SYLVAIN WACHS

Essai sur la géométrie projective quaternionnienne

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1936

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1936__183__1_0>

SÉRIE A N° **1671**

N° d'ordre :

2537

THÈSES

PRÉSENTÉES A LA

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Sylvain WACHS

LICENCIÉ ES SCIENCES

1re THÈSE. — **Essai sur la Géométrie projective quaternionnienne.**

2me THÈSE. — **Propositions données par la Faculté.**

Soutenues le novembre 1936 devant la Commission d'examen :

MM. CARTAN, Président,

CHAZY, MONTEL — Examinateurs.

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen honoraire . . M. MOLLIARD.

Doyen . . . . . C. MAURAIN, *Professeur*, Physique du Globe.

Professeurs honoraires . H. LEBESGUE. A. FERNBACH. A. LEDUC. Émile PICARD. Rémy PERRIER. Léon BRILLOUIN. GOURSAT. GUILLET. PÉCHARD. FREUNDLER. AUGER. BLAISE. DANGEARD. JANET. LESPIEAU. MARCHIS. VESSIOT.

PROFESSEURS

G. BERTRAND . . .	T	Chimie biologique.
M. CAULLERY . . .	T	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
G. URBAIN.	T	Chimie générale.
Émile BOREL. . . .	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.
Jean PERRIN	T	Chimie physique.
H. ABRAHAM	T	Physique.
E. CARTAN	T	Géométrie supérieure.
M. MOLLIARD. . . .	T	Physiologie végétale.
L. LAPICQUE	T	Physiologie générale.
A. COTTON	T	Recherches physiques.
J. DRACH	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
Charles FABRY. . .	T	Enseignement de Physique.
Charles PÉREZ . . .	T	Zoologie.
Léon BERTRAND . .	T	Géologie structurale et géologie appliquée.
E. RABAUD	T	Biologie expérimentale.
M. GUICHARD. . . .		Chimie minérale.
Paul MONTEL . . .	T	Théorie des fonctions et Théorie des transformations.
P. WINTREBERT. . .	T	Anatomie et histologie comparées.
L. BLARINGHEM. . .	T	Botanique.
O. DUBOSCQ.	T	Biologie maritime.
G. JULIA	T	Mécanique analytique et Mécanique céleste.
C. MAUGUIN	T	Minéralogie.
A. MICHEL-LÉVY . .	T	Pétrographie.
H. BÉNARD	T	Mécanique expérimentale des fluides.
A. DENJOY.	T	Application de l'analyse à la Géométrie.
L. LUTAUD	T	Géographie physique et géologie dynamique.
Eugène BLOCH . . .	T	Physique théorique et physique céleste.
G. BRUHAT.		Physique.
E. DARMOIS.		Enseignement de Physique.
A. DEBIERNE	T	Physique générale et Radioactivité.
A. DUFOUR	T	Physique (P. C. B.).
L. DUNOYER		Optique appliquée.
A. GUILLIERMOND .	T	Botanique.
M. JAVILLIER. . . .		Chimie biologique.
L. JOLEAUD.		Paléontologie.
ROBERT-LÉVY. . . .		Zoologie.
F. PICARD.		Zoologie (Évolution des êtres organisés).
Henri VILLAT. . . .	T	Mécanique des fluides et applications.
Ch. JACOB	T	Géologie.
P. PASCAL	T	Chimie minérale.
M. FRÉCHET	T	Calcul différentiel et Calcul intégral.
E. ESCLANGON. . . .	T	Astronomie.
Mme RAMART-LUCAS	T	Chimie organique.
H. BÉGHIN	T	Mécanique physique et expérimentale.
FOCH.		Mécanique expérimentale des fluides.
PAUTHENIER		Physique (P. C. B.).
DE BROGLIE.	T	Théories physiques.
CHRÉTIEN.		Optique appliquée.
P. JOB		Chimie générale.
LABROUSTE		Physique du Globe.
PRENANT		Zoologie.
VILLEY		Mécanique physique et expérimentale.
BOHN		Zoologie (P. C. B.).
COMBES		Botanique (P. C. B.).
GARNIER.	T	Mathématiques générales.
PÉRÈS.		Mécanique des fluides.
HACKSPILL		Chimie (P. C. B.).
LAUGIER.		Physiologie générale.
TOUSSAINT.		Technique Aéronautique.
M. CURIE		Physique (P. C. B.).
G. RIBAUD.	T	Hautes températures.
CHAZY.	T	Mécanique rationnelle.
GAULT.		Chimie (P. C. B.).
CROZE.		Recherches. Physiques.
DUPONT.	T	Théories chimiques.
LANQUINE.		Géologie.
VALIRON.		Mathématiques générales.
BARRABÉ.		Géologie structurale et géologie appliquée.
MILLOT.		Zoologie (P. C. B.).
F. PERRIN		Théories physiques.
VAVON.		Chimie organique.
G. DARMOIS.		Calcul des probabilités et Physique mathématique.

Secrétaire . . . . A. PACAUD.

Secrétaire honoraire . . . . D. TOMBECK.

Sylvain WACHS

ESSAI

SUR LA

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

QUATERNIONIENNE

MÉMOIRE COURONNÉ PAR L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

BRUXELLES

MARCEL HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

112, Rue de Louvain, 112

1936

Extrait des *Mémoires*
publiés par l'Académie royale de Belgique (Classe des **Sciences**).

INTRODUCTION

Le présent travail a pour but de rechercher ce que deviennent les principaux résultats de la Géométrie projective complexe quand on remplace les quantités complexes par des quaternions.

Il y a là un domaine de recherches d'autant plus vaste qu'il est resté à peu près inexploré jusqu'à présent; seuls CARTAN, dans son livre : *Géométrie projective complexe* (1), et STUDY, dans son mémoire paru en 1923 au *Mathematische Zeitschrift* (2), s'occupent de la droite projective quaternionienne.

J'ai divisé ce mémoire en deux parties : la première, de nature algébrique, est un exposé de la théorie des systèmes d'équations linéaires unilatérales quaternioniennes avec application aux formes d'Hermite; la seconde est une modeste contribution à l'étude de la Géométrie de l'espace projectif quaternionien.

Je dois à la mémoire de Study de réparer une erreur que j'ai commise bien involontairement en publiant aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* le résultat de mes recherches sur la théorie des systèmes d'équations linéaires unilatérales quaternioniennes; la remarque du bas de la page 62 du mémoire précédemment cité, où cet éminent géomètre signale son travail (3) sur ces questions, m'avait échappé à ce moment.

---

(1) ELIE CARTAN, *Leçons sur la Géométrie projective complexe*. Paris, 1931 (Gauthier-Villars).

(2) STUDY, Ein Seitenstuck zur Theorie der linearen Transformationen einer komplexen Veranderiichen. I (*Math. Zeitschr.*, 18, 1923, pp. 55-86); II (*Ibid.*, pp. 201-229); III (*Ibid.*, 21, 1924, pp. 45-71); IV (*Ibid.*, pp. 174-194).

(3) STUDY, *Acta Mathematica*, 1920, t. 42, fasc. 1.

Cependant, j'ai cru devoir publier ici ces recherches, qui, par une voie totalement différente, m'ont conduit aux mêmes résultats que Study et, de plus, les complètent en quelques points, dont le plus important est d'établir l'égalité du nabla d'un système linéaire unilatéral quaternionien et du déterminant du système linéaire à éléments complexes ordinaires, auquel est équivalent tout système linéaire unilatéral quaternionien.

J'aurais voulu mettre en évidence dans cette première partie le caractère de discipline autonome de l'Algèbre quaternionienne, comme, dans la seconde partie, je m'efforce, autant que cela est possible, de faire apparaître ce même caractère dans la Géométrie de l'espace projectif quaternionien; j'ai dû cependant y renoncer pour éviter les longueurs de certaines démonstrations, bien que toutes les propriétés énoncées puissent s'établir directement.

Pour les lecteurs non familiarisés avec la Géométrie projective complexe, j'ai résumé très brièvement les éléments de cette Géométrie indispensables pour une bonne compréhension de ce travail.

Qu'il me soit permis d'adresser ici à M. le Prof^r^ Elie Cartan l'expression de ma profonde gratitude pour les nombreux et très précieux conseils qu'il a bien voulu me prodiguer au cours de toutes mes recherches.

Pour terminer, je veux exprimer toute ma reconnaissance à l'Académie royale, et tout spécialement à MM. Godeaux et Demoulin, pour l'honneur qu'Elle m'a fait en acceptant d'insérer ce travail dans son *Recueil des Mémoires*.

ESSAI

SUR LA GÉOMÉTRIE PROJECTIVE QUATERNIONIENNE

PREMIÈRE PARTIE

LES SYSTÈMES LINÉAIRES UNILATÉRAUX QUATERNIONIENS

CHAPITRE PREMIER

Préliminaires géométriques (¹).

§ 1. Notions et définitions fondamentales.

§ 2. L'homographie; sa forme réduite.

§ 3. Transformations involutives; antiinvolutions de seconde espèce.

I

1. Le point; le plan; principe de dualité. — Un *point* de l'espace projectif complexe à n dimensions est défini par l'ensemble de $n+1$ quantités complexes non toutes nulles qui sont appelées les coordonnées homogènes de ce point.

Deux points dont les coordonnées ne diffèrent que par un même facteur sont regardés comme identiques. S'il y

(¹) Pour les paragraphes 1 et 3 on se rapportera, pour plus de détails, au livre de M. Cartan, déjà cité, p. 3; pour ce qui concerne le paragraphe 2, où l'homographie est envisagée comme substitution linéaire, on lira avec intérêt ce que dit M. Van den Warden à ce sujet dans son livre : *Moderne Algebra;* cependant, cela n'est pas indispensable, puisque j'établis, dans le présent travail, toutes ces propriétés pour l'espace projectif quaternionien: les démonstrations restent valables a fortiori pour l'espace projectif complexe.

a lieu de distinguer deux points de coordonnées proportionnelles, nous dirons qu'ils définissent deux *points analytiques distincts* correspondant à un *même point géométrique*.

On appelle *plan* le lieu des points dont les coordonnées vérifient une relation linéaire à coefficients non tous nuls :

$$\sum_{i=1}^{n+1} u_i x_i = 0;$$

les u_i sont appelés les coordonnées homogènes du plan.

Comme les x et les u jouent dans cette équation un rôle symétrique, à tout théorème sur les points correspondra un théorème sur les plans; c'est ce que l'on a appelé le principe de dualité.

2. L'HOMOGRAPHIE; L'ANTIHOMOGRAPHIE. — On appelle *homographie* une transformation ponctuelle définie par une substitution linéaire sur les coordonnées

$$x'_i = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} x_j, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1)$$

où les coefficients sont des nombres complexes; mais pour que la transformation soit réversible il faut que l'on ait

$$| a_{ij} | \neq 0.$$

On appelle *antihomographie* une transformation ponctuelle de la forme

$$x'_i = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} \bar{x}_j, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1)$$

où l'on a désigné par $\bar{x}_j$ le nombre complexe conjugué de x_j et où l'on suppose aussi que le déterminant des coefficients a_{ij} est différent de zéro.

Au point de vue géométrique, deux homographies ou deux antihomographies dont les matrices se déduisent l'une de l'autre en multipliant tous les éléments de l'une d'elles par un même nombre sont identiques.

3. Système de coordonnées projectives. — Considérons $n+1$ points A_i de coordonnées respectives a_{ij}. Supposons que les points géométriques correspondants ne soient pas dans un même plan, c'est-à-dire que le déterminant

$$|a_{ij}| \neq 0.$$

Soit alors un point analytique M; on peut toujours le mettre sous la forme symbolique

$$M = \sum_{h=1}^{n+1} y_h A_h,$$

qui condense les $n+1$ relations

$$x_k = \sum_{h=1}^{n+1} y_h a_{hk}.$$

Les coefficients y_k sont alors parfaitement déterminés; ils peuvent être regardés comme constituant un nouveau système de coordonnées; d'ailleurs les divers points analytiques provenant d'un même point géométrique ont des coordonnées y_k dont les rapports mutuels sont fixes. Ainsi, une *homographie peut s'interpréter comme un changement de coordonnées*. Ces nouvelles coordonnées portent le nom de coordonnées projectives.

Les $n+1$ points géométriques A_i ne suffisent cependant pas à définir complètement le nouveau système de coordonnées; il faut en plus se donner un $(n+2)^{\text{ième}}$ point géométrique, non situé dans un même plan avec n des précédents, qui pourra être regardé, par un choix convenable des *points analytiques* A_i, comme ayant toutes ces nouvelles coordonnées égales à 1; ce point porte, pour cette raison, le nom de point unité; les points A_i sont les sommets d'un polyèdre appelé polyèdre de référence.

4. Transformations dualistiques; le groupe projectif. — On appelle *transformation dualistique* une correspondance biunivoque de point à plan et vice versa; on démontre que, si l'on désigne par C la correspondance biunivoque définie par

$$u'_i = x_i \qquad x'_i = u_i,$$

les transformations dualistiques forment deux familles distinctes : la première est celle des *corrélations* obtenues en multipliant la correspondance C par une homographie; la seconde est celle des *anticorrélations* obtenues en multipliant C par une antihomographie.

Les homographies et les corrélations forment les *projectivités;* les antihomographies et les anticorrélations forment les *antiprojectivités;* les projectivités et les antiprojectivités constituent un groupe appelé *groupe projectif.*

II

5. Équation caractéristique; équation minima. — Toute homographie S vérifie une équation F(S) de degré égal à l'ordre de sa matrice, définie par

$$F(z) = |S - z.E|,$$

E étant la matrice unitaire. Cette équation $F(z)$ est dite *équation caractéristique* de l'homographie S.

L'homographie S peut aussi vérifier des équations algébriques de degré inférieur à celui de $F(z)$; l'équation $f(z)$ de plus bas degré à laquelle satisfait S est dite l'*équation minima* de S. Ces résultats sont dus à Cayley [1]; Frobenius a établi [2] que l'équation $f(z) = 0$ admettait *toutes les racines* de l'équation $F(z)$, *chacune avec un ordre de multiplicité qui n'était jamais supérieur à celui de cette même racine relativement à* $F(z)$.

---

[1] Cayley, *Philos. Trans. Lond.*, 148 (1858), p. 24.
[2] Frobenius, *J. reine, angew. math.* (1878), p. 12.

6. Points et variétés caractéristiques. — Un point M est dit *point caractéristique* d'une homographie S si l'on peut trouver un nombre x et un entier h tels que l'on ait

$$(S - x \cdot E)^h \cdot M = 0 \qquad \text{et} \qquad (S - x \cdot E)^{h-1} \cdot M \neq 0.$$

On démontre que x doit être une racine de l'équation minima de S et que h ne peut être supérieur à l'ordre de multiplicité de x regardée comme racine de l'équation minima de S; on démontre alors que l'ensemble des points caractéristiques relatifs à une racine x de l'équation caractéristique d'ordre de multiplicité p forme une variété linéaire à $p - 1$ dimensions. On est conduit ainsi au théorème suivant, qui est fondamental :

Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une quantité* x *soit racine d'ordre de multiplicité* p *de l'équation caractéristique* F(S) *d'une homographie* S *est qu'il existe une variété linéaire à* p — 1 *dimensions dont chaque point soit point caractéristique de* S *relatif à* x *avec un exposant inférieur ou au plus égal à* p.

7. Forme réduite d'une homographie. — A l'aide de ce que nous venons de dire au dernier numéro, on démontre facilement que la matrice d'une homographie peut, par un choix convenable du polyèdre de référence, se ramener à une matrice de la forme suivante :

elle est décomposable en tableaux carrés; les tableaux non situés sur la diagonale principale ne sont formés que de zéros; un tableau de cette diagonale a tous ses éléments nuls, sauf ceux de sa diagonale principale, qui sont tous égaux à une racine de l'équation minima de cette homographie, les éléments de la diagonale consécutive, parallèle à la diagonale principale, étant égaux à 1, *les racines de l'équation minima figurant dans deux tableaux carrés de la diagonale principale pouvant être les mêmes.*

III

8. Projectivité et antiprojectivités involutives. — On dit qu'une projectivité ou une antiprojectivité est *involutive* lorsque le carré de cette transformation est l'opération identique. Une homographie involutive s'appelle *involution;* une antihomographie involutive s'appelle *antiinvolution;* une corrélation involutive s'appelle *polarité;* une anticorrélation involutive s'appelle *antipolarité.*

L'étude des antihomographies involutives conduit à distinguer les espaces projectifs complexes à un nombre pair de dimensions des espaces projectifs complexes à un nombre impair de dimensions. Dans les premiers, toute antiinvolution admet des points doubles; dans les seconds il existe des antiinvolutions qui n'ont aucun point double; ces antiinvolutions sont appelées antiinvolutions de seconde espèce.

9. Antiinvolutions de seconde espèce. — On démontre que ces antiinvolutions sont toutes homologues entre elles dans le groupe des homographies et que par un choix convenable du polyèdre de référence on peut toujours ramener leurs équations à avoir la forme canonique suivante :

$$x'_{2i+1} = \bar{x}_{2i+2}\,; \quad x'_{2i+2} = -\bar{x}_{2i+1}, \qquad (i = 0, 1, \ldots n'),$$

si l'on a posé auparavant $n = 2\,n' + 1$.

Il est évident que les *seules variétés linéaires qui peuvent être invariantes par une antiinvolution de seconde espèce sont les variétés linéaires à un nombre impair de dimensions*, car si une variété est invariante par une antiinvolution de seconde espèce, il existe à l'intérieur de cette variété une antiinvolution de seconde espèce; donc cette variété est nécessairement à un nombre impair de dimensions.

Il sera commode pour la suite de ce travail de garder le nom *d'anticongruence linéaire* à l'ensemble des droites invariantes par une antiinvolution de seconde espèce. (Nous ne justifierons pas cette dénomination, dans laquelle il ne faut voir ici qu'une commodité de langage et une généralisation de la terminologie adoptée par M. CARTAN dans son livre, où il la légitime grandement pour l'espace à trois dimensions.)

CHAPITRE II

Étude algébrique.

I

10. DÉFINITIONS. — Un quaternion est défini, pour nous, comme un nombre hypercomplexe à trois unités principales : e_1, e_2, e_3, de la forme

$$X = x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3, \tag{1}$$

les x_i étant des *nombres réels*. Les unités e_i sont liées par les relations bien connues

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -1,$$
$$e_1 e_2 = -e_2 e_1 = e_3 ; \qquad e_1 e_3 = -e_3 e_1 = e_2,$$
$$e_2 e_3 = -e_3 e_2 = e_1,$$

Il est important de remarquer que ce système hypercomplexe *ne contient pas de diviseurs de zéro*.

Nous appellerons *quaternion réduit* relatif à l'unité principale e_i tout quaternion dont les coefficients des deux autres unités sont nuls. Au point de vue du calcul, les quaternions réduits relatifs à la même unité principale sont assimilables à des nombres complexes ordinaires. Il est facile de voir que tout quaternion X peut être défini sans ambiguïté par deux quaternions réduits relatifs à la même unité; en effet, on a

$$(2) \qquad X = (x_0 + e_1 x_1) + e_3 (x_3 - e_1 x_2) = z_0 + e_3 z_1,$$

en posant

$$z_0 = x_0 + e_1 x_1 ; \qquad z_1 = x_3 - e_1 x_2 .$$

Désormais nous désignerons la partie complexe z_0 d'un quaternion par la même lettre que ce quaternion, mais accentuée une fois ($'$), tandis que pour la partie hypercomplexe nous emlpoierons aussi la même lettre, mais accentuée deux fois ($''$).

Comme nous l'avons fait au chapitre précédent, nous désignerons la quantité conjuguée d'une quantité complexe ordinaire z par la notation $\bar{z}$. De même le *quaternion conjugué* d'un quaternion X sera désigné par $\overline{X}$ et sera, par définition, le quaternion

$$\overline{X} = x_0 - e_1 x_1 - e_2 x_2 - e_3 x_3 .$$

La *norme* du quaternion X est par définition la somme des carrés des x_i et est notée N(X) :

$$N(X) = N(\overline{X}) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = X \cdot \overline{X} = \overline{X} \cdot X.$$

Rappelons que le conjugué d'un produit de facteurs s'obtient en faisant le produit des conjugués des facteurs, sans oublier de *renverser leur ordre*. Indiquons maintenant la proposition suivante, dont la vérification est immédiate :

Si z est un quaternion réduit relatif à l'unité e_i, on a

$$e_j z = \bar{z}\, e_j . \qquad (i \neq j)$$

Tout quaternion X satisfait à une équation algébrique du second degré à coefficients réels, que l'on appelle *équation au rang* ou *équation caractéristique* du quaternion (¹)

$$X^2 - 2x_0 X + N(X) = 0.$$

Pour le prouver, il suffit de remarquer que

$$2x_0 = X + \overline{X}.$$

On déduit de là que toute équation algébrique à coefficients réels qui admet au moins une racine *imaginaire* admet aussi une *infinité de racines quaternioniennes.*

En effet, soit

$$F(z) = \sum_{p=1}^{m} A_p z^p = 0$$

l'équation donnée, de degré m, où les A sont réels et qui admet au moins une racine imaginaire; on peut encore l'écrire sous la forme

$$F(z) = A_m \prod_i (z - z_i)^{h_i} \cdot (z^2 - 2p_i z + q_i)^{k_i},$$

où les z_i, p_i, q_i sont réels et où

$$p_i^2 - q_i < 0.$$

Cela étant, pour que $F(z)$ soit nulle, il faut et il suffit que l'un des facteurs de décomposition soit nul; si z est un quaternion, cela ne peut arriver que si z a un des facteurs du second degré de la décomposition de $F(z)$ comme équation au rang, car, nous l'avons déjà dit, les quaternions tels que nous les avons définis forment un système hypercomplexe dénué de diviseurs de zéro; d'autre part, il est aisé de voir que tous les quaternions ayant pour équation au rang un trinome du second degré donné forment une famille à deux paramètres réels; notre assertion est donc établie. Nous dirons que deux quaternions sont *équivalents* quand ils auront la même équation au rang.

11. Systèmes linéaires unilatéraux. — On appelle système linéaire unilatéral quaternionien un système

(¹) Hamilton, *Trans. Irish. Acad.*, 21 (1848), p. 269.

linéaire dans lequel les coefficients et les variables sont des quaternions et où de plus *les variables sont toutes d'un même côté par rapport aux coefficients.* Un système *à droite* sera de la forme

$$\text{(I)} \qquad \mathrm{Y}_i = \sum_{j=1}^{n} a_j^i \mathrm{X}^j . \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Un système *à gauche* sera de la forme

$$\text{(II)} \qquad \mathrm{Y}_i = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{X}^j b_j^i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Un système à gauche peut toujours être ramené à un système à droite en prenant les conjugués des deux membres de chaque équation du système à gauche; cette remarque nous permet, tout au moins au point de vue de la résolution, de nous borner aux systèmes à doite.

Si, conformément aux notations que nous avons adoptées au numéro précédent, nous posons

$$\mathrm{Y}^i = \mathrm{Y}'^i + e_3 \mathrm{Y}''^i \; ; \quad \mathrm{X}^j = \mathrm{X}'^j + e_3 \mathrm{X}''^j \; ; \quad a_j^i = a'^i_j + e_3 a''^i_j ,$$

en portant ces valeurs dans le système I, après développement et identification des parties complexes et hypercomplexes, on obtient

$$\text{(III)} \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{Y}'^i &= \sum_{j=1}^{n} a'^i_j \mathrm{X}'^j - \overline{a''^i_j} \mathrm{X}''^j , \\ \mathrm{Y}''^i &= \sum_{j=1}^{n} h''^i_j \mathrm{X}'^j + \overline{a'^i_j} \mathrm{X}''^j . \end{aligned} \right. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Ce système III, dit *système résolvant* du système I, a tous ses coefficients et inconnues assimilables à des quantités complexes ordinaires.

Si l'on considère les X′ et X″ avec le même indice supérieur, comme les coordonnées homogènes consécutives d'un point de l'espace projectif complexe à $2n - 1$ dimensions, le système III définit une homographie de cet espace, qui jouit, comme le montre un calcul facile, d'une propriété remarquable : *elle laisse invariante l'antiinvo-*

tion de seconde espèce réduite à sa forme canonique. Cette antiinvolution, qui jouera un rôle fondamental dans tout ce travail, sera nommée *antiinvolution absolue*, et l'ensemble des droites invariantes par cette antiinvolution absolue prendra le nom d'*anticongruence linéaire absolue.*

II

Nous allons établir dans ce paragraphe l'existence d'une fonction (fonction Nabla) des éléments du tableau des coefficients d'un système à droite dont la connaissance permet de résoudre ce système.

Notre moyen de recherches est basé uniquement sur le principe de récurrence.

Study, dans son mémoire des *Acta mathematica* déjà mentionné, s'occupe d'abord du cas $n=2$ pour lequel il établit l'existence de cette fonction d'une manière tout à fait empirique et généralise au cas de n entier quelconque d'une façon non moins empirique. Ici nous supposerons que l'on sait résoudre le système à $n-1$ inconnues et nous montrerons comment on peut résoudre le système à n inconnues. Mais il nous faut justifier auparavant que nous savons résoudre l'équation

$$a\mathrm{X} = \mathrm{Y}.$$

Il suffit pour cela de multiplier les deux membres de cette relation à gauche par $\bar{a}$; il vient

$$a\bar{a}\,\mathrm{X} = \bar{a}\,\mathrm{Y} = \mathrm{N}(a)\,\mathrm{X};$$

d'où, comme $\mathrm{N}(a)$ est un scalaire,

$$\mathrm{X} = \bar{a}\,\mathrm{Y} \neq \mathrm{N}(a).$$

Nous appellerons forme d'Hermite quaternionienne à droite l'expression scalaire

$$\sum_{,j} \bar{z}_i\, a_{ij}\, z_j,$$

où

$$a_{ij} = \bar{a}_{ji};$$

de là résulte que a_{ii} est un scalaire.

Admettons, enfin, que le nabla d'un système à $n-1$ inconnues soit une forme d'Hermite à droite par rapport aux éléments d'une colonne du tableau des coefficients du système.

12. Définition du nabla. — Considérons le tableau des coefficients du système I :

$$(\mathrm{T}) \quad \left| \begin{array}{cccccccccc} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_i^1 & \dots & a_h^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_i^2 & \dots & a_h^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_1^i & a_2^i & \dots & a_i^i & \dots & a_h^i & \dots & a_n^i \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_1^h & a_2^h & \dots & a_i^h & \dots & a_h^h & \dots & a_n^h \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_i^n & \dots & a_h^n & \dots & a_n^n \end{array} \right.$$

Considérons alors la forme d'Hermite à droite, qui sera, par définition, le *nabla du système* I :

$$(1) \qquad \sum_{h,k} \overline{a_i^h}\, \mathrm{A}_{hk}^i\, a_k^i = \nabla = \{a_m^j\}.$$

Nous allons montrer que l'on peut déterminer les n^2 paramètres A^i_{hk} de façon que l'on puisse résoudre le système I.

Pour cela, il importe de préciser d'abord ce qu'il faut entendre par *dérivée partielle de nabla* : la dérivée partielle de nabla par rapport à a^k_i sera alors, par définition, la dérivée partielle ordinaire de la forme d'Hermite, où l'on regarde a^k_i et $\overline{a^k_i}$ comme *variables indépendantes* :

$$(2) \qquad \frac{\partial \nabla}{\partial a_i^k} = \sum_h \overline{a_i^h}\, \mathrm{A}_{hk}^i.$$

Avec cette convention on a

$$(3) \qquad \nabla = \sum_k \frac{\partial \nabla}{\partial a_i^k}\, a_i^k.$$

Cela étant, multiplions à droite la $p^{\text{ième}}$ équation du système I par $\frac{\partial\nabla}{\partial a_i^p}$; donnons à p toutes les valeurs entières 1, 2, 3, ..., n et ajoutons membre à membre toutes les équations ainsi obtenues; on aura

$$\sum_{r=1}^{n}\left[\sum_{p=1}^{n}\frac{\partial\nabla}{\partial a_i^p}a_r^p\right]X_r=\sum_{p=1}^{n}\frac{\partial\nabla}{\partial a_i^p}Y_p. \tag{4}$$

Si nous tenons compte maintenant de la relation (3), l'équation (4) devient

$$\sum_{r\neq i}{}_1^n\left[\sum_{p=1}^{n}\frac{\partial\nabla}{\partial a_i^p}a_r^p\right]X_r+\nabla X_i=\sum_{p=1}^{n}\frac{\partial\nabla}{\partial a_i^p}Y_p. \tag{5}$$

Si nous imposons aux A'^{i}_{hk} la condition de vérifier les relations

$$\sum_{p=1}^{n}\frac{\partial\nabla}{\partial a_i^p}a_r^p=0, \tag{6}$$

nous pourrons alors tirer X_i de la relation (5) et ainsi nous aurons résolu le système I.

Remplaçons donc $\frac{\partial\nabla}{\partial a_i^p}$ par sa valeur dans la relation (6) :

$$\sum_{p=1}^{n}\left[\sum_{s=1}^{n}\overline{a_i^s}\,A_{sp}^i\right]a_r^p=0. \tag{7}$$

Si nous assujettissons les A'^{i}_{sp} à être indépendants des termes de la colonne de rang i du tableau (T) (ce qui est du reste le cas si nabla est effectivement une forme d'Hermite par rapport aux éléments de cette colonne), la relation précédente entraînera la suivante :

$$\sum_{p=1}^{n}A_{sp}^i\,a_r^p=0, \tag{8}$$

et ceci quels que soient s et $r\neq i$; ce qui peut encore s'écrire

$$\sum_{p\neq r}{}_1^n A_{sp}^i\,a_r^p=-A_{ss}^i\,a_r^s,$$

ou encore, en prenant les conjugués des deux membres pour avoir un système à droite,

$$\sum_{p\neq r}{}_1^n\overline{a_r^p}\,\overline{A_{sp}^i}=-\overline{a_r^s}\,\overline{A_{ss}^i}. \tag{9}$$

Si s est donné et que l'on donne à r toutes les valeurs entières 1, 2, 3, ..., n, i excepté, on aura $n - 1$ équations linéaires unilatérales entre les A^i_{sp} que, *par hypothèse*, nous savons résoudre. Nous désignerons le système (9) par S_s pour rappeler que s est fixé.

13. Les systèmes S_s définissent bien une forme d'Hermite. — En réalité le système S_s a $n - 1$ équations et n inconnues; mais puisque nabla est une forme d'Hermite, donc un scalaire, A^i_{ss} doit être aussi un scalaire; nous le prendrons égal au nabla du système S_s.

