int_a^b \left\{ \sum u_n(x) \right\} dx = \sum \int_a^b u_n(x)\, dx \tag{67}$$

[*ou*

$$\int_a^{+\infty} \left\{ \sum u_n(x) \right\} dx = \sum \int_a^{+\infty} u_n(x)\, dx, \tag{67 a}$$

dans le second cas], *pourvu qu'un membre de l'équation soit convergent.*

On peut laisser de côté la condition $u_n(x) > 0$ si les séries qui figurent dans (67) et (67 a) sont absolument convergentes. Dans ces conditions on peut résumer la proposition précédente de la manière suivante :

Les résultats précédents restent vrais pour les fonctions $u_n(x)$ *de signe positif ou négatif, ou ayant les deux signes, pourvu*

(¹) *Voir* E. C. Titchmarsh [1], p. 43-45.

que l'une des expressions

$$\int_a^b \left\{ \sum |u_n(x)| \right\} dx, \quad \sum \int_a^b |u_n(x)|\, dx$$

[*ou*

$$\int_a^{+\infty} \left\{ \sum |u_n(x)| \right\} dx, \quad \sum \int_a^{+\infty} |u_n(x)|\, dx$$

dans le second cas] *soit convergente.*

En appliquant ce lemme aux séries doubles nous obtenons précisément le même résultat.

Cela étant, nous avons vu que

$$f(x, s; y, t) = \sum_{n,\, p=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty}$$

est uniformément et absolument convergente, par conséquent d'après le lemme qui précède la relation (65) est bien prouvée.

20. **Solution de carré doublement sommable.** — Remarquons que la fonction $f(x, s; y, t)$, définie par (64), est de *carré doublement sommable* sur $(-\infty, +\infty)$ pour $s < t$, cela veut dire que l'intégrale double

$$\text{(68)} \qquad I(s, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x, s; y, t)\, dx\, dy$$

est finie pour $s < t$ [la fonction $I(s, t)$ étant bornée ou non].

En effet, nous avons vu que $f(x, s; y, t)$ peut se mettre sous la forme finie

$$f(x, s; y, t) = \frac{e^{-\alpha^2(x^2+y^2)+2\beta xy}}{\sqrt{\pi(1-\theta^2)}}$$

avec

$$\alpha^2 = \frac{1+\theta^2}{2(1-\theta^2)},$$

$$\beta = \frac{\theta}{1-\theta^2},$$

$$\theta(s, t) = \frac{a(s)}{a(t)} < 1.$$

On a donc

$$f^2(x, s; y, t) = \frac{e^{-\alpha'^2(x^2+y^2)+2\beta' xy}}{\pi(1-\theta^2)},$$

où

$$\alpha'^2 = 2\alpha^2 = \frac{1+\theta^2}{1-\theta^2},$$

$$\beta' = 2\beta = \frac{2\theta}{1-\theta^2};$$

ensuite la relation (68) devient

$$\mathrm{I}(s, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x, s; y, t)\, dy$$

$$= \frac{1}{\pi(1-\theta^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha'^2 x^2}\, dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha'^2 y^2 - 2\beta' xy)}\, dy$$

ou encore

$$\mathrm{I}(s, t)\, \pi(1-\theta^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha'^2 x^2}\, dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha'^2 y^2 - 2\beta' xy)}\, dy.$$

Mais

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha'^2 y^2 - 2\beta' xy)}\, dy = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha'}\, e^{\frac{\beta'^2}{\alpha'^2} x^2},$$

donc

$$\mathrm{I}(s, t)\, \pi(1-\theta^2) = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha'} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha'^4 - \beta'^2}{\alpha'^2} x^2}\, dx = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha'^4 - \beta'^2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha^4 - \beta^2}} = \pi;$$

par conséquent

$$\mathrm{I}(s, t)(1-\theta^2) = 1$$

ou

$$\mathrm{I}(s, t) = \frac{1}{1-\theta^2}.$$

Comme

$$\theta(s, t) = \frac{a(s)}{a(t)} < 1 \qquad \text{pour } s < t,$$

on a

$$\mathrm{I}(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta^{2n}(s, t) = \frac{1}{1-\theta^2}.$$

Cette dernière relation nous montre que $\mathrm{I}(s, t)$ est finie pour $s < t$.

CHAPITRE IV.

RETOUR AU PROBLÈME DES PROBABILITÉS EN CHAINE.

21. **Conditions supplémentaires.** — Comme nous l'avons déjà indiqué $f(x, s; y, t)$ représente la densité de probabilité, par conséquent elle doit satisfaire à un certain nombre de conditions, cités dans le premier Chapitre, que nous allons vérifier dans la suite.

Nous avons démontré que $f(x, s; y, t)$, définie par (63), est une série uniformément et absolument convergente pour s, t fixes et $s < t$, x et y variant arbitrairement.

Cela étant, voyons ce que devient la série (63) quand $t = s$ et $x \neq y$. Dans ce cas la série (63) se met sous la forme de la série

$$(69) \quad f(x, s; y, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)\,\varphi_n(y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)\,H_n(y)}{2^n n!\sqrt{\pi}}.$$

Or nous avons vu (p. 36) que la série-noyau

$$(55) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)\,H_n(y)}{2^n n!\sqrt{\pi}} \sim 0 \qquad (x \neq y)$$

représente zéro, étant sommable avec une somme nulle pour $x \neq y$. Pour $|x - y| \geq \varepsilon$ la sommabilité de la série-noyau (55), multipliée par $e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ c'est-à-dire la série (69) est uniforme dans $(-\infty, +\infty)$.

On en conclut que *la série* (69), *étant divergente, est sommable, uniformément dans* $(-\infty, +\infty)$, *par la méthode des moyennes arithmétiques avec la somme nulle partout, pourvu que l'on* *ait* $x \neq y$. Donc

(70) $$f(x, s; y, s) = 0 \qquad (x \neq y).$$

Il est important de signaler que la série-noyau (55) n'est pas sommable par les procédés d'Euler et Borel à cause de la lenteur d'oscillation de la suite de ses sommes partielles quand n croît.

Reste le cas où on a à la fois $t = s$ et $x = y$ (cas qui doit être exclu dans les probabilités en chaîne), dans ce cas la série (63) se mettra sous la forme

(71) $$f(x, s; x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^2(x) = e^{-x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n^2(x)}{2^n n! \sqrt{\pi}}.$$

En tenant compte de la relation (57), on aura bien

(72) $$f(x, s : x, s) = +\infty,$$

par suite les deux conditions supplémentaires (6), (7) sont bien satisfaites ainsi que la condition (P).

22. **Limite quand le temps s'écoule.** — Reprenons la série (63) et étudions-la lorsque t croît indéfiniment, $a(t)$ étant positive et croissante, on a deux cas à distinguer :

1° $a(t)$ tend vers l'infini avec t, alors $\theta(s, t) = \frac{a(s)}{a(t)}$ tend vers zéro.

Donc quand x, y, et s restant invariables, t croît indéfiniment, on a en vertu de (63),

(73) $$\lim_{t \to +\infty} f(x, s; y, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},$$

cette limite dépend de x et de y. La limite de probabilité $\varpi(x, s; v, t)$ qui ne peut dépendre que de x, de v et de s.

(74) $$\lim_{t \to +\infty} \varpi(x, s; v, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_v e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dy = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_v e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

ne dépendra que de l'état initial caractérisé par x. Nous sommes dans le cas *non oscillatoire* [1], puique ϖ tend vers une limite, au sens ordinaire du mot, quand $t \to +\infty$.

