THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

ANTONIO MONTEIRO

Sur l'additivité des noyaux de Fredholm

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1936

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1936__181__1_0>

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Thèse numérisée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

...SITÉ DE PARI
FACULTÉ DES SCIENCE
CABINET DU DÉPARTEME
S SCIENCES MATHÉMATIQU

Série A, n° 1643
N° d'ordre:
2509

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

M. ANTONIO MONTEIRO

1re Thèse. — Sur l'additivité des noyaux de Fredholm.

2e Thèse. — Propositions données par la Faculté.

Soutenues le Juin 1936 devant la Commission d'examen.

MM. A. Denjoy *Président.*

M. Fréchet
R. Garnier } *Examinateurs.*

INSTITUT H. POINCARÉ
11, Rue Pierre-Curie

PÔRTO
Imprensa Portuguesa
108, Rua Formosa, 116

1936

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen honoraire . . . M. MOLLIARD.

Doyen. . . . . C. MAURAIN, *Professeur*, Physique du Globe.

Professeurs honoraires

H. LE CHATELIER.	Léon BRILLOUIN.	AUGER.
H. LEBESGUE.	GOURSAT.	BLAISE.
A. FERNBACH.	WALLERANT.	DANGEARD.
A. LEDUC.	GUILLET.	JANET.
Émile PICARD.	PÉCHARD.	LESPIEAU.
Rémy PERRIER.	FREUNDLER.	MARCHIS.
		VESSIOT.

PROFESSEURS

G. BERTRAND . . .	T	Chimie biologique.
M. GAULLERY . . .	T	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
G. URBAIN	T	Chimie générale.
Émile BOREL . . .	T	Calcul des Probabilités et Physique-Mathématique.
Jean PERRIN . . .	T	Chimie physique.
H. ABRAHAM . . .	T	Physique.
E. CARTAN	T	Géométrie supérieure.
M. MOLLIARD . . .	T	Physiologie végétale.
L. LAPICQUE . . .	T	Physiologie générale.
A. COTTON	T	Recherches physiques.
J. DRACH	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
Charles FABRY . .	T	Enseignement de Physique.
Charles PÉREZ . .	T	Zoologie.
Léon BERTRAND. .	T	Géologie structural et géologie appliquée.
P. PORTIER. . . .	T	Physiologie comparée.
E. RABAUD. . . .	T	Biologie expérimentale.
M. GUICHARD. . .		Chimie minérale.
Paul MONTEL . . .	T	Théorie des fonctions et Théorie des transformations.
P. WINTREBERT . .	T	Anatomie et histologie comparées.
L. BLARINGHEM. .	T	Botanique.
O. DUBOSCQ. . . .	T	Biologie maritime.
G. JULIA.	T	Mécanique analytique et Mécanique céleste.
C. MAUGUIN. . . .	T	Minéralogie.
A. MICHEL-LÉVY .	T	Pétrographie.
H. BÉNARD. . . .	T	Mécanique expérimentale des fluides
A. DENJOY	T	Application de l'analyse à la Géométrie.
L. LUTAUD	T	Géographie physique et géologie dynamique.
Eugène BLOCH . .	T	Physique théorique et physique céleste.
G. BRUHAT. . . .		Physique.
E. DARMOIS. . . .		Enseignement de Physique.
A. DEBIERNE . . .	T	Physique Générale et Radioactivité.
A. DUFOUR	T	Physique (P. C. B.).
L. DUNOYER . . .		Optique appliquée.
A. GUILLIERMOND .	T	Botanique
M. JAVILLIER. . .		Chimie biologique.
L. JOLEAUD . . .		Paléontologie.
ROBERT-LÉVY. . .		Zoologie.
F. PICARD		Zoologie (Évolution des êtres organisés).
Henri VILLAT. . .	T	Mécanique des fluides et applications.
Ch. JACOB	T	Géologie.
P. PASCAL	T	Chimie minerale.
M. FRÉCHET . . .	T	Calcul differentiel et Calcul intégral.
E. ESCLANGON . .	T	Astronomie.
Mme RAMART-LUCAS	T	Chimie organique.
H. BÉGHIN	T	Mécanique physique et expérimentale.
FOCH		Mécanique expérimentale des fluides.
PAUTHENIER . . .		Physique (P. C. B.).
De BROGLIE . . .	T	Théories physiques.
CHRÉTIEN		Optique appliquée.
P. JOB		Chimie générale.
LABROUSTE. . . .		Physique du Globe.
PRENANT.		Zoologie.
VILLEY.		Mécanique physique et expérimentale.
BOHN		Zoologie (P. C. B.).
COMBES		Botanique (P. C. B.).
GARNIER.	T	Mathématiques générales.
PÉRÈS		Mécanique théorique des fluides.
HACKSPILL. . . .		Chimie (P. C. B.).
LAUGIER.		Physiologie générale.
TOUSSAINT		Technique Aéronautique.
M. CURIE.		Physique (P. C. B.).
G. RIBAUD	T	Hautes températures.
CHAZY.	T	Mécanique rationnelle.
GAULT		Chimie (P. C. B.).
CROZE		Recherches. Physiques.
DUPONT	T	Théories chimiques.
LANQUINE		Géologie.
VALIRON.		Mathématiques générales.
BARRABÉ		Géologie structural et géologie appliquée.
MILLOT.		Zoologie (P. C. B.).
F. PERRIN		Théories physique.
VAVON.		Chimie organique.
G. DARMOIS. . . .		Calcul des Probabilités et Physique-Mathématique.

Secrétaire . . . . A. PACAUD.

Secrétaire honoraire . . . . . D. TOMBECK.

À

M. MAURICE FRÉCHET

PROFESSEUR À LA SORBONNE

Hommage de respectueuse affection.

À MA FEMME

SUR L'ADDITIVITÉ DES NOYAUX DE FREDHOLM

INTRODUCTION

Le mémoire fondamental de FREDHOLM [I] (1) sur les équations intégrales, qui portent aujourd'hui son nom, a été suivi immédiatement d'un très grand nombre de travaux sur la même question. Si l'on cherche d'un côte à démontrer les théorèmes de FREDHOLM pour des classes de noyaux de plus en plus générales, on cherche aussi à approfondir l'étude des noyaux dans les cas simples qui ont été considérés au début.

C'est dans cette derniére direction qu'ont été orientés les premiers travaux de MM. PLEMELJ, HEYWOOD, GOURSAT et LALESCO.