Il nous faut prouver maintenant que le nabla défini par (1) est bien une forme d'Hermite, c'est-à-dire que les systèmes S_s (s variant) sont compatibles avec la condition

$$A^i_{sk} = \overline{A^i_{ks}}.$$

Considérons à cet effet le tableau des coefficients du système S_s : c'est le mineur du tableau transposé du tableau (T) après conjugaison de tous les éléments obtenus en supprimant la ligne de rang i et la colonne de rang s. Le nabla du système S_s sera alors de la forme

$$A^i_{ss} = \nabla_{n-1} = \sum_t \sum_u a^k_t \, B^k_{tu} \, \overline{a^k_u}. \quad (t \text{ et } u \neq i \text{ ainsi que } k)$$

On tire de là

$$A^i_{sk} = - \sum_{t \neq i} a^s_t \frac{\partial \nabla_{n-1}}{\partial a^t_k},$$

ou, en développant,

$$A^i_{sk} = - \sum_{t \neq i} a^s_t \left[\sum_{u \neq i} B^k_{tu} \overline{a^k_u} \right],$$

ou encore

$$A^i_{sk} = - \sum_{t \neq i} \sum_{u \neq i} a^s_t \, B^k_{tu} \, \overline{a^k_u}. \tag{10}$$

Considérons maintenant le tableau des coefficients du système S_k : il se déduit de (T), comme celui de S_s s'en déduisait, c'est-à-dire en supprimant la ligne de rang k

et la colonne de rang i; de sorte que si l'on supprime la ligne de rang k dans le tableau de S_s et la ligne de rang s dans celui de S_k, les tableaux rectangulaires restants sont *identiques*. Le nabla de S_k est

$$(11) \qquad A^i_{kk} = \nabla'_{n-1} = \sum_{v\neq i} \sum_{w\neq i} a^s_v C^s_{vw} \overline{a^s_w} \cdot \quad (\text{où } s, v, w \text{ sont } \neq i).$$

Il est clair que, puisque les tableaux rectangulaires dont nous venons de parler sont identiques et que les $B^s{}_{tu}$ et les les $C^k{}_{vw}$ sont *une même fonction des éléments de ces tableaux rectangulaires*, on a

$$(12) \qquad B^s_{tu} = C^k_{tu}.$$

Le système S_k donne

$$A^i_{ks} = -\sum_{t\neq i} a^k_t \frac{\partial \nabla'_{n-1}}{\partial a^t_s} = -\sum_{t\neq i} a^k_t \left[\sum_{u\neq i} C^s_{tu} \overline{a^s_u}\right],$$

ou, en tenant compte de la formule (12), qui peut encore s'écrire, puisque par hypothèse le nabla d'un système à $n-1$ inconnues est effectivement une forme d'Hermite,

$$B^s_{tu} = \overline{B^s_{ut}} = C^k_{tu} = \overline{C^k_{ut}},$$

on a

$$\overline{A^i_{sk}} = -\sum_{t\neq i}\sum_{u\neq i} \overline{a^s_t B^k_{tu} \overline{a^k_u}} = -\sum_{u\neq i}\sum_{t\neq i} a^k_u B^k_{ut} \overline{a^s_t} = -\sum_{t\neq i}\sum_{u\neq i} a^k_u C^s_{ut} \overline{a^s_t} = A^i_{ks}.$$

Nabla, tel qu'il a été défini, est donc bien une forme d'Hermite.

14. La valeur de nabla reste la même quel que soit i. — Nous allons montrer maintenant que la valeur scalaire de nabla ne dépend pas du rang de la colonne par rapport à laquelle on le développe.

Nous allons pour cela passer par l'intermédiaire du système résolvant III. Le déterminant de ce système est d'ordre $2n$; il est défini par

$$b^{2h-1}_{2i-1} = a'^h_i; \qquad b^{2h-1}_{2i} = -\overline{a''^h_i}; \qquad b^{2h}_{2i-1} = a''^h_i; \qquad b^{2h}_{2i} = \overline{a'^h_i}.$$

Développons-le par rapport aux éléments de la colonne de rang $2i$; on a

$$(13) \qquad \Delta = \sum_{j=1}^{2n} b_{2i}^{j} \mathrm{R}_{2i}^{j},$$

Δ étant ce déterminant et R_{2i}^{j} étant le mineur relatif à b_{2i}^{j}; développons à son tour ce mineur par rapport aux éléments de la colonne de rang $2i - 1$; on a

$$(14) \qquad \mathrm{R}_{2i}^{j} = \sum_{m \neq j}^{2n} b_{2i-1}^{m} \mathrm{T}_{2i,2i-1}^{j,m},$$

$\mathrm{T}_{2i,2i-1}^{j,m}$ étant le mineur de R_{2i}^{j} relatif à b_{2i-1}^{m}; ces T sont liés par les relations suivantes :

$$(15) \qquad \sum_{m \neq j}^{2n}{}_{1}\; b_{v}^{m} \mathrm{T}_{2i,2i-1}^{j,m} = 0,$$

quel que soit v, différent de $2i$ et de $2i - 1$. En tenant compte de la formule (14) dans l'expression (13), on a

$$(16) \qquad \sum_{j \neq 1}^{2n} \sum_{m \neq j} b_{2i}^{j} b_{2i-1}^{m} \mathrm{T}_{2i,2i-1}^{j,m} = \Delta.$$

Revenons à nabla; posons

$$a_i^h = a'^h_i + e_3 a''^h_i; \qquad \mathrm{A}^i_{hk} = \mathrm{A}'^i_{hk} + e_3 \mathrm{A}''^i_{hk}$$

et remplaçons dans la formule (1), définition de nabla; on trouve sans peine

$$\nabla = \sum_{h,k} \left[\overline{a'^h_i} \mathrm{A}'^i_{hk} a'^k_i + \overline{a''^h_i} \mathrm{A}''^i_{hk} a'^i_k + \overline{a''^h_i} \overline{\mathrm{A}'^i_{hk}} a''^k_i - \overline{a'^h_i} \overline{\mathrm{A}''^{hk}_i} a''^k_i \right].$$

Posons

$$\mathrm{A}'^i_{hk} = \mathrm{B}_{2i,\,2i-1}^{2h,\,2k-1}; \qquad \mathrm{A}''^i_{hk} = -\,\mathrm{B}_{2i,\,2i-1}^{2h-1,\,2k-1};$$

$$\overline{\mathrm{A}'^i_{hk}} = -\,\mathrm{B}_{2i\;,\,2i-1}^{2h-1,\,2k}; \qquad \overline{\mathrm{A}''^{hk}_i} = -\,\mathrm{B}_{2i,\,2i-1}^{2h,\,2k};$$

portons alors ces valeurs dans l'expression de nabla que nous venons de trouver, en y remplaçant au préalable les a, a', a'' par leur valeur en fonction des b; on trouve

$$(17) \qquad \Delta = \sum_{h=1}^{2n} \sum_{k=1}^{2n} b_{2i}^{h} \mathrm{B}_{2i,2i-1}^{h,k} b_{2i-1}^{k}.$$

Supposons, pour un instant, que les B soient égaux aux T de mêmes indices; je dis qu'alors $\Delta = \nabla$.

En effet, les formules (16) et (17) contiennent le même nombre de termes; la formule (16) contient $4n^2 - 2n$ termes et la formule (17) en contient $4n^2$; mais sur ces $4n^2$ il y en a $2n$ de nuls, car le fait que A'^i_{hh} est un scalaire entraîne que

$$A''^i_{hh} = \overline{A''^i_{hh}} = 0$$

La formule (17) s'écrit alors

$$(18) \qquad \sum_{h=1}^{2n} \sum_{k \neq h} b^k_{2i-1} b^h_{2i} B^{h,k}_{2i,2i-1} = \nabla.$$

La formule (18) est alors identique à la formule (16) : $\nabla = \Delta$.

Il nous reste donc seulement à démontrer l'égalité des B et des T. Pour cela, cherchons comment sont définis directement les B. Remplaçons, à cet effet, les a et les A par leur valeur dans les relations de définition (8); on obtient

$$(19) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} A'^i_{hk} a'^k_r - \overline{A''^i_{hk}} a''^k_r = 0; \\ &\sum_{k=1}^{n} A''^i_{hk} a'^k_r + \overline{A'^i_{hk}} a''^k_r = 0; \end{aligned} \right.$$

en remplaçant dans ces relations les a et les A par leur valeur en fonction des b et des B, on a

$$(20) \qquad \sum_{k=1}^{n} b^{2k-1}_{2r-1} B^{2h,2k-1}_{2i,2i-1} + b^{2k}_{2r-1} B^{2h,2k}_{2i,2i-1} = 0,$$

$$(21) \qquad \sum_{k=1}^{n} b^{2k}_{2r} B^{2h,2k}_{2i,2i-1} + b^{2k-1}_{2r} B^{2h,2k-1}_{2i,2i-1} = 0.$$

Ces deux relations peuvent encore s'écrire sous forme plus condensée :

$$\sum_{\substack{s \neq 2h \\ 1}}^{2n} b^s_{2r-1} B^{2h,s}_{2i,2i-1} = 0; \qquad \sum_{\substack{s \neq 2h \\ 1}}^{2n} b^s_{2r} B^{2h,s}_{2i,2i-1} = 0.$$

Ces relations, qui ont lieu quel que soit $r \neq i$, peuvent se résumer en une seule :

$$(22) \qquad \sum_{\substack{s \neq 2h \\ 1}}^{2n} b_w^s \mathrm{B}_{2i,2i-1}^{2h,s} = 0 \text{ (quel que soit } w \neq 2i-1 \text{ et } 2i).$$

Les B dont le premier indice supérieur est pair vérifient donc les mêmes relations que les T dont le premier indice supérieur est pair. Nous allons montrer qu'il en est de même pour les indices impairs.

Les relations (19) peuvent encore s'écrire

$$\sum_{k=1}^{n} [-\overline{\mathrm{A}_{hk}^{\prime i}}\, \overline{a_r^{\prime k}} + \mathrm{A}_{hk}^{\prime\prime i} \overline{a_r^{\prime\prime k}}] = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} [-\mathrm{A}_{hk}^{\prime\prime i}\, a_r^{\prime k} - \overline{\mathrm{A}_{hk}^{\prime i}} a_r^{\prime\prime k}] = 0,$$

ou, en remplaçant les a et les A par leur valeur en fonction des b et B,

$$\sum_{k=1}^{n} [b_{2r}^{2k} \mathrm{B}_{2i,2i-1}^{2h-1,2k} + b_{2r}^{2k-1} \mathrm{B}_{2i,2i-1}^{2h-1,2k-1}] = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_{2r-1}^{2k-1} \mathrm{B}_{2i,2i-1}^{2h-1,2k-1} + b_{2r-1}^{2k} \mathrm{B}_{2i,2i-1}^{2h-1,2k} = 0.$$

Ces deux relations peuvent se résumer comme précédemment en une seule :

$$(23) \qquad \sum_{\substack{s \neq 2h-1 \\ 1}}^{2n} b_w^s \mathrm{B}_{2i,2i-1}^{2h-1,s} = 0 \text{ (quel que soit } w \neq 2i-1 \text{ et } 2i).$$

Les formules (22) et (23) peuvent à leur tour se condenser en une seule :

$$\sum_{\substack{s \neq t \\ 1}}^{2n} b_w^s \mathrm{B}_{2i,2i-1}^{t,s} = 0,$$

quel que soit t pair ou impair et w différent de $2i-1$ et de $2i$.

Les B et les T sont donc définis par les mêmes relations linéaires et homogènes; c'est donc que

$$\mathrm{B}_{2i,2i-1}^{t,s} = m\,\mathrm{T}_{2i,2i-1}^{t,s},$$

m étant un facteur constant; il en résulte que ∇ et Δ sont égaux à un facteur constant près. Pour avoir la valeur de ce facteur il suffit évidemment de donner aux a des valeurs particulières; prenons

$$a^i_j = 0,$$

pour $i \neq j$ et a^i_i quelconque non nul. Alors

$$\overline{a^i_i}\, A^i_{ii}\, a^i_i = \nabla.$$

A^i_{ii} est un nabla qui jouit manifestement de la même propriété que ∇, à savoir d'avoir tous ses éléments nuls, sauf ceux de la diagonale principale; on voit aisément alors que

$$\nabla = \prod_i a^i_i \overline{a^i_i}.$$

Le déterminant Δ est décomposable en tableaux carrés de deux éléments, tous les carrés non situés sur la diagonale principale étant formés uniquement de zéros; il est de la forme symbolique

$$\begin{vmatrix} a'^i_i & -\overline{a''^i_i} \\ a''^i_i & \overline{a'^i_i} \end{vmatrix}.$$

La règle de Laplace donne immédiatement

$$\Delta = \prod_i (a'^i_i \overline{a'^i_i} + a''^i_i \overline{a''^i_i});$$

la parenthèse est manifestement égale à $a^i_i\, \overline{a^i_i}$; donc le facteur numérique est égal à 1 et par conséquent

$$\nabla = \Delta.$$

Nous voyons par là combien est étroit le lien entre les substitutions linéaires unilatérales quaternioniennes et les homographies de l'espace projectif complexe qui laissent invariante l'antiinvolution de seconde espèce réduite à sa forme canonique. Il est donc intéressant d'étudier de plus près ces homographies.

15. Recherche des homographies de l'espace projectif complexe a $2n - 1$ dimensions qui laissent invariante

L'ANTIINVOLUTION ABSOLUE. — Nous désignerons par A la matrice de l'antiinvolution de seconde espèce réduite à sa forme canonique; si l'on désigne par $\overline{M}$. le point de l'espace projectif complexe dont les coordonnées sont les conjugués de celles de M, et par M′ le point homologue de M par l'antiinvolution absolue, on aura

$$M' = A \cdot \overline{M}.$$

Cela étant, si $\mathcal{H}$ désigne une homographie de l'espace projectif complexe, pour que cette homographie laisse invariante l'antiinvolution considérée, il faut et il suffit que

$$H \cdot A = m \cdot A \cdot \overline{H}, \tag{1}$$

H étant la matrice de l'homographie $\mathcal{H}$, $\overline{H}$ la matrice formée avec les éléments conjugués des éléments de la matrice H et m un nombre convenablement choisi; c'est ce que l'on voit facilement en écrivant que deux points homologues par l'antiinvolution sont transformés par l'homographie en deux points qui sont encore homologues par l'antiinvolution.

La condition (1) donne

$$\overline{H} \cdot \overline{A} = \overline{m} \cdot \overline{A} \cdot H,$$

ou, en remarquant que $\overline{A} = A$,

$$\overline{H} \cdot A = \overline{m} \cdot A \cdot H. \tag{2}$$

Multiplions à droite et à gauche les deux membres de cette relation par A; il vient, en tenant compte de ce que $A^2 = -1$,

$$\overline{A} \cdot H = \overline{m} \cdot H \cdot A.$$

En portant cette valeur de $A\overline{H}$ dans la relation (1), on trouve facilement la condition

$$\overline{m} \cdot m = 1; \tag{3}$$

m doit donc être de module 1.

Si l'on multiplie tous les éléments de la matrice H par un même nombre non nul, on ne change pas l'homographie $\mathcal{H}$; on peut donc toujours supposer, sans nuire à la généralité, $m=1$. La condition cherchée est alors

$$\text{(4)} \qquad H \cdot A = A \cdot \overline{H}.$$

L'homographie $\mathcal{H}$ est alors parfaitement définie à un facteur réel près. Nous allons montrer maintenant que le déterminant d'une telle homographie est réel et n'est jamais négatif.

La condition (4) montre que l'on a aussi

$$\text{(5)} \qquad H^q \cdot A = A \cdot \overline{H}^q.$$

Appliquons le théorème de la page 9 (chap. I, § 2, n° 6), et soit x une racine imaginaire d'ordre de multiplicité p de l'équation caractéristique de l'homographie $\mathcal{H}$; d'après ce théorème, il existe une variété linéaire V à $p-1$ dimensions dont chaque point est point caractéristique d'ordre au plus égal à p, c'est-à-dire que si M désigne un point de cette variété, on a

$$\text{(6)} \qquad (H - xE)^r \cdot M = 0, \qquad (r \leq p)$$

E étant la matrice unitaire. Calculons $(H - \bar{x}E)^r . M'$, M' étant l'homologue de M par l'antiinvolution $M' = A . \overline{M}$. On a

$$(H - \bar{x} E)^r \cdot A \cdot \overline{M} = A \cdot (\overline{H} - \bar{x} E)^r \cdot \overline{M};$$

comme on le voit aisément en tenant compte de (5), la relation (6) montre que le second membre est nul; donc M' est point caractéristique de $\mathcal{H}$ d'ordre r inférieur ou au plus égal à p relativement à $\bar{x}$; donc, en vertu du même théorème de la page 9, que nous avons déjà invoqué, $\bar{x}$ est racine d'ordre de multiplicité p de l'équation caractéristique de $\mathcal{H}$. Il est clair que le lieu du point M' est la variété V' homologue de la variété V par l'antiinvolution; si x' est une racine réelle de l'équation caractéristique de $\mathcal{H}$, elle coïncide avec sa conjuguée; donc les deux variétés V et V' doivent être confondues : V doit donc être invariant par l'antiinvolution absolue et par conséquent V est à un nombre impair de dimensions; donc, enfin, x' est d'ordre pair de multiplicité.

Il résulte de là que le produit des racines de l'équation caractéristique de H est réel et n'est jamais négatif, ce produit étant égal au déterminant de l'homographie $\mathcal{H}$; ce déterminant est donc réel et n'est jamais négatif. Nabla, qui est égal à ce déterminant, jouit donc de la même propriété.

16. Résumé des résultats obtenus dans ce paragraphe. — A tout système linéaire unilatéral à droite on peut attacher une forme d'Hermite à droite définie positive par rapport aux éléments d'une colonne du tableau de ses coefficients. Cette forme a une valeur scalaire indépendante du rang de la colonne par rapport à laquelle on la développe. La connaissance de cette forme permet de résoudre le système; si

$$\nabla = \sum_{h} \sum_{k} \overline{a_i^h}\, A_{hk}^i\, a_i^k$$

X^i est donné par

$$X^i = 1/\nabla \left[\sum_{h} \frac{\partial \nabla}{\partial a_i^h} Y^h.\right]$$

A un système linéaire unilatéral à gauche on peut attacher une forme d'Hermite à gauche définie positive par rapport aux éléments d'une colnne du tableau de ses coefficients. Cette forme a une valeur scalaire indépendante du rang de la colonne par rapport à laquelle on la développe. La connaissance de cette forme permet de résoudre le système; si

$$\nabla = \sum_{h} \sum_{k} b_i^h\, B_{hk}^i\, \overline{b_i^k}$$

X^i est donné par

$$X^i = 1/\nabla \left[\sum_{h} Y^h \frac{\partial \nabla}{\partial b_i^h}\right].$$

Il résulte immédiatement de là le théorème :

Théorème fondamental. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un système linéaire quaternionien unilatéral et homogène ait des solutions non identiquement nulles est que le nabla de ce système soit nul.*

Cette proposition ne fait en somme que résumer sous une nouvelle forme les résultats que nous venons d'obtenir.

III

Le rôle joué par nabla dans la résolution des systèmes linéaires unilatéraux quaternioniens nous incite à regarder cette fonction comme remplaçant les déterminants dans l'Algèbre quaternionienne. Les propriétés que nous allons établir dans ce paragraphe rendront l'analogie des nabla et des déterminants encore plus étroite.

17. Étude sommaire des matrices quaternioniennes. — Pour nous une telle matrice sera essentiellement le tableau des coefficients d'un système linéaire unilatéral quaternionien. La connaissance de ce tableau ne détermine pas complètement la matrice; il faut encore se donner la nature du système (à droite ou à gauche); cette nature sera désignée désormais par l'indice d ou g; cependant, quand aucune confusion ne sera possible nous supprimerons cet indice.

Nous appelons *matrice réciproque* d'une matrice donnée la matrice formée avec les dérivées partielles du nabla de cette matrice, chacune étant divisée par ce nabla.

La matrice obtenue en changeant dans une matrice donnée S les lignes en colonnes et les colonnes en lignes sera nommée, suivant l'usage, la *matrice transposée* de S et désignée par S'.

La *matrice conjuguée* d'une matrice donnée S sera la matrice obtenue en remlpaçant chaque terme de S par son conjugué; nous la désignerons par $\overline{S}$.

Dans toutes les définitions qui précèdent les matrices sont supposées se rapporter à des systèmes de même nature.

On appelle produit de deux matrices (attachées à des systèmes de même nature) une matrice de même nature définie de la façon suivante : si l'on pose

$$S_1 = (a_j^i); \qquad S_2 = (b_k^h); \qquad S_3 = S_1 \cdot S_2 = (c_t^s),$$

on a

$$c_t^s = \sum_u a_u^s\, b_t^u \text{ pour le produit de deux matrices à droite;}$$

$$c_t^s = \sum_u b_t^u\, a_u^s \text{ pour le produit de deux matrices à gauche.}$$

Avec ces définitions du produit de deux matrices il est facile de voir que deux matrices réciproques sont inverses l'une de l'autre, c'est-à-dire que leur produit est la matrice unité.

Théorème I. — *Le nabla d'une matrice produit de deux matrices est égal au produit des nabla de ces matrices.*

Si l'on considère les déterminants auxquels sont respectivement égales ces matrices et la loi de multiplication précédemment indiquée, on voit aisément, en remplaçant dans cette loi les quaternions par leur valeur en fonction des quaternions réduits qui les définissent, que cette dite loi est celle de multiplication des déterminants; notre théorème est donc établi.

Remarque importante. — Alors qu'à toute règle de calcul valable pour les quantités complexes on peut faire correspondre une règle de calcul convenablement choisie pour les quaternions, il n'en est plus de même avec les matrices quaternioniennes; par exemple, le théorème sur la transposition d'une matrice produit de deux matrices à éléments complexes n'a pas d'équivalent avec les matrices quaternioniennes; cela montre avec quelle précaution il convient de manier les matrices quaternioniennes.

Donnons encore une définition, celle d'une matrice hermitique : On appelle *matrice hermitique* une matrice dont les éléments (quaternions) vérifient tous la relation

$$a^i_j = \varepsilon\, \bar{a}^j_i, \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

si $\varepsilon = +1$ la matrice est dite du premier genre; si $\varepsilon = -1$ la matrice est dite du second genre. Sans insister davantage sur cette question, puisque nous y reviendrons en détail à propos des formes d'Hermite quaternioniennes, disons seulement que le nabla d'une matrice hermitique est égal au nabla de la matrice conjuguée transposée.

18. Propriétés immédiates du nabla. — Ce que nous venons de voir nous conduit à attribuer au nabla les propriétés suivantes :

I. Nabla n'est pas seulement une fonction des éléments d'un tableau quaternionien, mais, comme une matrice, il dépend de la nature du système attaché à ce tableau; nous avons vu, en effet, que pour un système à droite, nabla est une forme d'Hermite à droite, tandis que pour un système à gauche, nabla est une forme d'Hermite à gauche.

II. Contrairement à ce que l'on pourrait croire du fait que nabla est un scalaire, le nabla formé avec les éléments conjugués d'un nabla donné n'est pas égal à ce dernier nabla. Ceci tient à ce que pour avoir le conjugué d'un produit de facteurs il ne suffit pas de faire le produit des conjugués de ces facteurs, mais qu'il faut de plus renverser leur ordre.

III. Le nabla formé avec les coefficients d'un système à droite (nabla à droite) est égal au nabla formé avec les conjugués des éléments du précédent, mais considéré comme attaché à un système à gauche

$$\{ a^i_h \}_d = \{ \bar{a}^i_h \}_g.$$

19. Nabla est développable suivant les éléments d'une ligne. — Nous irons même plus loin : nous allons démontrer que les systèmes

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^i x^k = y^i, \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} u_k a_i^k = v_i \tag{2}$$

ont même nabla et mêmes multiplicateurs, c'est-à-dire que si

$$\nabla x^i = \sum_{h=1}^{n} p_h^i y^h \tag{3}$$

est la formule de résolution du système (1), celle du système (2) sera

$$\nabla u_i = \sum_{h=i}^{n} v_h p_i^h, \tag{4}$$

et les p étant les mêmes dans les formules (3) et (4).

Puisque (3) est la formule de résolution du système (1), les p satisfont aux relations

$$\sum_{k=1}^{n} p_k^i a_j^k = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ \nabla & \text{si } j = i. \end{cases} \tag{5}$$

Multiplions par ∇ les deux membres de chaque équation du système (2) et remplaçons dans chacune ∇u_k par sa valeur donnée par (4); on a

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{h=1}^{n} v_h p_k^h \right] a_i^k = \nabla v_i,$$

ou

$$\sum_{h=1}^{n} v_h \left[\sum_{k=1}^{n} p_k^h a_i^k \right] = \nabla v_i.$$

Si l'on tient compte des relations (5), on voit que le premier membre est identique au second; les deux systèmes ont donc bien les mêmes multiplicateurs. Pour voir que le nabla de (2) est égal au nabla de (1), il suffit de remarquer que les nabla de ces systèmes sont des fonctions du même degré et des mêmes variables; d'après ce que nous venons de voir il est clair que si le système (1) rendu homogène a des solutions non identiquement nulles, le système (2) rendu également homogène en aura aussi; donc les nabla des systèmes (1) et (2) sont égaux à un facteur constant près; ce facteur est égal à 1, comme on le voit aisément en donnant aux a^i_j des valeurs particulières, par exemple

$$a^i_j = 0, \quad \text{pour } i \neq j \quad \text{et} \quad a^i_i \text{ arbitraire.}$$

Il résulte de là que le nabla d'un système à droite est développable en forme d'Hermite à gauche par rapport aux éléments d'une ligne et, réciproquement, que le nabla d'un système à gauche est développable en forme d'Hermite à droite par rapport aux éléments d'une ligne.

20. Diverses propriétés de nabla. — Théorème II. — *Si l'on permute deux lignes ou deux colonnes d'un nabla, ce nabla ne change pas.*

C'est évident; il suffit de considérer le déterminant Δ, auquel nabla est égal, pour voir que le fait de changer deux lignes ou deux colonnes de nabla revient à changer deux fois deux lignes ou deux fois deux colonnes de Δ, ce qui ne change pas la valeur de ce déterminant.

Théorème III. — *Si l'on multiplie à gauche une ligne ou à droite une colonne d'un nabla par un facteur* r *non nul, ce nabla est multiplié par la norme* $\mathrm{r}.\bar{\mathrm{r}}$ *du facteur* (1).

En effet, développons ce nabla suivant la colonne à multiplier; les termes obtenus sont alors de deux sortes : d'abord des scalaires de la forme

$$\overline{a^h_i}\, \mathrm{A}^i_{hh}\, a^h_i,$$

(1) Il est question ici du nabla d'un système à droite; pour le nabla d'un système à gauche il faut évidemment remplacer dans l'énoncé du théorème le mot « droite » par le mot « gauche » et vice versa. Cette remarque s'applique aussi aux deux théorèmes suivants.

pour lesquels il est manifeste que si l'on remplace a^h_i par $a^h_i.r$, ces termes se reproduisent multipliés par $r.\bar{r}$; puis des termes deux à deux conjugués, qui sont, après la multiplication, de la forme

$$\bar{r}\,\overline{a^h_i}\,A^i_{hk}\,a^k_i\,r + \bar{r}\,\overline{a^k_i}\,A^i_{kh}\,a^h_i\,r;$$

on peut mettre dans ces termes $\bar{r}$ en facteur à gauche et r en facteur à droite; la parenthèse du milieu sera un scalaire comme somme de deux termes conjuguées et par conséquent on pourra amener r à côté de $\bar{r}$; donc les termes de cette sorte se reproduisent eux aussi multipliés par $r.\bar{r}$. Le théorème est établi.

Pour une ligne la démonstration est analogue.

Théorème IV. — *Un nabla qui a deux lignes proportionnelles à gauche ou aux deux colonnes proportionnelles à droite est nul.*

En vertu du théorème précédent il suffit de faire voir qu'un nabla qui a deux lignes ou deux colonnes identiques est nul; c'est évident si l'on considère le déterminant Δ, qui a alors quatre lignes ou quatre colonnes identiques deux à deux.

Théorème V. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un nabla soit nul est qu'il existe une relation linéaire unilatérale : à droite entre les éléments d'une colonne; à gauche entre les éléments d'une ligne.*

Cette proportion est tout aussi évidente si l'on considère encore le déterminant Δ, car à toute relation linéaire unilatérale à gauche entre les éléments d'une ligne de nabla correspond une relation linéaire entre les éléments d'une ligne de Δ et réciproquement; de même, à toute relation linéaire unilatérale à droite entre les éléments d'une colonne correspond une relation linéaire entre les éléments d'une colonne de Δ et réciproquement.

COROLLAIRE. — *Le nabla formé avec les coefficients* A^i_{hk} *du développement d'un nabla,* i *étant fixe, est nul.*

Le fait que le nabla ainsi formé est celui d'une matrice hermitique du premier genre nous évite de préciser l'indice relatif aux colonnes et l'indice relatif aux lignes. La proposition résulte immédiatement du théorème précédent et des relations qui définissent les A.

COROLLAIRE. — *Le nabla formé avec les mineurs (dérivées partielles) d'un nabla donné est égal à la* $(2n - 1)^{ième}$ *puissance de ce nabla.*

En effet, en posant

$$D^i_k = \frac{\partial \nabla}{\partial a^k_i}$$

on a

$$\left\{ D^i_k \right\}_d \cdot \left\{ a^h_j \right\}_d = \left\{ \sum_{s=1}^{n} D^i_s \cdot a^s_h \right\}_d = \left\{ F^i_h \right\}_d ;$$

si l'on tient compte des relations (6) (chap. II, § 1, p. 17), on voit que

$$F^i_h = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq h \\ \nabla & \text{si} \quad i = h ; \end{cases}$$

donc

$$\{ D^i_k \}_d \cdot \{ a^h_j \}_d = \{ D^i_k \}_d \cdot \nabla = \{ F^i_h \}_d = \nabla^{2n} ;$$

le théorème est donc établi.

COROLLAIRE. — *Si l'on désigne le nabla formé avec les mineurs d'un nabla donné par* ∇^* *et que l'on pose*

$$\nabla^* = \sum_h \sum_h \overline{D^i_h}\, \Omega^i_{hk}\, D^i_k ,$$

on a

$$\Omega^i_{hk} = \nabla^{2n-3} \cdot \overline{a^h_i} \cdot a^k_i$$

et

$$\frac{\partial \nabla^*}{\partial D^k_i} = \nabla^{2n-2} \cdot a^k_i .$$

On a, en effet, d'après le corollaire précédent,

$$\nabla^* = \nabla^{2n-1} = \nabla^2 \cdot \nabla^{2n-3}$$

et aussi

$$\nabla = \sum_{s=1}^{n} \mathrm{D}_s^i \cdot a_i^s = \sum_{t=1}^{n} \overline{a_i^t} \cdot \overline{\mathrm{D}_t^i};$$

d'où

$$\nabla^2 = \sum_s \sum_t \mathrm{D}_s^i \cdot a_i^s \cdot \overline{a_i^t} \cdot \overline{\mathrm{D}_t^i} = \sum_s \sum_t \overline{\mathrm{D}_t^i} \cdot \overline{a_i^t} \cdot a_i^s \cdot \mathrm{D}_s^i;$$

en multipliant les deux membres par ∇^{2n-3} et en comparant avec la formule qui donne ∇^*, on trouve aisément la première des formules à établir. La seconde en résulte immédiatement :

$$\frac{\partial \nabla^*}{\partial \mathrm{D}_i^k} = \sum_h \overline{\mathrm{D}_h^i} \cdot \Omega_{hk}^i = \sum \overline{\frac{\partial \nabla}{\partial a_i^h}}\, \nabla^{2n-3} \cdot \overline{a_i^h} \cdot a_i^k = \nabla^{2n-3} \left[\sum \frac{\partial \nabla}{\partial a_i^h}\, \overline{a_i^h} \right] a_i^k$$

la quantité entre crochets n'est autre que nabla, car dans la seconde formule de cette démonstration on peut intervertir l'ordre des facteurs situés sous le signe Σ, puisque nabla est un scalaire; notre seconde formule est ainsi bien établie.

21. Relations remarquables entre les A_{hk}^i. — Théorème VI. — *Il existe entre les* A *la relation*

$$\begin{Vmatrix} \mathrm{A}_{hk}^i & \mathrm{A}_{hj}^i \\ \mathrm{A}_{mk}^i & \mathrm{A}_{mj}^i \end{Vmatrix} = 0.$$

Cette relation est un cas particulier de relations beaucoup plus générales que nous établirons dans le paragraphe relatif aux formes d'Hermite. Bornons-nous seulement à dire que l'on peut en donner une démonstration directe par application du théorème fondamental de la page 27 et en tenant compte des systèmes qui définissent les A.