2° Mais quand t croît, $a(t)$ peut aussi tendre vers une limite finie (positive), l, et c'est la seule alternative. Dans ce cas $\theta(s, t)$ tendra en croissant vers la quantité $a_1(s) = \frac{a(s)}{l}$ qui sera positive et inférieure à l'unité, on aura donc

$$(75) \qquad \lim_{t \to +\infty} f(x, s; y, t) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} [a_1(s)]^n \frac{H_n(x) H_n(y)}{2^n n! \sqrt{\pi}}$$

cette limite et par suite la limite de probabilité ϖ dépendent *complètement* de l'état initial caractérisé par x et s. Nous sommes encore dans le cas *non oscillatoire*.

23. **Une solution particulière.** — Supposons que $a(s)$ croisse de zéro à $+\infty$ quand s croît de $-\infty$ à $+\infty$, on pourra poser

$$a(s) = e^{S},$$

S sera une variable croissant avec s. En posant

$$a(t) = e^{T}$$

et

$$s = \lambda(S),$$
$$t = \lambda(T),$$

on aura

$$\theta = e^{S-T}.$$

Alors $f(x, s; y, t)$ devient une fonction de la forme $F(x, S; y, T)$ et l'équation fonctionnelle de Chapman-Kolmogoroff s'écrit

$$(C') \qquad F(x, S; y, T) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x, S; z, U) F(z, U; y, T)\, dz,$$

quand on repère les époques s, t par les nombres S et T.

---

[1] *Voir* M. Fréchet [5], p. 10.

Et la série (63) devient à son tour

$$(76)\quad f(x, s; y, t) = f[x, \lambda(S); y, \lambda(T)]$$
$$= F(x, S; y, T) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{n(S-1)} \frac{H_n(x)\, H_n(y)}{2^n n! \sqrt{\pi}}.$$

Seulement dans ce cas, quand $t \to \infty$, on aura deux cas à distinguer : ou bien $T \to \infty$, ou bien T (restant négatif, ainsi que S) tend vers zéro.

Il n'y a plus rien d'arbitraires dans $F(x, S; y, T)$, définie par (76), *qui est une solution particulière de l'équation fonctionnelle de Chapman-Kolmogoroff* (C′). On en déduit la solution la plus générale

$$(77)\qquad f(x, s; y, t) = F[x, \beta(s); y, \beta(t)],$$

où $\beta(s) = L\, a(s)$ est une fonction variant de $-\infty$ à $+\infty$ et qui à part cela est arbitraire.

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE AUXQUELLES SATISFONT LES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION DE CHAPMAN-KOLMOGOROFF.

24. **Les équations aux dérivées partielles de A. Kolmogoroff.** — A. Kolmogoroff a montré [1] (p. 415-458); qu'en assujettissant les solutions de l'équation fonctionnelle de Chapman-Kolmogoroff à certaines conditions très générales (concernant les ordres de grandeurs des moments), on obtient une classe de solutions de l'équation de Chapman-Kolmogoroff qui satisfont aux deux équations aux dérivées partielles de la forme

$$(78)\qquad B^2(x, s) \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, s; y, t)$$
$$+ A(x, s) \frac{\partial}{\partial x} f(x, s; y, t) + \frac{\partial}{\partial s} f(x, s; y, t) = 0,$$

$$(79)\qquad \frac{\partial^2}{\partial y^2}[B^2(y, t) f] - \frac{\partial}{\partial y}[A(y, t) f] - \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

où les fonctions A et B^2 sont définies par

$$(80)\quad \begin{cases} A(x,t) = \lim\limits_{\Delta=0} \dfrac{1}{\Delta} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (y-x) f(x, y, t, t+\Delta t)\, dy \\ B^2(x,t) = \lim\limits_{\Delta=0} \dfrac{1}{2\Delta} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (y-x)^2 f(x, y, t, t+\Delta t)\, dy \end{cases}$$

sous la condition que le rapport du moment d'ordre 3 de la fonction f et du moment d'ordre 2 tende vers zéro pour $\lim t = 0$.

Remarque. — Nous allons montrer que : *la solution de l'équation fonctionnelle de Chapman-Kolmogoroff que nous avons donnée sous la forme* (63), *n'appartient pas à la classe de solutions considérée par A. Kolmogoroff.*

En effet si elle lui appartenait, il y existerait deux fonctions A, B telles que notre solution vérifie une équation du type (78). Or en dérivant l'expression (63) de f on a

$$\frac{\partial f}{\partial s} = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \sum_{n \geqq 0} n\theta^{n-1} \frac{\partial \theta}{\partial s} \frac{H_n(x) H_n(y)}{2^n n! \sqrt{\pi}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \sum_{n \geqq 0} \frac{\theta^n}{2^n n! \sqrt{\pi}} [H'_n(x) H_n(y) - x H_n(x) H_n(y)]$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \sum_{n \geqq 0} \frac{\theta^n}{2^n n! \sqrt{\pi}} [H''_n(x) - 2x H'_n(x) + (x^2-1) H_n(x)] H_n(y).$$

Car les séries obtenues en dérivant terme à terme la série (63) sont uniformément convergentes quand x, y varient dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ et qnand, t restant fixe, s reste dans un intervalle borné et en outre $s < t$. En substituant dans l'équation (78) on aurait

$$e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \sum_{n \geqq 0} H_n(y)$$
$$\times \left\{ n \frac{\partial \theta}{\partial s} H_n(x) + \theta \left[A\left(H'_n(x) - x H_n(x)\right) + B^2\left(H''_n(x) \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. - 2x H'_n(x) + (x^2 - 1) H_n(x)\right)\right] \right\} \frac{\theta^{n-1}}{2^n n! \sqrt{\pi}} = 0.$$

Si nous désignons par $U_n(x, s, t)$ la quantité entre accolades l'expression précédente s'écrit

$$(81) \qquad e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \sum_{n \geqq 0} H_n(y) \{ U_n(x, s) t \} \frac{\theta^{n-1}}{2^n n! \sqrt{\pi}} = 0.$$

La relation (81) ne peut avoir lieu pour toute valeur de y entre $-\infty$ et $+\infty$ que si chacune des accolades est nulle, c'est-à-dire pour chaque valeur de n, $U_n(x, s, t)$ doit être nulle; d'où

$$\frac{n}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial s} H_n(x) + A[H'_n(x) - xH_n(x)] \\ + B^2[H''_n(x) - 2xH'_n(x) + (x^2-1)H_n(x)] = 0$$

ou en divisant par $H_n(x)$

$$(82) \qquad \frac{n}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial s} + A\left[\frac{H'_n(x)}{H_n(x)} - x\right] \\ + B^2\left[\frac{H''_n(x)}{H_n(x)} - 2x\frac{H'_n(x)}{H_n(x)} + (x^2-1)\right] = 0$$

pour $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Cela n'est possible que si $A(x, s)$ et $B(x, s)$ sont identiquement nulles.

En effet, en faisant $n = 0$ dans la relation (82), on aura

$$(83) \qquad \frac{A}{B^2} = \frac{x^2-1}{x}$$

et puis en faisant successivement, dans la même relation, $n = 1$, $n = 2$ et en éliminant $\frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial s}$ entre les deux relations obtenues, on aura

$$(84) \qquad \frac{A}{B^2} = \frac{x(x^2-1)(2x^2-1)}{4x^4 - x^2 + 2},$$

qui diffère du rapport (83), ce qui prouve bien que la relation (82) n'est compatible que si $A(x, s)$, $B(x, s)$ sont identiquement nulles. Et alors $\theta = \frac{a(s)}{a(t)}$ serait indépendant de s, ce qui est contraire à l'hypothèse que $a(s)$ est une fonction positive et croissante.