MM. GOURSAT et HEYWOOD ont eu le grand mérite de montrer l'importance que joue la notion *noyaux orthogonaux* dans la théorie des équations de FREDHOLM. Lorsqu'un noyau $K(M,P)$ peut se décomposer, par um moyen quelconque, dans la somme $K(M,P) = H(M,P) + L(M,P)$ de deux autres noyaux $H(M,P)$ et $L(M,P)$ orthogonaux entre eux, MM. GOURSAT et HEYWOOD ont démontré que certaines propriétés de $K(M,P)$, considéré comme noyau de FREDHOLM, peuvent se déduire d'une façon très simple des propriétés correspondantes de H et de L. Ils ont ainsi obtenu un ensemble de théorèmes très importants, qui rendent de très grands services dans l'étude de l'équation de FREDHOLM.

Dans ce travail (2), nous cherchons, précisément, à appro-

---

(1) Voir la liste bibliographique à la fin de ce mémoire.

(2) Une partie de ce mémoire a été resumé en deux Notes présentées à l'Académie des Sciences de Paris (C. R. séances du 14 Mai 1934 et du 24 Juin 1935).

fondir l'étude des décompositions de la forme $K(M,P) = H(M,P) + L(M,P)$ en cherchant des relations simples entre H et L, (autres que l'orthogonalité) pour lesquelles se maintiennent les résultats les plus importants, trouvés par MM. Goursat et Heywood.

Dans le chapître I, nous généralisons la notion de noyaux orthogonaux, en introduisant en particulier la notion de *noyaux hypoorthogonaux* (n. 26), pour lesquels nous démontrons un certain nombre de propriétés qui nous montrent l'importance de cette notion dans le théorie des équations homogènes de Fredholm.

Dans le chapître II, nous étudions un cas particulier de la notion d'hypoorthogonalité en introduisant la *notion d'additivité de deux noyaux H et L*. Nous disons que deux noyaux H et L sont additifs si la résolvante de $K = H + L$ est égale à la somme des résolvantes de H et L et nous avons déterminé les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi, à savoir

$$\text{(I)} \qquad \int_V H(M,Q)\,L(QP)\,dQ + \int_V L(M,Q)\,H(Q,P)\,dQ = o$$

$$\text{(II)} \qquad \iint_V H(M,Q)\,L(Q,R)\,H(R,P)\,dQ\,dR + \iint_V L(M,Q)\,H(Q,R)\,L(R,P)\,dQ\,dR = o$$

Cela nous montre immédiatement que si H et L sont orthogonaux, ils sont aussi additifs, mais la notion d'additivité est plus générale que celle d'orthogonalité.

Dans le chapître III, nous étudions quelques propriétés formelles des noyaux additifs. Nous avons trouvé de propriétés appartenant aux noyaux orthogonaux, qui n'appartiennent par aux noyaux additifs, mais ces propriétés ne semblent pas très importantes; au contraire, toutes les propriétés des noyaux orthogonaux, qui jouent un rôle important dans la théorie des équations de Fredholm, se maintiennent pour les noyaux additifs; en particulier si H et L sont additifs le déterminant de Fredholm de $K = H + L$, est égal au produit des déterminants de Fredholm de H et de L.

Dans le chapître IV nous indiquons quelques applications des noyaux additifs á la théorie des équations intégrales.

La notion d'additivité nous permet de mieux comprendre l'origine des propriétés les plus importantes des noyaux orthogonaux et d'expliquer aussi le rôle que ceux-ci jouent dans la théorie des équations intégrales.

D'un autre côté, dans la théorie des équations non homogènes, la notion de noyaux additifs nous apparaît comme une condition nécessaire et suffisante dans la résolution d'un certain problème que nous ne précisons pas ici (Théorème II — n° 52).

Dans le chapître V, nous déterminons la forme du noyau $L(M, P)$ le plus général additif à un noyau de rang fini, qu'on peut toujours supposer écrit sous la forme biorthonormale:

$$H(M, P) = \sum_{i, j = 1}^{n} a_{i, j} X_i(M) \, Y_j(P)$$

où les X_i et les Y_j forment un système de fonctions biorthonormé. Nous démontrons que $L(M, P)$ peut s'écrire sous la forme $L(MP) = L_0(M, P) + \mathfrak{L}(M, P)$, où $\mathfrak{L}$ est le noyau le plus général orthogonal à H et L_0 le noyau le plus général de la forme:

$$L_0(M, P) = \sum_{i, j = 1}^{n} b_{i, j} X_i(M) \, Y_j(P)$$

qui est additif à H. Nous introduisons la notion de matrices *additives* et nous démontrons que: pour que H et L_0 soient additifs, il faut et il suffit que les deux matrices $A = \| a_{i,j} \|$ et $B = \| b_{i,j} \|$ soient additives.

Dans le chapître VI, nous déterminons, dans certains cas particuliers, utiles par la suite, la matrice B la plus générale additive à A.

Dans le chapître VII, nous montrons d'abord que la notion d'additivité est plus générale que celle d'orthogonalité et ensuite qu'elle nous permet de généraliser et préciser la notion de noyau principal introduite par MM. Goursat et Heywood.

Dans le chapître VIII, nous introduisons la notion de *noyaux réguliers,* pour lesquels nous donnons une extension d'un théorème connu dans le cas des noyaux Hermitiens, sur la convergence en double moyenne quadratique de la série des noyaux principaux. Les noyaux Hermitiques et normaux sont des cas particuliers des noyaux réguliers.

A M. MAURICE FRÉCHET, qui nous a non seulement guidé dans nos premières recherches, mais aussi soutenu et encouragé constamment pendant la rédaction de ce travail, nous adressons ici l'expression de notre profonde gratitude. Nous garderons de ses instructives conversations, de ses critiques et de sa courtoisie, un souvenir réconfortant.

Qu'il nous soit aussi permis de présenter nos remerciements à M. DENJOY pour ses précieux conseils et ses encouragements.

Nous remercions également la *Junta de Educação Nacional,* à qui nous devons d'avoir pu entreprendre et terminer ce travail sans préocupations matérielles, pendant notre long séjour à Paris.

CHAPITRE I

Préliminaires

§ 1 — Définitions

1. Une équation intégrale de FREDHOLM est une équation de la forme:

$$(F) \qquad X(M) = f(M) + \lambda \int_V K(M, Q)\, X(Q)\, d\, Q$$

où: $f\ (M)$ et $K\ (M,\ P)$ sont des fonctions données sur le domaine V, supposé mesurable, et $X\ (M)$ la fonction à déterminer; λ est un paramètre auxiliaire.