Dans le cas particulier où $h = k$, la relation précédente prend la forme

$$\text{(A)} \qquad \mathrm{A}_{mk}^i \cdot \mathrm{A}_{kj}^i = \mathrm{A}_{kk}^i \cdot \mathrm{A}_{mj}^i.$$

Cette dernière relation devient elle-même

$$\text{(B)} \qquad \mathrm{N}(\mathrm{A}_{mk}^i) = \mathrm{N}(\mathrm{A}_{km}^i) = \mathrm{A}_{mk}^i \cdot \mathrm{A}_{km}^i = \mathrm{A}_{kk}^i \cdot \mathrm{A}_{mm}^i.$$

Il suffit de prendre $j = m$ dans la relation (A).

COROLLAIRE. — *On a*

$$N\left(\frac{\partial\nabla}{\partial a_i^j}\right) = A_{jj}^i \cdot \nabla = N\left(\frac{\partial\nabla}{\partial \overline{a_i^j}}\right)$$

On a, en effet,

$$\frac{\partial\nabla}{\partial a_i^j} = \sum_{k=1}^{n} \overline{a_i^k} A_{kj}^i$$

$$\frac{\partial\nabla}{\partial \overline{a_i^j}} = \sum_{h=1}^{n} A_{jh}^i a_i^h = \frac{\overline{\partial\nabla}}{\partial a_i^j}$$

d'où

$$N\left(\frac{\partial\nabla}{\partial a_i^j}\right) = N\left(\frac{\partial\nabla}{\partial \overline{a_i^j}}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} \overline{a_i^k} A_{kj}^i\right) \cdot \left(\sum_{h=1}^{n} A_{jh}^i a_i^h\right)$$
$$= A_{jj}^i \cdot \left(\sum_h \sum_k \overline{a_i^k} A_{kh}^i a_i^h\right),$$

ce qui établit notre proposition.

22. UNE IMPORTANTE PROPRIÉTÉ DE NABLA. — Considérons un nabla où les éléments d'une colonne ou d'une ligne sont la somme d'un certain nombre de termes; nous allons chercher à exprimer ce nabla en fonction des nabla obtenus en remplaçant successivement dans le nabla donné la colonne ou la ligne envisagée par les termes dont elle est la somme.

Supposons d'abord que le nabla que nous considérons soit un nabla à droite et qu'une colonne soit la somme d'un certain nombre de termes.

Soit i le rang de cette colonne; on a donc, par hypothèse,

$$c_i^h = \sum_s a_{i,s}^h,$$

Si j est différent de i nous poserons

$$c_j^h = a_{j,s}^h,$$

quel que soit s.

Développons alors $\nabla(c)$ par rapport aux éléments de la i$^{\text{ième}}$ colonne; on a

$$\nabla(c) = \sum_h \sum_k \overline{c_i^h}\, A_{hk}^i\, c_i^k .$$

Remplaçons dans cette expression c'_i par sa valeur; on aura

$$\nabla(c) = \sum_h \sum_k \left(\sum_s \overline{a_{i,s}^h}\right) A_{hk}^i \left(\sum_t a_{i,t}^k\right),$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\nabla(c) = \sum_s \sum_h \sum_k \overline{a_{i,s}^h}\, A_{hk}^i\, a_{i,s}^k + \sum_h \sum_k \sum_s \sum_{t \neq s} \overline{a_{i,s}^h}\, A_{hk}^i\, a_{i,t}^k \;;$$

les A étant indépendants des termes de la colonne de rang i, il est clair que le premier terme du second membre n'est autre que

$$\sum_s \nabla(a_{,s}),$$

$\nabla(a_{,s})$ désignant le nabla obtenu en remplaçant dans le nabla donné les éléments de la colonne de rang i par les $a^h_{i,s}$; le second terme, que nous nommerons *reste* et que nous désignerons désormais par R, peut s'écrire, en remarquant que

$$\sum_h \overline{a_{i,s}^h}\, A_{hk}^i = \frac{\partial \nabla(a_{,s})}{\partial a_{i,s}^k},$$

sous la forme

$$R = \sum_k \sum_s \sum_{t \neq s} \frac{\partial \nabla(a_{,s})}{\partial a_{i,s}^k}\, a_{i,t}^k;$$

nous remarquerons tout de suite que R est un scalaire comme somme de termes deux à deux conjugués; nous mettrons ce fait en évidence en écrivant désormais

$$(6) \qquad R = {}^1/_2\left[\sum_k \sum_s \sum_{t \neq s} \frac{\partial \nabla(a_{,t})}{\partial a_{i,t}^k}\, a_{i,s}^k + \sum_k \sum_s \sum_{t \neq s} \overline{a_{i,t}^k}\, \frac{\partial \nabla(a_{,s})}{\partial \overline{a_{i,s}^k}}\right],$$

ou encore

$$(7) \qquad R = {}^1/_2\left[\sum_k \sum_s \sum_{t \neq s} a_{i,s}^k\, \frac{\partial \nabla(a_{,t})}{\partial a_{i,t}^k} + \sum_k \sum_s \sum_{t \neq s} \frac{\partial \nabla(a_{,s})'}{\partial \overline{a_{i,s}^k}}\, a_{i,t}^k\right],$$

Nous arrivons ainsi à la formule remarquable

$$\nabla(c) = \nabla\left(\sum_s a_{,s}\right) = \sum_s \nabla(a_{,s}) + \mathrm{R}, \tag{8}$$

la notation $a_{,s}$ signifiant que le signe Σ ne porte que sur une seule colonne.

Si, à la place d'une colonne, on avait considéré une ligne, les calculs auraient subsisté à la différence près que les éléments surlignés se seraient trouvés à droite dans les différentes formules au lieu d'être à gauche comme dans le cas présent. La formule (8) subsiste évidemment pour les nabla à gauche ainsi que les formules (6) et (7).

Théorème VII. — *Si parmi les p $\nabla(a_{,s})$ de la formule* (8), $p-1$ *sont nuls,* $\nabla(c)$ *est toujours égal au p.ième de ces nabla, qu'il soit nul ou non.*

Il suffit évidemment de démontrer le théorème pour le cas où $p=2$, c'est-à-dire où l'on a

$$c_i^h = a_i^h + b_i^h,$$

la démonstration générale se faisant de proche en proche en partant de ce cas particulier. Nous pouvons aussi supposer, pour fixer les idées, qu'il est question ici de nabla à droite.

Cela étant, supposons que

$$\nabla(a) = 0,$$

notation qui désigne le nabla donné où la $i^{\text{ième}}$ colonne se réduirait aux $a^h_{\ i}$. Désignons par S_1 le système linéaire unilatéral à droite et homogène formé avec les éléments de $\nabla(a)$; soit, de même, S_2 le système analogue formé avec $\nabla(b)$, et enfin soit S_3 le système analogue formé avec $\nabla(c)$. Par hypothèse, le système S_1 a des solutions effectives (c'est-à-dire non identiquement nulles). Nous allons montrer que dans ces conditions le système S_3 se ramène au système S_2.

Soit $u_1, u_2, \ldots, u_i, \ldots, u_n$ une solution du système S_1 et supposons que quelle que soit cette solution, u_i ne puisse s'annuler. Si le système S_3

$$\sum_{j \neq i} a_j^k X^j + (b_i^k + a_i^k) X^i = 0$$

a des solutions effectives, X^i ne peut être nul, car le système S_1 pourrait être satisfait par de valeurs u' non toutes nulles, mais où u_i' serait nul, ce qui est contraire à notre hypothèse. On pourra donc toujours considérer un système de solutions effectives de S_3 pour lequel on aura

$$X^i = u_i,$$

puisque les X dépendent au moins d'un paramètre quaternionien. Cela étant, si l'on pose,

$$\text{pour } h \neq i, \qquad X^h = u_h + Y^h; \qquad X^i = u_i,$$

on voit que le système S_3 se ramène à un système en Y qui n'est autre que le système S_2 où l'on a donné à l'inconnue Y^i la valeur u_i, car, pour les mêmes raisons que S_3 ne pouvait admettre la solution $X^i = 0$ dans un système de solutions effectives, le système S_2 ne peut admettre dans un système de solutions effectives la solution $Y^i = 0$. Si le système S_1 admet un système de solutions effectives pour lequel $u_i = 0$, il est clair que ce système de solutions effectives sera aussi système de solutions effectives de S_2 et de S_3. Il résulte de là que la condition

$$\nabla(c) = 0$$

entraîne

$$\nabla(b) = 0,$$

et réciproquement.

En répétant un raisonnement que nous avons déjà fait, il est clair que $\nabla(c)$ ne diffère de $\nabla(b)$ que par un facteur constant. Ce facteur constant est manifestement égal à 1, puisque pour

$$a_i^h = 0$$

on a

$$\nabla(c) = \Delta(b);$$

le théorème est donc établi.

Corollaire. — *On obtient encore le même nabla lorsque dans un nabla donné on ajoute ou l'on retranche aux éléments d'une même ligne ou d'une même colonne les éléments correspondants d'une ou plusieurs lignes (distinctes de celle envisagée) ou les éléments correspondants d'une au plusieurs colonnes (distinctes aussi de celle envisagée).*

Cette proposition résulte immédiatement du théorème précédent; il suffit, en effet, de remarquer que si p est le nombre de lignes ou de colonnes considérées, la formule (8) contient alors $p+1$ nabla parmi lesquels p sont nuls comme ayant deux lignes ou deux colonnes identiques, le $(p+1)^{\text{ième}}$ étant précisément le nabla initial.

Ces intéressantes propriétés vont nous permettre d'étendre aux systèmes d'équations linéaires unilatérales, à un nombre quelconque d'inconnues, le théorème de Rouché.

23. Extension du théorème de Rouché aux systèmes linéaires unilatéraux quaternioniens. — Considérons un système linéaire à droite de n équations à m inconnues. Soit

$$E_j = \sum_{h=1}^{m} a_h^j x^h - b_j = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

ce système.

Du tableau rectangulaire

$$(T_1) \qquad \left| \begin{array}{l} a_1^1 \; a_2^1 \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; a_m^1 \\ a_1^2 \; a_2^2 \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; a_m^2 \\ . \;\; . \;\; \ldots\ldots\ldots\ldots \;\; . \\ . \;\; . \;\; \ldots\ldots\ldots\ldots \;\; . \\ . \;\; . \;\; \ldots\ldots\ldots\ldots \;\; . \\ a_1^n \; a_2^n \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; a_m^n \end{array} \right.$$

formé avec les coefficients des inconnues, on peut déduire divers nabla en prenant les éléments communs à un certain nombre de lignes et à un nombre égal de colonnes.

Nous supposerons d'abord que l'un au moins des éléments du tableau (T_1) soit différent de zéro. Dans cette hypothèse, il existera toujours, parmi les nabla déduits du tableau (T_1), au moins un nabla qui soit différent de zéro et tel que si l'on désigne par p son degré (c'est-à-dire le nombre de ces lignes et de ses colonnes), tout nabla déduit de (T_1) et de degré $p+1$ soit nul. S'il existe plusieurs nabla jouissant de cette double propriété, on choisira l'un d'eux à volonté.

Nous donnerons, par analogie avec la théorie classique, au nabla ainsi choisi le nom de *nabla principal* du système considéré. Il convient de remarquer que le degré p de ce nabla est au plus égal au plus petit des deux nombres m et n. On peut d'ailleurs disposer les notations, c'est-à-dire ranger les inconnues et les équations dans un ordre tel que δ soit le nabla :

$$\left\{\begin{matrix} a_1^1\, a_2^1 \cdots\cdots & a_p^1 \\ a_1^2\, a_2^2 \cdots\cdots & a_p^2 \\ \cdot\ \ \cdot & \cdot \\ \cdot\ \ \cdot & \cdot \\ a_1^p\, a_2^p \cdots\cdots & a_p^p \end{matrix}\right\} = \delta,$$

formé avec les éléments communs aux p premières lignes et aux p premières colonnes du tableau (T_1).

En ajoutant au nabla principal δ une $(p+1)^{\text{ième}}$ ligne formée par les éléments

$$a_1^{p+r}\, a_2^{p+r} \cdots\cdots\cdots\, a_p^{p+r}$$

d'une ligne non employée du tableau (T_1), et une $(p+1)^{\text{ième}}$ colonne formée par les termes tous connus correspondants :

$$b_1\, b_2 \cdots\cdots\cdots\, b_p\, b_{p+r},$$

ou, comme on dit, en bordant δ avec ces éléments, nous obtiendrons un nabla :

$$\left|\begin{matrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots\cdots & a_p^1 & b_1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots\cdots & a_p^2 & b_2 \\ . & . & \cdots\cdots & . & . \\ . & . & \cdots\cdots & . & . \\ a_1^p & a_2^p & \cdots\cdots & a_p^p & b_p \\ a_1^{p+r} & a_2^{p+r} & \cdots\cdots & a_p^{p+r} & b_{p+r} \end{matrix}\right| = \delta_{p+r},$$

que nous nommerons *nabla caractéristique* du système donné.

En donnant à r les valeurs 1, 2, ..., $n-p$, on obtiendra $n-p$ nabla caractéristiques du système proposé.

Il convient de remarquer que cette définition tombe en défaut lorsque $p=n$, m étant alors supérieur ou égal à n; nous conviendrons de dire que dans ce cas le système a un nabla caractéristique nul.

THÉORÈME FONDAMENTAL (1). — *Pour que* n *équations linéaires unilatérales quaternioniennes à* m *inconnues soient compatibles, il faut et il suffit que les nabla caractéristiques du système soient tous nuls.*

Dans cette hypothèse le système a une solution unique ou une solution dépendant de 1 ou plusieurs paramètres arbitraires suivant que le nombre des inconnues est égal au degré du nabla principal ou lui est supérieur.

Considérons le nabla :

$$\left|\begin{matrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots\cdots & a_p^1 & E_1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots\cdots & a_p^2 & E_2 \\ . & . & \cdots\cdots & . & . \\ . & . & \cdots\cdots & . & . \\ a_1^p & a_2^p & \cdots\cdots & a_p^p & E_p \\ a_1^{p+r} & a_2^{p+r} & \cdots\cdots & a_p^{p+r} & E_{p+r} \end{matrix}\right| = \Delta.$$

(1) Théorème de Rouché; voir *Journal de l'École polytechnique* (1880), XLVIII^e cahier. Note sur les équations linéaires.

Sa $(p+1)^{\text{ième}}$ colonne a chacun de ses éléments qui sont la somme d'un certain nombre de termes. Appliquons-lui donc la formule (8) du numéro précédent: il est facile de voir que tous les nabla $\nabla\,(a_{,s})$ sont nuls, sauf un; donc, en vertu du théorème VII, le nabla considéré est égal à ce nabla non nul. Chacun des $\nabla\,(a_{,s})$ s'obtient en remplaçant dans le nabla considéré les éléments de la $(p+1)^{\text{ième}}$ colonne par $a^j_h\ x_h$, j prenant successivement les valeurs 1, 2, ..., p, $p+r$; ces nabla sont égaux au produit de la norme de x_h par les nabla obtenus en divisant à droite les éléments de la $(p+1)^{\text{ième}}$ colonne par x_h; ces derniers nabla sont nuls, car si $h \leqslant p$, ils ont deux colonnes identiques, et si h est supérieur à p, on tombe sur un nabla $p+1$ lignes et $p+1$ colonnes extrait du tableau (T_1), nabla nul par hypothèse. Le seul nabla non nul parmi les nabla $\nabla\,(a_{,s})$ est donc celui obtenu en remplaçant les éléments de la $(p+1)^{\text{ième}}$ colonne du nabla envisagé par les termes tous connus b_j, j prenant les valeurs 1, 2, ..., p, $p+r$. On arrive ainsi à l'identité

$$\Delta = \delta_{p+r},$$

Cela posé, considérons une solution quelconque du système formé par les p premières équations du système donné, soit

$$x_1 = x'_1 \quad x_2 = x'_2 \ldots x_m = x'_m,$$

et remplaçons les inconnues par ces valeurs dans l'identité précédente. Les polynomes E_1, E_2, ..., E_p s'annuleront; quant à E_{p+r} il prendra une valeur déterminée E'_{p+r}; l'identité ayant lieu pour toutes les valeurs des inconnues subsistera pour ces valeurs particulières; on obtient ainsi

$$\delta\,.\,N\,(E'_{p+r}) = \delta_{p+r}.$$

Comme δ est différent de zéro, la condition nécessaire et suffisante pour que $E'_{p+r}=0$ est que sa norme soit nulle, ce qui conduit à la condition nécessaire et suffisante : $\delta_{p+r}=0$.

Le théorème est donc établi. Grâce à notre remarque sur l'équivalence des systèmes à gauche et à la propriété III du nabla (p. 29), il est inutile de répéter la démonstration pour les systèmes à gauche.

24. Formes linéaires unilatérales quaternioniennes. — On nomme *forme linéaire unilatérale à droite* une expression linéaire unilatérale quaternionienne dans laquelle les variables, en nombre quelconque, sont toutes à droite des coefficients :

$$\mathrm{F} = a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

Pour qu'une forme linéaire soit nulle, quelles que soient les valeurs attribuées aux variables, il faut et il suffit que tous ses coefficients soient nuls.

Nous dirons que p formes linéaires à droite données sont *linéairement dépendantes* si, désignant ces formes par F_1, F_2, ..., F_p, il existe p quaternions non tous nuls tels que l'on ait

$$b_1 \mathrm{F}_1 + b_2 \mathrm{F}_2 + \cdots + b_p \mathrm{F}_p = 0,$$

quelles que soient les valeurs attribuées aux variables dont dépendent les formes F.

Ces formes seront dites *linéairement indépendantes* si la relation précédente entraîne obligatoirement l'annulation des b.

De même, on appelle *forme linéaire unilatérale quaternionienne à gauche* une expression linéaire dans laquelle les variables sont toutes à gauche des coefficients :

$$\mathrm{G} = x^1 a_1 + x^2 a_2 + \cdots + x^n a_n.$$

Pour qu'une forme linéaire à gauche soit nulle, quelles que soient les valeurs attribuées aux variables qui y figurent, il faut et il suffit encore que tous les coefficients de la forme soient nuls.

Nous dirons que p formes linéaires à gauche sont *linéairement dépendantes* quand on pourra trouver p quaternions non tous nuls, tels que, si G_1, G_2 ..., G_p sont ces formes, on ait

$$G_1 b_1 + G_2 b_2 + \cdots + G_p b_p = 0,$$

quelles que soient les valeurs attribuées aux variables qui figurent dans les formes G. Lorsque la relation précédente ne pourra avoir lieu que si tous les b sont nuls, nous dirons que les p formes G sont *linéairement distinctes.*

Nous allons donner maintenant sans démonstration [1] quelques théorèmes sur ces formes linéaires qui nous seront utiles par la suite.

THÉORÈME VIII. — *Pour que* n *formes linéaires unilatérales à* $n+q$ *variables soient distinctes il faut et il suffit que l'on puisse déduire du tableau des coefficients un nabla de même nature (à droite ou à gauche) que ces formes à* n *lignes et* n *colonnes non nul.*

THÉORÈME IX. — *Soient* F_1, F_2, ..., F_p p *formes linéaires unilatérales distinctes, fonctions de* n *variables* x_1, x_2, ..., x_n, p *étant inférieur à* n, *et soient* f_1, f_2, ..., f_q *un nombre quelconque de formes linéaires unilatérales (de même nature que les* F) *distinctes ou non. Si toutes les solutions du système*

$$F_1 = 0, \qquad F_2 = 0, \ldots, F_p = 0$$

vérifient les équations

$$f_1 = 0, \qquad f_2 = 0, \ldots, f_q = 0,$$

les formes f *sont des fonctions linéaires unilatérales de même nature et homogènes des formes* F.

---

(1) Dans le cas des éléments réels ou complexes on sait que ces démonstrations sont basées sur les théorèmes de Cramer et de Rouché; ces théorèmes restant valables avec les quaternions, le lecteur n'aura aucune peine à reconstituer ces démonstrations; il lui suffira de remplacer dans les démonstrations classiques le mot déterminant partout où il figure par le mot « nabla »; pour ce dernier cas il les trouvera notamment dans le *Cours d'Algebre de Mathematiques spéciales* de NIEWENGLOWSKI, t. I, p. 209 (Paris, 1897, Armand Colin).

THÉORÈME X. — *Si l'on donne un nombre quelconque* q *de formes linéaires unilatérales distinctes :* $F_1, F_2, \ldots, F_q$, *et un nombre moindre,* p, *de formes linéaires unilatérales de même nature que les premières :* $f_1, f_2, \ldots, f_p$, *distinctes ou non, on peut trouver des valeurs des variables* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *non toutes nulles, pour lesquelles toutes les formes* f *soient nulles sans que toutes les formes* F *soient également nulles.*

IV

Nous allons donner dans ce paragraphe une loi de formation directe du nabla d'un système à droite; nous n'établirons pas ici que l'expression trouvée par application de cette règle est bien celle que nous avons définie au début du présent chapitre, renvoyant le lecteur désireux de connaître cette démonstration au mémoire de Study des *Acta Mathematica*, déjà cité dans l'Introduction. C'est à ce même mémoire que nous renvoyons le lecteur pour la démonstration du théorème de Schur, dont nous ne faisons que donner l'énoncé.

25. LOI DE FORMATION DIRECTE DU NABLA. — Pour obtenir le développement du nabla du tableau (T) de la page 16, on posera

$$D_{ij}^r = a_r^i \cdot \overline{a_r^j}$$

et l'on développera le déterminant suivant, d'après la règle ordinaire, comme si ces éléments étaient des nombres réels ou complexes :

$$\begin{vmatrix} D_{11}^r & D_{12}^s & D_{13}^t \ldots \\ D_{21}^r & D_{22}^s & D_{23}^t \ldots \\ D_{31}^r & D_{32}^s & D_{33}^t \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{vmatrix}$$

Dans le développement de ce déterminant on arrangera dans chaque monome qui le compose les termes de la façon suivante : on écrira ces termes dans un ordre tel que les indices inférieurs de ces termes forment un ou plusieurs cycles. Cela fait que pour avoir le nabla il suffira de remplacer dans chaque monome écrit comme nous venons de le dire, successivement l'ensemble des indices supérieurs par les $n!$ permutations des nombres $1\,2\,3 \ldots n$, puis dans les $(n!)^2$ termes ainsi obtenus de remplacer les D par leur valeur, le signe à placer devant chaque terme de ce développement étant celui qui figure au terme correspondant du développement du déterminant précédent.

V

26. Définition des formes d'Hermite quaternioniennes. — On appelle *forme d'Hermite quaternionienne à indéterminées conjuguées* toute forme bilinéaire telle que

$$F = \sum_i \sum_j x_j\, a_j^i\, y_i$$

où les variables x et y sont liées par la relation

$$(1) \qquad x_h = \overline{y_h}$$

et où les coefficients satisfont tous à une même relation :

$$(2) \qquad a_j^i = \varepsilon\, \overline{a_i^j} \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

La forme sera dite *à droite* si les indéterminées non surlignées sont à droite des coefficients *a;* elle sera dite *à gauche* dans le cas contraire. Une forme à droite ou une forme à gauche sera dite du *premier genre* si l'ε de la formule (2) est égal à $+1$; elle sera dite du *second genre* si cet ε est égal à -1.

La dérivée partielle de la forme par rapport à x_h sera désormais désignée par f_h et sera par définition la forme linéaire à droite :

$$f_h = \sum_i a_h^i\, y_i\,;$$

Qu'il nous soit permis d'emprunter encore au mémoire de Study cette remarquable proposition due à Schur :

Pour $n > 1$ *la fonction nabla ne peut jamais être représentée par une somme de carrés de fonctions réelles entières et rationnelles (formes homogènes) des composantes scalaires des quaternions* $\mathbf{a}^i_j$.

les x et les y étant regardés comme des variables indépendantes.

De même la dérivée partielle de F par rapport à y_k sera une forme linéaire à gauche désignée par g_k :

$$g_k = \sum_j x_j a_j^k;$$

les x et les y étant regardés comme des variables indépendantes.

En tenant compte des relations (2) on voit aisément que

$$g_k = \varepsilon \overline{f_k}.$$

Des mêmes relations (2) résulte aussi que le nabla à droite formé avec les coefficients de toutes les formes f_k est égal au nabla à gauche formé avec les coefficients des formes g_h : la valeur commune de ces nabla sera, par définition, le nabla de la forme d'Hermite considérée.

Remarquons enfin que des définitions que nous venons de poser résultent les relations suivantes :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour une forme d'Hermite à droite} \\ \qquad \mathrm{F} = \sum_h \overline{x_h} \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial \overline{x}_h} = \varepsilon \sum_h \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_h} x_h. \\ \text{Pour une forme d'Hermite à gauche} \\ \qquad \mathrm{F} = \sum_h x_h \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_h} = \varepsilon \sum_h \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial \overline{x}_h} \overline{x}_h \end{array} \right.$$

ε étant égal à $+1$ pour une forme du premier genre et égal à -1 pour une forme du second genre.

27. Propriétés communes aux deux genres de formes d'Hermite. — Qu'il nous soit permis de donner tout d'abord la propriété la plus immédiate de chacun des deux genres de formes d'Hermite.

De l'égalité $a^i_j = \overline{a^j_i}$ qui définit les formes du premier genre résulte que les a^i_i sont tous des scalaires et que ces formes ont une valeur scalaire quelles que soient les valeurs attribuées aux variables. De l'égalité $a^i_j = -\overline{a^j_i}$ qui définit les formes du second genre résulte de même que les a^i_i sont des quaternions dépourvus de partie scalaire (nous appellerons de tels quaternions des vecteurs) et que ces formes sont aussi un vecteur quelles que soient les valeurs attribuées aux variables.

Dans ce qui va suivre nous supposerons, sauf mention contraire, que les formes envisagées sont des formes à droite, les démonstrations que nous allons faire se transposant sans aucune difficulté aux formes à gauche; les ε figurant dans les différentes relations devront être remplacés tous par $+1$ dans le cas où l'on suppose la forme du premier genre, par -1 dans le cas contraire.

Théorème XI. — *Toute forme d'Hermite est changée par une substitution linéaire unilatérale de même nature (c'est-à-dire à droite si la forme est à droite, à gauche si la forme est à gauche) effectuée sur les variables en une autre forme d'Hermite de même nature et de même genre.*

Soient

$$F = \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \bar{x}_h a^h_k x_k$$

la forme considérée et

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} b^j_i y^i$$

l'équation générale de la substitution effectuée; F est changée par cette dernière en

$$F' = \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \overline{y^i}\, \overline{b^h_i}\right) a^h_k \left(\sum_{j=1}^{n} b^k_j\, y^j\right)$$

ce qui peut encore s'écrire

$$F' = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \overline{y^i} \left(\sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \overline{b^h_i} a^h_k b^k_j\right) y^j.$$

Si l'on pose

$$A^i_j = \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \overline{b^h_i} a^h_k b^k_j \tag{5}$$

il suffit de montrer, pour établir notre proposition, que

$$A^i_j = \varepsilon \overline{A^j_i}. \tag{6}$$

A cet effet, remarquons que pour $i=j$ la relation précédente est satisfaite, car dans ce cas les A sont évidemment égaux à la valeur que prend F quand on donne aux variables x les valeurs b_i, et d'après ce que nous avons dit au début de ce numéro, on sait que l'on a précisément

$$\text{(7)} \qquad F(x) = \varepsilon F(\bar{x}).$$

Lorsque $i \neq j$, on a

$$\overline{A_j^i} = \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \overline{b_j^k}\, \overline{a_k^h}\, b_i^h$$

ce qui s'écrit, en tenant compte des relations (2),

$$\overline{A_j^i} = \varepsilon \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \overline{b_j^k}\, a_h^k\, b_i^h = \varepsilon A_i^j$$

car dans les relations (5) on peut évidemment intervertir l'ordre des indices de sommations; la formule (6) est donc établie.

THÉORÈME XII. — *Avec les notations du théorème précédent on a*

$$\frac{\partial F'}{\partial \bar{y}_i} = \sum_h \frac{\partial \bar{x}_h}{\partial \bar{y}_i} \cdot \frac{\partial F}{\partial \bar{x}_h}; \qquad \frac{\partial F'}{\partial y_i} = \varepsilon \sum \frac{\partial F}{\partial x_h} \cdot \frac{\partial x_h}{\partial y_i}. \text{ (1)}$$

Pour l'établir il suffit de se reporter à la formule (4) du numéro précédent et de remarquer que les f sont indépendants des $\bar{x}$ donc des $\bar{y}$, de sorte que dans la dérivation par rapport à ces dernières variables les f devront être traitées comme des constantes; la première relation est donc établie. La seconde se démontre de la même façon.

THÉORÈME XIII. —*Toute forme d'Hermite* F *peut tou-*

---

(1) Pour une forme à gauche on aurait évidemment

$$\frac{\partial F'}{\partial \bar{y}_i} = \varepsilon \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \bar{x}_h} \cdot \frac{\partial \bar{x}_h}{\partial \bar{y}_i}; \qquad \frac{\partial F'}{\partial y_i} = \sum_h \frac{\partial x_h}{\partial y_i} \frac{\partial F}{\partial x_h}.$$

jours, par une substitution linéaire unilatérale de même nature, être ramenée à la forme

$$F = \sum_{i=1}^{n} \overline{u_i}\, c_i u_i$$

où les u_i *sont linéairement distinctes et en nombre au plus égal à celui des variables supposées indépendantes qui figurent dans* F *et où, de plus, les* c_i *sont des scalaires de valeurs absolues arbitraires non nulles dans le cas des formes du premier genre; des vecteurs arbitraires dans le cas des formes du second genre.*

Nous distinguerons deux cas, suivant que tous les coefficients a^i_i sont nuls ou non.

1. *Un au moins des* a^i_i *est différent de zéro.* Désignons par a un tel coefficient; on a

$$F = \overline{x}ax + \overline{y}bx + \varepsilon\overline{x}\overline{b}y + \overline{x}P + \varepsilon\overline{P}x + R,$$

où P est une forme linéaire à droite ne dépendant pas de x et de y (donc ne dépendant que de $n-2$ variables) et R une forme d'Hermite de même genre et de même nature que F et qui ne contient pas non plus x et y.

De l'hypothèse

$$a = \varepsilon\overline{a}$$

on tire

$$a^{-1} = \varepsilon\overline{a^{-1}}$$

ce qui permet d'écrire

$$F = (\overline{x} + \overline{y}ba^{-1} + \varepsilon\overline{P}a^{-1})\, a\,(x + \varepsilon a^{-1}\overline{b}y + a^{-1}P) + R_1$$

avec

$$R_1 = -\varepsilon\overline{y}ba^{-1}\overline{b}y - \varepsilon\overline{y}b\overline{a^{-1}}P - \varepsilon\overline{P}\,\overline{a^{-1}}\,\overline{b}y - \varepsilon\overline{P}a^{-1}P + R$$

R_1 est, comme on le voit facilement, une forme d'Hermite du même genre que F et de même nature qui contient au moins une variable de moins que F. Admettons que R_1 jouisse de la même propriété que F, à savoir d'avoir au moins un terme de la forme $\overline{x}\, c\, x$; dans ce cas nous pouvons répéter sur R_1 ce que nous venons de faire sur F; on arrivera ainsi à une forme R_2 de même genre et de même nature que R_1 et qui aura au moins une variable de moins que R_1; avec la même hypothèse sur R_2 que sur R_1 on pourra recommencer notre raisonnement; finalement, après la $p^{\text{ième}}$ opération de ce genre on arrivera à une forme R_p qui, ou bien ne contiendra plus qu'une seule variable, ou bien qui sera nulle, et il est clair que cela arrivera au plus tard à la $(n-1)^{\text{ième}}$ opération, si n est le nombre de variables dont dépend F. Pour arriver à la formule de l'énoncé il suffit évidemment de poser

$$u_1 = x + \varepsilon a^{-1}\bar{b}y + a^{-1}P, \ldots$$

Si alors on change u_1 en $m\, u_1$, a se change en $\bar{m}\, a\, m$; de sorte que si la forme F est du premier genre, a est un scalaire qui se trouve, après le changement de u_1 en $m\, u_1$, multiplié par le nombre positif $m\,\bar{m}$; en choisissant convenablement m on pourra donc donner à a n'importe quelle valeur absolue; si, au contraire, F est une forme du second genre, a est un vecteur et il en est de même de $\bar{m}\, a\, m$; si alors on remplace dans l'équation $\bar{m}\, a\, m = v$, écrite sous la forme équivalente

$$\bar{m}a - v'\bar{m} = 0 \qquad \left(v' = v\sqrt{\frac{v\bar{v}}{a\bar{a}}}\right),$$

$\bar{m}$, a, v' par leur valeur en fonction de leurs composantes scalaires, un calcul facile prouve que le système homogène de quatre équations à quatre inconnues a un déterminant nul et, par conséquent, admet toujours des solutions non nulles; on obtient la relation précédente en remarquant que la relation donnée, $\bar{m}\, a\, m = v$, fournit immédiatement la norme de v :

$$N(v) = (v\bar{v})^{1/2} \,.\, (a\bar{a})^{-1/2}.$$

Il ne reste plus qu'à prouver que les u_i sont linéairement distincts. Cela est du reste à peu près évident; en effet, d'après ce que nous venons de voir, le tableau des coefficients des u_i est de la forme

$$\begin{array}{l}
1 \quad b_2^1 \cdots b_p^1 \cdots b_n^1 \\
0 \quad 1 \;\cdots b_p^2 \cdots b_n^2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 \quad 0 \cdots 1 \;\cdots b_n^p
\end{array}$$

de sorte que le nabla formé par les coefficients des p premières variables est égal à 1; donc, en vertu du théorème VIII (p. 44), ces formes sont bien linéairement indépendantes.