25. **Équation aux dérivées partielles du second ordre à laquelle satisfait la solution** (63). — D'après A. Kolmogoroff toute fonction qui satisfait à l'équation fonctionnelle de Chapman-Kolmogoroff satisfait à une équation aux dérivées partielles du second ordre.

Il est tout naturel de se demander qu'elle est l'équation aux dérivées partielles du second ordre à laquelle satisfait notre solution donnée sous la forme (63) ou (64).

F. G. Mehler [1] a montré que la fonction $\Phi(x, y, \theta)$, définie par (64), satisfait à l'équation aux dérivées partielles linéaires du second ordre suivante

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + 2\theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0. \tag{85}$$

La relation (64) donne

$$\Phi(x, y, \theta) = e^{\frac{x^2+y^2}{2}} f(x, s; y, t), \tag{86}$$

où

$$\theta = \frac{a(s)}{a(t)} < 1 \qquad \text{pour} \quad s < t.$$

En dérivant l'expression (86) de Φ on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} &= e^{\frac{x^2+y^2}{2}} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \\
\frac{\partial \Phi}{\partial x} &= e^{\frac{x^2+y^2}{2}} \left[\frac{\partial f}{\partial x} + xf\right], \\
\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} &= e^{\frac{x^2+y^2}{2}} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2x \frac{\partial f}{\partial x} + (x^2+1) f\right].
\end{aligned}$$

En substituant dans l'équation (85), on aurait

$$e^{\frac{x^2+y^2}{2}} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\theta \frac{\partial f}{\partial \theta} + (1 - x^2) f\right] = 0$$

ou encore

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\theta \frac{\partial f}{\partial \theta} + (1 - x^2) f = 0. \tag{87}$$

En remarquant que $\theta(s, t) = \frac{a(s)}{a(t)}$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{a'(s)}{a(t)};$$

d'où

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{a(t)}{a'(s)}\frac{\partial f}{\partial s}$$

et

$$2\theta\frac{\partial f}{\partial \theta} = 2\frac{a(s)}{a'(s)}\frac{\partial f}{\partial s},$$

par suite l'équation (87) devient

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x, s; y, t) + 2\frac{a(s)}{a'(s)}\frac{\partial}{\partial s}f(x, s; y, t) + (1 - x^2)f(x, s; y, t) = 0. \tag{88}$$

Nous voyons que, si l'on suppose t, y fixes, la fonction $f(x, s; y, t)$ satisfait à l'équation aux dérivées partielles du second ordre (88).

D'autre part, nous remarquons que, l'équation aux dérivées partielles du second ordre (88) à laquelle satisfait notre solution (64) *diffère* de l'équation (78) à laquelle satisfait la classe de solutions considérée par A. Kolmogoroff.

26. **Équation fonctionnelle de Smoluchowski.** — Dans le cas particulier où la fonction $f(x, s; y, t)$ ne dépend que de x, y et de la différence $t - s$, l'équation fonctionnelle de Chapman-Kolmogoroff se réduit à l'équation fonctionnelle de Smoluchowski

$$f(x, y, t + t') = \int_a^b f(x, s, t)f(s, y, t')\,ds. \tag{S}$$

27. **Cas de Bachelier.** — L. Bachelier a trouvé [1] une solution particulière qui entre dans la classe de solutions considérée par A. Kolmogoroff, il a considéré le cas où $f(x, s; y, t)$ dépend de s, t et de la différence $y - x$. Dans ce cas les fonctions

[1] *Math. Annalen*, 104, 1931, p. 415-458.

$A(x, s)$, $B(x, s)$ de l'équation (78) dépendent seulement de s et de même les fonctions $A(y, t)$, $B(y, t)$ de l'équation (79) dépendent seulement de t.

Pour le cas particulier où $A(t) = 0$, $B(t) = 1$, on a la solution non négative de (79) donnée par la formule de Laplace

$$f(s, t, y - x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-s)}} e^{-\frac{(y-x)^2}{4(t-s)}}, \tag{89}$$

pour $s < t$.

Cette solution satisfait aux deux conditions (P) et (T).

CHAPITRE V.

SOLUTION DE L'ÉQUATION FONCTIONNELLE DE CHAPMAN-KOLMOGOROFF SOUS FORME DE SÉRIE DE PRODUITS DES POLYNOMES DE LAGUERRE.

28. **Convergence partout.** — Reprenons la formule (14) du deuxième chapitre

$$f(x, s; y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n(s, t)\, \psi_n^{(\alpha)} \psi_n^{(\alpha)}(y), \tag{14}$$

où

$$\theta_n(s, t) = \frac{a_n(s)}{a_n(t)},$$

et où la suite illimitée de fonctions

$$\psi_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n+1)}{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n+\alpha+1)} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}} \mathrm{L}_n^{(\alpha)}(x) \qquad (\alpha > -1,\ n = 0, 1, 2, \ldots),$$

forme un système *orthonormé* et *complet* sur $(0, +\infty)$.

En prenant

$$\theta_n(s, t) = [\theta(s, t)]^n,$$

avec

$$\theta(s, t) = \frac{a(s)}{a(t)} < 1 \qquad \text{pour} \quad s < t,$$

et en faisant les mêmes hypothèses sur $a(s)$ que dans le troisième chapitre $f(x, s; y, t)$ s'écrira sous la forme de la série

$$f(x, s, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n(s, t)\, \psi_n^{(\alpha)}(x)\, \psi_n^{(\alpha)}(y). \tag{90}$$

Occupons-nous maintenant de la convergence de cette série pour $s < t$.

En vertu des inégalités (51), (52) du deuxième chapitre, nous aurons

$$\left| e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}} \mathrm{L}_n^{(\alpha)}(x) \right| < \frac{\mathrm{T}}{\sqrt[4]{x}} n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}};$$

d'où

$$|\psi_n^{(\alpha)}(x)| < \frac{\mathrm{T}}{\sqrt[4]{x}} \frac{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n+1)}{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n+\alpha+1)} n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}$$

et

$$|\psi_n^{(\alpha)}(x)\,\psi_n^{(\alpha)}(y)| < \frac{\mathrm{T}^2}{\sqrt[4]{xy}} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} n^{\alpha-\frac{1}{2}},$$

par suite

$$\begin{aligned}\theta^n(s,t)\,\psi_n^{(\alpha)}(x)\,\psi_n^{(\alpha)}(y) &\leqslant \frac{\mathrm{T}^2}{\sqrt[4]{xy}} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} n^{\alpha-\frac{1}{2}} \theta^n(s,t) \\ &< \frac{\mathrm{T}^2}{\sqrt[4]{xy}} n^{\alpha-\frac{1}{2}} \theta^n(s,t);\end{aligned}$$

car

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)\mathrm{A}_n^{(\alpha)}} = \frac{1}{\mathrm{A}_n^{(\alpha)}\Gamma(\alpha+1)} < 1$$

pour α entier positif ou nul, hypothèse qui n'est pas incompatible avec la condition $\alpha > -1$.

Il est visible que la série

$$(91)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{T}^2}{\sqrt[4]{xy}} n^{\alpha-\frac{1}{2}} \theta^n = \frac{\mathrm{T}^2}{\sqrt[4]{xy}} \sum_{n=0}^{\infty} n^{\alpha-\frac{1}{2}} \theta^n$$

est convergente pour $s < t$ et x, y variant arbitrairement dans l'intervalle $(\varepsilon, +\infty)$, ε étant fixe et positif, par suite la série (90) est absolument convergente dans le même intervalle. De plus nous allons voir que la série (90) est *convergente partout* sur $(0, +\infty)$. En effet, nous venons de montrer que la série (90) est absolument convergente sur $(\varepsilon, +\infty)$, cette convergence subsiste lorsque ε tend vers zéro ou bien lorsque x et y varient arbitrairement sur $(0, +\infty)$. Il suffit pour le voir d'observer que chaque terme de la série (90) contient x et y en facteur.