On considère avec l'équation (F) *l'équation associée:*

$$(\bar{F}) \qquad Y(P) = f(P) + \lambda \int_V Y(Q)\, K(Q, P)\, d\, Q.$$

Si $f\ (M) = O$, sur V, les équations correspondantes

$$(H) \qquad X(M) = \lambda \int_V K(M, Q)\, X(Q)\, d\, Q$$

$$(\bar{H}) \qquad Y(P) = \lambda \int_V Y(Q)\, K(Q, P)\, d\, Q$$

seront appelées des *équations homogènes.*

La théorie des équations intégrales de FREDHOLM a comme objectif: la détermination des solutions des équations (F), $(\bar{F})$, (H) et $(\bar{H})$, l'étude de leurs propriètés et des relations qui existent entre ces solutions.

Les hypothèses faites sur K (M, P) jouent un rôle très important dans cette théorie. Il faut remarquer que ce ne sont pas les seules hypothèses importantes; par exemple la nature des solutions admises y joue aussi un rôle très important. Voir à ce sujet un travail de Urysohn [1] (1).

S'il parait qu'il est essentiel de faire des hypothèses très restrictives sur la nature des données et des solutions admises pour établir l'existence et déterminer les solutions des équations (F), $(\bar{F})$, (H) et $(\bar{H})$ il n'est pas essentiel de faire ces hypothèses pour établir *des* propriètés des solutions et des relations entre ces solutions, comme nous le verrons.

Cela tient au caractère linéaire des équations en question.

2. Nous dirons que c est une *constante caractéristique* pour le noyau K (M, P) si l'une au moins des équations

$$(1) \qquad X(M) = c\int_V K(M, Q)\, X(Q)\, d\, Q$$

$$(2) \qquad Y(P) = c\int_V Y(Q)\, K(Q, P)\, d\, Q$$

a une *solution effective*, c'est-à-dire une solution non identiquement nulle sur V. Il est évident qu'une solution effective ne peut pas être nulle presque partout sur V.

Nous ne savons pas si l'existence d'une solution effective de l'équation (1) entraîne *toujours* l'existence d'au moins une solution effective de l'équation (2). Nous le savons seulement dans un certain nombre de cas particuliers, qui sont d'ailleurs très importants dans les applications.

Nous allons fixer la terminologie de façon à pouvoir pistinguer le cas où l'équation (1) a des solutions du cas où la même propriété a lieu pour l'équation (2). Nous dirons que *c est une constante caractéristique à droite de* K (M, P) si l'équation (1) a au moins une solution effective; les solutions de (1) seront alors appelées *les solutions à droite de* K (M, P) *relatives à c*.

---

(1) Voir la liste bibliographique à la fin.

De même nous dirons que c *est une constante caractéristique à gauche de* K (M, P) si l'équation (2) a au moins une solution effective; les solutions de (2) seront alors appelées les *solutions à gauche de* K (M, P) *relatives à c.*

D'après les définitions qui précèdent, une constante caractéristique de K (M, P) est une constante caractéristique: soit à droite, soit à gauche, soit à droite et à gauche de K (M, P).

3. Nous aurons à supposer dans la suite que c est une constante caractéristique de K (M, P). Nous ne nous occuperons pas, pour le moment, de savoir dans quels cas on peut affirmer que toute constante caractéristique de K (M, P) est une constante caractéristique à droite et à gauche de K (M, P); cela n'a aucune importance, du reste, pour ce que nous allons dire dans ce chapitre, mais on peut au moins citer le cas évident où le noyau est symétrique et plus généralement les cas considérés dans la théorie classique de FREDHOLM.

Quand nous supposerons que c est une constante caractéristique de K (M, P), nous ne nous préoccuperons pas de la méthode que nous permettrait de déterminer soit cette constante soit une solution à droite ou à gauche correspondante.

Nous ne savons pas s'il peut arriver qu'une constante caractéristique à droite de K (M, P) ne soit pas une constante caractéristique à gauche de K (M, P); mais, même s'il en était ainsi, tout ce que nous allons dire dans ce chapitre est encore valable.

4. Nous n'avons fait pour le moment aucune hypothèse sur le noyau K (M, P), défini sur V, ni sur la nature des solutions admises, nous avons seulement dit qu'on ne considère comme solutions effectives de (1) ou de (2) que les fonctions non identiquement nulles sur V.

Les fonctions X (M) et Y (P) qui figurent dans (1) et (2) pourront être par exemple des fonctions qui ne soient pas sommables sur V.

Ceci est très important parce qu'en général on a étudié seulement les solutions de (1) et de (2) qui sont soit sommables soit de carré sommable sur V.

Quand nous supposerons que c est, par exemple, une constante caractéristique à droite de K (M, P), nous supposons en effet que K (M, P), V et c sont tels qu'il existe au moins une fonction $X(M) = X_1(M)$, qui n'est pas presque partout nulle sur V, telle que:

$$X_1(M) = c\int_V K(M, Q) X_1(Q)\, d\,Q.$$

Ceci suppose en particulier:

1.° — que V n'est pas de mesure nulle.

2.° — que pour au moins un ensemble de mesure positive de positions de M sur V, $K(M, P)$ n'est pas presque partout nul quand P varie sur V.

3.° — que le produit $K(M, Q)\, X_1(Q)$ est sommable sur V, quel que soit M sur V. Dans ces conditions une solution effective de (1) sera une solution de (1) qui n'est pas nulle partout sur V.

Dans certaines questions il y a lieu de considèrer comme équivalentes des fonctions $Z(M)$ et $T(M)$ qui ne sont égales que presque partout (sur V), ce qu'on représente par la notation $Z(M) \sim T(M)$. Dans ce cas il y aura lieu de considèrer au lieu des équations (1) et (2) les équations:

$$X(M) \sim C\int_V K(M, Q)\, X(Q)\, d\, Q \tag{1'}$$

$$Y(P) \sim C\int_V Y(Q)\, K(Q, P)\, d\, Q. \tag{2'}$$

Ces équations exprimant que les équations (1) et (2) sont vérifiées sauf peut-être pour un ensemble de mesure nulle de positions de M et de P. Alors la condition 3.° — précédente doit être remplacée par la condition suivante:

3.° — le produit $K(M, Q)\, X_1(Q)$ est sommable sur V, sauf peut-être pour un ensemble de mesure nulle de positions de M sur V.

Les solutions de (1′) et (2′) ne sont déterminées que presque partout sur V.