Une objection s'élève si, parmi les R successifs, il y en avait un qui fût dépourvu totalement de termes de la forme $\bar{x}\,a\,x$; dans ce cas on lui appliquerait la méthode que nous allons exposer maintenant.

2. *Tous les* a_i^i *sont nuls.* Dans ce cas la forme F peut s'écrire

$$F = \bar{x}ay + \varepsilon\bar{y}\,\bar{a}x + \bar{x}P + \varepsilon\bar{y}Q + \varepsilon\bar{P}x + \bar{Q}y + R,$$

P et Q étant des formes linéaires unilatérales de même nature que F, indépendantes de x et de y, et R une forme d'Hermite du même genre et de même nature que F, ne contenant pas x et y.

Sous cette nouvelle expression on voit que F peut encore s'écrire

$$F = (\bar{x} + \bar{Q}a^{-1})\,a\,(y + a^{-1}P) + \varepsilon\,(\bar{y} + \bar{P}\,\overline{a^{-1}})\,\bar{a}\,(x + \overline{a^{-1}}Q) + R_1\,,$$

en posant

$$R_1 = R - \bar{Q}a^{-1}P - \varepsilon\bar{P}\,\overline{a^{-1}}Q.$$

Appliquons maintenant l'identité

$$2(\bar{Y}aX + \varepsilon\bar{X}\bar{a}\,Y) = (\bar{X} + \bar{Y}\,a\,z^{-1})\,z\,(X + \varepsilon z^{-1}aY)$$
$$-(\bar{X} - \bar{Y}\,a\,z^{-1})\,z\,(X - \varepsilon z^{-1}aY)$$

où z est un paramètre seulement tenu à satisfaire à la condition

$$\bar{z} = \varepsilon z;$$

on a alors, en posant

$$U = x + \overline{a^{-1}Q} + \varepsilon z^{-1} a y + \varepsilon z^{-1}\bar{P}$$
$$V = x + \overline{a^{-1}Q} - \varepsilon z^{-1} a y - \varepsilon z^{-1}\bar{P}$$

pour expression de F,

$$F = {}^1/_2\,\bar{U} z U - {}^1/_2\,\bar{V} z V + R_1.$$

R_1 est une forme d'Hermite de même genre et de même nature que F et contient au moins deux variables de moins. En appliquant à R_1 la première méthode que nous avons donnée, si elle contient au moins un terme de la forme $\bar{x}\, b\, x$, ou la méthode que nous venons d'indiquer, si elle est dépourvue de pareils termes, nous arrivons à une nouvelle forme R_2 de même genre et de même nature que R_1 et qui contient au moins une variable de moins. Finalement, au bout de la $p^{\text{ième}}$ opération de ce genre nous arriverons à une forme de même genre et de même nature que la forme initiale et qui, ou bien n'aura plus qu'une seule variable, ou bien qui sera nulle; il est manifeste que cela arrivera au plus tard à la $(n-1)^{\text{ième}}$ opération, n étant le nombre de variables de F.

Montrons que les formes U et V ainsi obtenues sont linéairement distinctes. Admettons que les opérations successives aient porté sur les variables $x_1, x_2, \ldots, x_p$; dans le tableau des coefficients de ces variables il est clair qu'il y aura au moins deux lignes consécutives formées de la façon suivante :

$$\begin{array}{ll} 0, 0, \ldots, 1, & \varepsilon z^{-1} a, \ldots \\ 0, 0, \ldots, 1, & -\varepsilon z^{-1} a, \ldots \end{array}$$

mais on peut, sans changer le nabla attaché aux p premières lignes et aux p premières colonnes de ce tableau, remplacer la seconde de ces deux lignes par le résultat obtenu en retranchant de cette ligne les éléments correspondants de la précédente (corollaire du théorème VII, p. 39); ce qui donne

$$\begin{array}{ll} 0, 0, \dots, 1, & \varepsilon z^{-1} a, \dots \\ 0, 0, \dots, 0, & -2\varepsilon z^{-1} a, \dots \end{array}$$

et par suite, en faisant autant de fois qu'il sera nécessaire cette opération, le nabla obtenu se réduira à la norme de son terme principal, qui est nécessairement différent de zéro, z ne pouvant être ni nul ni infini, et a aussi.

Il ne nous reste plus, pour achever la démonstration de notre théorème, qu'à prouver que les c_i jouissent bien de la propriété énoncée. Le raisonnement fait dans la première méthode demeure valable ici; seulement, on pourrait croire à priori qu'en changeant le signe du z correspondant au c_i envisagé (quantités qui sont manifestement égales) on puisse changer le signe de c_i, sans, bien entendu, changer u_i en une forme linéairement distincte; or il n'en est rien, car cette transformation de z en $-z$ change U en V et V en U, formes qui, nous l'avons vu, sont linéairement distinctes.

THÉORÈME XIV. — *Pour que la forme d'Hermite* $\mathrm{F}(x^1, x^2, \dots, x^n)$ *soit la somme de* p *termes de la forme* $\bar{u}_i c_i u_i$, *les* u *étant des formes linéaires unilatérales de même nature que* F *linéairement distinctes, il est nécessaire et suffisant que l'on puisse former avec* p *lignes du nabla de cette forme et avec les* p *colonnes de mêmes rangs que ces lignes respectivement un nabla mineur d'ordre* n — p *différent de zéro, tous les nabla mineurs d'ordre* n — p — 1 *étant nuls.*

Soit, en effet,

$$\mathrm{F} = \sum_{i=1}^{n} \bar{u}_i c_i u_i = \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \bar{x}^h a_k^h x^k$$

avec

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} b_j^i x^j$$

et, enfin, f_h désignera comme précédemment la dérivée partielle de F par rapport à x_h.

Les polynomes u_i étant supposés linéairement indépendants, on peut former avec les coefficients des variables un nabla d'ordre p différent de zéro. Nous pouvons toujours suposser les notations disposées de telle façon que ce nabla soit celui des coefficients des variables $x^1, x^2, \ldots, x^p$, c'est-à-dire que le nabla

$$\left|\begin{matrix} b_1^1 & b_2^1 & \ldots\ldots & b_p^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & \ldots\ldots & b_p^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_1^p & b_2^p & \ldots\ldots & b_p^p \end{matrix}\right| = \mathrm{D}$$

soit différent de zéro.

Cela posé, on a, en vertu du théorème XII,

$$f_1 = \sum_{j=1}^{p} \overline{b_1^j}\, c_j\, u_j$$

$$f_2 = \sum_{j=1}^{p} \overline{b_2^j}\, c_j\, u_j$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_p = \sum_{j=1}^{p} \overline{b_p^j}\, c_j\, u_j$$

$$f_{p+1} = \sum_{j=1}^{p} \overline{b_{p+1}^j}\, c_j\, u_j$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_n = \sum_{j=1}^{p} \overline{b_n^j}\, c_j\, u_j.$$

Les dérivées partielles $f_1, f_2, \ldots, f_p$ sont des fonctions linéaires unilatérales homogènes de même nature que F des polynomes u_i.

Or, si l'on considère les p premières équations, en regardant les u_i comme des inconnues, on voit que le nabla des coefficients est égal à

$$\prod_j \mathrm{N}(c_j) \cdot \mathrm{D},$$

car

$$\{\overline{b_j^i}\}_d = \{\overline{b_j^i}\}_g = \{b_j^i\}_d = \mathrm{D}.$$

Ce nabla est donc différent de zéro; par conséquent, les polynomes u_i sont des fonctions linéaires unilatérales de même nature que F et homogènes des dérivées partielles $f_1, f_2, \ldots, f_p$.

Il en résulte que les deux systèmes $u_i=0$ et $f_i=0$, $(i=1, 2, \ldots, p)$ sont équivalents; donc les p premières dérivées partielles $f_1, f_2, \ldots, f_p$ sont linéairement distinctes et les $n-p$ autres sont des fonctions linéaires unilatérales de même nature que F, homogènes des p premières. En vertu du théorème de Rouché, le nabla principal du système $f_i=0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ est donc d'ordre p. Le théorème est donc démontré.

C'est de ce théorème que résulte la proposition de la page 34 (th. VI) et les généralisations dont nous avons parlé. En effet,

Théorème XV. — *La forme d'Hermite*

$$\mathrm{F} = \sum_h \sum_k \overline{x_h}\, \mathrm{A}_{hk}^i\, x_k$$

où les A *sont ceux du développement du nabla* $\{a_j^i\}$, *est réductible à un seul terme de la forme* $\overline{\mathrm{u}}\,\mathrm{u}$.

En conservant les notations que nous avons adoptées, l'indice inférieur est celui des colonnes. Cela étant, posons

$$x_h = \sum_{j=1}^{n} a_h^j\, y_j.$$

Cette substitution transforme la forme F en une forme F′ :

$$\mathrm{F}' = \sum_j \sum_m \overline{y_j}\, \mathrm{B}_{jm}^i\, y_m$$

où

$$\mathrm{B}_{jm}^i = \sum_h \sum_k \overline{a_h^j}\, \mathrm{A}_{hk}^i\, a_k^m.$$

On voit aisément sur cette formule, en tenant compte des relations auxquelles satisfont les A^i_{hk}, que tous ces coefficients B sont nuls, sauf un :

$$B^i_{ii} = \{ a^h_k \} = \nabla.$$

Donc la forme F se réduit par cette substitution au seul terme

$$\overline{y_i} \nabla y_i$$

ce qui démontre la proposition.

Les nabla mineurs d'ordre 1 à $n-2$ sont tous nuls. C'est l'annulation des mineurs d'ordre $n-2$ qu'exprime le théorème de la page 34.

Théorème XVI. — *Le nabla d'une forme d'Hermite* F' *transformée de la forme d'Hermite* F *par une substitution linéaire unilatérale de même nature que* F *est égal au nabla de la forme* F *multiplié par le carré du nabla de la substitution.*

Reprenons les notations du théorème XI de la page 48. On avait pour coefficients de F' l'expression

$$A^i_j = \sum_h \sum_k \overline{b^h_i}\, a^h_k\, b^k_j.$$

Posons

$$c^i_k = \sum_h \overline{b^h_i}\, a^h_k$$

on a, en vertu du théorème I de la page 28,

$$\{ A^i_j \}_d = \{ \sum_k c^i_k b^k_j \}_d = \{ c^i_k \}_d \cdot \{ b^k_j \}_d.$$

Or on a

$$\{ c^i_k \}_d = \{ \overline{c^i_k} \}_g = \{ \sum_h \overline{a^h_k}\, b^h_i \}_g = \{ \sum_h a^{k}_{h} b^h_i \}_g$$

ou, en posant

$$b^h_i = \underline{b^i_h}$$

$$\{ c^i_k \}_g = \{ \sum_h a^h_k \underline{b^i_h} \}_g = \{ b^i_h \}_g \cdot \{ a^h_k \}_g.$$

Mais nous avons vu au début de ce chapitre

$$\{ a^h_k \}_g = \{ a^h_k \}_d$$

et, d'autre part,

$$\{ \underline{b^i_h} \}_g = \{ \underline{b^i_h} \}_d = \{ b^h_i \}_d.$$

D'où

$$\{ A^i_j \}_d = \{ b^h_k \}_d \cdot \{ a^s_i \}_d \cdot \{ b^r_u \}_d$$

ce qui démontre le théorème :

$$\{ A^i_j \}_d = \{ a^h_k \}_d \cdot [\{ b^s_i \}_d]^2$$

Théorème XVII. — *La matrice réciproque d'une matrice hermitique est encore une matrice hermitique du même genre.*

Soit (a^i_j) la matrice hermitique donnée. Considérons le système de n équations linéaires unilatérales formé avec les $n-1$ équations qui définissent les coefficients A^i_{jk} (i et j étant fixes) du développement du nabla de la matrice donnée par rapport aux éléments de la colonne de rang i et par l'équation

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \overline{a^i_i}} = \sum_k A^i_{jk}\, a^k_i = Y^i.$$

Si dans ce système nous regardons les A^i_{jk} (i et j étant fixes) comme des inconnues et que nous désignons ces inconnues par X_k, nous avons le système linéaire unilatérale à gauche :

$$\sum_k X_k\, a^k_i = Y^i$$
$$\sum_k X_k\, a^k_r = 0. \qquad (r \neq i)$$

Multiplions chacune des équations de ce système par ε et tenons compte du fait que les a satisfont tous à la relation

$$a^k_i = \varepsilon\, \overline{a^i_k};$$

on obtiendra ainsi le système

$$\sum_k Z^k\, \overline{a^i_k} = \varepsilon Y^i$$
$$\sum_k Z^k\, \overline{a^r_k} = 0$$

en posant, pour plus de symétrie dans les formules, $Z^k = X_k$. Prenons alors les conjugués des deux membres de chacune des équations précédentes; on obtiendra le système

$$\sum_k a^i_k \overline{Z^k} = \varepsilon \overline{Y^i}$$
$$\sum_k a^r_k \overline{Z^k} = 0.$$

Le système ainsi obtenu a pour matrice la matrice hermitique considérée. Cela étant, calculons Z^j au moyen de ce système et rappelons-nous que

$$Z^j = \overline{Z^j} = A^i_{jj}.$$

On a

$$\nabla A^i_{jj} = Z^j = \varepsilon \frac{\partial \nabla}{\partial a^i_j} \overline{Y^i}$$

d'où

$$\varepsilon \overline{Y^i} = \nabla A^i_{jj} \overline{\frac{\partial \nabla}{\partial a^i_j}} \cdot \left(N \left(\frac{\partial \nabla}{\partial a^i_j} \right) \right)^{-1}$$

ou, en tenant compte du corollaire de la page 35, nous aurons

$$\varepsilon \overline{Y^i} = \left(\nabla A^i_{jj} \overline{\frac{\partial \nabla}{\partial a^i_j}} \right) \cdot (A^j_{ii} \nabla)^{-1}.$$

Or A^i_{jj} est le nabla d'ordre $n - 1$ obtenu en supprimant la ligne de rang j et la colonne de rang i; de même A^j_{ii} est le nabla d'ordre $n - 1$ obtenu en supprimant la ligne de rang i et la colonne de rang j; on voit aisément, en tenant compte du fait que la matrice considérée est hermitique, que si S est la matrice du premier de ces nabla, la matrice du second sera $\varepsilon \overline{S}'$ (S' désignant, comme d'habitude, la matrice transposée de S); cela étant, on voit facilement que

$$A^j_{ii} = \{ \overline{S'} \}_d = \{ \overline{S} \}_g = \{ S \}_d = A^i_{jj}.$$

On a donc

$$\varepsilon \overline{Y^i} = \overline{\frac{\partial \Delta}{\partial a^i_j}}$$

ou, en remplaçant Y' par sa valeur qui est égale à $\frac{\partial\nabla}{\partial a_i^j}$, on a finalement la relation

$$\frac{\partial\nabla}{\partial a_j^i} = \varepsilon\overline{\frac{\partial\nabla}{\partial a_i^j}}$$

ce qui établit évidemment la proposition.

28. Étude spéciale des formes d'Hermite du premier genre. — Nous allons voir dans ce numéro deux propriétés fondamentales des formes d'Hermite du premier genre. Comme précédemment, nous supposerons qu'il s'agit encore de formes à droite, hypothèse qui ne nuit en rien à la généralité du raisonnement qui se transpose sans aucune difficulté aux formes à gauche.

Théorème XVIII ou loi d'inertie. — *Dans la décomposition d'une forme d'Hermite en somme de termes de la forme* $\overline{u}_i\, c_i\, u_i$, *les* u_i *étant des formes linéaires unilatérales de même nature que la forme considérée distinctes, le nombre des termes précédés du signe + et celui des termes précédés du signe — sont invariables, quel que soit le mode de décomposition.*

Nous pouvons supposer que nous avons ramené tous les c_i à être de module 1; de sorte que

$$\sum_{i=1}^{h} \overline{u}_i u_i - \sum_{j=1}^{k} \overline{v}_j v_j$$

peut être regardé comme une première décomposition de F, les u et les v étant linéairement distincts.

Supposons que l'on ait trouvé une autre décomposition de F :

$$\sum_{i=1}^{h'} \overline{s}_i s_i - \sum_{i=1}^{k'} \overline{t}_i t_i$$

les s et les t étant lineairement distincts ou non. Je dis que $h' \geqslant h$.

En effet, supposons $h' < h$; dans ce cas, on a

$$h' + k < h + k$$

et, par suite,

$$h' + k < n.$$

On pourra donc trouver une infinité de solutions des équations

$$s_1 = 0, \quad s_2 = 0, \dots s_{h'} = 0, \quad v_1 = 0, \quad v_2 = 0, \dots v_k = 0.$$

Or les polynomes u_i, v_i étant en nombre supérieur à $h' + k$, on sait, d'après le théorème X, que parmi les solutions du système précédent il y en a qui n'annulent pas tous ces polynomes et par suite qui n'annulent pas tous les u_i. Remplaçons x_1, x_2, ..., x_n par les quaternions appartenant à une de ces solutions. En vertu de la première décomposition, la forme F prendra une valeur positive, tandis qu'en vertu de la seconde décomposition, pour ces mêmes valeurs des variables, F prendrait une valeur négative ou nulle. Il y a donc impossibilité à supposer $h' < h$; donc on a

$$h' \geq h.$$

On démontrera de même que l'on a $k' \geqslant k$; il suffit d'ailleurs d'appliquer le raisonnement précédent à la forme — F.

Supposons maintenant les termes correspondants à la seconde décomposition également linéairement indépendants; on aura aussi

$$h \geq h', \qquad k \geq k',$$

de sorte que l'on doit avoir dans ce cas

$$h = h', \qquad k = k'.$$

Pour les formes du second genre une telle proposition n'aurait aucun sens, puisque, comme nous l'avons vu au théorème XIII, on peut prendre, dans ce cas, c_i égal à n'importe quel vecteur arbitraire non nul.

THÉORÈME XIX. — *Le nabla d'une forme d'Hermite du premier genre est carré parfait.*

Ceci est immédiat, si l'on procède par récurrence. Supposons donc que le nabla d'une forme hermitique du premier genre à $n-1$ lignes et $n-1$ colonnes soit carré parfait (cela se vérifie sans aucune difficulté pour la matrice hermitique du premier genre à deux lignes et deux colonnes) et montrons que le nabla d'une matrice hermitique du premier genre à n lignes et n colonnes est carré parfait.

D'après le théorème XVII de la page 58 il résulte que $\frac{\partial \nabla}{\partial a_i^i}$ est un scalaire. De même, d'après le corollaire de la page 35, on a

$$\mathrm{N}\left(\frac{\partial \nabla}{\partial a_i^i}\right) = \left(\frac{\partial \nabla}{\partial a_i^i}\right)^2 = \mathrm{A}_{ii}^i \cdot \nabla.$$

Or A'_{ii} est encore un nabla hermitique à $n-1$ lignes et $n-1$ colonnes, puisqu'il est obtenu par suppression de la ligne de rang i et de la colonne de même rang d'un nabla hermitique; c'est donc, par hypothèse, un carré parfait. La relation précédente démontre par conséquent notre théorème.

COROLLAIRE. — *Si l'on effectue sur les variables d'une forme d'Hermite* F *du premier genre une substitution linéaire unilatérale de même nature que* F, *la racine carrée du nabla de la forme* F′ *obtenue après la substitution est égale à la racine carrée du nabla de la forme* F *multipliée par le nabla de la substitution.*

Cela résulte immédiatement du théorème qui précède et de celui de la page 57.

DÉFINITION. — Il est logique de donner le nom de *discriminant* à la racine carrée du nabla d'une forme d'Hermite du premier genre, à cause des étroites analogies que nous venons de relever avec les formes hermitiques ordinaires. On peut donner assez facilement la loi de formation directe du discriminant d'une forme d'Hermite quaternionienne du premier genre.

29. Loi de formation directe du discriminant. — On développera le déterminant a_j^i comme si les éléments étaient des quantités réelles; puis, dans chaque monome du développement on groupera les termes de façon que l'indice supérieur d'un terme soit le même que l'indice inférieur du terme précédent, jusqu'à ce que l'on arrive à un terme qui a pour indice inférieur l'indice supérieur du premier terme du monome; si cela arrive avant d'avoir épuisé tous les termes que contient le monome, on recommencera la même opération sur les termes restants; il reste sous-entendu que l'opération que nous venons de faire subir au monome ne change pas le signe avec lequel il doit figurer dans le développement du déterminant.

Pour établir que l'on obtient bien ainsi le discriminant, il nous faut d'abord montrer que l'expression que l'on vient de définir a une valeur scalaire et que son carré est bien égal au nabla du système déterminé par les dérivées partielles de F par rapport aux $\overline{x}$.

1. *L'expression que l'on vient de définir a bien une valeur scalaire.* — Deux cas sont à envisager, suivant que l'indice supérieur du premier terme est le même que l'indice inférieur du dernier ou non.

a) L'indice supérieur du premier est le même que l'indice inférieur du dernier : le monome considéré est donc de la forme

$$a_j^i a_h^j \cdots a_m^k a_i^m$$

il est évident, d'autre part, que notre expression contient le monome (en modifiant au besoin l'ordre des termes, ce qui n'est pas contraire à notre définition, à condition d'opérer par permutation circulaire)

$$a_m^i a_k^m \cdots a_j^h a_i^j$$

ces deux termes (monomes) ont évidemment le même signe, et comme par hypothèse on a

$$a_j^i = \overline{a_i^j}$$

ces deux monomes sont conjugués et par suite leur somme est un scalaire.

b) L'indice inférieur du premier terme n'est pas le même que l'indice supérieur du dernier. S'il en est ainsi, c'est que le monome considéré contient entre ses extrémités un terme qui a pour indice inférieur l'indice supérieur du premier; ce monome est donc de la forme

$$a_j^i a_h^j \cdots a_m^k a_i^m \mathrm{A}$$

A désignant l'ensemble des autres termes du monome. Comme précédemment, il est évident que notre expression contient le terme

$$a_m^i a_k^m \cdots a_j^h a_i^j \mathrm{A}$$

et ces deux monomes ont le même signe; mettons alors A en facteur à droite et le coefficient de A sera, d'après l'hypothèse, un scalaire. Désignons par S ce scalaire; alors, ou bien A est un monome normal (c'est-à-dire que l'indice supérieur de son premier terme est le même que l'indice inférieur de son dernier terme), ou bien A se compose d'un certain nombre de monomes normaux. Dans le premier cas il est évident que notre expression contient le terme S $\overline{\mathrm{A}}$ (symbole qui groupe du reste deux monomes du développement) et il est clair que S A et S $\overline{\mathrm{A}}$ ont le même signe. Donc leur somme est encore un scalaire. Dans le second cas A contient plusieurs binomes normaux; on posera.

$$\mathrm{A} = a_p^{i'} a_r^p \cdots a_u^t a_{i'}^u \mathrm{A}_1 \qquad (i' \neq i).$$

Notre expression contient évidemment le terme

$$\mathrm{S}\, a_u^{i'} a_t^u \cdots a_p^r a_{i'}^p \mathrm{A}_1$$

ce monome et celui désigné par S A ont le même signe; en mettant alors A_1 en facteur à droite on aura pour coefficient de S A_1 un scalaire S_1. Il est important de remarquer que le symbole S S_1 A_1 groupe quatre termes de notre développement. En raisonnant sur A_1 comme on vient de le faire sur A, on arrivera à montrer que notre développement peut être décomposé en une somme de 2^p monomes chacune qui ne sont autres que le produit de p scalaires, ce qui établit le caractère scalaire de l'expression que nous avons adoptée comme définition du discriminant.

2. *Le carré du discriminant est le nabla de la forme* **F.** En effet, si l'on développait le déterminant $|\overline{a^i_j}|$ suivant la même règle, on aurait

$$| a^i_j | = | \overline{a^i_j} |.$$

Cela étant, multiplions ces deux déterminants après les avoir développés suivant la règle indiquée et remplaçons dans chacun des $(n!)^2$ monomes qui composent le développement du produit deux termes consécutifs qui sont de la forme suivante : $a^i_j\, a^j_h$ par $a^i_j\, \overline{a^h_j}$, comme l'autorise l'hypothèse; puis, ces deux termes remplaçons-les à leur tour par D^j_{ih}. Notre développement du produit, qui n'est autre que le carré du discriminant, était primitivement formé de $(n!)^2$ monomes de $2n$ termes chacun; après la substitution dont nous venons de parler il est toujours composé de $(n!)^2$ monomes, mais ces monomes ne sont composés que de n termes D chacun. Ces $(n!)^2$ monomes peuvent alors s'écrire sous forme d'un Σ de $n!$ d'entre eux, la sommation étant faite par rapport aux indices supérieurs des D, que l'on remplacera dans chacun des monomes de toutes les manières possibles par les $n!$ permutations des nombres 1 2 3 ... n. Les monomes placés sous le signe Σ constituent le développement du déterminant déjà écrit page 45 dans la loi de formation directe du nabla, ce qui établit notre proposition. Nous n'insisterons pas davantage sur cette démonstration, car elle n'est qu'un cas particulier de celle donnée par Study à propos de la loi de formation du nabla d'un tableau quaternionien quelconque; aussi, renvoyons-nous le lecteur qui la trouvera insuffisamment rigoureuse au mémoire de Study des *Acta Mathematica*.

DEUXIÈME PARTIE

LA GÉOMÉTRIE PROJECTIVE QUATERNIONIENNE

CHAPITRE PREMIER

Notions et définitions préliminaires.

§ 1. L'espace projectif quaternionien et la Géométrie.

§ 2. L'espace projectif complexe associé.

§ 3. Variétés linéaires à p dimensions et repères.

§ 4. Définition des projectivités de la Géométrie : ces opérations forment un groupe.

I

30. Définitions fondamentales. — Un *point* de l'espace projectif quaternionien est essentiellement défini pour nous par $n+1$ quaternions non tous nuls, qui sont, par définition, ses coordonnées homogènes

$$x^1, x^2, \ldots, x^n, x^{n+1}$$

si l'espace considéré est à n dimensions.

Alors qu'en géométrie projective complexe, nous l'avons dit, deux points qui ont leurs coordonnées proportionnelles sont regardés comme identiques, la non-commutativité de la multiplication nous empêche ici de faire a priori une telle convention. Pour parvenir à une définition analogue, nous sommes conduit à définir d'abord la nature de la géométrie que nous voulons étudier, ou, plus exactement, la nature des substitutions linéaires que comprendra cette géométrie.

Nous ne considérerons ici que des substitutions linéaires à droite que nous appelons *homographies*; ces transformations auront donc pour équations

$$x'^i = \sum_{j=1}^{n+1} a^i_j x^j. \qquad (i = 1, 2, \dots, n+1).\ ^{(1)} \tag{1}$$

De cette définition résulte immédiatement que seuls les points dont les coordonnées se déduisent de celles d'un certain point par multiplication à droite par un même facteur non nul peuvent être regardés comme identiques. S'il y a lieu de distinguer deux points dont les coordonnées sont proportionnelles à droite, nous dirons que ce sont deux *points analytiques* distincts qui ont le même support géométrique.

Les coordonnées non homogènes d'un point de l'espace projectif quaternionien seront les n quaternions

$$X_i = x^i \cdot (x^{n+1})^{-1}.$$

Il s'ensuit que les points de coordonnées homogènes respectives (x^i) et $(x^i k)$ ont les mêmes coordonnées non homogènes, car on sait que

$$(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}.$$

Avec ces définitions, on voit aisément que les notions de continuité de l'espace projectif complexe s'étendent sans difficulté à l'espace projectif quaternionien; c'est ce que nous résumerons en disant que l'espace projectif quaternionien est un espace *compact* au sens de la terminologie adoptée par M. Fréchet (2).

II

31. Interprétation de la Géométrie projective quaternionienne. — Nous avons vu, au premier paragraphe du chapitre II de la première partie, comment on pouvait

(1) Nous supposons, bien entendu, $|a^i_j| \neq 0$.

(2) Maurice Fréchet, *Les espaces abstraits*. Paris, 1928 (Gauthier-Villars).

définir parfaitement un quaternion à l'aide de deux quaternions réduits relatifs à la même unité principale qui sont, au point de vue du calcul, assimilables à des quantités complexes ordinaires.

Cela étant, il paraît a priori que l'espace projectif, ou plutôt la géométrie projective quaternionienne à n dimensions, n'est autre que la géométrie projective complexe à $2n+1$ dimensions; nous allons voir que ceci n'est pas exact et que la géométrie projective quaternionienne à n dimensions est la géométrie des droites de l'anticongruence linéaire absolue.

Nous sommes ainsi conduit, par les définitions que nous avons adoptées au paragraphe précédent, à nous poser la question suivante : quelle est la nature de la correspondance entre l'espace projectif quaternionien à n dimensions et l'espace projectif complexe à $2n+1$ dimensions ?

Il est clair que si nous nous bornons à ne considérer que des points analytiques des deux espaces, la correspondance est ponctuelle et biunivoque; aussi nous poserons-nous la question pour les points géométriques.

Soit alors un point quelconque de l'espace projectif quaternionien défini par ses $n+1$ coordonnées homogènes (x^i). Tous les points analytiques qui ont ce point pour support ont leurs coordonnées homogènes de la forme $(x^i.b)$, b étant un quaternion arbitraire non nul; dans l'espace projectif complexe ces points seront représentés par les points de coordonnées homogènes (en conservant les mêmes notations qu'à la page 12) :

$$\begin{aligned} z'^i &= b'x'^i - b''\overline{x''^i} \\ z''^i &= b'x''^i + b''\overline{x'^i}. \end{aligned}$$

Il apparaît nettement sur ces formules que le point $(z'^i\, z''^i)$ de l'espace projectif complexe à $2n+1$ dimensions appartient à la droite qui joint les points $(x'^i\, x''^i)$ et $(\overline{x''^i} - \overline{x'^i})$, qui sont deux points conjugués par l'antiinvolution absolue : à un point géométrique de l'espace projectif quaternionien correspond donc dans l'espace projectif complexe une droite de l'anticongruence linéaire absolue. Réciproquement, il est clair qu'à toute droite de l'anticongruence linéaire attachée à une antiinvolution de seconde espèce correspond un point de l'espace projectif quaternionien.

Pour compléter cette étude de la correspondance entre l'espace projectif quaternionien à n dimensions et l'espace projectif complexe à $2n+1$ dimensions, cherchons comment se correspondent les homographies de ces deux espaces.