29. **Unifornité de la convergence.** — Il faut rechercher

maintenant s'il y a l'uniformité de la convergence de la série (90) pour $s < t$ et x, y variant arbitrairement sur $(\varepsilon, +\infty)$, ε étant fixe et positif. Pour cela revenons à la série (91), nous voyons qu'elle est convergente pour $s < t$ *quelles que soient les valeurs de* x *et* y *dans l'intervalle* $(\varepsilon + \infty)$, ce qui nous montre que la série (90) est absolument et uniformément convergente pour $s < t$ et x, y variant arbitrairement sur $(\varepsilon, +\infty)$.

En résumé nous voyons que :

1° *La série* (90) *est convergente partout sur* $(0, +\infty)$ *pour* s, t *fixes et* $s < t$.

2° *La série* (90) *est absolument et uniformément convergente pour* s, t *fixes et* $s < t$, x *et* y *variant arbitrairement en restant toutefois supérieurs à un nombre positif fixe* ε, ε *étant aussi petit que l'on voudra.*

En tenant compte de la convergence de la série (90) sur $(0, +\infty)$ et de sa convergence uniforme sur $(\varepsilon, +\infty)$, on peut verifier directement, d'une façon anologue au cas des polynomes d'Hermite, que la fonction $f(x, s; y, t)$, définie par (90), satisfait bien à l'équation fonctionnelle de Chapman-Kolmogoroff

$$f(x, s; y, t) = \int_0^{+\infty} f(x, s; z, u) f(z, u; y, t)\, dz$$

pour $s < u < t$.

30. Conditions relatives au problème des probabilités en chaîne. — Nous avons vu (p. 35) que

$$\begin{aligned}(53) \qquad & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} L_n^{(\alpha)}(x) L_n^{(\alpha)}(y)\, \theta^n \\ &= \frac{(\theta x y)^{-\frac{\alpha}{2}}}{1-\theta} e^{-\frac{\theta(x+y)}{1-\theta}} I_\alpha\left[\frac{2(\theta x y)^{\frac{1}{2}}}{1-\theta}\right] \\ &= \frac{(\theta x y)^{-\frac{\alpha}{2}}}{1-\theta} e^{-\frac{\theta(x+y)}{1-\theta}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[\frac{(\theta x y)^{\frac{1}{2}}}{1-\theta}\right]^{\alpha+2n}}{n!\,(\alpha+n)!},\end{aligned}$$

où α est un entier quelconque, par conséquent on a

$$(92)\quad f(x, s; y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n(s, t)\psi_n^{(\alpha)}(x)\psi_n^{(\alpha)}(y)$$

$$= e^{-\frac{x+y}{2}}(xy)^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \mathrm{L}_n^{(\alpha)}(x)\,\mathrm{L}_n^{(\alpha)}(y)\,\theta^n$$

$$= \frac{\theta^{-\frac{\alpha}{2}}}{1-\theta} e^{-\frac{(1+\theta)(x+y)}{2(1-\theta)}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[\frac{(\theta x y)^{\frac{1}{2}}}{1-\theta}\right]^{\alpha+2n}}{n\,!\,(\alpha+n)\,!}.$$

Si l'on prend pour α des entiers positifs ou nuls, le dernier membre et par suite $f(x, s; y, t)$ sera positif quels que soient x, y dans $(0, +\infty)$. Donc la fonction $f(x, s; y, t)$, définie par (90), satisfait bien à la condition (P), pourvu qu'on prenne pour α des entiers positifs ou nuls.

Voyons maintenant si les deux conditions supplémentaires (6) et (7) sont aussi satisfaites. Pour cela, cherchons tout d'abord ce que devient $f(x, s; y, t)$ lorsque $t = s$ et $x \neq y$. Or,

$$f(x, s; y, s) = e^{-\frac{x+y}{2}}(xy)^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \Gamma_n^{(\alpha)}(x)\Gamma_n^{(\alpha)}(y);$$

mais nous savons déjà (p. 36) que

$$(56)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \Gamma_n^{(\alpha)}(x)\Gamma_n^{(\alpha)}(y) \sim 0 \qquad (x \neq y),$$

par conséquent, il est bien évident que

$$(93)\qquad f(x, s; y, s) = 0,$$

pour les valeurs finies et positives de x, y; ce qui prouve que la condition (6) est satisfaite.

Il nous reste à vérifier si la condition (7) est remplie. A cet effet, nous allons chercher ce que devient $f(x, s; y, t)$ lorsqu'on y fait simultanément $t = s$ et $x = y$. On a

$$f(x, s; x, s) = e^{-x} x^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} [\Gamma_n^{(\alpha)}(x)]^2.$$

En tenant compte de la relation

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} [\Gamma_n^{(\alpha)}(x)]^2 = +\infty, \tag{58}$$

on aura

$$f(x, s; x, s) = +\infty, \tag{94}$$

quelles que soient les valeurs finies et positives de x; ce qui nous montre que la condition (7) est vérifiée.

En résumé, nous voyons que la fonction $f(x, s; y, t)$, définie par (90), vérifie les conditions (P), (6) et (7).

Étudions la fonction $f(x, s; y, t)$, sous la forme (90), lorsque t croît indéfiniment. Comme cette étude se porte sur le facteur $\theta(s, t) = \frac{a(s)}{a(t)}$, elle sera analogue à celle relative aux polynomes d'Hermite et nous aurons le même résultat, c'est-à-dire que lorsque t croît indéfiniment la limite de probabilité $\varpi(x, s; v, t)$

$$\lim_{t \to +\infty} \varpi(x, s; v, t)$$

dépendra de l'état initial caractérisé par x et s, cela veut dire que nous sommes dans le cas *non oscillatoire*.

On peut montrer, d'une manière analogue au cas des polynomes d'Hermite, que la solution de l'équation fonctionnelle de Chapman-Kolmogoroff, que nous avons trouvée sous la forme (90) ou (92), n'appartient pas à la classe de solutions considérée par A. Kolmogoroff.

CHAPITRE VI.

AUTRE MÉTHODE POUR RÉSOUDRE L'ÉQUATION FONCTIONNELLE DE CHAPMAN-KOLMOGOROFF.

31. **Solution sous forme d'une exponentielle.** — Dans ce chapitre, en nous plaçant dans le domaine $(-\infty, +\infty)$, nous allons essayer de trouver une solution de l'équation fonctionnelle de Chapman-Kolmogoroff, indépendamment de la méthode exposée dans le premier chapitre, sous la forme d'une exponentielle.

A cet effet, nous cherchons une solution de la forme

$$f(x, s; y, t) = A(s, t)\, e^{-[a(s,t)x^2 + 2b(s,t)xy + c(s,t)y^2]}, \tag{95}$$

les fonctions $A(s, t)$, $a(s, t)$, $b(s, t)$ et $c(s, t)$ sont définies de façon que $f(x, s; y, t)$ vérifie les deux conditions

$$f(x, s; y, t) > 0 \tag{P}$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, s; y, t)\, dy = 1; \tag{T}$$

de plus, elle doit satisfaire à l'équation de Chapman-Kolmogoroff

$$f(x, s; y, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, s; z, u) f(z, u; y, t)\, dz \tag{C}$$

pour $s < u < t$.