5. Nous dirons qu'une constante caractéristique c de $K(M, P)$ est une *constante fondamentale* si au moins une des solutions des deux équations (1) et (2) est une fonction sommable sur V; il y aura même lieu de les supposer de carré sommable sur V dans certains cas que nous spécifierons.

Il peut arriver que c soit une constante caractéristique de $K(M, P)$ sans être une constante fondamentale.

Feu Urysohn [1] a donné un exemple d'un noyau de

VOLTERRA continu pour lequel $c=1$ est une constante caractéristique, à savoir:

$$K(x,y)=\begin{cases} y\,e^{\frac{1}{x^2}-1} & si \quad o\leq y\leq x\,e^{1-\frac{1}{x^2}} \\ x & si \quad x\,e^{1-\frac{1}{x^2}}\leq y\leq x\leq 1 \end{cases}$$

Pour un tel noyau l'équation:

$$\varphi(x)=\int_o^x K(x,s)\,\varphi(s)\,ds$$

a la solution non sommable

$$\varphi(x)=\begin{cases} o & si \quad x=o \\ \dfrac{1}{x} & si \quad o<x\leq 1 \end{cases}$$

or, d'après la théorie classique, un noyau de VOLTERRA continu n'a pas de constante fondamentale c'est-à-dire: l'équation homogène correspondante n'a aucune solution qui *soit sommable sur* V (quel que soit c).

P. URYSOHN a donc donné un exemple d'un noyau qui n'a aucune constante fondamentale mais qui a au moins une constante caractéristique.

Dans ce premier chapitre nous ne ferons aucune hypothèse sur la nature des solutions effectives admises sauf cependant qu'elles donnent un sens aux équations (1) et (2) [ou (1′) et (2′)], ce qui limite le champ de fonctions où l'on opère; mais il est clair que si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ donnent un sens aux équations (1) ou (1′), il en sera de même de toute combinaison linéaire $\alpha_1 X_1+\alpha_2 X_2+\ldots+\alpha_n X_n$ à coefficients constants.

Les résultats que nous allons établir seront valables dans tous les cas, en particulier si l'on fait des restrictions sur la nature des solutions admises. Il suffit de remplacer dans les énoncés le mot «solution» auquel nous n'avons imposé aucune restriction par une expression qu'indique la nature des solutions (comme par exemple: «solution sommable sur V», «solution bornée sur V», «solution de carré sommable sur V», etc...) pour avoir les énoncés correspondants aux cas particuliers.

On pourra s'assurer que nos raisonnements s'appliquent aux équations (1′) et (2′) comme aux équations (1) et (2).

6. **Lemme I** — *Toute combinaison linéaire à coefficients constants d'un nombre fini de solutions à droite* (à gauche) *de* K (M, P) *relatives à* c, *est encore une solution à droite* (à gauche) *de* K (M, P) *relative à* c; c'est-à-dire si, $X_1(M)$, $X_2(M)$, ..., $X_n(M)$ sont des solutions de (1) ou de (1′), alors:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i(M)$$

(où les α_i sont indépendants de M) est encore une solution de (1) ou de (1′). La démonstration est immédiate.

Les n solutions X_1, X_2, ..., X_n, sont dites *linéairement indépendantes* s'il n'existe aucune suite de coefficients α_1, α_2, ..., α_n non tous nuls, tels que $\Sigma\, \alpha_i\, X_i$ (M) soit nulle partout sur V. Dans le cas où les X_i sont des solutions de (1), on a:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i(M) = c\int_V K(M, Q)\Big[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i(Q)\Big] dQ.$$

Donc si $\Sigma\, \alpha_i X_i$ est nulle presque partout sur V, on peut aussi affirmer que $\Sigma\, \alpha_i X_i = o$ sur V et à fortiori réciproquement. On peut donc dans la définition précédente substituer à «partout», «presque partout» ce qui sera utile pour le cas des équations (1′) et (2′).

7. **Lemme II.** — *Si l'équation* (F) [*ou* ($\overline{\mathrm{F}}$)] *a pour* $\lambda = \mathrm{c}$ *deux solutions linéairement distinctes, l'équation homogène correspondante* (1) [*ou* (2)] *a au moins une solution effective.* La démonstration est immédiate.

Lemme III. — *La solution la plus générale de* (F) [*ou de* ($\overline{\mathrm{F}}$)] *s'obtient en ajoutant à une solution particulière de* (F) [*ou de* ($\overline{\mathrm{F}}$)] *la solution la plus générale de l'équation homogène correspondante;* donc si l'équation (1) ou (2) n'a aucune solution effective, l'équation (F) [ou $(\overline{F})$] où $\lambda = c$, si elle a une solution cette solution est unique.

8. **Notations.** — Pour simplifier l'écriture nous allons introduire des notations et des conventions que nous utiliserons très souvent dans la suite.

Les noyaux de Fredholm seront le plus souvent représentés par les lettres H, K et L.

Ainsi $H = H\,(M,\ P)$. Les fonctions d'une variable, M ou P, seront en général représentés par les dernières lettres de l'alphabet latin X, Y, Z, W. Etant donnés deux noyaux de Fredholm H et L l'opération

$$\int_V H(M, Q)\, L(Q, P)\, d\,Q$$

s'appelle d'après M. Volterra [1 — pag. 179] *composition de deux ème espèce* des deux fonctions H et L. Dans la suite nous l'appellerons *produit des deux noyaux* H *et* L et nous la représenterons par la notation symbolique:

$$H\,L = \int_V H(M, Q)\, L(Q, P)\, d\,Q.$$

Cette opération est associative, c'est-à-dire

$$(H(K\,L)) = ((H\,K)\,L)$$

où les parenthèses ont le même sens que dans l'Algèbre élémentaire.

Nous employerons aussi la notation $[H,\ L]$ pour désigner le produit symbolique $H\ L$.

Nous poserons

$H^2 = H\ H$, $H^3 = H\ H\ H$ etc.... donc, H^2, H^3,..., H^n sont les itérés successifs du noyau $H\ (M,\ P)$, et nous supposerons que tous ces itérés existent quel que soit n.