Nous avons déjà vu qu'à toute homographie du premier correspond une homographie du second qui laisse invariante l'antiinvolution absolue. Les seules homographies de ce dernier espace qui pourront correspondre aux homographies du premier sont celles qui laissent invariante une antiinvolution de seconde espèce. Soit donc $\mathcal{H}$ une telle homographie de l'espace projectif complexe à $2n+1$ dimensions. Nous pouvons évidemment supposer, sans nuire à la généralité, que le polyèdre de référence est celui pour lequel l'antiinvolution de seconde espèce que laisse invariante $\mathcal{H}$ est réduite à sa forme canonique.

Cela étant, l'homographie $\mathcal{H}_1$ de l'espace projectif complexe à $2n+1$ dimensions correspondant à l'homographie H de l'espace projectif quaternionien à n dimensions a une matrice H_1 qui satisfait à la relation

$$A \cdot \overline{H}_1 = H_1 \cdot A$$

(A étant la matrice de l'antiinvolution absolue).

Or nous avons vu précédemment que toute homographie de l'espace projectif complexe à $2n+1$ dimensions qui laisse invariante l'antiinvolution absolue pouvait toujours être supposée avoir une matrice vérifiant la relation précédente (voir p. 24) et que dans ce cas sa matrice, donc aussi celle de **H**, était parfaitement définie à un facteur réel près. Il en résulte donc qu'à toute homographie de l'espace projectif complexe à $2n+1$ dimensions qui laisse invariante une antiinvolution de seconde espèce correspond une homographie de l'espace projectif quaternionien à n dimensions dont la matrice est parfaitement définie à un facteur réel près. Si, de plus, on astreint $\mathcal{H}$ à être de déterminant égal à 1 et **H** à être de naba égal à 1, la matrice de $\mathcal{H}$ est alors parfaitement définie au signe près; et il en est de même de la matrice de **H**.

III

32. Définition des variétés linéaires a p dimensions. — Revenons à l'espace projectif quaternionien à n dimensions et définissons ce que nous entendons par variété linéaire à p dimensions.

Le lieu des points dont les coordonnées homogènes satisfont à $n-p$ relations linéaires unilatérales à droite et distinctes sera appelé *variété linéaire à p dimensions*.

La variété linéaire à $n-1$ dimensions sera appelée *plan*; la variété linéaire à 1 dimension sera nommée *droite*.

Dans l'espace projectif complexe à $2n+1$ dimensions, une variété linéaire à p dimensions est représentée par une variété linéaire à $2p-1$ dimensions, invariante par l'antiinvolution absolue.

Toutes ces définitions entraînent évidemment l'hypothèse que p est inférieur à n; nous la supposerons donc toujours réalisée.

Une variété linéaire à p dimensions est parfaitement définie par $p+1$ points linéairement distincts (c'est-à-dire que l'on peut extraire du tableau à $p+1$ lignes et $n+1$ colonnes formé avec les coordonnées homogènes de ces points un nabla d'ordre $p+1$ non nul); soient A_i ces points et soit M un point de la variété; on peut écrire

$$M = \sum_{i=1}^{p+1} A_i v^i$$

les v n'étant pas tous nuls. Cela résulte du fait que le système de $n+1$ équations à $p+1$ inconnues symbolisé par la relation précédente satisfait aux conditions du théorème de Rouché en vertu des hypothèses faites sur les points A et le point M.

Ce même théorème de Rouché nous montre que toutes les propositions relatives à l'intersection des variétés linéaires de l'espace projectif complexe ordinaire demeurent valables pour les variétés linéaires de l'espace projectif quaternionien. En particulier, pour que deux variétés linéaires, l'une à p dimensions, l'autre à q dimensions, se coupent, il suffit que l'on ait

$$p+q \geq n.$$

33. Définition des coordonnées projectives. — Considérons $n+1$ points analytiques A_i de coordonnées homogènes :

$$a_i^1, a_i^2, \ldots, a_i^{n+1}$$

non situés dans un même plan, c'est-à-dire que $\{a^i_j\} \neq 0$.

Soit alors M un point analytique quelconque; on peut mettre ce point sous la forme symbolique

$$M = \sum_i A_i y_i$$

formule qui condense les $n+1$ égalités

$$x_j = \sum_{i=1}^{n+1} a^i_j y_i$$

les y_i sont bien déterminés, puisque, par hypothèse, le nabla du système précédent n'est pas nul. Ces quantités peuvent donc être regardées comme constituant un nouveau système de coordonnées. D'ailleurs, les divers points analytiques provenant d'un même point géométrique ont des coordonnées non homogènes qui sont les mêmes. Ainsi, une homographie de l'espace projectif quaternionien peut s'interpréter comme un changement de coordonnées. Les équations d'une variété linéaire restent du premier degré dans ce nouveau système de coordonnées, que nous appellerons coordonnées projectives.

Les $n+1$ points géométriques A_i ne suffisent pas à définir complètement le nouveau système de coordonnées; mais si l'on se donne un $(n+2)^{\text{ième}}$ point géométrique E :

$$E = \sum_i A_i c_i \qquad (c_i \neq 0, q \cdot q \text{ soit } i),$$

il est clair qu'en substituant aux points analytiques A_i les points analytiques $A_i c_i$, le point E prend les coordonnées $y_i = 1$. Par suite, les $n+2$ points A et le point E déterminent un système de coordonnées dans lequel ces points ont pour coordonnées

$$A_i : x_j^{(i)} = 0 \quad \text{pour } i \neq j \quad \text{et} \quad x_i^{(i)} = 1$$
$$E : (1, 1, 1, \ldots, 1).$$

Dans ce système, tout point a ses coordonnées définies à un facteur arbitraire près à droite. Il faut ajouter la restriction que parmi les $n+2$ points A_i et E il n'y en a pas $n+1$ situés dans un même plan. Les $n+1$ points A_i seront appelés les points de base ou sommets du polyèdre de référence et le point E sera le point unité.

IV

34. Le principe de dualité dans la géométrie projective quaternionienne. — Un plan de l'espace projectif quaternionien est, nous l'avons dit, le lieu des points dont les coordonnées satisfont à une équation de la forme

$$\sum u_i x^i = 0, \tag{1}$$

les u_i n'étant pas tous nuls. Ces quantités u définissent le plan sans ambiguïté : ainsi le point et le plan jouent des rôles symétriques, pour le point les coordonnées sont définies à un facteur à droite près tandis que pour le plan les coordonnées u_i sont définies à un facteur à gauche près.

La relation (1) entraîne la suivante :

$$(2) \qquad \Sigma \overline{x^i}\, \overline{u_i} = 0.$$

Ces deux relations équivalentes montrent le rôle symétrique joué, d'une part, par $\overline{x^i}$ et u_i, d'autre part, par $\overline{u_i}$ et x^i : à tout théorème sur les points on pourra donc faire correspondre un théorème sur les plans et réciproquement; c'est ce qui, dans notre géométrie, équivaut au principe de dualité de la géométrie projective complexe ordinaire.

La correspondance biunivoque de point à plan définie par

$$u'_i = \sum_j x^j b^i_j$$

et la correspondance biunivoque de plan à point définie par

$$x'^i = \sum_j c^j_i \overline{u_j} \text{ (1)}$$

conservent l'incidence, c'est-à-dire que si un point (x) est contenu dans un plan (u), le plan (u') transformé du point (x) contient le point (x') transformé du plan (u); cela suppose que les dernières relations ne font qu'exprimer la résolution des premières, ou, en d'autres termes, qu'on a la relation matricielle

$$(b^i_j)_g \cdot (\overline{c^k_h})_g = (m),$$

(m) désignant, comme d'habitude, la matrice ayant tous ses éléments nuls, sauf ceux de la diagonale principale, égaux au *scalaire m*.

C'est à ces transformations que nous donnerons désormais le nom de *corrélation*.

Sur la droite projective quaternionienne, espace projectif à une dimension, la notion de point et la notion de plan se confondent; les corrélations sont alors des transformations ponctuelles qui portent le nom d'*antihomo-*

---

(1) Nous supposons évidemment $\{ b^i_j \}_g \neq 0$ et $\{ c^j_i \}_d \neq 0$.

graphies. L'étude de ces transformations ayant été faite en détails par Study dans ses mémoires des *Math. Zeitschr.*, déjà cités, nous n'y reviendrons pas ici.

35. Le groupe projectif quaternionien. — On voit aisément que les homographies de l'espace projectif quaternionien à n dimensions forment un groupe; il suffit, en effet, de remarquer que la transformation inverse d'une homographie est une homographie et que le produit de deux homographies est aussi une homographie. Mais, grâce aux corrélations, il est facile d'étendre ce groupe. En effet, la transformation inverse d'une corrélation est une corrélation; le produit d'une corrélation par une homographie ou d'une homographie par une corrélation est une corrélation et enfin le produit de deux corrélations est une homographie; l'ensemble des homographies et des corrélations de l'espace projectif quaternionien à n dimensions forme donc un groupe. C'est ce groupe que nous appellerons le *groupe projectif quaternionien*.

Les relations qui définissent les transformations du groupe projectif quaternionien font toutes intervenir les coefficients d'une matrice quaternionienne $(\mathfrak{a})$. On pourra donc écrire ces relations symboliquement sous la forme

$$(x') = (\mathfrak{a})_d (x)$$
$$(u') = (\bar{x}) (\mathfrak{a})_g$$
$$(x') = (\mathfrak{a})_d (\bar{u}).$$

La matrice $(\mathfrak{a})$, qu'on pourrait modifier en multipliant tous ses éléments par un même *scalaire* non nul, sans changer l'opération géométrique, définit l'effet produit par cette opération sur les points de l'espace. En vertu du principe de dualité, tel que nous l'avons énoncé, il est tout aussi légitime de chercher à définir analytiquement l'effet produit sur les plans. Prenons, par exemple, le cas d'une homographie

$$x'^i = \sum_j a^i_j x^j$$

le raisonnement et la conclusion seraient analogues pour une corrélation. Soit (u') le plan transformé d'un plan (u). L'équation

$$\sum_i u'_i x'^i = 0$$

doit être une conséquence de la relation

$$\sum_i u_i x^i = 0.$$

Or on a

$$u'_i x'^i = \sum_i u'_i [\sum_j a^i_j x^j] = \sum_i \sum_j u'_i a^i_j \cdot x^j$$

il suffira donc de poser

$$u_j = \sum_i u'_i a^i_j.$$

Désignons alors, comme nous l'avons déjà fait par $(\mathcal{A}')$. la matrice transposée de la matrice $(\mathcal{A})$, c'est-à-dire celle que l'on obtient en changeant les lignes en colonnes et les colonnes en lignes. Les dernières équations écrites prennent la forme symbolique

$$(u) = (u')(\mathcal{A}')_g$$

ou encore

$$(u') = (u)(\mathcal{A}')_g^{-1}$$

S^{-1} étant la matrice inverse de S. D'où

Toute projectivité, c'est-à-dire une transformation du groupe projectif, est définie dualistiquement par deux matrices quaternioniennes $(\mathcal{A})$ *et* $(\mathcal{A}')^{-1}$ *relatives, l'une à des systèmes à droite, l'autre à des systèmes à gauche, suivant que l'on considère l'effet produit par elle sur des points ou sur des plans.* Le tableau suivant donne les divers cas possibles :

Homographie. .	$(x') = (\mathcal{A})_d (x)$;	$(u') = (u)(\mathcal{A}')_g^{-1}$
Corrélation . .	$(u') = (\overline{x})(\mathcal{A})_g$;	$(x') = (\mathcal{A}')_d^{-1}(\overline{u})$.

Deux remarques importantes se présentent à nous maintenant :

I. La dualité, comme le prouve le tableau précédent, montre que si, pour définir notre géométrie, nous avions choisi une substitution unilatérale à gauche au lieu d'une substitution unilatérale à droite, nous n'aurions obtenu que le changement de nomination de points et plans.

II. Il n'existe pas dans notre géométrie d'opérations analogues aux antihomographies et aux anticorrélations de la géométrie projective complexe; ceci tient au fait que la transformation biunivoque

$$x'^i = \overline{x^i}$$

ne fournit pas le même support géométrique pour deux points analytiques ayant même support.

CHAPITRE II

Le rapport anharmonique.

§ 1. Comment introduire le rapport anharmonique?

§ 2. Le théorème du quadrilatère complet résout la question.

§ 3. Le rapport anharmonique : sa définition, ses principales propriétés, son application à la géométrie.

I

36. Position du problème. — La plus grande difficulté que l'on rencontre quand on veut étendre à la géométrie projective quaternionienne les résultats de la géométrie projective complexe ordinaire tient à la non-commutativité de la multiplication. C'est aussi elle qui nous empêche d'adopter a priori la difinition classique du rapport anharmonique comme définition du rapport anharmonique de quatre quaternions.

Nous pourrions cependant, pour y arriver, prendre en bloc toutes les façons de définir le rapport anharmonique et conserver celle qui, dans le cas des quaternions, englobe toutes les propriétés, ou, tout au moins, la majeure partie de ces propriétés du rapport anharmonique de quatre quantités complexes ordinaires. Il nous paraît préférable, sinon plus rationnel, de passer par l'intermédiaire de la géométrie pour parvenir à la définition cherchée.

La forme la plus fréquente et la plus élémentaire du rapport anharmonique en géométrie est certainement celle de la division harmonique. Parmi les aspects aussi nombreux que variés sous lesquels se présente la division harmonique, c'est le théorème du quadrilatère complet : *toute diagonale d'un quadrilatère complet est divisée harmoniquement par les deux autres*, et la réciproque de ce théorème qui sont les plus importants pour la géométrie projective. Aussi allons-nous essayer d'utiliser cette propriété, si elle reste vraie dans notre géométrie, pour obtenir la définition du rapport anharmonique.

II

37. Le théorème du quadrilatère complet; le problème qu'il pose. — Étant donnés dans le plan quaternionien une droite et quatre points sur cette droite, on

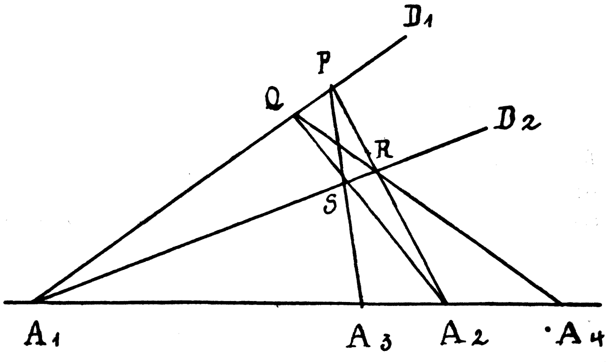

Fig. 1.

demande la relation qui doit lier les coordonnées non-homogènes de ces quatre points pour obtenir la condition suivante : si par le point A_1 on mène deux droites arbitraires D_1 et D_2, puis, par le point A_4, une droite arbitraire qui coupe D_1 en Q et D_2 en R; on joint A_2 aux points Q et R; la droite A_2 R coupe D_1 en P et la droite A_2 Q coupe D_2 en S; les points A_3, P et S doivent être en ligne droite.

Pour résoudre ce problème, prenons dans le plan quaternionien un repère dont la droite portant les quatre points A sera un des axes; de sorte que l'on peut attribuer à ces quatre points les coordonnées non homogènes.

$$A_1(a_1, 0); \quad A_2(a_2, 0); \quad A_3(a_3, 0); \quad A_4(a_4, 0);$$

on peut alors écrire les équations des droites D_1, D_2 et A_4 R Q ou D_3 :

$$\text{Équation } A_1\,PQ \text{ ou } D_1 : \quad x - a_1 = my$$
$$\text{Id.} \quad A_1\,RS \text{ ou } D_2 : \quad x - a_1 = ny$$
$$\text{Id.} \quad A_4\,RQ \text{ ou } D_3 : \quad x - a_4 = py.$$

On tire aisément de ces dernières relations les coordonnées des points Q et R :

$$Q\,(Y_1 = (m - p)^{-1} \cdot (a_4 - a_1); \quad X_1 = a_1 + mY_1 = a_4 + pY_1)$$
$$R\,(Y_2 = (n - p)^{-1} \cdot (a_4 - a_1); \quad X_2 = a_4 + pY_2 = a_1 + nY_2).$$

A l'aide de ces dernières expressions on obtient aisément les équations des droites

$$A_2QS \qquad \text{et} \qquad A_2RP,$$

il suffit de remarquer que ces équations sont de la forme

$$x - a_2 = uy$$

et d'écrire, pour avoir les valeurs de u correspondantes, que la première passe par Q et la seconde par R. Il vient, après simplification :

$$\text{Équation de } A_2\,QS : x - a_2 = m + (a_1 - a_2)(a_4 - a_1)^{-1}(m - p)\,y$$
$$\text{Équation de } A_2\,RP : x - a_2 = n + (a_1 - a_2)(a_4 - a_1)^{-1}(n - p)\,y.$$

On tire facilement de ces deux équations et des précédentes les coordonnées de P et S :

$$S\,(Y_3 = H^{-1}(a_1 - a_2); \quad X_3 = a_1 + nH^{-1}(a_1 - a_2))$$
$$P\,(Y_4 = K^{-1}(a_1 - a_2); \quad X_4 = a_1 + mK^{-1}(a_1 - a_2))$$

en posant

$$H = m - n + (a_1 - a_2)(a_4 - a_1)^{-1}(m - p)$$
$$K = n - m + (a_1 - a_2)(a_4 - a_1)^{-1}(m - p).$$

Pour que P, S et A_3 soient en ligne droite il faut et il suffit que

$$X_3 Y_3^{-1} - a_3 Y_3^{-1} = X_4 Y_4^{-1} - a_3 Y_4^{-1}$$

En remplaçant alors les X et les Y par leurs valeurs dans cette équation, on obtient, après un calcul de simplification qui ne présente aucune difficulté, la relation cherchée :

$$(1) \qquad (a_1 - a_3)^{-1} + (a_1 - a_4)^{-1} = 2 \cdot (a_1 - a_2)^{-1}.$$

Cette relation est identique à la relation bien connue qui lie les abscisses de quatre points formant une division harmonique en géométrie ordinaire.

Nous n'aurons vraiment le droit de donner le nom de division harmonique à quatre points dont les coordonnées non homogènes vérifient la précédente relation que si nous établissons la symétrie de cette relation par rapport aux points A_3 et A_4 et par rapport aux couples $A_1 A_2$ et $A_3 A_4$.

La première symétrie est bien évidente. Pour établir la seconde, nous allons montrer que la relation (1) entraîne

$$(2) \qquad (a_3 - a_1)^{-1} + (a_3 - a_2)^{-1} = 2 \cdot (a_3 - a_4)^{-1}.$$

Pour cela posons

$$(3) \qquad X = a_1 - a_3; \quad Y = a_1 - a_4; \quad Z = a_1 - a_2.$$

La relation (1) s'écrit alors, après un calcul facile,

$$(4) \qquad Z\overline{X}(Y + X) = 2X\overline{X}Y.$$

Avec les notations (3), on a

$$a_3 - a_1 = -X; \quad a_3 - a_2 = Z - X; \quad a_3 - a_4 = Y - X.$$

La relation (2) s'écrit alors

$$-\overline{X} \cdot (N(X))^{-1} + (\overline{Z} - \overline{X}) \cdot (N(Z - X))^{-1} = 2 \cdot (\overline{Y} - \overline{X})(N(Y - X)),$$

ce qui peut encore s'écrire

$$(\overline{Z} - \overline{X})(-(Z - X)\overline{X} + X\overline{X})(Y - X)(\overline{Y} - \overline{X})$$
$$= 2 \cdot (\overline{Z} - \overline{X})(Z - X)X\overline{X}(\overline{Y} - \overline{X})$$

en divisant les deux membres à droite par $\overline{Z} - \overline{X}$ et à gauche par $\overline{Y} - \overline{X}$ il reste la relation

$$(-(Z - X)\overline{X} + X\overline{X})(Y - X) = 2 \cdot (Z - X) X\overline{X}$$

relation qui après développement et simplification est identique à la relation (4), ce qui établit la symétrie par rapport aux couples $A_1\ A_2$.

Nous allons maintenant mettre la relation (1) sous une forme remarquable. Mais avant d'abandonner notre formule (1), faisons une remarque importante qui est évidente sur cette formule, mais qui le serait beaucoup moins sur celle que nous nous proposons de trouver : si quatre points d'une droite quaternionienne forment une division harmonique, il en est de même des points qui ont pour coordonnées (non homogènes) les conjugués des coordonnées (non homogènes) de ces points.

Multiplions la relation (1) à droite par $a_1 - a_3$; il vient

$$-1 = (a_1 - a_3)(a_1 - a_4)^{-1} - 2 \cdot (a_1 - a_3)(a_1 - a_2)^{-1}$$

ce que l'on peut encore écrire sous la forme équivalente

$$2 \cdot (a_1 - a_2 + a_2 - a_3)(a_1 - a_2)^{-1} - (a_1 - a_3)(a_1 - a_4)^{-1} = 1$$

ou, en développant,

$$2 + 2 \cdot (a_2 - a_3)(a_1 - a_2)^{-1} - (a_1 - a_3)(a_1 - a_4)^{-1} = 1$$

ou

$$2 \cdot (a_2 - a_3)(a_1 - a_2)^{-1} - (a_1 - a_3)(a_1 - a_4)^{-1} + 1 = 0;$$

multiplions les deux membres à droite par $a_1 - a_2$; il vient

$$2 \cdot (a_2 - a_3) - (a_1 - a_3)(a_1 - a_4)^{-1}(a_1 - a_2) + a_1 - a_2 = 0,$$

ce que l'on peut encore écrire

$$\begin{gathered} 2 \cdot (a_2 - a_3) - (a_1 - a_3)(a_1 - a_4)^{-1}(a_1 - a_4 + a_4 - a_2) \\ + a_1 - a_3 + a_3 - a_2 = 0, \end{gathered}$$

ou, en développant et simplifiant,

$$2 \cdot (a_2 - a_3) - (a_1 - a_3) + (a_1 - a_3)(a_1 - a_4)^{-1}(a_2 - a_4) + a_1 - a_2 = 0,$$

ce qui peut encore s'écrire

$$(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)^{-1}(a_2 - a_4) = -(a_2 - a_3);$$

en divisant à gauche les deux membres par $a_2 - a_3$, il reste

$$(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)^{-1}(a_2 - a_4)(a_2 - a_3)^{-1} = -1.$$

Si, au lieu de quaternions, les quantités a_i étaient des nombres réels ou complexes ordinaires, on reconnaîtrait dans le premier membre le rapport anharmonique des quatre nombres a_i; si nous adoptons l'expression du premier membre comme définition du rapport anharmonique des quatre quaternions a_i, nous voyons apparaître l'étroite analogie existant, tout au moins dans la signification géométrique, entre le rapport anharmonique de quatre quaternions et le rapport anharmonique de quatre quantités complexes ordinaires.

III

38. Définition du rapport anharmonique de quatre quaternions. — Nous prendrons donc, comme nous venons de le dire, pour définition du rapport anharmonique de quatre quaternions a, b, c, d, l'expression

$$(a, b, c, d) = (a - c)(a - d)^{-1}(b - d)(b - c)^{-1}.$$

Rappelons que dans le domaine réel ou complexe ordinaire le rapport anharmonique de quatre quantités ne peut prendre que six valeurs, quel que soit l'ordre que l'on donne à ces quantités; si r est l'une d'elles, les cinq autres valeurs sont

$$r^{-1}, \quad 1 - r, \quad (1 - r)^{-1}, \quad 1 - r^{-1}, \quad r : (r - 1).$$

La non-commutativité de la multiplication des quaternions entraîne, comme on peut le voir facilement par un calcul simple, que les 24 valeurs du rapport anharmonique de quatre quaternions, valeurs qui correspondent aux 24 permutations de ces quatre quaternions, se déduisent toutes de quatre d'entre elles convenablement choisies par les mêmes formules que nous venons de rappeler dans le domaine réel ou complexe. Ces quatre valeurs sont

$$r_1 = (a, b, c, d); \quad r_2 = (c, d, a, b); \quad r_3 = (b, a, d, c);$$
$$r_4 = (d, c, b, a).$$

Il est important de remarquer que ces quatre quaternions r_i ne sont pas complètement indépendants : ils ont tous même norme et même partie scalaire, ou, avec la terminologie que nous avons adoptée, *ce sont des quaternions équivalents.*

39. Propriétés du rapport anharmonique quaternionien. — Disons tout de suite que le rapport anharmonique quaternionien ne jouit pas de toutes les propriétés du rapport anharmonique ordinaire. Par exemple, et ceci est très important, le conjugué du rapport anharmonique n'est pas le rapport anharmonique des conjugués et, qui plus est, ce n'est même pas un rapport anharmonique.

Théorème I. — *Le rapport anharmonique de quatre quaternions est changé, par une transformation homographique effectuée sur ces quaternions, en un quaternion équivalent. Il n'est invariant par la transformation envisagée que s'il a une valeur réelle.*

Pour établir cette proposition, nous remarquons que l'on a les relations suivantes qui sont évidentes :

(I) $$(a+z, \quad b+z, \quad c+z, \quad d+z) = (a, b, c, d)$$

(II) $$(az, \quad bz, \quad cz, \quad dz) = (a, b, c, d)$$

(III) $$(za, \quad zb, \quad zc, \quad zd) = z \cdot (a, b, c, d) \cdot z^{-1}$$

(IV) $$(a^{-1}, \quad b^{-1}, \quad c^{-1}, \quad d^{-1}) = \bar{c} \cdot (a, b, c, d) \cdot \bar{c}^{-1}.$$

Soit alors

$$Z = (mz + n) \cdot (pz + q)^{-1}$$

la transformation homographique considérée. On voit aisément que cette transformation peut se mettre sous la forme

$$Z = mp^{-1} + [(n - mp^{-1}q) \cdot z + p^{-1}q]^{-1} \cdot p^{-1}$$

il est clair de là que notre transformation est le produit de transformations qui, ou bien laissent invariant le rapport anharmonique, ou bien le changent en quaternion équivalent comme le montrent les formules (I), (II), (III), (IV); notre théorème est donc établi.

Théorème II. — *Toute transformation antihomographique effectuée sur les quatre quaternions change le rapport anharmonique de ces quaternions en un quaternion équivalent au rapport anharmonique des quatre quaternions donnés.*

La démonstration se faisant de façon identique à la précédente, nous ne croyons pas devoir la recommencer.

40. Application a la géométrie. — Dans tout ce que nous venons de dire depuis le début du présent paragraphe, il n'a nullement été question de géométrie. Nous allons donc voir maintenant si l'on peut définir le rapport anharmonique d'êtres géométriques quelconques.

Le rapport anharmonique de quatre points de la droite quaternionienne sera, par définition, le rapport anharmonique des coordonnées non homogènes de ces quatre points; au point de vue projectif, cette définition n'a pas de signification intrinsèque, puisque le rapport anharmonique quaternionien n'est pas en général invariant par une homographie, c'est-à-dire par un changement de coordonnées projectives.

Dans l'espace projectif quaternionien à n dimensions le rapport anharmonique de quatre plans concourants sera défini pour nous par le rapport anharmonique des quatre points d'intersection de ces plans avec une arête du polyèdre de référence; la valeur de ce rapport dépend évidemment de l'arête choisie; mais il est clair que ce rapport anharmonique est équivalent au rapport anharmonique des points d'intersection des plans considérés et d'une droite arbitraire.

De ces définitions résulte que le rapport anharmonique de quatre êtres géométriques n'a d'intérêt, au point de vue projectif, que s'il est réel, seul cas où notre définition a un sens intrinsèque.

CHAPITRE III

Forme réduite d'une homographie quaternionienne.

§ 3. Équation caractéristique et équation minima d'une homographie quaternionienne.

§ 2. Points caractéristiques.

§ 3. Variétés caractéristiques.

§ 4. Forme réduite de l'homographie quaternionienne.

I

41. Théorème fondamental. — *Toute homographie quaternionienne de l'espace projectif quaternionien à* n *dimensions vérifie une équation algébrique à coefficients scalaires de degré au plus égal à* $2n+2$.

Nous avons vu qu'à toute homographie de l'espace projectif quaternionien à n dimensions correspond une homographie de l'espace projectif complexe à $2n+1$ dimensions qui laisse invariante l'antiinvolution absolue, et que la correspondance entre ces deux homographies était biunivoque. Nous désignerons désormais cette correspondance par le signe $\sim$; de sorte que si $\mathbf{H}$ désigne une homographie quaternionienne et $\mathcal{H}$ l'homographie complexe correspondante nous aurons

$$\mathcal{H} \sim \mathbf{H}.$$

Cela étant, il est facile de voir que l'on a aussi

$$\mathbf{H}^p \sim \mathcal{H}^p;$$

le calcul de vérification ne présentant aucune difficulté, nous laissons au lecteur le soin de le faire.

Si A_p est un scalaire non nul, on a aussi

$$A_p \mathbf{H}^p \sim A_p \mathcal{H}^p$$

et si p est fini, on en déduira

$$\sum_p A_p \mathbf{H}^p \sim \sum_p A_p \mathcal{H}^p$$

et il est clair que si

(1) $$\sum_p A_p \mathcal{H}^p = 0,$$

on aura aussi

$$\sum_p A_p \mathbf{H}^p = 0.$$

Or on sait qu'il existe toujours des coefficients scalaires non tous nuls tels que la relation (1) soit satisfaite; le théorème est donc établi.

42. Définitions; conséquences. — Nous venons de voir que l'homographie **H** satisfait à toutes les équations algébriques auxquelles satisfait l'homographie $\mathcal{H}$.

Nous appellerons *équation caractéristique* de **H** l'équation caractéristique de l'homographie $\mathcal{H}$. Nous désignerons cette équation par ∇ (**H**).

On voit aisément, en passant par l'intermédiaire de l'espace projectif complexe, que

$$\nabla(s) = \{ \mathbf{H} - s \,.\, \mathrm{E} \}$$

où s est regardé comme un scalaire, E étant la matrice unitaire.

Nous appellerons *équation minima* de l'homographie quaternionienne l'équation minima de l'homographie **H** correspondante; l'équation minima est donc l'équation algébrique de plus bas degré à *coefficients scalaires* à laquelle satisfait l'homographie **H**. Nous la désignerons désormais par F (**H**). Avec ces définitions il est clair que l'équation minima admet toutes les racines de l'équation caractéristique, avec des ordres de multiplicité qui peuvent être moindres mais qui ne sont jamais supérieurs.

Nous avons ainsi étendu aux matrices quaternioniennes le théorème de Cayley-Frobenius.

II

43. Définition des points caractéristiques. — Étant donnée une homographie quaternionienne $\mathbf{H}$, nous dirons qu'un point M est *point caractéristique de première espèce d'ordre* p *relativement à* $\mathbf{H}$ si l'on peut trouver un scalaire s et un entier positif p tels que

$$(\mathbf{H} - \mathrm{M}\,.\,s)^p = 0 \qquad \text{et} \qquad (\mathbf{H} - \mathrm{M}\,.\,s)^{p-1} \neq 0.$$

Nous dirons de même qu'un point P est *point caractéristique de seconde espèce relativement à* $\mathbf{H}$, s'il existe deux scalaires r et t tels que $r^2 - t < 0$ et un entier positif q, tels que

$$(\mathbf{H}^2 - 2r\mathbf{H} + t)^q\,.\,\mathrm{P} = 0 \qquad \text{et} \qquad (\mathbf{H}^2 - 2r\mathbf{H} + t)^{q-1}\,.\,\mathrm{P} \neq 0.$$

44. Conditions que doivent remplir les scalaires s, r et t. — Nous allons chercher maintenant comment doivent être pris s, d'une part, r et t, dautre part, pour qu'il puisse y avoir des points caractéristiques des deux espèces du premier ordre.