Nous commençons d'abord par assujettir $f(x, s; y, t)$ à la condition (T), on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, s; y, t)\, dy = \mathrm{A}(s, t) e^{-a(s,t)x^2} \times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-[c(s,t)y^2 + 2b(s,t)xy]}\, dy.$$

En posant

$$\sqrt{c}\left(y + \frac{bx}{c}\right) = \mathrm{Y} \qquad \text{avec} \qquad c > 0,$$

on aura

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, s; y, t)\, dy = \frac{\mathrm{A}}{\sqrt{c}} e^{-\frac{ac-b^2}{c}x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mathrm{Y}^2}\, d\mathrm{Y} = \sqrt{\frac{\pi}{c}}\, \mathrm{A}\, e^{-\frac{ac-b^2}{c}x^2};$$

on a donc

$$\text{(T)} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, s; y, t)\, dy = 1$$

si

$$(96) \qquad \begin{cases} e(s, t) \neq 0, \\ c(s, t) > 0, \\ a(s, t)c(s, t) - b^2(s, t) = 0, \\ \sqrt{\dfrac{\pi}{c(s, t)}}\, \mathrm{A}(s, t) = 1 \end{cases}$$

ou encore

$$(97) \qquad \begin{cases} c(s, t) \neq 0, \\ c(s, t) > 0, \\ a(s, t) > 0, \\ b(s, t) = \pm\sqrt{a(s, t)c(s, t)}, \\ \mathrm{A}(s, t) = \sqrt{\dfrac{c(s, t)}{\pi}}. \end{cases}$$

En tenant compte des conditions (97), $f(x, s; y, t)$ s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} (98) \qquad f(x, s; y, t) &= \sqrt{\frac{c(s, t)}{\pi}}\, e^{-[a(s,t)x^2 \pm 2\sqrt{a(s,t)c(s,t)}xy + c(s,t)y^2]} \\ &= \sqrt{\frac{c(s, t)}{\pi}}\, e^{-[\sqrt{a(s,t)}x \pm \sqrt{c(s,t)}y]^2} \\ &= \frac{\mathrm{V}(s, t)}{\sqrt{\pi}}\, e^{-[\mathrm{U}(s,t)x \pm \mathrm{V}(s,t)y]^2}, \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$(99)\qquad \begin{cases} \sqrt{u(s,\, t)} = \mathrm{U}(s,\, t), \\ \sqrt{v(s,\, t)} = \mathrm{V}(s,\, t). \end{cases}$$

Donc $f(x,\, s;\, y,\, t)$, écrite sous la forme (98), vérifie bien les deux conditions (P) et (T).

Cela étant, nous allons voir quelle est la forme des fonctions $\mathrm{U}(s,\, t)$ et $\mathrm{V}(s,\, t)$ pour que la fonction f, écrite sous la forme (98), satisfasse à l'équation (C). En substituant (98) dans (C), on aura

$$(100)\qquad \frac{\mathrm{V}(s,\, t)}{\sqrt{\pi}} e^{-[\mathrm{U}(s,\, t)x \pm \mathrm{V}(s,\, t)y]^2}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{V}(s,\, u) e^{-[\mathrm{U}(s,\, u)x \pm \mathrm{V}(s,\, u)z]^2} \times \mathrm{V}(u,\, t) e^{-[\mathrm{U}(u,\, t)z \pm \mathrm{V}(u,\, t)y]^2} dz$$

$$= \frac{\mathrm{V}(s,\, u)\,\mathrm{V}(u,\, t)}{\pi} e^{-[\mathrm{U}^2(s,\, u)x^2 + \mathrm{V}^2(u,\, t)y^2]} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\mathrm{B}z^2 \pm \mathrm{C}z)} dz$$

$$= \frac{\mathrm{V}(s,\, u)\,\mathrm{V}(u,\, t)}{\sqrt{\pi \mathrm{B}}} e^{\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{B}} - [\mathrm{U}^2(s,\, u)x^2 + \mathrm{V}^2(u,\, t)y^2]},$$

où l'on a posé

$$(101)\qquad \begin{cases} \mathrm{V}^2(s,\, u) + \mathrm{U}^2(u,\, t) = \mathrm{B}, \\ \mathrm{U}(s,\, u)\,\mathrm{V}(s,\, u)x + \mathrm{U}(u,\, t)\,\mathrm{V}(u,\, t)y = \mathrm{C}. \end{cases}$$

La relation (100) nous donne tout d'abord

$$\mathrm{V}(s,\, t) = \frac{\mathrm{V}(s,\, u)\,\mathrm{V}(u,\, t)}{\sqrt{\mathrm{B}}} = \frac{\mathrm{V}(s,\, u)\,\mathrm{V}(u,\, t)}{\sqrt{\mathrm{V}^2(s,\, u) + \mathrm{U}^2(u,\, t)}}$$

ou encore

$$(102)\qquad \frac{\mathrm{V}^2(s,\, u)\,\mathrm{V}^2(u,\, t)}{\mathrm{V}^2(s,\, t)} = \mathrm{V}^2(s,\, u) + \mathrm{U}^2(u,\, t)$$

Et puis, en égalant dans la même relation, les exponentielles, on aura les relations suivantes :

$$\mathrm{U}^2(s,\, t) = \mathrm{U}^2(s,\, u) - \frac{\mathrm{U}^2(s,\, u)\,\mathrm{V}^2(s,\, u)}{\mathrm{V}^2(s,\, u) + \mathrm{U}^2(u,\, t)},$$

$$\mathrm{U}(s,\, t)\,\mathrm{V}(s,\, t) = \pm \frac{\mathrm{U}(s,\, u)\,\mathrm{U}(u,\, t)\,\mathrm{V}(s,\, u)\,\mathrm{V}(u,\, t)}{\mathrm{V}^2(s,\, u) + \mathrm{U}^2(u,\, t)},$$

$$\mathrm{V}^2(s,\, t) = \mathrm{V}^2(u,\, t) - \frac{\mathrm{U}^2(u,\, t)\,\mathrm{V}^2(u,\, t)}{\mathrm{V}^2(s,\, u) + \mathrm{U}^2(u,\, t)},$$

ou, en simplifiant,

$$\frac{U^2(s, u)\,U^2(u, t)}{U^2(s, t)} = V^2(s, u) + U^2(u, t), \tag{103}$$

$$\pm\frac{U(s, u)\,U(u, t)\,V(s, u)\,V(u, t)}{U(s, t)\,V(s, t)} = V^2(s, u) + U^2(u, t), \tag{104}$$

$$\frac{V^2(s, u)\,V^2(u, t)}{V^2(s, t)} = V^2(s, u) + U^2(u, t). \tag{105}$$

Nous remarquons que les deux relations (102) et (105) sont les mêmes.

En considérant les relations (103), (104) et (105), on a

$$\begin{aligned} \frac{U^2(s, u)\,U^2(u, t)}{U^2(s, t)} &= \frac{V^2(s, u)\,V^2(u, t)}{V^2(s, t)} \\ &= \pm\frac{U(s, u)\,U(u, t)\,V(s, u)\,V(u, t)}{U(s, t)\,V(s, t)} \\ &= V^2(s, u) + U^2(u, t). \end{aligned} \tag{106}$$

Les deux premiers rapports de (106) nous donnent

$$\frac{U^2(s, t)}{V^2(s, t)} = \frac{U^2(s, u)}{V^2(s, u)}\,\frac{U^2(u, t)}{V^2(u, t)}, \tag{107}$$

ou, en posant

$$R(s, t) = \frac{U^2(s, t)}{V^2(s, t)}, \tag{108}$$

$$R(s, t) = R(s, u)\,R(u, t) \tag{109}$$

pour $s < u < t$. Nous sommes donc ramenés à résoudre l'équation fonctionnelle (109).