Nous utiliserons eucore les notations symboliques:

$$[K, X] = \int_V K(M, Q)\, X(Q)\, d\,Q$$

$$[Y, K] = \int_V Y(Q)\, K(Q, P)\, d\,Q.$$

§ 2 — Décomposition simple d'un noyau en une somme de deux autres

9. Supposons que l'on ait décomposé le noyau $K(M, P)$, par un moyen quelconque, en une somme de deux autres noyaux $H\ (M, P)$ et $L\ (M, P)$ définis aussi sur V:

$$(S) \qquad \boxed{K(M,P) = H(M,P) + L(M,P)}$$

une telle décomposition pourra nous être utile dans l'étude du noyau $K\ (M, P)$, si l'on peut déduire d'une façon simple les propriètés de $K\ (M, P)$ à partir des propriètés de H et de L et s'il arrive encore qu'un de ces deux noyaux soit plus simple à ètudier que le noyau donné K.

Ce que nous venons de dire a un sens très vague qu'il faut essayer de préciser.

Nous voulons d'abord qu'on puisse « déduire d'une façon simple les propriètés de K à partir de celles de H et de L. »

Il faut d'abord savoir quelles sont ces propriètés. Le choix d'une certaine propriètè ne s'impose pas à prìori; mais comme nous nous occupons de l'étude des constantes caractéristiques nous pouvons, pour commencer, poser le problème de la façon suivante: « chercher à caractériser les décompositions d'un noyau K, dans la somme de deux autres $K = H + L$, pour lesquelles on puisse affirmer que:

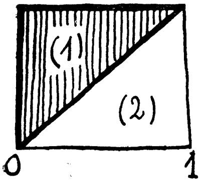
1.° — *toute constante caractéristique de* H *ou de* L *est une constante caractéristique de* K.

2.° — *toute constante caractéristique de* K *est une constante caractéristique de l'un au moins des noyaux* H *et* L. »

Dans ces conditions la recherche des constantes caractéristiques de K peut être remplacée par la recherche des constantes caractéristiques de H et de L.

Pour que les deux conditions précédentes soient vérifiées, la décomposition (S) ne peut pas être quelconque; en effet:

10. Nous allons donner un exemple d'une décomposition de la forme (S) où la conditon 2.° — indiquée précédement n'est pas verifiée. Considérons un noyau $K\ (M, P)$ de rang fini, défini et continu par rapport à l'ensemble des



deux variables (M, P) dans le carré (0, 1) et supposons que ce noyau ait au moins une constante caractéristique.

Divisons le carré (0, 1) en deux parties complémentaires (1) et (2) et posons

$$H(M,P)=\begin{cases} K(M,P) & \text{sur } (1) \\ o & \text{sur } (2) \end{cases}$$

$$L(M,P)=\begin{cases} o & \text{sur } (1) \\ K(M,P) & \text{sur } (2) \end{cases}$$

Alors, nous aurons:

$$K(M,P)=H(M,P)+L(M,P).$$

Les noyaux H et L sont des noyaux de Volterra; chacun d'eux étant borné, leurs résolvantes sont des fonctions holomorphes dans tout le plan; donc, d'après la théorie classique, H et L n'ont pas de constantes caractéristiques.

Comme par hypothèse $K(M,P)$ a au moins uue constante caractéristique, la deuxième condition du N° 9 n'est pas vérifiée.

Nous voyons en même temps que la somme de deux noyaux, dont chacun n'a aucune constante caractéristique, peut avoir une ou plusieurs constantes caractéristiques.

11. Remarquons que les conditions 1° et 2° du n° 9 ne sont pas encore très précises. En effet: la condition 2°, par exemple, exige que toute constante caractéristique de $K(M,P)$ soit une constante caractéristique de l'un au moins des noyaux H et L, mais cela n'implique pas logiquement qu'une constante caractéristique *à droite* de K soit une constante caractéristique *à droite* de l'un au moins des noyaux H et L. Supposons qu'il en soit ainsi, pourra-t-on obtenir aussi d'une façon simple les solutions caractéristiques à droite et à gauche de K à partir des solutions à droite et à gauche de H et de L? Ici il faut encore préciser le langage. Nous poserons le problème de la façon suivante:

« *Chercher à caractériser des décompositions d'un noyau* $\mathrm{K}(\mathrm{M},\mathrm{P})$ *en une somme de deux autres* $\mathrm{K}=\mathrm{H}+L$, *pour* *lesquelles on puisse affirmer que les conditions suivantes sont vérifiées :*

Conditions A

A′) *Toute constante caractéristique* c *à droite de* H *est une constante caractéristique à droite de* K *et toute solution à droite de* H *relative à* c *est une solution à droite de* K *relative à* c.

A″) *Toute constante caractéristique* c *à gauche de* H *est une constante caractéristique à gauche de* K *et toute solution à gauche de* H *relative à* c *est une solution à gauche de* K *relative à* c.

Conditions B

B′) *Toute constante caractéristique* c *à droite de* L *est une constante caractéristique à droite de* K *et toute solution à droite de* L *relative à* c *est une solution à droite de* K *relative à* c.

B″) *Toute constante caractéristique* c *à gauche de* L *est une constante caractéristique à gauche de* K *et toute solution à gauche de* L *relative à* c *est une solution à gauche de* K *relative à* c.

Conditions C

C′) *Toute constante caractéristique* c *à droite de* K *est une constante caractéristique à droite de l'un au moins des noyaux* H *et* L *et toute solution à droite de* K *relative à* c *est une combinaison linéaire à coefficients constants des solutions à droite de* H *et de* L *relatives à* c.

C″) *Toute constante caractéristique* c *à gauche de* K *est une constante caractéristique à gauche de l'un au moins des noyaux* H *et* L *et toute solution à gauche de* K *relative à* c *est une combinaison linéaire à coefficients constants de solutions à gauche de* H *et de* L *relatives à* c.

Cela va nous conduire d'une façon très naturelle à deux généralisations de la notion de noyaux orthogonaux, à savoir: à la notion de noyaux en involution de première et de seconde espèce et à celle de noyaux hypoorthogonaux.

§ 3 — Généralisations de la notion de noyaux orthogonaux

12. Considérons donc un noyau, défini sur V, de la forme

$$(S) \qquad \boxed{K(M,P) = H(M,P) + L(M,P)}$$

et les équations homogènes correspondantes:

$$(K) \qquad X(M) = c\int_V K(M,Q)\,X(Q)\,dQ$$

$$(\bar{K}) \qquad Y(P) = c\int_V Y(Q)\,K(Q,P)\,dQ.$$

Écrivons d'autre part les équations homogènes relatives aux noyaux $H(M, P)$ et $L(M, P)$:

$$(H) \qquad X = c[H,X] \quad , \quad (L) \quad X = c[L,X]$$

$$(\bar{H}) \qquad Y = c[Y,H] \quad , \quad (\bar{L}) \quad Y = c[Y,L]$$

Soit c une constante caractéristique à droite de $H(M, P)$; alors l'équation (H) a au moins une solution effective $X_1(M)$

$$(3) \qquad X_1(M) = c\int_V H(M,Q)\,X_1(Q)\,dQ.$$

Cherchons les conditions nécessaires et suffisantes pour que $X_1(M)$ soit aussi une solution effective de l'équation (K), c'est-à-dire pour que $X_1(M)$ soit aussi une solution à droite de $K(M, P)$ relative à la même constante c.