A cet effet, considérons l'équation minima de $\mathbf{H}$:

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{F}(\mathbf{H}) = \sum_{p=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{A}_p \mathbf{H}^p = 0 \qquad (\mathrm{N} \leq 2n + 2).$$

On peut encore l'écrire

$$\mathrm{F}(z) = \sum_{p=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{A}_p z^p = \Pi\,(z - s_i)^{m_i}\,.\,(z^2 - 2r_i z + q_i)^{n_i}$$

avec $m_i + 2\,n_i = \mathrm{N}$, où s_i est un scalaire et où $p^2{}_i - q_i < 0$.

Cela étant, pour qu'un point M soit point caractéristique de première espèce d'ordre 1 il faut qu'il existe un scalaire s tel que

$$\mathbf{H}\,.\,\mathbf{M} = \mathbf{M}\,.\,s;$$

on déduit de là

$$\mathbf{H}^p . \mathrm{M} = \mathrm{M} . s^p.$$

En remplaçant $\mathbf{H}^p$ par sa valeur dans (1), il vient

$$\left[\sum_{p=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{A}_p \mathbf{H}^p\right] \mathrm{M} = \mathrm{M}\left[\sum_{p=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{A}_p\, s^p\right] = 0;$$

donc s doit être racine de l'équation minima de $\mathbf{H}$.

Passons aux points caractéristiques de seconde espèce d'ordre 1; si M est un tel point, on a

$$(2) \qquad \mathbf{H}^2 . \mathrm{M} - 2r\mathbf{H} . \mathrm{M} + \mathrm{M} . t = 0 \qquad (r^2 - t < 0).$$

Soit x un quaternion dont l'équation au rang est

$$x^2 - 2rx + t = 0;$$

on sait qu'alors

$$2r = x + \overline{x} \qquad \text{et} \qquad t = x\overline{x};$$

de sorte que (2) peut s'écrire

$$\mathbf{H}^2 . \mathrm{M} - \mathbf{H} . \mathrm{M} . (x + \overline{x}) + \mathrm{M} . x\overline{x} = 0$$

ou encore

$$\mathbf{H} . (\mathbf{H} . \mathrm{M} - \mathrm{M} . x) - (\mathbf{H} . \mathrm{M} - \mathrm{M} . x) . \overline{x} = 0.$$

Si $\mathbf{H}.\mathrm{M} - \mathrm{M}.x = 0$ nous voyons apparaître une analogie avec les points caractéristiques de première espèce; si $\mathbf{H}.\mathrm{M} - \mathrm{M}.x \neq 0$, alors $\mathbf{H}.\mathrm{M} - \mathrm{M}.x = \mathrm{M}'$ est point caractéristique de seconde espèce du premier ordre; on a ainsi $\mathbf{H}.\mathrm{M}' - \mathrm{M}'.\overline{x} = 0$ et l'analogie réapparaît. On conclut de là que

$$\mathbf{H}^p . \mathrm{M} = \mathrm{M} . x^p \qquad \text{ou} \qquad \mathbf{H}^p . \mathrm{M}' = \mathrm{M}' . \overline{x}^p$$

et, comme précédemment, on en déduit que x doit être pris parmi les racines quaternioniennes de l'équation minima de $\mathbf{H}$.

45. Existence des points caractéristiques. — Maintenant que nous savons comment choisir les scalaires qui définissent les points caractéristiques des deux espèces, il est temps de montrer l'existence effective de tels points. A cet effet, désignons par G le binome $\mathbf{H} - s$ ou le trinome $\mathbf{H}^2 - 2r\mathbf{H} + t$, suivant que l'on envisage les points caractéristiques de première ou de seconde espèce; soit p la plus haute puissance de G qui divise F(**H**). Cela étant, on a

$$\mathrm{F}(\mathbf{H}) = \mathrm{G}^p \cdot \mathrm{F}_1(\mathbf{H}),$$

F_1 étant premier à G. Pour un point M quelconque, on a

$$\mathrm{F}(\mathbf{H}) \cdot \mathrm{M} = \mathrm{G}^p \cdot \mathrm{F}_1(\mathbf{H}) \cdot \mathrm{M} = \mathrm{G} \cdot \mathrm{G}^{p-1} \cdot \mathrm{F}_1(\mathbf{H}) \cdot \mathrm{M} = 0;$$

il y a des points M tels que

$$\mathrm{M}' = \mathrm{G}^{p-1} \cdot \mathrm{F}_1(\mathbf{H}) \cdot \mathrm{M} \neq 0,$$

sinon F(**H**) ne serait pas l'équation minima. Cette dernière relation exige évidemment que

$$\mathrm{F}_1(\mathbf{H}) \cdot \mathrm{M} \neq 0;$$

donc le point $\mathrm{M}'' = \mathrm{F}_1(\mathbf{H}).\mathrm{M}$ est tel que

$$\mathrm{G}^p \cdot \mathrm{M}'' = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{G}^{p-1} \cdot \mathrm{M}'' \neq 0;$$

c'est donc un point caractéristique d'ordre p. La proposition est établie.

46. Étude sommaire des points caractéristiques. — Théorème II. — *Toute combinaison linéaire de points caractéristiques relatifs à* G *et d'ordre au plus égal à* q, *linéairement indépendants, est un point caractéristique relatif à* G *et d'ordre au plus égal à* q.

Soient $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_r$ les points caractéristiques considérés relatifs à G, linéairement indépendants, dont l'un au moins est d'ordre q et aucun d'ordre supérieur à q. On a donc

$$\mathrm{G}^{q_i} \cdot \mathrm{A}_i = 0 \qquad (q_i \leq q)$$

le point M défini par

$$\mathrm{M} = \sum_i \mathrm{A}_i a^i;$$

les a^i étant des quaternions non tous nuls, est tel que

$$\mathrm{G}^h \cdot \mathrm{M} = \mathrm{G}^h \cdot (\sum_i \mathrm{A}_i a^i) = \sum_i (\mathrm{G}^h \cdot \mathrm{A}_i) a^i = 0,$$

si h est le plus grand des ordres des points A figurant dans M : h est donc au plus égal à q, et comme, d'autre part, il est clair que, quels que soient les a, G^{h-1}. M est non nul, par conséquent M est bien un point caractéristique d'ordre h inférieur à q; le théorème est donc établi.

Corrolaire I. — *Si l'équation* F(H) *admet au moins deux diviseurs premiers entre eux, le nombre des points caractéristiques linéairement indépendants relatifs à chacun de ces diviseurs est toujours inférieur à* $n+1$.

Soit G un diviseur de F; si le nombre des points caractéristiques de G linéairement indépendants était égal à $n+1$, tout point M de l'espace serait point caractéristique relatif à G et par conséquent F ne serait pas l'équation minima.

Corollaire II. — *Tout point caractéristique relatif à* G *est une combinaison linéaire des points caractéristiques relatifs à* G *et linéairement indépendants.*

C'est évidemment une conséquence des deux propositions précédentes.

Théorème III. — *De tout point caractéristique de seconde espèce du premier ordre on peut toujours déduire un point caractéristique de seconde espèce du premier ordre* M *tel que*

$$\mathbf{H}M - M \cdot x_0 = 0,$$

x_0 *étant un quaternion réduit racine de l'équation minima* $F(\mathbf{H}) = 0$ *dont le coefficient de la partie complexe est positif.*

Soient P le point donné,

$$G = \mathbf{H}^2 - 2r\mathbf{H} + t$$

et x un quaternion ayant pour équation au rang

$$X^2 - 2rX + t = 0.$$

Nous avons vu que si $\mathbf{H}.P - P.x$ n'est pas nul, le point P′ représenté par cette expression satisfaisait à la relation

$$\mathbf{H} \cdot \mathrm{P}' - \mathrm{P}' \cdot \bar{x} = 0.$$

Désignons maintenant par R le point P si **H.P—P.x=0**, le point P′ dans le cas contraire. On a donc

$$\mathbf{H} \cdot \mathrm{R} - \mathrm{R} \cdot y = 0,$$

y étant un quaternion équivalent à x (ici x lui-même si R=P, $\bar{x}$ si R=P′). Je dis qu'en choisissant convenablement le point analytique R on peut prendre le quaternion y de la relation précédente égal à n'importe quel quaternion z équivalent. En effet, posons

$$\mathrm{R}' = \mathrm{R} \cdot u.$$

On a

$$\mathbf{H} \cdot \mathrm{R}' = \mathbf{H} \cdot (\mathrm{R} \cdot u) = (\mathbf{H} \cdot \mathrm{R}) \cdot u = \mathrm{R} \cdot yu;$$

d'où, si z est un quaternion réduit équivalent à y,

$$\mathbf{H} \cdot \mathrm{R}' - \mathrm{R}' \cdot z = \mathrm{R} \cdot (yu - uz).$$

L'hypothèse que z et y sont deux quaternions équivalents entraîne que l'équation

$$yu - uz = 0$$

a des solutions en u non identiquement nulles, comme on le voit en remplaçant y, z et u dans cette équation par leur valeur en fonction de leurs composantes scalaires, le système linéaire et homogène de quatre équations à quatre inconnues auquel elle donne naissance ayant son déterminant nul en vertu de cette hypothèse même. Il suffit, pour achever la démonstration de notre proposition, de prendre pour z le quaternion x_0 de l'énoncé.

Corollaire. — *Tout point caractéristique de seconde espèce du premier ordre est une combinaison linéaire des points caractéristiques de seconde espèce du premier ordre linéairement distincts pour lesquels on a*

(1) $$\mathbf{H} \cdot \mathrm{A}_j = \mathrm{A}_j \cdot x_0$$

x_0 *étant le même quaternion réduit qu'au théorème précédent.*

En vertu du théorème II de la page 89 et de ses deux corollaires il est clair que tout point caractéristique de seconde espèce du premier ordre relatif à un trinome G diviseur de F(**H**) est une combinaison linéaire des points caractéristiques du premier ordre linéairement indépendants relatifs à G.

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_p$ ces points. Nous allons montrer que l'on peut remplacer un quelconque de ces points ne vérifiant pas la relation (1) par un point qui la vérifie. Soit donc A_j un point tel que

$$\mathbf{H} \cdot A_j - A_j \cdot x_0 = M \neq 0. \tag{2}$$

Si le point M′ défini par

$$\mathbf{H} \cdot A_j - A_j \cdot \bar{x}_0 = M' \tag{3}$$

est nul, on a vu que l'on pouvait trouver un quaternion v non nul tel que le point $A_j.v = A'_j$ satisfasse à la relation (1). Ce point, qui forme avec les points

$$A_1, A_2, \ldots, A_{j-1}, A_{j+1}, A_{j+2}, \ldots, A_p$$

un ensemble de points linéairement distincts en vertu de l'hypothèse faite sur les points A_h, pourra donc remplacer le point A_j.

Supposons donc que le point M′ n'est pas nul. Ces points satisfont, le premier à la relation

$$\mathbf{H} \cdot M - M \cdot \bar{x}_0 = 0,$$

le second à la relation

$$\mathbf{H} \cdot M' - M' \cdot x_0 = 0.$$

M et M′ sont donc des points caractéristiques du premier ordre relatif à G; donc chacun est une combinaison linéaire des points A_i. La relation

$$M - M' + A_j \cdot (x_0 - \bar{x}_0) = 0,$$

obtenue en retranchant membre à membre les équations

(2) et (3), prouve que le coefficient de A_j d'une au moins de ces combinaisons linéaires est différent de zéro. Désignons par A_j' celui de ces points qui jouit de cette propriété (s'ils en jouissent tous les deux, A_j' désignera le point M'). Dans ces conditions, il est clair que le point A_j' est linéairement distinct des points de la suite (4) et par conséquent on pourra remplacer le point A_j par ce point A_j' ou par n'importe quel point analytique ayant A_j' pour support, ce qui permet d'attribuer à ce point la propriété de l'énoncé, puisqu'il vérifie une des relations (5) ou (6).

Cela étant, on pourra donc remplacer tous les points A_h par les points A_h' qui vérifient tous la relation

$$\mathbf{H} \cdot A_h' - A_h' \cdot x_0 = 0$$

et qui sont linéairement indépendants; de sorte que tout point caractéristique de seconde espèce du premier ordre relatif à G sera une combinaison linéaire de ces points en vertu, comme nous l'avons dit, du théorème de la page 89 et de ses deux corollaires.

III

47. Définition des variétés linéaires caractéristiques. — Soit s_i une racine scalaire de l'équation minima de l'homagraphie $\mathbf{H}$ d'ordre de multiplicité m_i. Nous appellerons désormais *variété linéaire caractéristique de première espèce attachée à s_i*, la variété linéaire définie par tous les points caractéristiques de première espèce d'ordre inférieur ou au plus égal à m_i qui sont linéairement distincts et relatifs à s_i.

Nous appellerons *variété caractéristique de seconde espèce relative au trinome f_i* diviseur d'ordre n_i de l'équation minima $F(\mathbf{H}) = 0$, la variété linéaire définie par les points caractéristiques de seconde espèce d'ordre inférieur ou au plus égal à n_i qui sont relatifs au trinome f_i et linéairement distincts.

Nous dirons que deux variétés caractéristiques sont *distinctes* si elles ne sont pas toutes deux relatives au même diviseur de l'équation minima F.

48. Étude sommaire des variétés caractéristiques. — Théorème IV. — *Deux variétés caractéristiques distinctes n'ont pas de point commun.*

Soient f_1 et f_2 les diviseurs de F qui sont respectivement relatifs aux deux variétés considérées. Ces polynomes f_1 et f_2 sont premiers entre eux, puisque, par hypothèse, les variétés caractéristiques sont distinctes.

Cela étant, si ces variétés avaient un point commun M on aurait simultanément

$$(1) \qquad f_1 \cdot \mathrm{M} = 0 \qquad \text{et} \qquad f_2 \cdot \mathrm{M} = 0.$$

Les polynomes f étant premiers entre eux, on sait trouver deux polynomes U et V tels que

$$\mathrm{U} f_1 + \mathrm{V} f_2 = 1.$$

Si l'on applique maintenant la transformation représentée par le premier membre au point M, on aura

$$\mathrm{U} f_1 \cdot \mathrm{M} + \mathrm{V} f_2 \cdot \mathrm{M} = \mathrm{M};$$

mais en vertu des relations (1), le premier membre serait nul et ne pourrait, par conséquent, égaler le second, le point M ayant au moins une de ses coordonnées non nulle. Le théorème est établi.

Il en résulte immédiatement que les points linéairement distincts qui définissent chacune des variétés sont linéairement distincts dans leur ensemble.

Théorème V. — *L'ensemble formé avec les différents ensembles de points linéairement distincts qui définissent chacun une variété caractéristique est un ensemble de points linéairement indépendants, quels que soient le nombre et la nature des variétés caractéristiques que possède l'homographie.*

Représentons par A^i_{hk} le $h^{\text{ième}}$ point caractéristique d'ordre k de la $i^{\text{ième}}$ variété caractéristique de **H**; supposons de plus que les points qui ont un indice supérieur i donné soient linéairement indépendants. Cela étant, s'il y avait une relation

$$\Sigma A^i_{hk} a_{ihk} = 0,$$

où tous les a ne sont pas nuls, on pourrait l'écrire en posant

$$P_1 = \sum_{h,k} A^1_{hk} a_{1hk}; \qquad P_2 = -\sum_{i \neq 1} \sum_{h,k} A^i_{hk} a_{ihk},$$

$$P_1 = P_2 = P;$$

P_1 appartient à la première variété caractéristique; on a donc

$$f_1 \cdot P_1 = f_1 \cdot P = 0;$$

P_2 n'appartenant pas à la première variété caractéristique vérifie

$$f_2 \cdot P_2 = f_2 \cdot P = 0 \qquad \text{avec} \qquad f_2(\mathbf{H}) = F(\mathbf{H}) : f_1(\mathbf{H});$$

f_1 et f_2 étant premiers entre eux, ces relations jointes aux précédentes entraînent, comme nous venons de le dire, que P soit nul, ce qui est contraire à l'hypothèse que P_1 ne peut être nul, ce dernier étant une combinaison linéaire de points linéairement distincts.

Théorème VI. — *Un point quelconque* M *de l'espace peut toujours se mettre sous forme de combinaison linéaire des points caractéristiques linéairement distincts.*

Pour établir cette intéressante proposition, qui a comme conséquence importante de prouver que le nombre total des points caractéristiques linéairement distincts est égal à $n+1$, nous aurons besoin du lemme d'algèbre suivant :

Lemme. — *Étant donnés* m *polynomes d'une variable tels que deux quelconques d'entre eux soient premiers, on peut toujours trouver* m *autres polynomes* $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$, *tels que, si* $P_1, P_2, \ldots, P_m$ *sont les polynomes donnés, on ait, en posant* $R_i = (\prod_j P_j) : P_i$,

$$\sum_i R_i Q_i = 1. \tag{2}$$

Le théorème est classique pour $m = 2$. Nous allons procéder par récurrence et admettre qu'il est exact pour $m - 1$ polynomes.

Posons

$$R_{1i} = R_i : P_1 \qquad (i \neq 1);$$

avec cette notation la relation (2) peut s'écrire

$$P_1 \left(\sum_{i=2}^{m} R_{1i} Q_i \right) + R_1 Q_1 = 1;$$

la parenthèse peut être égale à n'importe quel polynome; il suffit en effet de prendre

$$Q_i = Q_i' N \qquad (i \neq 1)$$

si Q_i' désigne les polynomes de la formule (2) relative seulement aux $m - 1$ polynomes $P_2, P_3, \ldots, P_m$, que par hypothèse nous savons trouver, et N étant un polynome arbitraire.

Si l'on remarque maintenant que R est premier à P_1, nous savons alors trouver deux polynomes U et V tels que

$$P_1 U + R_1 V = 1.$$

De sorte que si l'on prend pour polynome N le polynome U et pour polynome Q_1 le polynome V, la relation (2) sera satisfaite. Notre lemme est donc établi.

Passons maintenant à la démonstration du théorème de géométrie.

Posons

$$F(\mathbf{H}) = \prod_{h=1}^{\sigma} G_h; \qquad \digamma(\mathbf{H}) = \prod_{h=1}^{\sigma} G_h^*$$

$$Q_j = \prod_{\substack{1 \\ k \neq j}}^{\sigma} G_k; \qquad Q_j^* = \prod_{\substack{1 \\ k \neq j}}^{\sigma} G_k^*$$

les G^* étant des polynomes qui ne diffèrent des G que par l'exposant qui est au moins égal à celui du G de même indice.

Remarquons que F est le produit de G_h par Q_h et que Δ (**H**) est divisible par chaque G_h, donc aussi par F.

Soit maintenant M un point quelconque; on peut supposer d'abord que M n'est pas un point caractéristique (s'il en était ainsi, notre proposition serait évidente) et ensuite que l'on peut choisir l'indice k de façon telle que

$$M_k = \prod_{h \neq k}{}_2^\sigma G_h^* \, . \, M \neq 0,$$

car s'il n'en était pas ainsi, deux variétés caractéristiques distinctes auraient un point commun.

On a évidemment

$$G_k \, . \, M_k = 0.$$

Donc M_k appartient à une certaine variété caractéristique. Les G^* sont tous distincts, et comme les G sont premiers entre eux par hypothèse, il en est de même des G^*; appliquons-leur notre lemme : il existe des polynomes U tels que

$$\sum_{h=1}^{\sigma} Q_h^* (\mathbf{H}) \, . \, U_h(\mathbf{H}) = 1.$$

Appliquons au point M la transformation représentée par le premier membre de cette dernière relation; il est évident que l'on aura

$$M = \left[\sum_{j=1}^{\sigma} U_j(\mathbf{H}) \, . \, Q_j^*(\mathbf{H}) \right] . \, M =$$
$$= \sum_{j=1}^{\sigma} U_j(\mathbf{H}) \, . \, Q_j^*(\mathbf{H}) \, . \, M \, ;$$

si maintenant on remarque que si $Q_j^*(\mathbf{H}).M$ est non nul, c'est un point caractéristique relatif à G_j; notre théorème est établi.

Remarque. — La définition adoptée pour une variété caractéristique paraît a priori rejeter les points d'ordre supérieur à celui de multiplicité du diviseur de F(**H**) auquel est relatif le point considéré; il est facile de voir qu'il n'en est rien, de tels points caractéristiques n'existant pas.

Soit, en effet, G le diviseur de F(**H**) d'ordre de multiplicité p auquel serait relatif un point caractéristique M d'ordre $q > p$. Il suffit évidemment de prouver qu'il n'y a pas de points caractéristiques d'ordre égal à $p+1$. Supposons donc $q = p+1$. On a alors, par hypothèse,

$$G^{p+1} \cdot M = 0 \qquad \text{et} \qquad G^{p} \cdot M = M' \neq 0;$$

le point M′ est alors point caractéristique du premier ordre; on a

$$G \cdot M' = 0;$$

d'autre part,

$$F(\mathbf{H}) \cdot M = F_1(\mathbf{H}) \cdot G^p \cdot M = F_1(\mathbf{H}) \cdot M' = 0,$$

où $F_1(\mathbf{H})$ est un polynome premier à G; nous avons vu au théorème IV que cela ne pouvait arriver que si M′ était nul, ce qui est contraire à l'hypothèse que M est caractéristique d'ordre $p+1$.

IV

49. Première forme réduite d'une homographie quaternionienne. — Nous allons voir comment on peut, par un changement de coordonnées convenable obtenu à l'aide des $n+1$ points caractéristiques linéairement indépendants, trouver une forme réduite à l'homographie **H.**

Supposons d'abord, ce qui est toujours permis en vertu du corollaire de la page 91, que les points caractéristiques de seconde espèce du premier ordre linéairement distincts sont pris tels que si M est l'un d'entre eux on ait

$$\mathbf{H} \cdot M - M \cdot x = 0,$$

x étant un quaternion réduit racine de l'équation minima $F(\mathbf{H}) = 0$, dont le coefficient de la partie complexe est positif.

Pour les points de seconde espèce d'ordre supérieur au premier, on a

$$(\mathbf{H}^2 - (x + \bar{x})\,\mathbf{H} + x\bar{x})^p \cdot \mathrm{M}' = 0$$

$$\mathrm{M}'' = (\mathbf{H}^2 - (x + \bar{x})\,\mathbf{H} + x\bar{x})^{p-1} \cdot \mathrm{M}' \neq 0.$$

M″ est un point caractéristique de seconde espèce d'ordre 1. Plus généralement,

$$\mathrm{M}^{(q+1)} = (\mathbf{H}^2 - (x + \bar{x})\mathbf{H} + x\bar{x})^{p-q} \cdot \mathrm{M}' \neq 0$$

est un point caractéristique de seconde espèce d'ordre q; donc une combinaison linéaire des points caractéristiques de seconde espèce, linéairement indépendants, relatifs au même trinome, d'ordre 1 à $q - 1$. Le point $\mathrm{M}_1 = \mathbf{H}\mathrm{M}' - \mathrm{M}'.x$ qui est évidemment non nul, est point caractéristique de seconde espèce d'ordre p et l'on a

$\mathbf{H} \cdot \mathrm{M}_1 - \mathrm{M}_1 \cdot x =$ comb. lin. des points caractéristiques de seconde espèce d'ordre 1 à $p - 1$.

Nous noterons désormais A^h_{ij} le point caractéristique d'ordre j qui correspond à la racine réelle ou quaternionienne x_h, de sorte que l'on a la relation

$$(1) \qquad \mathbf{H}\,\mathrm{A}^h_{ij} - \mathrm{A}^h_{ij} \cdot x_h = \sum_h \sum_{m=1}^{j-1} \mathrm{A}^h_{km} \cdot b_{km}$$

où h prend successivement les valeurs entières 1, 2, ..., σ si σ désigne le nombre de racines distinctes de $F(\mathbf{H}) = 0$; pour une valeur déterminée de h, i et j prennent des valeurs entières telles que le nombre des points A^h_{ij} soit égal au nombre de dimensions de la variété caractéristique associée au diviseur de $F(\mathbf{H})$ à coefficients scalaires correspondant à x_h, augmenté d'une unité.

Cela étant, soit x_h une racine réelle ou quaternionienne de $F(\mathbf{H}) = 0$; dans ce dernier cas rappelons que nous avons vu que l'on pouvait toujours prendre les points caractéristiques de façon que x_h ait la forme $x_h = x_h' + e_1 x_h''$ avec la condition supplémentaire : $x_h'' > 0$, et soit enfin ω_1 le nombre des points A^1_{ij} linéairement distincts correspondant à x_1. Écrivons ces points en les ordonnant par rapport aux valeurs croissantes de j :

$$A^1_{11}, A^1_{21}, \ldots, A^1_{i1}, A^1_{i+1,2}, \ldots, A^1_{\omega_1, j}.$$

Donnons alors à A^1_{11} les coordonnées (1, 0, 0, ..., 0); à A^1_{21} les coordonnées (0, 1, 0, 0, ..., 0), et ainsi de suite; A^1_{ii} a des coordonnées toutes nulles, sauf la $i^{\text{ième}}$, égale à 1.

Soit x_2 une autre racine de F(**H**); ordonnons encore les points caractéristiques linéairement distincts relatifs à cette racine, comme nous l'avons fait pour ceux de x_1, et donnons au premier de ces points des coordonnées toutes nulles, sauf la $(\omega_1+1)^{ième}$, égale à 1, etc. Continuons ainsi jusqu'à ce que l'on ait épuisé toutes les racines distinctes (et en même temps leurs points caractéristiques). On aura alors formé un nouveau polyèdre de référence, puisqu'il y a toujours $n+1$ points caractéristiques linéairement distincts et $n+1$ seulement.

Grâce à ce polyèdre, il est facile de voir que la matrice de l'homographie se simplifie considérablement si l'on tient compte de la formule (1) : elle se réduit à une matrice dont les éléments de la diagonale principale sont les racines de l'équation minima (une même racine pouvant être répétée plusieurs fois); les élément situés au-dessous sont nuls; ceux situés au-dessus sont les b de la formule (1) pris dans un certain ordre. Nous avons ainsi obtenu une première forme réduite de l'homographie **H**.

Peut-on aller plus loin, comme dans le cas de l'espace projectif complexe? La réponse est affirmative; seulement, remarquons que la méthode que l'on emploie habituellement dans ce dernier espace et qui consiste à prendre pour point caractéristique le point

$$A^*_{m,j-1} = \sum_h \sum_{k=1}^{j-1} A_{hk} b_{hk} \tag{2}$$

n'est acceptable que pour les racines réelles, car, on le voit facilement, c'est là le seul cas où le point ainsi défini reste point caractéristique.

50. Remarque importante. — Toute racine de l'équation minima $F(\mathbf{H}) = 0$ réelle ou quaternionienne peut toujours être regardée comme un quaternion réduit. Cela étant rappelé, la remarque annoncée consiste en ceci : si les b_{hk} de la formule (2) étaient tous des quaternions réduits, le point $A^*_{m,j-1}$ pourrait être pris comme point caractéristique.

Nous sommes donc conduit à nous demander si l'on peut déduire d'un point caractéristique de seconde espèce d'ordre p quelconque un point caractéristique de seconde espèce et de même ordre tel que si M est ce dernier on ait

$\mathbf{H}\,\mathrm{M} - \mathrm{M}\cdot x =$ comb. lin. des points caractéristiques de seconde espèce d'ordre 1 à $p-1$ à coefficients quaternioniens réduits.

Nous allons voir que cela est toujours possible. Nous procéderons par récurrence.

51. Cas des points du second ordre. — Soit A_{12} un point caractéristique de seconde espèce d'ordre 2 tel que

$$\mathbf{H}\,A_{12} = A_{12}x + \sum_k A_{k1}b_{1k} \tag{3}$$

les b_{1k} étant des quaternions. Posons

$$A^*_{12} = A_{12}z + \sum_j A_{j1}y_{j1}. \tag{4}$$

Nous allons faire voir que l'on peut déterminer z et les y de telle façon que

$$\mathbf{H}\,A^*_{12} = A^*_{12}x + \sum_j A_{j1}c_{1j} \tag{5}$$

les c étant des quaternions réduits. On a

$$\mathbf{H}\,A_{j1} = A_{j1}x\,; \tag{6}$$

des formules (3), (4) et (6) on tire immédiatement

$$\mathbf{H}\,A^*_{12} = A_{12}xz + \sum_j A_{j1}(b_{1j}z + xy_{j1})\,; \tag{7}$$

cette dernière relation montre que, pour que (5) puisse avoir lieu, il faut d'abord que z soit un quaternion réduit de même nature que x; d'où il résulte que l'on peut permuter x et z dans le premier terme du second membre de (7); si après cette permutation on remplace $A_{12}z$ par sa valeur tirée de (4), on a

$$\mathbf{H} A_{12}^* = A_{12}^* x + \sum_j A_{j1} (b_{1j} z + x y_{j1} - y_{j1} x).$$

Il faut donc prouver que l'on peut choisir z et les y de façon que le coefficient de A_{j1} soit un quaternion réduit. Remarquons d'abord que z ne peut être nul, sinon A_{12}^* ne serait pas du second ordre. Posons

$$b_{1j} = b'_{1j} + e_3 b''_{1j}; \qquad y_{j1} = y'_{j1} + e_3 y''_{j1}.$$

On voit alors facilement que

$$b_{1j} z + x y_{j1} - y_{j1} x = b'_{1j} z + e_3 (b''_{1j} z + (x - \bar{x}) y''_{j1}).$$

On doit donc avoir

$$b''_{1j} z + (x - \bar{x}) y''_{j1} = 0;$$

d'où

$$y''_{j1} = b''_{1j} z (x - \bar{x})^{-1}$$

car $x - \bar{x} \neq 0$, sinon x serait réel, ce que nous ne supposons pas.

Cette formule prouve que z n'a pas d'autre condition à remplir que d'être un quaternion réduit de même nature que x; aussi le prendrons-nous égal à 1; donc le point

$$A_{12}^* = A_{12} + \sum_j A_{j1} e_1 b''_{1j} (x - \bar{x})^{-1}$$

jouit bien de la propriété que nous voulions lui attribuer :

$$\mathbf{H} A_{12}^* = A_{12}^* x + \sum_j A_{j1} u_{1j}$$

où les u_{1j} sont des quaternions réduits de même nature que x.

Nous pouvons alors prendre le point $A^*_{11} = \sum_j A_{j1} . u_{1j}$

comme point caractéristique de seconde espèce du premier ordre à la place du point A_{11}; on a alors

$$\mathbf{H} \cdot A_{12}^* = A_{12}^* x + A_{11}^*.$$

Cette dernière formule prouve que les b_{hk} du tableau des coefficients de la première forme réduite de l'homographie correspondant aux points caractéristiques de seconde espèce d'ordre 2 peuvent être pris égaux à zéro, sauf $b_{k+1,k}$ égal à 1. Cependant, une objection s'élèverait si le nombre des points caractéristiques d'ordre 2 était supérieur au nombre de point caractéristiques du premier ordre, mais il est facile de voir que cette éventualité ne peut arriver.

Soit p_1 le nombre de points caractéristiques du premier ordre; d'après ce que nous venons de voir on peut prendre les p_1 premiers points caractéristiques du second ordre tels que

$$\mathbf{H} \cdot A_{j2}^* = A_{j2}^* x + A_{j1}^* \qquad (j \leq p_1);$$

soit alors A_{m2} un point caractéristique du second ordre linéairement indépendant des précédents, tel que

$$\mathbf{H} \cdot A_{m2}^* = A_{m2}^* x + \sum_{j=1}^{p_1} A_{j1}^* \cdot u_{1j} \qquad (m > p_1),$$

les u_{1j} étant des quaternions réduits de même espèce que x. Multiplions l'avant-dernière relation par u_{1j} à droite; ajoutons ces relations membre à membre en faisant successivement $j = 1, 2, \ldots, p_1$, et enfin retranchons la dernière; il vient, en tenant compte que les u et x sont permutables,

$$\mathbf{H} \cdot (\sum_j A_{j2}^* u_{1j} - A_{m2}^*) = (\sum_j A_{j2}^* u_{1j} - A_{m2}^*) \cdot x,$$

de sorte qu'une combinaison linéaire de points caractéristiques du second ordre serait un point caractéristique du premier ordre, ce qui est impossible; donc le nombre de points caractéristiques du second ordre n'est jamais supérieur au nombre de points caractéristiques du premier ordre.