32. **Solution continue la plus générale de l'équation fonctionnelle** $R(s, t) = R(s, u)R(u, t)$. — La recherche des fonctions $U(s, t)$ et $V(s, t)$ nous a conduit à résoudre l'*équation fonctionnelle* (109). *La solution la plus générale* (continue ou non, jamais nulle ou non, mais partout finie) *de l'équation fonctionnelle* (109) a été donnée par M. Fréchet [6] (p. 8 et 30); nous allons donner un résumé concernant la *solution continue la plus générale de* (109).

Nous laisserons de côté la solution continue évidente

$R(s, t) = 0$. Rappelons que les solutions non nulles de (109) sont de la forme

$$(110) \qquad R(s, t) = \frac{g(s)}{g(t)} \quad \text{pour} \quad s < t,$$

où $g(s)$ et $g(t)$ sont toujours, par hypothèse, finies et $\neq 0$, c'est d'ailleurs la solution jamais nulle de (109) *la plus générale*.

$R(s, t)$ reste toujours positive, et du reste quand $R(s, t)$ est continue, non identiquement nulle et donnée $g(t)$ sera positive et continue. Réciproquement, si $g(t)$ est une fonction toujours $\neq 0$ et donnée arbitrairement, alors pour que le quotient $R(s, t) = \frac{g(s)}{g(t)}$ soit continu par rapport à l'ensemble (s, t), il suffit évidemment et de plus, il faut que $g(s)$ soit continue. De plus $g(s)$ étant continue et $\neq 0$ garde un signe constant, alors en écrivant, au besoin

$$R(s, t) = \frac{-g(s)}{-g(t)},$$

on pourra supposer que $g(t)$ reste positive.

En résumé, toute solution continue $R(s, t)$ de l'équation fonctionnelle (109) ou bien est identiquement nulle, ou bien est constamment positive. *Et la solution continue non identiquement nulle la plus générale de* (109) *est représentable sous la forme*

$$(110) \qquad R(s, t) = \frac{g(s)}{g(t)} \quad \text{pour} \quad s < t,$$

où $g(t)$ est une fonction continue positive arbitrairement choisie.

Cela étant, revenons aux équations (108) et (110) et remplaçons t par u, elles deviennent

$$(111) \qquad R(s, u) = \frac{U^2(s, u)}{V^2(s, u)} = \frac{g(s)}{g(u)} \quad \text{pour} \quad s < u,$$

cette dernière relation nous donne

$$(112) \qquad \frac{U^2(s, u)}{g(s)} = \frac{V^2(s, u)}{g(u)},$$

par suite la relation (103) s'écrit

$$\frac{U^2(s, u)\, U^2(u, t)}{U^2(s, t)} = \frac{U^2(s, u)\, g(u)}{g(s)} + U^2(u, t),$$

ou, en simplifiant,

$$(113) \qquad \frac{g(s)}{U^2(s, t)} = \frac{g(s)}{U^2(s, u)} + \frac{g(u)}{U^2(u, t)}.$$

Si l'on pose

$$(114) \qquad \varphi(s, t) = \frac{g(s)}{U^2(u, t)},$$

(113) devient

$$\varphi(s, t) = \varphi(s, u) + \varphi(u, t)$$

ou encore

$$(115) \qquad e^{\varphi(s,t)} = e^{\varphi(s,u)} e^{\varphi(u,t)};$$

en posant

$$(116) \qquad \psi(s, t) = e^{\varphi(s,t)},$$

la relation (115) s'écrit

$$(117) \qquad \psi(s, t) = \psi(s, u)\, \psi(u, t)$$

pour $s < u < t$.

Nous savons déjà, d'après (110), que si $\psi(s, t)$ est continue, elle est de la forme

$$(118) \qquad \psi(s, t) = \frac{h(s)}{h(t)}.$$

D'où, en vertu des relations (114), (116) et (118) on a

$$(119) \quad \varphi(s, t) = \mathrm{L}\psi(s, t) = \mathrm{L}h(s) - \mathrm{L}h(t) = \mathrm{H}_1(s) - \mathrm{H}_1(t) = \frac{g(s)}{U^2(s, t)},$$

où l'on a posé

$$\mathrm{H}_1(s) = \mathrm{L}h(s).$$

La relation (119) peut s'écrire

$$(120) \quad U^2(s, t) = \frac{g(s)}{\mathrm{H}_1(s) - \mathrm{H}_1(t)} = \frac{g(s)}{\mathrm{H}(t) - \mathrm{H}(s)} \qquad \text{pour} \quad s < t,$$

avec

$$H = -H_1.$$

Alors $g(s)$ étant positive, on voit que H sera une fonction croissante. En tenant compte de l'expression de $U^2(s, u)$, donnée par (120), la relation (111) donne

$$V^2(s, u) = \frac{g(u)}{g(s)} U^2(s, u) = \frac{g(u)}{H(u) - H(s)}. \tag{121}$$

Par conséquent, pour que la fonction $f(x, s; y, t)$, écrite sous la forme (98), vérifie l'équation fonctionnelle de Chapman-Kolmogoroff, il faut que les fonctions $U(s, t)$ et $V(s, t)$ soient de la forme

$$\left\{\begin{aligned} U^2(s, t) &= \frac{g(s)}{H(t) - H(s)}, \\ V^2(s, t) &= \frac{g(t)}{H(t) - H(s)}. \end{aligned}\right. \tag{122}$$

En vertu des relations (122), la fonction f s'écrit

$$f(x, s; y, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{g(t)}{H(t) - H(s)}}\, e^{-\frac{[\sqrt{g(s)}x - \varepsilon\sqrt{g(t)}y]^2}{H(t) - H(s)}}, \tag{123}$$

avec $\varepsilon = \pm 1$.

33. **Autres conditions à réaliser.** — Pour que la fonction f, définie par (123), représente la densité de probabilité il faut qu'elle vérifie, en plus des conditions (P), (T), les deux conditions supplémentaires (6), (7). Pour cela, cherchons tout d'abord ce que devient $f(x, s; y, t)$, définie par (123), quand $x \neq y$ et $t = s$. Il faut distinguer deux cas suivant les valeurs de $\varepsilon = \pm 1$.

Cas de $\varepsilon = +1$. — En posant

$$A = \frac{[\sqrt{g(s)}x - \sqrt{g(t)}y]^2}{H(t) - H(s)},$$

f s'écrit

$$f(x, s; y, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{g(t)[H(t) - H(s)]}}{[\sqrt{g(s)}x - \sqrt{g(t)}y]^2} \frac{A}{e^A}. \tag{124}$$

Or pour $x \neq y$ et $t = s$, A devient infiniment grand, par suite $\frac{A}{e^A}$ tend vers zéro, il en est de même pour le premier facteur, de façon que

$$f(x, s; y, s) = 0 \qquad \text{pour} \quad x \neq y. \tag{125}$$

La relation (125) nous montre que, dans le cas où $\varepsilon = +1$, la solution (123) vérifie bien la condition (6).

Cas de $\varepsilon = -1$. — Dans ce cas $f(x, s; y, t)$ s'écrit

$$f(x, s; y, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{g(t)}{H(t) - H(s)}}\, e^{-\frac{[\sqrt{g(s)}x + \sqrt{g(t)}y]^2}{H(t) - H(s)}}. \tag{126}$$

En prenant en particulier la valeur $x = -y$ (puisque $x \neq y$) et en faisant $t \to s$, on a

$$\lim_{t \to s} e^{-\frac{[\sqrt{g(s)}x + \sqrt{g(t)}y]^2}{H(t) - H(s)}} = \lim_{t \to s} e^{-\frac{x^2[\sqrt{g(s)} - \sqrt{g(t)}]^2}{H(t) - H(s)}} = 1$$

et

$$\lim_{t \to s} \sqrt{\frac{g(t)}{H(t) - H(s)}} = +\infty,$$

puisque $g(s)$ est positive et différente de zéro.