Pour cela il faut et il suffit que l'on ait:

$$X_1(M) = c\int_V K(M,Q)\,X_1(Q)\,dQ = c\int_V H(M,Q)\,X_1(Q)\,dQ +$$

$$+ c\int_V L(M,Q)\,X_1(Q)\,dQ = X_1(M) + c\int_V L(M,Q)\,X_1(Q)\,dQ$$

on doit donc avoir:

$$(4) \qquad \boxed{\int_V L(M, Q)\, X_1(Q)\, d\, Q = o}$$

c'est-à-dire $X_1\,(M)$ doit être orthogonal à droite de $L\,(M, P)$.

Lemme. — *Si* c *est une constante caractéristique à droite de* H (M, P) *et* X_1 (M) *une solution à droite correspondante, pour que* X_1(M) *soit encore une solution à droite de* K (M, P) = H (M, P) + L (M, P) *relative à la même constante* c, *il faut et il suffit que* X_1 (M) *soit orthogonale à droite de* L (M, P).

13. Remarquons, en tenant compte de (3), que:

$$\int_V L(M, Q)\, X_1(Q)\, d\, Q = c \iint_V L(M, Q)\, H(Q, R)\, X_1(R)\, d\, Q\, d\, R$$

Plus généralement, on voit par itération qu'on doit avoir:

$$[L, X_1] = c^n \iint_V L, (M, Q)\, H^{(n)}(Q, R)\, X_1(R)\, d\, Q\, d\, R.$$

Dans les applications, il nous suffira d'avoir des conditions suffisantes, comme nous aurons l'occasion de le voir.

On voit immédiatement que la condition (4) est vérifiée s'il existe une valeur de n telle que:

$$(A') \qquad \boxed{\int_V L(M, Q)\, H^{(n)}(Q, P)\, d\, Q = o}$$

Deux noyaux H et L étant donnés, nous dirons que H *est orthogonal à droite de* L *si:*

$$\int_V L(M, Q)\, H(Q, P)\, d\, Q = o.$$

La relation (A') exprime donc que $H^{(n)}$ $(M,\ P)$ est orthogonal à droite de $L\ (M,\ P)$; nous dirons dans ce cas que H *est orthogonal à la longue à droite de* L, ou plus précisément que: H *est* n — *orthogonal à droite de* L. Si la relation (A') a lieu pour $n=1$, H est orthogonal à droite de L, donc les résultats que nous allons énoncer sont encore valables dans ce cas particulier.

Théorème A' — *Si un noyau* H *est* n — *orthogonal à droite de* L, *toutes les constantes caractéristiques* c *à droite de* H *sont des constantes caractéristiques à droite de* K $=$ $=$ H $+$ L *et toutes les solutions à droite de* H *relatives à* c *sont des solutions à droite de* K *relatives à* c; c'est-à-dire: les conditions A' sont vérifiées.

14. Nous dirons de même *qu'un noyau* H (M, P) *est orthogonal à la longue, ou plus précisément* m — *orthogonal à gauche de* L (M, P) s'il existe un entier m tel que:

$$(A'') \qquad \boxed{\int_V H^{(m)}(M, Q)\, L(Q, P)\, dQ = o}$$

On voit de même que:

Théorème A'' — *Si un noyau* H *est* m — *orthogonal à gauche de* L, *toutes les constantes caractéristiques à gauche de* H *sont des constantes caractéristiques à gauche de* K $=$ $=$ H $+$ L *et toutes les solutions à gauche de* H *relatives à* c *sont des solutions à gauche de* K *relatives à* c; *c'est-à-dire les conditions* A'' *sont vérifiées.*

15. Si un noyau H (M, P) est en même temps n — orthogonal à droite et m — orthogonal à gauche de L (M, P) nous dirons que H (M, P) est (m, n) orthogonal à L (M, P), ou encore que H est orthogonal à la longue à L.

D'après les résultats précédents nous pouvons énoncer la proposition suivante:

Théorème A — *Si un noyau* H (M, P) *est* (m, n) *orthogonal à* L (M, P), *toutes les constantes caractéristiques à droite et à gauche de* H *sont des constantes caractéristiques à droite et à gauche de* K $=$ H $+$ L *et toutes les solutions à droite et à gauche de* H *relatives à* c *sont des solutions à droite et à gauche de* K *relatives à* c, c'est-à-dire: les conditions **A** sont vérifiées.

Dans le cas où H est (m, n) orthogonal à L, on peut toujours supposer que n et m sont les plus petites valeurs pour lesquelles les deux relations (A') et (A'') sont vérifiées.

Si r' est le plus grand des deux nombres entiers n et m alors il est facile de voir que $H^{(r')}$ est dans la suite H, $H^{(2)}$, $H^{(3)}$,... le premier noyau qui est orthogonal à L, c'est-à-dire $H^{(r')}$ est l'itéré du plus petit ordre orthogonal à $L(M, P)$; alors on aura:

$$L H^{r'} = H^{r'} L = o$$

Si H est (m, n) orthogonal à L, il est (α, β) orthogonal à L, si α et β sont des entiers tels que:

$$\alpha > m, \qquad \alpha > n$$

Si $m = n = 1$, H et L sont ce qu'on appelle deux noyaux orthogonaux.

Il existe des couples de noyaux H et L tels que H soit (m, n) orthogonal à L ($m > 1, n > 1$) sans que H soit (1, 1) orthogonal à L; par exemple: certains noyaux additifs (qui ne sont pas orthogonaux entre eux) que nous étudierons plus loin (voir N.° 39).

16. Nous dirons de même *que* L *est* q — *orthogonal à droite de* H s'il existe un entier positif q (le plus petit possible) tel que:

$$(B') \qquad \boxed{\int_V H(M, Q)\, L^{(q)}(Q, P)\, dQ = o}$$

et on démontre que

Théorème B' — *Si* L *est* q — *orthogonal à droite de* H, *toutes les constantes caractéristiques à droite de* L *sont des constantes caractéristiques à droite de* K = H + L *et toutes les solutions à droite de* L *sont des solutions à droite de* K.