Plus généralement, on voit par la même méthode que le nombre de points caractéristiques d'ordre 1, 2, 3, ... ne va jamais en augmentant.

52. Cas des points du troisième ordre. — Pour bien faire comprendre la démonstration, nous allons établir la proposition pour les points du troisième ordre, avant de passer au cas général par récurrence.

Soit A_{h3} un de ces points pour lequel on a

$$\mathbf{H}\cdot A_{h3} = A_{h3}\cdot x + \sum_{i=1}^{p_1} A^*_{i1}\, b_{1i} + \sum_{j=}^{p_2} A^*_{j2}\, b_{2j} \tag{1}$$

où $p_2 \leqslant p_1$ et où les b sont des quaternions quelconques et x un quaternion réduit racine de $F(\mathbf{H}) = 0$, dont le coefficient de la partie complexe est positif et où, enfin, les points $A^*{}_{i1}$ et $A^*{}_{j2}$ vérifient

$$(2)\qquad \mathbf{H}\,A^*_{i1} = A^*_{i1}\cdot x; \qquad (3)\qquad \mathbf{H}\,A^*_{j2} = A^*_{j2}\,x\cdot + A^*_{j1}$$

posons

$$A^*_{h3} = A_{h3}\cdot z + \sum_{i=1}^{p_1} A^*_{i1}\cdot y_{1i} + \sum_{j=1}^{p_2} A^*_{j2}\cdot y_{2j} \tag{4}$$

nous allons déterminer z et les y pour que A^*_{h3} vérifie une relation analogue à celle vérifiée par A_{h3}, mais où il ne figure comme coefficients dans les combinaisons linéaires que des quaternions réduits. De (4) on déduit aisément, en tenant compte de (3) et de (2),

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \mathbf{H}\cdot A^*_{h3} = A_{h3}\cdot xz &+ \sum_{i=1}^{p_1} A^*_{i1}\cdot (b_{1i}\, z + x y_{1i} + \delta_i\, y_{2i}) \\ &+ \sum_{j=1}^{p_2} A^*_{j2}\cdot (b_{2j}\cdot z + x y_{2j}); \end{aligned}\right.$$

en remplaçant dans (5) A_{h3} par sa valeur tirée de (4) et en remarquant que notre condition entraîne que z soit un quaternion réduit de même nature que x, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{H}\cdot A^*_{h3} = A^*_{h3}\cdot x &+ \sum_{i=1}^{p_1} A^*_{i1}\cdot (b_{1i}\, z + x y_{1i} - y_{1i}\, x + \delta_i y_{2i}) \\ &+ \sum_{j=1}^{p_2} A^*_{j2}\cdot (y_{2j}\, z + x y_{2j} - y_{2j}\, x), \end{aligned}$$

où l'on pose

$$\delta_i = 1 \quad \text{si} \quad i \leq p_2 \quad \text{et} \quad \delta_i = 0 \quad \text{si} \quad i > p_2.$$

On doit avoir

$$\begin{aligned} z \cdot b_{1i} + xy_{1i} - y_{1i}x + y_{2i} &= \text{quat. réduit } b_{1i}^* \\ z \cdot b_{2j} + xy_{2j} - y_{2j}x &= \text{quat. réduit } b_{2j}^*. \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$z = 1; \quad b_{2j} = b'_{2j} + e_3 b''_{2j}; \quad b_{1i} = b'_{1i} + e_3 b''_{1i}$$

la première condition donne

$$y_{2j} = e_3 \cdot b''_{2j} \cdot (x - \bar{x})^{-1}$$

la seconde

$$y_{1i} = e_3 \left(b''_{2i} (x - \bar{x})^{-2} + b''_{1i} (x - \bar{x})^{-1} \right).$$

Posons maintenant

$$A_{h2}^{**} = \sum_{i=1}^{p_1} A_{i1}^* b_{1i}^* + \sum_{j=1}^{p_2} A_{j2}^* b_{2j}^*$$

les b^* étant des quaternions réduits, nous pouvons prendre ce point comme point caractéristique du second ordre à la place de A_{h2}; de sorte que

$$\mathbf{H}\, A_{h3}^* = A_{h3}^* \cdot x + A_{h2}^{**}$$

alors les b_{hk} du tableau des coefficients de la première forme réduite de l'homographie correspondants aux points caractéristiques de seconde espèce d'ordre 3 peuvent être pris égaux à zéro, sauf $b_{k+1,\,k}$ égal à 1.

Remarquons enfin, avant de passer au cas général, que l'on peut supposer

$$\mathbf{H}\, A_{h2}^{**} = A_{h2}^{**} \cdot x + A_{h1}^{**}$$

il suffit de remplacer A_{h1}^* par $\sum_{i=1}^{p_1} A_{i1}^* \cdot b_{1i}^* = A_{h1}^{**}$.

53. Cas général. — Pour passer à un point caractéristique de seconde espèce d'ordre q, supposons que nous ayons à appliquer la méthode que nous venons d'exposer pour les points d'ordre 2 et 3 à tous les points d'ordre inférieur à q. Soit A_{hq} le $h^{\text{ième}}$ point caractéristique d'ordre q. On a

$$\mathbf{H}\,A_{hq} = A_{hq}\cdot x + \sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{p_j} A_{ij}\cdot b_{ji}$$

et l'on a, si p_j est le nombre de points caractéristiques d'ordre j, $p_j \leqslant p_{j-1}$ pour $j = 2, 3, \ldots, q$; et aussi

(1) $$\mathbf{H}\cdot A_{ij} = A_{ij}\cdot x + A_{i,j-1}.$$

Posons

(2) $$A^*_{hq} = A_{hq}\cdot z + \sum_{i=1}^{p_j}\sum_{j=1}^{q-1} A_{ij}\cdot y_{ji}.$$

Nous allons montrer que l'on peut prendre z et les y_{ji} de façon que

(3) $$\mathbf{H}\cdot A^*_{hq} = A^*_{hq}\cdot x + \sum_{i=1}^{p_j}\sum_{j=1}^{q-1} A_{ij}\cdot b^*_{ji}$$

les b^* étant des quaternions réduits de même nature que x. D'après (1) et (2), on voit facilement que

(4) $$\mathbf{H}\cdot A^*_{hq} = A^*_{hq}\cdot xz + \sum_{i=1}^{p_j}\sum_{j=1}^{q-1} A_{ij}\cdot (b_{ji}z + xy_{ji} + \delta^i_{j+1}\,y_{i,j+1})$$

où $\delta^i_{j+1} = 1$ si $i \leqslant p_{j+1}$ et $\delta^i_{j+1} = 0$ si $i > p_{j+1}$, et, enfin, $\delta^i_q = 0$, quel que soit i; cette dernière relation prouve de plus que z doit être un quaternion réduit de même nature que x. Remplaçons alors dans (4) A_{hq} par sa valeur tirée (2); il vient

(5) $$\mathbf{H}\cdot A^*_{hq} = A^*_{hq}\cdot x + \sum_{i=1}^{p_j}\sum_{j=1}^{q-1} A_{ij}\cdot (b_{ji}z + \delta^i_{j+1}y_{i,j+1} + xy_{ij} - y_{ij}x)$$

de cette relation on déduit que l'on doit avoir

$$b_{ij}z + \delta^i_{j+1}\,y_{i,j+1} + xy_{ij} - y_{ij}x = \text{quat. réduit } b^*_{ij}$$

Si l'on pose

$$z = 1;\quad b_{ji} = b'_{ji} + e_3\,b''_{ji};$$

on voit aisément que les y s'obtiennent par la relation

$$y_{ij} = e_3\,\left(b''_{ji}\cdot(x-\bar{x})^{-1} + \delta^i_{j+1}\,b''_{j+1,i}\cdot(x-\bar{x})^{-2}\right)$$

si l'on pose

$$A^*_{h,q-1} = \sum_{i=1}^{pj} \sum_{j=1}^{q-1} A_{ij} \cdot b^*_{ji}$$

on voit que

(6) $$\mathbf{H} \cdot A^*_{hq} = A^*_{hq} \cdot x + A^*_{h,q-1}$$

de sorte que si l'on prend ce point A^*_{hq} comme sommet du polyèdre de référence à la place de A_{hq}, les b_{hk} figurant dans la première forme réduite de l'homographie peuvent donc être supposés nuls, sauf $b_{k+1,k}$ égal à 1. Il reste d'abord à vérifier que $A^*_{h,q-1}$ est bien un point caractéristique de seconde espèce d'ordre $q-1$.

Cela ne présente aucune difficulté; il suffit de poser

$$A^*_{h,q-2} = \sum_{i=1}^{p_j} \sum_{j=1}^{q-1} A_{i,j-1} b^*_{ji}$$

pour voir que

$$\mathbf{H} \cdot A^*_{h,q-1} = A^*_{h,q-1} \cdot x + A^*_{h,q-2}.$$

Le raisonnement s'étend ainsi de proche en proche; de sorte que les $(\Sigma\, p_j)$ sommets du polyèdre de référence

$$A_{11}, A_{21}, \dots, A_{p_1 1}, \quad A_{12}, \dots, \dots, A_{p_q q},$$

si q est l'ordre de multiplicité de la racine considérée, sont respectivement remplacés par les suivants :

$$A^*_{11}, A^*_{21}, \dots, A^*_{p_1 1}, \quad A^*_{12}, \dots, \dots, A^*_{p_q q}$$

le point A^*_{ij} vérifiant, quels que soient i et j $(i \leqslant p_j,\ j \leqslant q)$, la relation

$$\mathbf{H}\, A^*_{ij} = A^*_{ij} \cdot x + A^*_{i,j-1} \cdot \delta_j \left(\delta_j = \begin{cases} 0 \text{ si } j = 1 \\ 1 \text{ si } j > 1 \end{cases}\right);$$

ce point est défini en fonction des A par

$$A^*_{ij} = \sum_{k=1}^{j} \sum_{h=1}^{p_j} A^*_{hk} \cdot b_{k+q-j-1,h}.$$

Donc les coefficients b_{hk} de la matrice de la première forme réduite de l'homographie considérée peuvent être supposés nuls, sauf les $b_{k+1,k}$ qui peuvent être pris égaux à 1. D'où

Théorème fondamental. — *Étant donnée une homographie à nabla non nul, il existe toujours un polyèdre de référence tel que la matrice de l'homographie donnée prenne par rapport à ce nouveau système de référence la forme suivante :*

elle est décomposable en tableaux carrés;

les tableaux non situés sur la diagonale principale sont tous formés de zéros;

un tableau situé sur la diagonale principale a lui-même sa diagonale principale formée avec la même racine de l'équation minima de l'homographie, racine que l'on peut toujours supposer être un quaternion réduit à partie complexe positive ou nulle, la diagonale immédiatement inférieure et parallèle à la diagonale principale étant formée de 1, les autres éléments de ce tableau carré étant nuls.

Il est important de remarquer que, si x désigne la racine de l'équation minima dont il vient d'être question, les x figurant dans deux tableaux carrés de la diagonale principale peuvent être *les mêmes*.

CHAPITRE IV

Deux théorèmes remarquables.

§ 1. Le théorème de von Staudt [1].
§ 2. Le théorème fondamental de la Géométrie projective quaternionienne.

I

54. Théorème de von Staudt. — *Toute transformation ponctuelle univoque et continue de la droite projective quaternionienne, qui change deux points distincts en deux points distincts et quatre points formant une divi-*

[1] *Geometrie der Lage*. Nuremberg, 1847, p. 50.

sion harmonique en quatre points formant une division harmonique, est une homographie ou une antihomographie.

Soit **T** la transformation envisagée; supposons qu'elle change respectivement les points 0, 1, ∞, dans les points z_1, z_2, z_3. L'homographie **H** définie par

$$z' = a \cdot (z - z_1) \cdot (z - z_3)^{-1} \cdot (z_2 - z_3) \cdot (z_2 - z_1)^{-1} \cdot a^{-1}$$

a étant un quaternion arbitraire non nul, change z_1, z_2, z_3 dans les points 0, 1 ∞.

La transformation **T**$'$ = **H**.**T** jouit évidemment des mêmes propriétés que **T** et laisse invariants les points 0, 1, ∞. Les rapports anharmoniques (2, 0, 1, ∞), (3, 1, 2, ∞), ... étant égaux à -1, ainsi que les rapports (-1, 0, 1, ∞), (-2, -1, 0, ∞), ..., on voit de proche en proche que **T**$'$ laisse invariants tous les points de coordonnée z entière. Posons $z' = 1/z$; la transformation **T**$'$ considérée comme opérant sur la coordonnée z' jouit encore des propriétés de l'énoncé, et comme elle laisse invariants les points $z' = 0$, $z' = 1$, $z' = \infty$, elle laisse invariants les points de coordonnée z' entière, c'est-à-dire tous les points de coordonnées $z = 1/n$ (n entier). Si l'on pose de même $z'' = pz'$, on voit que **T**$'$ laisse invariants tous les points de coordonnée z'' entière, c'est-à-dire les points de coordonnée $z = p/n$, ou, en d'autres termes, tous les points de coordonnée réelle et rationnelle, et, puisque **T** est continue, **T**$'$ l'est aussi; par conséquent, tous les points de coordonnée réelle.

Pour continuer notre démonstration il sera commode d'introduire la représentation géométrique d'un quaternion par un point de l'espace euclidien réel à quatre dimensions. Dans cet espace le repère cartésien sera appelé *quatrièdre;* ce quatrièdre sera dit rectangulaire s'il est formé de quatre axes perpendiculaires concourants. L'axe du quatrièdre rectangulaire sur lequel on porte la partie réelle du quaternion sera dit l'axe réel ou axe des (x_0), de même celui sur lequel on porte le coefficient de e_i sera dit l'axe des (x_i).

D'après ce que nous venons d'établir, T' laisse invariant l'axe réel. Nous allons démontrer maintenant que T' change un vecteur unitaire en un vecteur unitaire et deux vecteurs unitaires orthogonaux en deux vecteurs unitaires orthogonaux.

Pour simplifier l'écriture dans ce qui va suivre, nous désignerons respectivement par les notations i, j, k, habituellement employées, les unités principales e_1, e_2, e_3. Cela étant, on peut toujours supposer que le vecteur unitaire considéré est le vecteur $+i$ (en multipliant, s'il le faut, T' par une homographie convenable, ce qui ne change pas, nous l'avons vu, ses propriétés). On a

$$(0, \infty, -i, +i) = -1,$$

T', laissant invariant 0 et ∞, change $-i$ en a_1 et $+i$ en a_2, et l'on a encore par hypothèse

$$(0, \infty, a_1, a_2,) = -1;$$

d'où l'on voit aisément, par un calcul qui ne présente aucune difficulté, que

$$a_1 = -a_2.$$

Or on a aussi

$$(-1, +1, -i, +i) = -1;$$

par hypothèse on aura encore

$$(-1, +1, -a_2, +a_2) = -1,$$

les quantités figurant dans cette relation étant évidemment toutes échangeables entre elles; on la met sans difficulté sous la forme

$$a_2^2 + 1 = 0,$$

ce qui établit que a_2 est un vecteur unitaire.

Pour établir que T' change deux vecteurs unitaires orthogonaux en deux vecteurs unitaires orthogonaux, nous pouvons encore supposer que les deux vecteurs considérés sont les vecteurs $+i$ et $+j$. Ces deux vecteurs sont changés par $\mathbf{T}'$ en deux vecteurs unitaires a et b.

Or on a encore

$$(+i, -i, +j, -j) = -1.$$

On aura, puisque $-i$ est transformé en $-a$ et $-j$ en $-b$,

$$(a, -a, b, -b) = -1,$$

relation qui peut encore s'écrire

$$(a-b)^{-1} + (a+b)^{-1} = a^{-1}$$

ou, en tenant compte du fait que $a\bar{a} = 1$,

$$\bar{a} \cdot \big(\mathrm{N}(a+b) + \mathrm{N}(a-b)\big) - \bar{b} \cdot \big(\mathrm{N}(a+b) - \mathrm{N}(a-b)\big)$$
$$= \bar{a} \cdot \big(\mathrm{N}(a+b) \cdot \mathrm{N}(a-b)\big);$$

si l'on tient compte de plus maintenant que

$$a\bar{a} = b\bar{b} = 1; \quad a^2 = b^2 = -1; \quad \bar{a} = -a; \quad \bar{b} = -b,$$

cette dernière relation s'écrit, après développement et simplification,

$$\bar{b}a\bar{b} = \bar{a}b\bar{a}b\bar{a};$$

multiplions à droite les deux membres de cette dernière équation par a; on aura ainsi la relation

$$\bar{b}a\bar{b}a = \bar{a}b\bar{a}b$$

ou encore

$$b\bar{a}b\bar{a} - a\bar{b}a\bar{b} = 0,$$

ou aussi

$$b\bar{a}b\bar{a} + b\bar{a}a\bar{b} - a\bar{b}a\bar{b} - a\bar{b}b\bar{a} = 0;$$

on reconnaît dans le premier membre le développement du produit

$$(b\bar{a} - a\bar{b}) \cdot (a\bar{b} + b\bar{a});$$

de sorte que la relation (a, — a, b, — b) = — 1 est équivalente à

$$(b\bar{a} - a\bar{b}) \cdot (a\bar{b} + b\bar{a}) = 0.$$

Le premier facteur n'est pas nul; en effet, s'il en était ainsi, on aurait

$$b\bar{a} = a\bar{b}$$

ou

$$ab = ba,$$

ce qui signifierait que a et b sont deux vecteurs portés par le même axe; ces vecteurs étant unitaires, on aurait $a = b$, ce qui est contraire à l'hypothèse que $\mathbf{T}'$ est univoque.

On a donc

$$a\bar{b} + b\bar{a} = 0;$$

or le premier membre n'est autre que le produit scalaire des vecteurs a et b; la dernière relation signifie donc que le produit scalaire des vecteurs a et b est nul, c'est-à-dire que ces vecteurs sont orthogonaux.

Ainsi $\mathbf{T}'$ change un vecteur unitaire en un vecteur unitaire et deux vecteurs unitaires orthogonaux en deux vecteurs unitaires orthogonaux. Cela étant, $\mathbf{T}'$ laissant invariant l'axe réel de l'espace à quatre dimensions que nous avons déjà considéré, changera le trièdre trirectangle ($\mathbf{t}$) formé par les trois axes hypercomplexes en un autre trièdre trirectangle ($\mathbf{t}'$) perpendiculaire à l'axe réel: i, j, et k seront donc changés par $\mathbf{T}'$ en trois vecteurs unitaires portés chacun par un axe de ($\mathbf{t}'$).

Deux cas sont alors possibles: ou bien ($\mathbf{t}$) et ($\mathbf{t}'$) sont de même sens, ou bien ils sont de sens contraires. Dans le premier cas on pourra disposer du quaternion arbitraire a qui figure dans l'homographie $\mathbf{H}$, pour que les vecteurs V_1, V_2, V_3 dans lesquels $\mathbf{T}'$ change i, j, k soient respectivement ces mêmes vecteurs i, j, k; dans le deuxième cas on pourra disposer de ce paramètre a pour que V_1 et V_2 soient respectivement $-i$ et $-j$; alors V_3 sera $-k$. Désormais $\mathbf{T}''$ sera la transformation $\mathbf{T}'$ si ($\mathbf{t}$) et ($\mathbf{t}'$) sont de même sens et la transformation $\mathbf{JT}'$ dans le cas contraire, $\mathbf{J}$ étant l'antiinvolution définie par $z' = \bar{z}$.

$\mathbf{T}''$ jouit manifestement des mêmes propriétés que $\mathbf{T}$; cela est évident si l'on est dans le premier cas; dans le second il suffit de faire voir que T″ conserve les divisions harmoniques; c'est évidemment là la seule propriété de T que T″ pourrait ne pas avoir.

On a vu que si quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 de coordonnées non homogène a_1, a_2, a_3, a_4 forment une division harmonique, on a

$$(1) \qquad (a_1 - a_3)^{-1} + (a_1 - a_4)^{-1} = 2 \cdot (a_1 - a_2)^{-1}$$

On a

$$\mathrm{T}' a_1 = a'_1; \quad \mathrm{T}' \cdot a_2 = a'_2; \quad \mathrm{T}' \cdot a_3 = a'_3; \quad \mathrm{T}' \cdot a_4 \cdot = a'_4$$

et

$$(2) \qquad (a'_1 - a'_3)^{-1} + (a'_1 - a'_4)^{-1} = 2 \cdot (a'_1 - a'_2)^{-1}$$

puis

$$\mathrm{T}'' \cdot a_1 = \overline{a'_1}; \quad \mathrm{T}'' \cdot a_2 = \overline{a'_2}; \quad \mathrm{T}'' \cdot a_3 = \overline{a'_3}; \quad \mathrm{T}'' \cdot a_4 = \overline{a'_4}.$$

Si l'on prend les conjugués des deux membres de la relation (2), on voit qu'elle signifie que T″ change quatre points formant une division harmonique en quatre points formant une division harmonique: T″ a donc bien dans tous les cas les mêmes propriétés que T′.

Nous allons démontrer que T″ est l'opération identique.

T″ laisse invariants tous les points de coordonnée réelle; T″ laisse aussi invariants tous les points de coordonnée $z = b\ e_i$ (en recommençant à désigner par e_1, e_2, e_3 les trois unités principales que nous avions nommées i, j, k dans ce qui vient d'être dit); en effet, pour le voir, il suffit de poser $z = e_i z'$ et de considérer T″ comme opérant sur z': T″ laisse invariants les points $z' = 0$, $z' = 1$, $z' = \infty$, donc change $z = b\ e_i$ en lui-même. Passons aux points de coordonnée $z = a + be_i$; posons $z = a + bz'$; T″, regardée comme opérant sur z', laisse invariants $z' = 0$, $z' = 1$, $z' = \infty$, et par conséquent change $a + b\ e_i$ en $a + b$ V, V étant un vecteur unitaire; si l'on pose maintenant $z = -a\ e_i\ z'' + b\ e_i$. T″ laisse invariants les points $z'' = 0$, $z'' = 1$, $z'' = \infty$, donc change $-a\ e^2_i + b\ e_i = a + b\ e_i$ en $-a\ e_i \mathrm{V}' + b\ e_i$, V′ étant un vecteur unitaire; si l'on pose $\mathrm{V}' = \Sigma \alpha_i\ e_i$, on voit que la partie scalaire de $-a\,e_i\,V'+b\,e_i$ est $a\,\alpha_i$; or nous avons vu tout à l'heure que cette partie scalaire était égale à a; donc $\alpha_i=1$, et puisque V' est unitaire, $\alpha_h=0$ $(h\neq i)$; donc $a+b\,e_i$ est invariant.

Montrons maintenant que T'' laisse invariants les points de coordonnée $z=a\,e_i+b\,e_j$; cela est à peu près évident; il suffit d'écrire $z=e_i\,(a+\varepsilon\,b\,e_k)$, $(\varepsilon=\pm 1$ suivant que $e_i\,e_k=e_j$ ou que $e_i\,e_k=-e_j)$, et de remarquer que si l'on pose $z=e_iz'$, T'' laisse invariants les points $z'=0$, $z'=1$, $z'=\infty$ et tous les points $z'=a+\varepsilon\,b\,e_k$, par conséquent laisse invariant $z=a\,e_i+b\,e_j$.

Passons maintenant aux points de coordonnées $z=a+b\,e_i+c\,e_j$. Posons à cet effet $z=a+b\,e_i+c\,z'$; T'' envisagée comme opérant sur z' laisse invariants les points $z'=0$, $z'=1$, $z'=\infty$, donc change $a+b\,e_i+c\,e_j$ en $a+b\,e_i+c\,V$, V étant un vecteur unitaire; posons maintenant $z=-a\,e_i\,z''+b\,e_i+c\,e_j$; T'' laisse invariants les points $z''=0$, $z''=1$, $z''=\infty$, et par conséquent change $-a\,e^2_i+b\,e_i+c\,e_j=a+b\,e_i+c\,e_j$ en $-a\,e_i\,V'+b\,e_i+c\,e_j$, V' étant encore un vecteur unitaire; si l'on pose $V'=\Sigma\,\alpha_h\,e_h$, on voit que la partie scalaire de la dernière expression écrite est égale à $a\,\alpha_i$; or nous avions vu précédemment que cette partie scalaire était a; donc $\alpha_i=1$ et, puisque V' est unitaire, $\alpha_h=0$, $(h\neq i)$; par conséquent, $a+b\,e_i+c\,e_j$ est invariant par T''.

Montrons maintenant que tout quaternion qui se réduit à un vecteur est invariant par T''. Soit, en effet $z=a\,e_1+b\,e_2+c\,e_3$ un tel quaternion; on peut encore l'écrire $z=e_1.(a-b\,e_3+c\,e_2)$; si l'on pose $z=e_1z'$, T'' laisse invariants les points $z'=0$, $z'=1$, $z'=\infty$ et, en vertu de ce que nous avons dit précédemment, tous les points $a-b\,e_3+c\,e_2$; par conséquent, T'' laisse invariant le vecteur $a\,e_1+b\,e_2+c\,e_3$. Arrivons enfin aux points de coordonnée $z=a+b\,e_1+c\,e_2+d\,e_3$; posons $z=a+b\,e_1+c\,e_2+d\,z'$; T'' envisagée comme opérant sur z' laisse invariants les points $z'=0$, $z'=1$, $z'=\infty$, donc change $a+b\,e_1+c\,e_3$

$+ d\, e_3$ en $a + b\, e_1 + c\, e_2 + d\, \mathrm{V}$, V étant un vecteur unitaire; posons $z = -\, a\, e_1\, z'' + b\, e_1 + c\, e_2 + d\, e_3$; $\mathbf{T}''$ laisse invariants les points $z'' = 0$, $z'' = 1$, $z'' = \infty$ et, par conséquent, change $-\, a\, e^2{}_1 + b\, e_1 + c\, e_2 + d\, e_3 = a + b\, e_1 + c\, e_2 + d\, e_3$ en $-\, a\, e_1\, \mathrm{V}' + b\, e_1 + c\, e_2 + d\, e_3$, V′ étant un vecteur unitaire : $\mathrm{V}' = \Sigma\, \alpha_h\, e_h$; la partie scalaire de la dernière expression est $-\, a\, \alpha_1$; or nous avons déjà vu que cette partie scalaire était égale à a; donc $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_h = 0$, $(h \neq 1)$; par conséquent $\mathbf{T}''$ laisse invariant $a + b\, e_1 + c\, e_2 + d\, e_3$.

$\mathbf{T}''$ laissant invariant tout point de la droite quaternionienne est donc la transformation identique et par suite $\mathbf{T}$ est donc ou l'homographie $\mathbf{H}^{-1}$ ou l'antihomographie $\mathbf{H}^{-1}\mathbf{J}$; notre proposition est établie.

II

55. Le théorème fondamental de la géométrie projective quaternionienne. — *Dans l'espace projectif quaternionien à* n *dimensions* (n$\geqslant$2), *toute transformation jouissant des propriétés suivantes:*

1° *elle est univoque;*

2° *elle change deux points distincts en deux points distincts;*

3° *elle change* (n + 1) *points coplanaires en* (n + 1) *points coplanaires;*

4° *elle change* (n + 1) *points non coplanaires en* (n + 1) *points non coplanaires;*

5° *elle est continue,*

est une homographie.

Nous allons encore raisonner par récurrence. Démontrons donc la proposition d'abord pour le plan projectif quaternionien à deux dimensions.

Par hypothèse, trois points non situés en ligne droite sont changés en trois points non situés en ligne droite.

La transformée d'une droite sera par définition la droite passant par les transformés de deux points A et B de cette droite. Nous allons maintenant nous ramener au théorème précédent.

Soit D_0 une droite quelconque et D'_0 sa transformée; prenons sur D_0 quatre points A, B, C, F formant une division harmonique; je dis que les transformés de ces points forment aussi une division harmonique. En effet, faisons passer par A deux droites quelconques; menons par B une droite arbitraire qui coupe en M et N les deux droites issues de A; joignons CM qui coupe AN en Q et joignons BQ qui coupe AM en P; les droites AMP, ANQ,

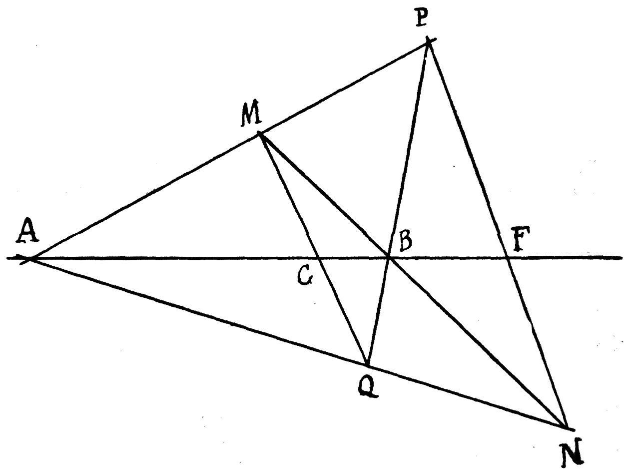

FIG. 2.

BMN, BPQ forment un quadrilatère complet dont PN est une diagonale ainsi que MQC, qui par suite doit passer par F. La transformation T considérée changera le quadrilatère complet en un autre quadrilatère complet et par suite la division A′, B′, C′, F′, transformés des points A, B, C, F, sera encore une division harmonique, ce que nous voulions établir.

Cela étant, la transformation T change le triangle de référence $a\ b\ c$ en un autre triangle $a'\ b'\ c'$ et il existe une homographie **H** qui ramène le triangle $a'\ b'\ c'$ en $a\ b\ c$; la transformation $\mathbf{T}' = \mathbf{H}.\mathbf{T}$ jouit des mêmes propriétés que **T** et de plus laisse invariant le triangle $a\ b\ c$. Nous allons établir notre proposition pour $\mathbf{T}'$.

Considérons un point M quelconque et soit M′ le transformé de M par $\mathbf{T}'$; soient enfin m_1 et m'_1 les projections de centre a de M et M′ sur $b\ c$. La correspondance $\mathbf{t}'_1$ entre m_1 et m'_1 est l'effet de $\mathbf{T}'$ sur les points de $b\ c$; $\mathbf{t}'_1$ jouit des propriétés exigées par le théorème de von Staudt et laisse invariants les points b et c : c'est une homographie ou une antihomographie qui se traduit en coordonnées non homogènes par

$$z'_1 = a_1 z_1 b_1^{-1} \qquad \text{ou} \qquad Z'_1 = a'_1 \overline{z_1} b'^{-1}_1.$$

De même la correspondance $\mathbf{t}_2$ entre les points m_2 et m'_2, projections de M et M′ de centre b sur $a\ c$, est une homographie ou une antihomographie : elle se traduit en coordonnées non homogènes par

$$z'_2 = a_2 z_2 b_2^{-1} \qquad \text{ou} \qquad Z'_2 = a'_2 \overline{z'_2} b'^{-1}_2.$$

Si l'on pose

$$z_1 = x \cdot y^{-1}; \qquad z_2 = y \cdot z^{-1}; \qquad z_3 = z \cdot x^{-1}$$

et de même

$$z'_1 = x' \cdot y'^{-1}; \qquad z'_2 = y' \cdot z'^{-1} \qquad z'_3 = z' \cdot x'^{-1}$$

où $(x,\ y,\ z)$ sont les coordonnées homogènes de M et $(x',\ y',\ z')$ celles de M′; on voit immédiatement que

$$z_3 = (z_1 \,.\, z_2)^{-1}; \qquad z'_3 = (z'_1 \,.\, z'_2)^{-1}.$$

Si l'on donne aux Z' des significations analogues, on aura aussi

$$Z'_3 = (Z'_1 \,.\, Z'_2)^{-1}.$$

Il est évident que z'_3 est aussi une homographie par rapport à z_3 et que Z' est une antihomographie par rapport à z_3; pour que cela soit possible il faut que $a_2 = k.b_1$,

k étant un scalaire, comme le montre un calcul facile. Au contraire, Z'_3 ne pourra jamais être une antihomographie par raport à z_3, car

$$\begin{aligned} Z'_3 &= (Z'_1 \cdot Z'_2)^{-1} = (a'_1 \overline{z_1} b_1'^{-1} \cdot a'_2 \overline{z_2} b_2'{}^{1})^{-1} \\ &= b'_2 \overline{z_2}^{-1} a_2'^{-1} b'_1 \overline{z_1}^{-1} a_1'^{-1} \end{aligned}$$

et même si $a_2'^{-1}\ b'_1 = k'$, k' étant un scalaire, on aurait

$$Z'_3 = k' b'_2 \overline{z_2}^{-1} \overline{z_1}^{-1} a_1'^{-1} = k' b'_2 (\overline{z_1}\, \overline{z_2})^{-1} a_1'^{-1}$$

mais $\overline{z_1}\,\overline{z_2}$ n'est pas égal à $\overline{z_3}$, puisque

$$\overline{z_3} = \overline{(z_1 z_2)^{-1}} = (\overline{z_2}\,\overline{z_1})^{-1}$$

donc **T′**, ne pouvant être une antihomographie, est une homographie; le théorème est donc établi pour le cas $n = 2$.