D'où

$$f(x, s; -x, s) = +\infty \qquad \text{pour} \quad x \neq y. \tag{127}$$

Le cas de $x = -y$ ($\varepsilon = -1$) n'intervient pas dans le problème des probabilités en chaîne, et du reste la relation (127) est incompatible avec la condition (6) il faut prendre seulement le cas où $\varepsilon = +1$, par suite l'expression définitive de f est

$$f(x, s; y, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{g(t)}{H(t) - H(s)}}\, e^{-\frac{[\sqrt{g(s)}x - \sqrt{g(t)}y]^2}{H(t) - H(s)}}. \tag{128}$$

En prenant cette dernière expression de f nous allons montrer qu'elle vérifie aussi la condition (7). A cet effet, cherchons ce que devient f quand on a à la fois $x = y$ et $t = s$. Avec un calcul, analogue au cas qui nous a conduit à la relation (127), on peut voir que

$$(129) \qquad f(x, s; x, s) = +\infty.$$

Donc $f(x, s; y, t)$. définie par (128), satisfait aux deux conditions (6), (7).

En définitive, nous avons pu former une solution $f(x,s;y,t)$, définie par (128), qui vérifie l'équation fonctionnelle de Chapman-Kolmogoroff, et de plus elle satisfait aux conditions (P), (T) (6) et (7), c'est-à-dire qu'elle satisfait à toutes les conditions relatives au problème des probabilités en chaîne.

Corollaire. — Il est évident qu'en prenant, dans la solution (128), $g(s) = g(t) = \text{const.}$, on aura une solution particulière, et si l'on prend le cas particulier où

$$g(s) = g(t) = \text{const.} = \frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad H(s) = s,$$

on tombe sur la solution particulière (89) de L. Bachelier.

De cette sorte, nous avons trouvé la solution la plus générale de la forme (128) et nous avons vu qu'elle contient la solution de L. Bachelier comme un cas particulier.

34. **La solution exponentielle n'appartient pas à la classe de solutions considérée par A. Golmogoroff.** — Voyons si notre solution (128) appartient à la classe de solutions considérée par A. Kolmogoroff.

En effet, si elle lui appartenait, il y aurait deux fonctions $A(x, s)$, $B(x, s)$ telles que notre solution (128) vérifie une équation du type

$$(78) \qquad B^2(x, s) \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, s; y, t) + A(x, s) \frac{\partial}{\partial x} f(x, s; y, t) + \frac{\partial}{\partial s} f(x, s; y, t) = 0.$$

Substituons la solution (128) dans l'équation (78); en posant

$$(130) \qquad f(x, s; y, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{g(t)}{H(t) - H(s)}} F(x, s; y, t)$$

avec

$$F(x, s, y, t) = e^{-K(x, s, y, t)},$$

où

$$K(x, s, y, t) = \frac{\left[\sqrt{g(s)}\,x - \sqrt{g(t)}\,y\right]^2}{H(t) - H(s)},$$

nous aurons

$$(131)\qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{g(t)}{H(t) - H(s)}}\left[F'_s + AF'_x + B^2 F''_{x^2}\right] + \frac{F}{\sqrt{\pi}}\frac{\partial}{\partial s}\sqrt{\frac{g(t)}{H(t) - H(s)}} = 0$$

ou encore

$$(132)\qquad -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{g(t)}{H(t) - H(s)}}\left[K'_s + AK'_x + B^2(K''_{x^2} - K'^2_x)\right] + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\partial}{\partial s}\sqrt{\frac{g(t)}{H(t) - H(s)}} = 0,$$

ce qui donne en simplifiant

$$(133)\qquad K'_s + AK'_x + B^2(K''_{x^2} - K'^2_x) = \frac{\partial}{\partial s} L \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{g(t)}{H(t) - H(s)}}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s} L[H(t) - H(s)]$$

$$- \frac{1}{2}\frac{H'(s)}{H(t) - H(s)}.$$

Calculons la quantité entre crochets, on a

$$K'_s = \frac{\left\{ [H(t) - H(s)]\,x\,\dfrac{g'(s)}{\sqrt{g(s)}}\left[\sqrt{g(s)}\,x - \sqrt{g(t)}\,y\right] + \left[\sqrt{g(s)}\,x - \sqrt{g(t)}\,y\right]^2 H'(s) \right\}}{[H(t) - H(s)]^2},$$

$$K'_x = \frac{2\sqrt{g(s)}\left[\sqrt{g(s)}\,x - \sqrt{g(t)}\,y\right]}{H(t) - H(s)},$$

$$K'^2_x = \frac{4g(s)\left[\sqrt{g(s)}\,x - \sqrt{g(t)}\,y\right]^2}{[H(t) - H(s)]^2},$$

$$K''_{x^2} = \frac{2g(s)}{H(t) - H(s)},$$

ensuite en substituant K'_s, K'_x et K''_{x^2} dans (133) et en simplifiant, on aura

$$
\begin{aligned}
(134)\quad & \{[H(t) - H(s)]\, g'(s) + g(s)\, H'(s) - 4g^2(s) B^2\}\, x^2 \\
& + [g(t)\, H'(s) - 4g(s) g(t) B^2]\, y^2 - \sqrt{g(s)}\sqrt{g(t)} \\
& \times \left\{ \frac{g'(s)}{g(s)} [H(t) - H(s)] + 2H'(s) - 8g(s) B^2 \right\} xy \\
& + 2Ag(s)\, [H(t) - H(s)]\, x - 2A\sqrt{g(s)}\sqrt{g(t)} \\
& \times [H(t) - H(s)]\, y \\
& + \left\{ 2B^2 g(s)\, [H(t) - H(s)] - \frac{1}{2} [H(t) - H(s)] \right\} = 0.
\end{aligned}
$$

Cette relation doit avoir lieu quels que soient x et y, on a donc les identités suivantes :

$$
(135)\quad \left\{
\begin{aligned}
& 4g^2(s) B^2 = [H(t) - H(s)]\, g'(s) + g(s)\, H'(s), \\
& 4g(s)\, g(t)\, B^2 = g(t)\, H'(s), \\
& 8g(s) B^2 = 2H'(s) + \frac{g'(s)}{g(s)} [H(t) - H(s)], \\
& 2Ag(s)\, [H(t) - H(s)] = 0, \\
& 2A\sqrt{g(s)}\sqrt{g(t)}\, [H(t) - H(s)] = 0, \\
& 2g(s)\, [H(t) - H(s)]\, B^2 = \frac{1}{2} [H(t) - H(s)]\, H'(s).
\end{aligned}
\right.
$$

Comme $[H(t) - H(s)] \neq 0$ ainsi que $g(s)$ et $g(t)$, la quatrième et cinquième relations du système (135) nous donnent

$$A(x, s) = 0.$$

La deuxième et la dernière relations ne sont pas indépendantes, elles se réduisent à

$$(136)\qquad B^2(x, s) = B^2(s) = \frac{H'(s)}{4g(s)}.$$

Pour que la première et la troisième relations donnent pour B^2 le rapport (136) il faut que $g'(s) \equiv 0$, ce qui revient à prendre

$$(137)\qquad g(s) = \text{Const.};$$

par suite, d'après l'équation fonctionnelle (109) et sa solution

(110), on a aussi

$$g(t) = \text{Const.} \tag{137'}$$

Par conséquent dans le cas particulier où $g(s)$ et $g(t)$ se réduisent à une même constante, notre solution (128) appartient à la classe de solutions considérée par A. Kolmogoroff; mais, *dans le cas général où $g(s)$ et $g(t)$ sont deux fonctions continues et positives, notre solution* (128) *n'appartient pas à la classe de solutions considérée par A. Kolmogoroff.*

Dans le cas particulier où $g(s) = g(t) = \text{Const.}$, l'équation (78) s'écrit

$$\frac{H'(s)}{4g}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial s} = 0. \tag{138}$$

La solution particulière (89) de L. Bachelier correspond à

$$\left\{\begin{aligned} A(s) &= 0, \\ B^2(s) &= 1, \end{aligned}\right. \tag{139}$$

tandis que notre solution particulière correspond à

$$\left\{\begin{aligned} A(s) &= 0, \\ B^2(s) &= \frac{H'(s)}{4g}. \end{aligned}\right. \tag{140}$$

Remarquons que le rapport $\frac{H'(s)}{4g}$ est bien positif, car la fonction $H(s)$ est une fonction croissante, par suite $H'(s)$ est positive et il en est de même pour la constante g.