17. Nous dirons que L *est* p — *orthogonal à gauche de* H s'il existe un entier positif p (le plus petit possible) tel que:

$$(B'') \qquad \boxed{\int_V L^{(p)}(M, Q)\, H(Q, P)\, dQ = o}$$

et on démontre que

Théorème B″ — *Si* L *est* p — *orthogonal à gauche de* H, *toute constante caractéristique à gauche de* L *est une constante caractéristique à gauche de* $K = H + L$; *et toutes les solutions à gauche de* L *sont des solutions à gauche de* K.

18. Si L (M, P) est en même temps p — orthogonal à gauche de H et q — orthogonal à droite de H, nous dirons que L *est* (p, q) *orthogonal à* H, *ou encore que* L *est orthogonal à la longue à* H.

Théorème B — *Si un noyau* L (M, P) *est* (p, q) *orthogonal à* H, *toutes les constantes caractéristiques à droite et à gauche de* L *sont des constantes caractéristiques à droite et à gauche de* $K = H + L$, *et toutes les solu'ions à droite et à gauche de* L, *sont respectivement des solutions à droite et à gauche de* K, *relatives à* c, *c'est-à-dire: les conditions* B *sont vérifiées.*

Soit (r'') le plus grand des deux nombres entiers p et q. Nous aurons:

$$L^{r''} H = o \qquad H L^{r''} = o$$

c'est-à-dire $L^{r''}$ est orthogonal à H et cela est nécessaire et suffisant pour que L soit orthogonal à la longue à H.

19. Noyaux en involution de première espèce. — Si H est orthogonal à la longue à L et si en même temps L est orthogonal à la longue à H, nous dirons *que les deux noyaux* H *et* L *sont en involution de première espèce;* pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit qu'il existent deux entiers r' et r'' tels que:

$$(A') \qquad H L^{r'} = o \qquad (A'') \qquad L^{r'} H = o$$

$$(B') \qquad L H^{r''} = o \qquad (B'') \qquad H^{r''} L = o$$

Il est facile de voir qu'on peut remplacer r' et r'' par un même nombre r à savoir le plus grand d'entre eux.

Alors H sera orthogonal à L^r et L à H^r et cela est nécessaire et suffisant pour que H et L soient en involution de première espèce.

D,après ce qui précède, nous pouvons énoncer la proposition suivante:

Théorème A B — *Si les deux noyaux* H *et* L *sont en involution de première espèce, toutes les constantes caractéristiques à droite ou à gauche de* H *et de* L *sont des constantes caractéristiques respectivement à droite et à gauche de* K = H + L *et toutes les solutions à droite et à gauche de* H *et de* L *relatives à* c, *sont des solutions respectivement à droite et à gauche de* K *relatives à* c.

C'est-à-dire si H et L sont en involution de première espèce les conditions **A** et **B** se trouvent être verifiées.

Il nous reste donc à étudier les conditions **C.**

20. Voyons d'abord si les conditions **C** sont nécessairement vérifiées lorsque les deux noyaux H et L sont en involution de première espèce.

Nous allons montrer qu'il n'en est pas ainsi; un exemple suffira.

Considérons, par exemple, le noyau:

$$K(M, P) = \varphi_1(M)\,\varphi_2(P) + \varphi_2(M)\,\varphi_1(P)$$

où les fonctions $\varphi_1(M)$ et $\varphi_2(P)$ sont orthonormées (sur V), c'est-à-dire:

$$\int_V \varphi_i(Q)\,\varphi_j(Q)\,dQ = \delta_{i,j}\,(i, j = 1, 2)$$

Le noyau $K(M, P)$ étant symétrique, il a au moins une constante caractéristique.

Son déterminant caractéristique est:

$$D_k(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ -\lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 - \lambda^2$$

donc: $K(M, P)$ a deux constantes caractéristiques à savoir $+1$ et -1.

Posons maintenant:

$$H(M, P) = \varphi_1(M)\,\varphi_2(P);\quad L(M, P) = \varphi_2(M)\,\varphi_1(P)$$

on a, alors:

$$K(M, P) = H(M, P) + L(M, P).$$

Calculons les itérés de H et de L.

$$H^{(2)}(M,P)=\int_V \varphi_1(M)\varphi_2(Q)\varphi_1(Q)\varphi_2(P)\,dQ=o$$

$$L^{(2)}(M,P)=\int_V \varphi_2(M)\varphi_1(Q)\varphi_2(Q)\varphi_1(P)\,dQ=o$$

Par conséquent, on aura

$$\begin{array}{ll} H^2 L=o & L H^2=o \\ L^2 H=o & H L^2=o \end{array}$$

c'est-à-dire H *et* L *sont en involution de première espèce.*

D'autre part comme $H^2=o$ et $L^2=o$, les deux noyaux H et L n'ont pas de constantes caractéristiques et par conséquent les conditions **C** ne sont pas vérifiées.

Nous pouvons donc affirmer que l'involution de première espèce, de deux noyaux H et L, n'est pas, en général, suffisante pour que les conditions **A**, **B** et **C** soient vérifiées.

21. Nous allons maintenant chercher des conditions suffisantes pour que les conditions **C** soient vérifiées.

Soit c une constante caractéristique à droite de K et $X(M)$ une solution correspondante:

$$(K) \qquad X(M)=c\int_V K(M,Q)\,X(Q)\,dQ$$

On peut écrire:

$$(5) \quad \begin{aligned} X(M)&=c\int_V H(M,Q)X(Q)\,dQ+c\int_V L(M,Q)X(Q)\,dQ \\ &=c\,X_1(M)+c\,X_2(M) \end{aligned}$$

où nous avons posé:

$$(6) \qquad \begin{cases} X_1(M)=c\int_V H(M,Q)\,X(Q)\,dQ \\ X_2(M)=c\int_V L(M,Q)\,X(Q)\,dQ \end{cases}$$

Remarquons qu'on ne peut pas avoir simultanément $X_1(M)\sim o$ et $X_2(M)\sim o$.