Pour étendre le théorème à l'espace à n dimensions, nous allons supposer qu'il est démontré pour l'espace à $(n - 1)$ dimensions. Cela étant, on peut toujours admettre que **T** laisse invariant le polyèdre de référence; s'il n'en était pas ainsi, la transformation **T′** = **H**.**T**, où **H** est une homographie convenablement choisie, laisserait invariant le polyèdre de référence et jouirait évidemment des mêmes propriétés que **T**.

Soient alors M et M′ un point et son transformé par **T**; m et m' les projections de M et M′ faites de l'un des sommets du polyèdre de référence comme centre de projection sur la face opposée qui constitue un espace à $(n-1)$ dimensions; la correspondance entre m et m' est alors, par hypothèse, une homographie. En recommençant le raisonnement avec un autre sommet du polyèdre de référence, distinct du sommet précédent, on voit que T est bien une homographie, puisque son effet sur les points de deux faces distinctes du polyèdre de référence est une homographie. Notre proposition est donc établie.

CHAPITRE V

Les projectivités involutives.

§ 1. Les involutions.
§ 2. Les polarités.

I

56. Définition des involutions. — Une *involution* est une homographie dont l'équation minima est

$$\mathbf{H}^2 + \varepsilon = 0 \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

(en divisant tous les éléments de la matrice de **H** par un même scalaire, si cela est nécessaire).

Nous aurons à examiner successivement les deux cas $\varepsilon = +1$ et $\varepsilon = -1$, car pour passer de l'un à l'autre il faudrait multiplier tous les éléments de la matrice de l'homographie correspondant à l'un de ces cas par un même facteur non scalaire, et nous savons que cette multiplication n'est pas permise en géométrie projective quaternionienne.

Les involutions correspondant à $\varepsilon = +1$ seront dites de *première espèce* ou *axiales;* les involutions correspondant à $\varepsilon = -1$ seront dites de *seconde espèce*.

57. Étude sommaire des involutions axiales. — Il résulte de ce que nous avons dit au chapitre III sur la forme réduite d'une homographie qu'il existe un polyèdre de référence tel que si $2p$ est l'ordre de multiplicité de $+1$ considéré comme racine de $\nabla(\mathbf{H}) = 0$, et par conséquent $2(n+1-p)$ sera l'ordre de multiplicité de -1 regardé comme racine de cette même équation $\nabla(\mathbf{H}) = 0$, les équations de l'involution soient dans ce polyèdre

$$x'_i = x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p.)$$
$$x'_j = -x_j \qquad (j = p+1, p+2. \ldots, n+1.)$$

Les points doubles de cette involution sont donc tous les points des variétés linéaires représentées, la première par

$$x_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p.)$$

et la seconde par

$$x_j = 0, \qquad (j = p + 1, p + 2, \ldots, n + 1)$$

l'une de ces variétés pouvant du reste se réduire à un point ($p = 1$ ou $p = n$); ces variétés seront appelées désormais les *axes* de l'involution; la connaissance de ces axes permet de trouver sans difficulté les éléments invariants de l'involution.

Dans l'espace réel à $4n$ dimensions le premier axe est représenté par une variété linéaire à $4(n - p)$ dimensions, le second par une variété linéaire à $4(p - 1)$ dimensions et ces variétés sont sans variété linéaire à 4 dimensions communes.

D'autre part, il est aisé de vérifier que si M et M′ sont deux points homologues par l'involution considérée, ces points et ceux où la droite MM′ coupe les axes de cette involution forment une division harmonique.

58. Involutions de seconde espèce. — Par définition, l'équation minima d'une telle involution est

$$\mathbf{H}^2 + 1 = 0.$$

Comme précédemment, en appliquant les résultats obtenus sur la forme réduite d'une homographie, on voit qu'il existe un polyèdre de référence par rapport auquel cette involution a comme équations

$$x'_i = e_1 x_i. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n + 1).$$

En passant aux coordonnées non homogènes on voit que les points doubles d'une involution de seconde espèce ne forment pas, comme ceux d'une involution de première espèce, deux familles distinctes sans point commun: ils forment une *famille unique et continue*. Cette famille est représentée dans l'espace réel à $4n$ dimensions par une variété linéaire à $2n$ dimensions.

II

59. Définition des polarités. — Une corrélation est dite *involutive* lorsque, par deux applications successives à un élément (point ou plan), on retrouve l'élément initial; une corrélation involutive se nomme *polarité*.

Soit, en conservant les notations adoptées au paragraphe IV, n° 35,

$$(u') = (\bar{x}) \cdot (\mathfrak{a})_g \qquad \text{et} \qquad (x') = (\mathfrak{a}')^{-1}{}_d \cdot (\bar{u})$$

une corrélation à nabla non nul; pour que cette corrélation soit une polarité, il faut, d'après ce que nous venons de dire, que l'on ait

$$(\mathfrak{a}')^{-1}{}_d \cdot (\bar{\mathfrak{a}})_d \cdot (x) = (x) \cdot m,$$

m étant un scalaire; on en déduit

$$(\bar{\mathfrak{a}})_d = m \cdot (\mathfrak{a}')_d,$$

ce qui se traduit sur les éléments de la matrice $(\mathfrak{a})$ par les relations

$$\bar{a}_{ij} = m a_{ji}$$

par permutation de i et j, on a

$$(1) \qquad \bar{a}_{ji} = m a_{ij}$$

en comparant ces deux dernières égalités, on tire

$$m^2 = 1.$$

Pour la même raison que nous avions de distinguer deux espèces d'involution suivant que $\varepsilon = +1$ ou que $\varepsilon = -1$, nous devons distinguer ici deux genres de polarités suivant que $m = +1$ ou que $m = -1$; nous avons mis le mot genre pour rappeler que la matrice d'une polarité du premier genre est hermitique du premier genre, comme cela se voit immédiatement sur la relation (1), et de même que la matrice d'une polarité du second genre est hermitique du second genre.

Pour plus de simplicité dans les calculs, nous nous placerons, pour tout ce qui va suivre, dans l'espace à trois dimensions ($n=3$), les raisonnements que nous allons faire étant généraux et s'étendant d'eux-mêmes *mutatis mutandis* aux espaces à un nombre supérieur de dimensions.

60. Hyperquadrique associée a une polarité du premier genre. — Les éléments de la matrice d'une telle polarité sont liés par la relation

$$\overline{a}_{ij} = a_{ji}$$

ce qui entraîne que a_{ii} soit un scalaire. Au point M de coordonnées homogènes (x_i) correspond le plan P (u_i) par les relations

$$u_i = \sum_{j=1}^{4} \overline{x}_j a_{ij} \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Le lieu des points qui sont contenus dans leur plan conjugué est représenté par

$$\sum_{i,j} \overline{x}_j a_{ij} x_i = 0. \tag{1}$$

Le premier membre de cette relation est une forme d'Hermite du premier genre, en vertu des relations qui lient les a_{ij}; nous dirons, pour continuer l'analogie classique introduite par Segre en géométrie projective complexe, que l'équation (1) représente une *hyperquadrique:* c'est cette variété que nous nommerons l'hyperquadrique associée à la polarité.

Dans l'espace réel à douze dimensions correspond à l'hyperquadrique (1) une variété quadratique à onze dimensions.

La connaissance de l'hyperquadrique associée à une polarité, c'est-à-dire la connaissance de la forme d'Hermite F qui la définit, entraîne la connaissance de cette polarité, qui est alors donnée symboliquement par

$$(u) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right),$$

Le plan conjugué d'un point M par une polarité $\mathfrak{S}$ sera dit le *plan polaire* de M par rapport à l'hyperquadrique $\mathfrak{Q}$ associée à la polarité $\mathfrak{S}$. Le plan polaire d'un point M de $\mathfrak{Q}$ sera dit le plan tangent à $\mathfrak{Q}$ au point M considéré, mais il est bon de se rappeler qu'un plan quaternionien n'a que huit dimensions réelles; ce n'est donc pas toute la variété linéaire complète tangente à l'hyperquadrique $\mathfrak{Q}$.

Pour trouver les différentes espèces de polarités du premier genre nous pourrions partir du fait établi dans la première partie de ce travail, à savoir que toute forme d'Hermite quaternionienne admet une forme réduite et une seule (théorèmes XIII et XVII), mais nous préférons donner une démonstration géométrique de cet important théorème XIII.

61. Lemme fondamental. — *Le plan polaire d'un point* A *non situé sur l'hyperquadrique* $\mathfrak{Q}$ *ne contient aucune droite située sur* $\mathfrak{Q}$.

Soient (0, 0, 0, 1) les coordonnées homogènes de A, et $x_4 = 0$ l'équation de son plan polaire. On voit facilement que l'équation de l'hyperquadrique $\mathfrak{Q}$ se réduit à

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \overline{x}_i a_{ij} x_j + \overline{x}_4 a_{44} x_4 = 0.$$

Nous pouvons toujours supposer que la droite du plan polaire de A située sur $\mathfrak{Q}$, si elle existe, soit la droite $x_3 = x_4 = 0$.

Pour que cette droite soit située sur $\mathfrak{Q}$, il faudrait que l'équation de cette dernière se réduise à

$$\overline{x}_1 a_{13} x_3 + \overline{x}_3 a_{32} x_2 + \overline{x}_2 a_{23} x_3 + \overline{x}_3 a_{31} x_1 + \overline{x}_3 a_{33} x_3 + \overline{x}_4 a_{44} x_4 = 0.$$

Or il est évident que le nabla de cette dernière forme est nul, car le système

$$\left\{\begin{aligned} a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= 0\\ a_{13}x_3 &= 0\\ a_{23}x_3 &= 0\\ a_{44}x_4 &= 0\end{aligned}\right.$$

a certainement des solutions en x_1, x_2, x_3, x_4, non toutes nulles, ce qui est contraire à l'hypothèse que le nabla de la polarité (qui est le même que celui de F) est différent de zéro.

62. Classification des polarités d'après leurs hyperquadriques. — Soient A_1 un point non situé sur l'hyperquadrique $\mathcal{Q}$, et P_1 son plan polaire; soient A_2 un point de P_1 non situé sur $\mathcal{Q}$, et P_2 son plan polaire; les deux plans P_1 et P_2 se coupent suivant une droite D non située sur $\mathcal{Q}$, d'après le lemme précédent; soient A_3 un point de D non situé sur $\mathcal{Q}$, et P_3 son plan polaire; P_3 coupe D en un point A_4. D'après les constructions que nous venons de faire il est clair que le tétraèdre A_1, A_2, A_3, A_4 est autopolaire par rapport à $\mathcal{Q}$. Prenons ce tétraèdre comme tétraèdre de référence; il est alors visible que la matrice de la forme d'Hermite associée à la polarité se réduit à sa diagonale principale. La forme d'Hermite F est alors

$$F = \sum_{i=1}^{4} \bar{x}_i a_{ii} x_i.$$

Par un choix convenable du point unité on peut amener tous les coefficients à avoir le module 1, mais on ne peut changer leurs signes; de sorte que l'on aura

$$F = \bar{x}_1 \varepsilon_1 x_1 + \bar{x}_2 \varepsilon_2 x_2 + \bar{x}_3 \varepsilon_3 x_3 + \bar{x}_4 \varepsilon_4 x_4$$

avec $\varepsilon_i = \pm 1$.

Plusieurs cas sont alors possibles :

Ou bien les quatre coefficients ε sont de même signe et l'on peut supposer que ce signe est le signe + ; la polarité est dite *elliptique*, la forme d'Hermite associée est

$$F = \bar{x}_1 x_1 + \bar{x}_2 x_2 + \bar{x}_3 x_3 + \bar{x}_4 x_4$$

l'hyperquadrique correspondante n'a pas de point, ou plutôt il n'existe aucune hyperquadrique associée à la polarité.

Ou bien trois ε sont d'un signe et l'autre de l'autre;

entre les deux formes opposées nous choisissons celle pour laquelle les trois ε de même signe sont positifs : nous aurons une polarité *hyperbolique de première espèce* avec la forme canonique

$$F = \bar{x}_1 x_1 + \bar{x}_2 x_2 + \bar{x}_3 x_3 - \bar{x}_4 x_4$$

Ou bien, enfin, deux des ε sont d'un signe et deux de l'autre; il n'y a pas de raison de distinguer a priori l'une des deux formes associées à la polarité $\mathcal{P}$ plutôt que l'autre: la polarité est orientable. Nous dirons dans ce cas que la polarité P est une polarité *hyperbolique de seconde espèce* représentée par les deux formes

$$F = \bar{x}_1 x_1 + \bar{x}_2 x_2 - \bar{x}_3 x_3 - \bar{x}_4 x_4$$
$$F_2 = -\bar{x}_1 x_1 - \bar{x}_2 x_2 + \bar{x}_3 x_3 + \bar{x}_4 x_4.$$

Nous avons épuisé toutes les éventualités et par conséquent classé les polarités du premier genre d'après l'hyperquadrique qui leur est associée.

63. Points communs a une droite et a une hyperquadrique. — Théorème VII. — *Si une droite est tout entière sur une hyperquadrique $\mathcal{Q}$, le plan tangent en chacun de ses points la contient tout entière.*

En effet, s'il n'en était pas ainsi, la polaire D′ de la droite D considérée serait distincte de D et alors trois cas sont possibles :

a) D et D′ se rencontrent en un point A;

b) D et D′ ne se rencontrent pas et D′ est située sur $\mathcal{Q}$;

c) D et D′ ne se rencontrent pas et D′ n'est pas située sur $\mathcal{Q}$.

Le cas *a*) ne peut se produire, car le plan (AD, AD′) aurait une infinité de pôles : tous les points de D et de D′.

Le cas *b*) n'est pas possible non plus. En effet, soit M un point quelconque de D; son plan polaire P passe par D′; soit M′ un point quelconque de D′; son plan polaire

P′ passe par D. Les plans P et P′ se coupent suivant une droite qui n'est autre que MM′, puisque P contient M et P′ contient M′ (les points M et M′ étant par hypothèse sur $\mathcal{Q}$); il en résulte que MM′ est sa propre polaire; donc MM′ est située sur l'hyperquadrique $\mathcal{Q}$. Comme M et M′ sont arbitraires, l'un sur D, l'autre sur D′, un point quelconque de l'espace peut toujours être regardé comme appartenant à une droite MM′ convenablement choisie et par conséquent ce point serait situé sur l'hyperquadrique, ce qui est absurde.

Le cas *c*) n'est pas possible non plus, comme étant en contradiction avec notre lemme fondamental. Notre proposition est donc établie.

Théorème VIII. — *Si par le point* M *de contact d'un plan tangent* P *à l'hyperquadrique* $\mathcal{Q}$ *on mène dans ce plan une droite* D *non située sur* $\mathcal{Q}$, D *ne rencontre* $\mathcal{Q}$ *qu'en* M. Nous dirons dans ce cas que D est *tangente* à l'hyperquadrique $\mathcal{Q}$ en M.

En effet, soit M′ un point de D distinct de M. Le plan polaire P′ de M′ contiendrait M, puisque M′ est situé dans le plan polaire de M. Si M′ était situé sur $\mathcal{Q}$, M′ serait aussi dans P′ et D coïnciderait avec sa polaire, donc serait située sur $\mathcal{Q}$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Théorème IX. — *Le plan polaire d'un point* M′ *d'une droite* D *coupe cette droite en un point* M *et les points* M *et* M′ *se correspondent antiinvolutivement.*

Dans ce théorème le caractère involutif de la correspondance est évident géométriquement; aussi nous bornerons-nous à montrer que cette correspondance est antihomographique.

Soient $x_1 = x_2 = 0$ les équations de D, et $x_3 = x_4 = 0$ les équations de sa polaire D′. L'équation de l'hyperquadrique $\mathcal{Q}$ sera alors

$$F = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \bar{x}_i a_{ij} x_j + \sum_{i=3}^{4}\sum_{j=3}^{4} \bar{x}_i a_{ij} x_j = 0.$$

Un point M de D aura pour coordonnées $(0, 0, x_3, x_4)$; son plan polaire sera alors

$$(\bar{x}_3 a_{33} + \bar{x}_4 a_{43}) \cdot X_3 + (\bar{x}_3 a_{34} + \bar{x}_4 a_{44}) \cdot X_4 = 0.$$

Il coupe D au point de coordonnées $(0, 0, X_3, X_4)$; en passant aux coordonnées non homogènes

$$X = X_3 \cdot X_4^{-1}; \qquad x = x_3 \cdot x_4^{-1}$$

on a, comme le montre un calcul facile,

$$X = (\bar{x} a_{33} + a_{43})^{-1} \cdot (-\bar{x} a_{34} - a_{44}),$$

ce qui établit la correspondance antihomographique entre x et X que nous voulions démontrer.

Nous avons déjà dit que sur la droite projective quaternionienne les corrélations étaient des transformations ponctuelles auxquelles nous avons donné le nom d'antihomographie. Une antiinvolution sera donc pour nous une polarité de la droite projective quaternionienne. Le raisonnement que nous avons fait au début de ce paragraphe montrerait qu'il existe toujours deux genres d'antiinvolutions dont les équations peuvent s'écrire en coordonnées non homogènes

$$X = (\bar{x} a_{11} + a_{12})^{-1} \cdot (\bar{x} a_{21} + a_{22})$$

où

$$a_{11} = \varepsilon \bar{a}_{11}; \qquad a_{12} = \varepsilon \bar{a}_{21}; \qquad a_{22} = \varepsilon \bar{a}_{22}$$

si $\varepsilon = +1$, l'antiinvolution est du premier genre; elle est du second genre si $\varepsilon = -1$

On voit aisément qu'une antiinvolution du premier genre n'a pas de points doubles si la forme d'Hermite du premier genre associée est définie, et qu'au contraire une telle transformation en a une infinité qui forment dans l'espace réel à quatre dimensions une variété quadratique à trois dimensions, si la forme d'Hermite du premier genre associée n'est pas une forme définie. L'ensemble de ces points doubles sera désormais nommé par nous *chaîne linéaire,* mais où il ne faut pas attacher au mot chaîne le sens qu'il a en géométrie projective complexe, à savoir celui de lieu de points dont le rapport anharmonique est réel.

Il résulte de même de l'étude que nous avons faite des formes d'Hermite du second genre qu'une antiinvolution du second genre a toujours une infinité de points doubles formant dans l'espace réel à quatre dimensions une variété quadratique à une dimension; l'ensemble des points doubles d'une antiinvolution du second genre sera appelée *chaîne linéaire,* sans attacher à ce mot, comme précédemment, le sens de lieu de points dont le rapport anharmonique est réel. Nous attribuerons un genre à une chaîne linéaire, qui sera celui de l'antiinvolution à laquelle elle appartient, lorsque cela sera nécessaire pour éviter toute ambiguïté.

Revenons maintenant à l'étude des hyperquadriques.

THÉORÈME X. — *Une droite qui n'est pas située sur l'hyperquadrique $\mathcal{Q}$ et qui ne lui est pas tangente, ou bien ne rencontre pas $\mathcal{Q}$, ou bien a en commun avec elle une infinité de points formant une chaîne linéaire du premier genre.*

En effet, le plan polaire d'un point M quelconque de la droite donnée D coupe D en un point M', et d'après le théorème précédent, les points M et M' se correspondent par une antiinvolution du premier genre. Si cette antiinvolution est de seconde espèce (c'est-à-dire n'a pas de points doubles), la droite D ne peut évidemment pas rencontrer l'hyperquadrique; si, au contraire, cette antiinvolution est de première espèce (c'est-à-dire admet une chaîne linéaire de points doubles), la droite D rencontre l'hyperquadrique en chacun de ces points; notre proposition est donc établie.

64. GÉNÉRATRICES RECTILIGNES D'UNE HYPERQUADRIQUE. — **Étant donné un point A d'une hyperquadrique $\mathcal{Q}$,**

passe-t-il par ce point des droites situées tout entières sur l'hyperquadrique?

Pour répondre à cette question nous aurons besoin du théorème suivant, que nous allons établir maintenant :

THÉORÈME XI. — *Si, dans le plan tangent* P *d'un point* A *de l'hyperquadrique* Q, *on considère une droite* D *passant par* A *et sa polaire* D', *ces deux droites se correspondent antiinvolutivement.*

Ici aussi le caractère involutif de la correspondance est évident géométriquement; aussi allons-nous montrer seulement que cette correspondance est antihomographique.

Soient (0, 0, 0, 1) les coordonnées du point donné, et $x_1=0$ l'équation du plan polaire de ce point. L'hyperquadrique a alors pour équation

$$F=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\bar{x}_i a_{ij} x_j+\bar{x}_1 a_{14} x_4+\bar{x}_4 a_{41} x_1=0.$$

La droite D passant par A et située dans le plan polaire de ce point aura pour équation

$$v_2 X_2+v_3 X_3=0;\quad X_1=0.$$

Soit M un point quelconque de D; il aura pour coordonnées

$$(0, 1, -v_3^{-1}\cdot v_2, X_4);\quad \text{posons } v=-v_3^{-1}\cdot v_2;$$

le plan polaire de M sera alors.

$$(\bar{X}_4 a_{41}+a_{21}+\bar{v} a_{31})\xi_1+(a_{22}+\bar{v} a_{32})\xi_2+(a_{23}+\bar{v} a_{33})\xi_3=0.$$

Donc la polaire D' de D aura pour équation

$$(a_{22}+\bar{v} a_{32})\xi_2+(a_{23}+\bar{v} a_{33})\xi_3=0;\quad \xi_1=0,$$

si l'on pose

$$v'_2=a_{22}+\bar{v} a_{32};\quad v'_3=a_{23}+\bar{v} a_{33};\quad v'=-v'^{-1}_3\cdot v'_2.$$

On en déduit

$$v'=-(a_{23}+\bar{v} a_{33})^{-1}\cdot(a_{22}+\bar{v} a_{32}),$$

ce qui établit le théorème.

Arrivons maintenant à la question que nous avons posée au début de ce numéro.

Soit P le plan tangent en A à l'hyperquadrique; soit D une droite de ce plan passant par A. La polaire D′ de D passe aussi par A et l'on a vu au théorème précédent qu'il y avait une correspondance antiinvolutive entre ces droites. Deux cas sont alors possibles: ou bien cette antiinvolution du premier genre est de seconde espèce; alors aucune droite passant par A n'est située sur Q : le plan tangent ne coupe l'hyperquadrique qu'en A; ou bien l'antiinvolution est de première espèce et alors il passe par A une infinité de génératrices rectilignes qui forment une chaîne linéaire du premier genre de droites.

Nous allons montrer que si ce dernier cas est réalisé en un point A de l'hyperquadrique, il est aussi réalisé en tout autre point B. Soit D′ la polaire de AB. Les génératrices issue de A dans le plan tangent P découpent sur D′ une chaîne linéaire du premier genre de points qui n'est autre que la chaîne d'intersection de D′ et de Q. Soit M un point de cette chaîne : la droite MB tangente à Q en B ayant un second point sur Q est une génératrice : il passe donc par B une infinité de droites situées sur Q et formant une chaîne linéaire de droites. D'où le théorème:

Théorème XII. — *Étant donnée une hyperquadrique* Q, *ou bien elle ne contient aucune droite et le plan tangent en un point ne la coupe qu'en ce point, ou bien en chaque point le plan tangent coupe l'hyperquadrique suivant une chaîne linéaire de génératrices.*

65. Application a la classification des hyperquadriques associées aux polarités du premier genre. — Dans le cas d'une hyperquadrique attachée à une polarité du premier genre hyperbolique de première espèce, on trouve facilement que le plant tangent au point (0, 0, 1, 1) est

$$x_3 - x_4 = 0;$$

s'il coupe l'hyperquadrique au point (x_1, x_2, x_3, x_4), on aura

$$\bar{x}_1 x_1 + \bar{x}_2 x_2 = 0,$$

ce qui est impossible si l'on n'a pas $x_1 = x_2 = 0$; par suite l'hyperquadrique ne contient aucune génératrice rectiligne; nous la nommerons *hyperellipsoïde.*

Prenons au contraire l'hyperquadrique associée à une polarité du premier genre hyperbolique de seconde espèce et considérons le point (0, 1, 0, 1). Le plan tangent en ce point est

$$x_2 - x_4 = 0;$$

l'équation d'intersection avec l'hyperquadrique est alors

$$x_1 x_1 - \bar{x}_3 x_3 = 0;$$

on obtient une infinité de droites d'intersection en prenant $x_3 = a\,x_1$, a étant un quaternion de norme égale à 1. Nous avons donc cette fois une hyperquadrique réglée que nous nommerons *hyperhyperboloïde.*

66. Polarité du second genre. — Nous avons vu qu'une telle polarité était définie par une matrice (a_{ij}) dont les éléments vérifiaient la relation

$$a_{ij} = -\bar{a}_{ji}$$

de sorte que a_{ii} est un vecteur.

Le lieu des points qui sont contenus dans leur plan polaire est toujours donné par

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{F} = \sum_{ij} \bar{x}_i a_{ij} x_j = 0.$$

Nous dirons que cette équation représente une *hyperquadrique du second genre*, puisque la forme d'Hermite qui la définit est une forme du second genre, et aussi par opposition aux hyperquadriques dont nous nous sommes occupé aux numéros précédents et qui seront dites du premier genre quand cela sera nécessaire pour éviter toute ambiguïté. Cette hyperquadrique est représentée dans l'espace réel à 12 dimensions par une variété quadratique à 9 dimensions.

Le lemme fondamental de la page 123 reste valable avec sa démonstration pour les hyperquadriques du second genre; la construction du tétraèdre autopolaire subsistera sans modification, et par rapport à ce tétraèdre l'équation de l'hyperquadrique attachée à la polarité du second genre sera

$$\sum_i \bar{x}_i a_{ii} x_i = 0,$$

a_{ii} étant un vecteur; par un choix convenable du point unité on peut toujours supposer que ces a_{ii} sont un même vecteur arbitraire, e_1, par exemple. La connaissance de F, donc de l'hyperquadrique, entraîne celle de la polarité; on peut donc dire que toutes les polarités du second genre ont la même forme réduite.

On voit aisément que les théorèmes VII et VIII demeurent valables pour les hyperquadriques du second genre ainsi que leurs démonstrations. Le théorème IX est toujours vrai; seulement, la correspondance antiinvolutive est du second genre et par conséquent admet une chaîne linéaire du second genre. On déduit de là le théorème :

Théorème XIII. — *Toute droite* D *qui n'est pas située sur une hyperquadrique* Q *du second genre et qui ne lui est pas tangente rencontre cette hyperquadrique en une infinité de points qui forment une chaîne linéaire du second genre.*

Le théorème XI subsiste lui aussi ainsi que sa démonstration; seulement, la correspondance antiinvolutive est encore du second genre. D'où le théorème :

Théorème XIV. — *Par chaque point* A *d'une hyperquadrique* Q *du second genre passent une infinité de génératrices rectilignes qui forment une chaîne linéaire du second genre de droites.*

Les démonstrations de ces propositions étant les mêmes que dans le cas précédent, nous n'avons pas cru devoir les répéter.

TABLE DES MATIÈRES

ERRATA

Page.	Ligne à partir du haut.	Au lieu de :	Lire :
12	13	emlpoierons	emploierons
14	12	doite	droite
14	15	$Y^i = Y'^i + e_3 Y''^i$	$Y_i = Y'_i + e_3 Y''_i$
14	19	$Y'^i = \sum_{j=1}^{n} a'^i_j X'^j - \overline{a''^i_j} X''^j$	$Y'_i = \sum_{j=1}^{n} a'^i_j X'^j - \overline{a''^i_j} X''^j$
14	19	$Y''^i = \sum_{j=1}^{n} h''^i_j X'^j + \overline{a'^i_j} X''^j$	$Y''_i = \sum_{j=1}^{n} a''^i_j X'^j + \overline{a'^i_j} X''^j$
15	27	$X = \overline{a} Y \neq N(a)$	$X = \overline{a} Y : N(a)$
16	18	$\sum_{hk} \overline{a^h_i} A^i_{hk} a^i_k$	$\sum_{hk} \overline{a^h_i} A^i_{hk} a^k_i$
20	13	$\sum_{j\neq 1}^{2n}$	$\sum_{j=1}^{2n}$
20	25	Δ	∇
24	26	$\overline{A} . H = \overline{m} H . A$	$A . \overline{H} = \overline{m} H . A$
26	23	colnne	colonne
51	22	$v' = v \sqrt{\dfrac{v\overline{v}}{a\overline{a}}}$	$v' = v \sqrt{\dfrac{a\overline{a}}{v\overline{v}}}$
51	29	norme de v	norme de m
51	30	$N(v)$	$N(m)$
56	24	$x_h = \sum_{j=1}^{n} a^j_h y_j$	$x_h = \sum_{j=1}^{n} a^h_j y^j$
56	26	$F' = \sum_j \sum_m \overline{y_j} B^i_{jm} y_j$	$F' = \sum_j \sum_m \overline{y^j} B^i_{jm} y^m$
56	28	$B^i_{jm} = \sum_h \sum_k \overline{a^i_h} A^i_{hk} a^m_k$	$B^i_{jm} = \sum_h \sum_k \overline{a^h_j} A^i_{hk} a^k_m$.

Page.	Ligne à partir du haut.	Au lieu de :	Lire :
—	—	—	—
57	6	$\overline{y_i} \nabla y_i$	$\overline{y^i} \nabla y^i$
63	4	a_j^i	$\vert a_j^i \vert$
74	12	$u_i' = \sum_j x^j b_j^i$	$u_i' = \sum_j \overline{x^j} b_j^i$
87	26	$m_i + 2n_i = \mathrm{N}$	$\sum_i (m_i + 2n_i) = \mathrm{N}$
92	19	ajouter au début de la ligne	(4)
92	25	id. id.	(5)
92	27	id. id.	(6)
93	13	k en indice	h
102	14	$e_3(b_{1j}''z + (x - \bar{x})\, y_{j1}'')$	$e_3(b_{1j}''z + (\bar{x} - x)\, y_{j1}'')$.
103	10	de point	des points
105	11	$y_{1i} = e_3[b_{2i}''(x - \bar{x})^{-2} + b_{1i}''(x - \bar{x})^{-}]^1$	$y_{1i} = e_3[b_{2i}''(x - \bar{x})^{-2} + b_{1i}''(x - \bar{x})^{-1}]$.