CONCLUSION.

Nous avons pu obtenir, dans les chapitres qui précèdent, des solutions très générales de l'équation fonctionnelle de Chapman-Kolmogoroff dans le cas d'un domaine d'intégration illimité soit dans les deux sens, soit dans un sens.

Tout d'abord, nous avons trouvé, en appliquant la première méthode de M. Fréchet, comme solution de l'équation fonctionnelle (C), la série (63) « normalement » convergente, au sens de R. Baire. Nous avons montré qu'elle satisfait à l'équation aux dérivées partielles linéaires du second ordre (88) et qu'elle est de carré doublement sommable sur $(-\infty, +\infty)$.

Ensuite, en nous plaçant dans l'intervalle $(0, +\infty)$ et en applquant la même méthode, nous avons trouvé comme solution, la série (90) qui est absolument convergente sur $(0, +\infty)$ limites comprises, et uniformément convergente sur $(\varepsilon+\infty)$, ε étant un nombre positif fixe aussi petit que l'on voudra.

Nous avons vu que les deux solutions (63) et (90) vérifient la condition (P) ainsi que les deux conditions supplémentaires (6) et (7), mais qu'elles ne satisfont pas à la condition (T). De sorte que, les deux solutions (63) et (90) obtenues par cette méthode satisfont bien à l'équation fonctionnelle de Chapman-Kolmogoroff, mais elles ne vérifient pas toutes les conditions du problème des probabilités en chaîne, à moins qu'on les modifie d'une façon assez profonde.

Par contre, la méthode que nous avons appliquée dans le dernier chapitre nous fournit la solution (128) qui vérifie l'équation fonctionnelle de Chapman-Kolmogoroff, et qui satisfait à toutes les conditions relatives aux probabilités en chaîne.

Nous avons montré que les trois solutions (63), (90) et (128) sont distinctes de celles considérées par A. Kolmogoroff.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

APPELL (P.) et KAMPÉ DE FÉRIET (J). — [1]. *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Polynomes d'Hermite* (Paris, Gauthier-Villars, 1926).

CHARLIER (C.-V.-L.). — [1]. *Les applications de la théorie des probabilités aux sciences mathématiques et aux sciences physiques. Application de la théorie des probabilités à l'Astronomie* (Paris, 1930).

CHAPMAN (S). — [1]. On the Brownian displacements and Thermal Diffusion of Grains suspended in a non-uniform fluid (*Proceedings of the Royal Society* A, vol. 119, p. 34-54, London, 1928).

FRÉCHET (M). — [1]. Sur l'équation fonctionnelle de S. Chapman et sur les problèmes des probabilités « en chaîne » (*Rend. Acc. Lincei*, vol. XX, 1934, p. 95-99).

[2]. Sur l'équation fonctionnelle de Chapman et sur le problème des probabilités « en chaîne » (*Proceedings of the London Mathematical Society*, 2e série, vol. 39, 1935).

[3]. Solution générale de l'équation de Chapman (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 200, 1935, p. 369).

[4]. Solution générale de l'équation de Chapman-Kolmogoroff (*Ann. della R. Sc. Norm. sup. di Pisa*, 1935).

[5]. *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 198, 1934, p. 2053.

[6]. Sul caso positivamente regolare nel problema delle probabilità concatenate (*Giornale dell' Istituto Italiano degli Attuari*, anno VII, n° 1, 1936, XIV).

[7]. Solution continue la plus générale d'une équation fonctionnelle de la théorie des probabilités « en chaîne » (*Bull. Soc. math. France*, t. LX, 1932, p. 1-36).

HERMITE (Ch.). — [1]. Sur un nouveau développement en série de fonctions (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 58, 1864, p. 93-100 et 266-273); *Œuvres d'Hermite*, t. II, Paris, 1908, p. 293-308.

HOSTINSKY (B). — [1]. Méthodes générales du calcul des probabilités (*Mémorial des Sc. math.*, fasc. LII; Paris, Gauthier-Villars, 1931).

[2]. Application du calcul des probabilités de la théorie du mouvement brownien (*Ann. de l'Inst. H. Poincaré*, vol. III, fasc. I, 1932).

JACOB (M). — [1]. Sullo sviluppo di una funzione di ripartizione in serie di polinomi di Hermite (*Giornale dell' Istituto Italiano degli Attuari*, anno II, n° 1, 1931, IX).

KOGBETLIANTZ (E). — [1]. Recherches sur la sommabilité des séries d'Hermite (*Ann. sc. de l'École Norm. supér.*, 3e série, t. 68, 1932, p. 137-221).

[2]. Sur les moyennes arithmétiques des séries-noyaux des développements en

séries d'Hermite et de Laguerre et sur celles de ces séries-noyaux dérivées terme à terme (*Journal of Mathematics and Physics*, vol. XIV, n° 2, 1935, p. 1-99).

[3]. Contribution à l'étude du saut d'une fonction donnée par son développement en série d'Hermite ou de Laguerre (*Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 38, n° 1, 1935).

KOLMOGOROFF (A). — [1]. Ueber die analytischen methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung (*Math. Annalen*, t. 104, 1931, p. 415-458).

LAGUERRE (E). — [1]. *Œuvres*, I, Paris 1898, p. 428-937; Sur l'intégrale $\int_x^{+\infty} x^{-1} e^{-x} dx$ (*Bull. de la Soc. math. France*, t. VII, 1879, p. 72-81).

MEHLER (F.-G.). — [1]. Ueber die entwicklung einer Funktion von beliebig vielen variablen nach Laplaceschen funktione höherer Ordnung (*Journal de Crelle*, t. 66, 1866, p. 161).

NIELS NIELSEN. — [1]. Recherche sur les polynomes d'Hermite (*Det. kgl. Danske videnskagernes selskab. Math. phys. Medd*, I, 6, 1918).

SANSONE (G.). — *Voir* VITALI (G.) et SANSONE (G.).

TITCHMARSH (E.-C.). — [1]. *The theory of functions* (1932, Clarendon Press, Oxford).

VITALI (G.) et SANSONE (G.). — [1]. *Moderna theoria delle funzioni di variabile reale*, Part II (Bologna, 1935, XIV).

WHITTAKER (E.-T.) and WATSON (G.-N.). — [1]. *A Course of modern Analysis* fourth edition (Cambridge, 1935).

Paris, le 26 novembre 1936.

Vu et approuvé :

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

CH. MAURAIN.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 26 novembre 1936.

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

S. CHARLÉTY.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE IV.

Retour au problème des probabilités en chaîne.