22. Supposons que l'on n'ait pas $X_1(M) \sim o$ et cherchons une condition suffisante pour que:

$$(7) \qquad X_1(M) = c\int_V H(M, Q)\, X_1(Q)\, d\,Q$$

on a, d'après (5) et (6):

$$X_1(M) = c\int_V H(M, Q)\, X_1(Q)\, d\,Q + c\int_V H(M, Q)\, X_2(Q)\, d\,Q$$

Pour que l'équation (7) soit vérifiée il faut et il suffit que l'on ait:

$$\boxed{\int_V H(M, Q)\, X_2(Q)\, d\,Q = o}$$

ou, d'après (6) et (K)

$$\iint_V H(M, Q)\, L(Q, R)\, X(R)\, d\,Q\, d\,R =$$

$$= c^\alpha \iint_V H(M, Q)\, L(Q, R)\, K^{(\alpha)}(R, S)\, X(S)\, d\,Q\, d\,R\, d\,S = o$$

Pour que l'équation (7) soit vérifiée il suffit donc qu'il existe une valeur de α telle que

$$\iiint_V H(M, Q)\, L(Q, R)\, K^{(\alpha)}(R, P)\, d\,Q\, d\,R = o$$

ou, en notation abrégée:

$$(\alpha) \qquad \boxed{H\, L\, K^\alpha = o}$$

De même on démontre que, pour que l'on ait

$$(8) \qquad X_2(M) = c\int_V L(M, Q)\, X_2(Q)\, d\,Q$$

il suffit qu'il existe une valeur de α' telle que:

$$(\alpha') \qquad \boxed{L\, H\, K^{\alpha'} = o}$$

Si les conditions (α) et (α') sont vérifiées on aura:

$$X(M) = c X_1(M) + c X_2(M)$$

où $X_1(M)$ et $X_2(M)$ sont des solutions, effectives ou non, des équations (7) et (8), l'une au moins de ces deux fonctions n'étant pas équivalente à zéro. Donc: si les conditions (α) et (α') sont vérifiées, toute constante carectéristique à droite de K est une constante caractéristique à droite pour au moins un des noyaux H et L et toute solution à droite de K relative à c est une combinaison linéaire de solutions à droite de H et de L relatives à c. Il est clair qu'on pourra remplacer les deux nombres α et α' par le plus grand qu'on peut appeler s'.

23. Soit c une contante caractéristique à gauche de H et $Y(P)$ une solution correspondante.

On aura de même:

$$Y(P) = c\int_V Y(Q)\,K(Q,P)\,dQ$$
$$= c\,Y_1(P) + c\,Y_2(P)$$

où nous avons posé:

$$Y_1(P) = \int_V Y(Q)\,H(Q,P)\,dQ$$

$$Y_2(P) = \int_V Y(Q)\,L(Q,P)\,dQ$$

on démontre aussi que pour que l'on ait:

$$Y_1(P) = c\int_V Y_1(Q)\,H(Q,P)\,dQ$$

$$Y_2(P) = c\int_V Y_2(Q)\,L(Q,P)\,dQ$$

il suffit qu'il existent deux valeurs de β et β' telles que

$$(\beta) \qquad \boxed{K^{\beta} L H = o}$$

$$(\beta') \qquad \boxed{K^{\beta'} H L = o}$$

S'il en est ainsi on en déduit des conséquences analogues à celles que nous avons indiquées à la fin du numéro précédent. Il est clair qu'on peut aussi remplacer les deux nombres (β) et (β') par le plus grand qu'on peut appeler s''.

24. Noyaux en involution de seconde espèce.

Soit $K = H + L$. Si les deux noyaux H et L sont tels que les conditions (α), (α'), (β) et (β') sont vérifiées nous dirons que *les deux noyaux* H *et* L *sont en involution de seconde espèce.*

Il est facile de voir que pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit qu'il existe un entier s (qui pourra être par exemple le plus grand des deux nombres s' et s'') tel que:

$$HLK^s = o \qquad LHK^s = o$$
$$K^s HL = o \qquad K^s LH = o$$

cela veut dire *qu'il existe un itéré de* K, *à savoir* K^s, *qui est orthogonal à* HL *et* LH et cela est nécessaire et suffisant pour que H et L soient en involution de seconde espèce.

D'après ce qui précède nous pouvons énoncer la proposition suivante.

Théorème C — *Si les deux noyaux* H *et* L *sont en involution de seconde espèce, toutes les constantes caractéristiques à droite et à gauche de* $K = H + L$ *sont des constantes caractéristiques respectivement à droite et à gauche de l'un au moins des noyaux* H *et* L *et toutes les solutions à droite et à gauche de* H, *relatives a* c, *sont des combinaisons linéaires, à coefficients constants, des solutions, respectivement à droite et à gauche, de* H *et de* L *relatives à* c.

C'est-à-dire: si H et L sont en involution de seconde espèce les conditions **C** sont vérifiées. On doit remarquer que l'orthogonalité de deux noyaux est un cas particulier de l'involution de seconde espèce.

25. Nous pouvons affirmer, d'après l'exemple donné au N.° 20, qu'une involution de première espèce n'est pas toujours une involution de seconde espèce, réciproquement nous allons montrer qu'une involution de seconde espèce n'est pas toujours une involution de première espèce. Un exemple suffira. Soit:

$$\begin{aligned} H(M,P) &= \varphi_1(M)\varphi_1(P) + \varphi_2(M)\varphi_2(P) \\ L(M,P) &= \qquad\qquad\qquad\quad - \varphi_2(M)\varphi_2(P) \end{aligned}$$

où: $\varphi_1(M)$ et $\varphi_2(M)$ sont deux fonctions orthonormées, on aura:

$$K(M,P) = H(M,P) + L(M,P) = \varphi_1(M)\varphi_1(P)$$

Pour montrer que H et L sont en involution de seconde espèce il suffira de montrer: que les conditions (α), (α'), (β) et (β') sont vérifiées pour $\alpha = \alpha' = \beta = \beta' = 1$, c'est-à-dire que:

$$(\alpha) \qquad o = HLK = HLH + HL^2$$

$$(\alpha') \qquad o = LHK = LH^2 + LHL$$

$$(\beta) \qquad o = KLH = HLH + L^2H$$

$$(\beta') \qquad o = KHL = H^2L + LHL$$

On trouve facilement que:

$$HLH = -\varphi_2(M)\varphi_2(P);\ HL^2 = L^2H = \varphi_2(M)\varphi_2(P)$$

$$LH^2 = H^2L = -\varphi_2(M)\varphi_2(P);\ LHL = \varphi_2(M)\varphi_2(P)$$

donc les conditions précédentes sont vérifiées et par conséquent H et L sont en involution de seconde espèce.

Le noyau K a une seule constante caractéristique à savoir $\lambda = 1$.

Le noyau L a une seule constante caractéristique à savoir $\lambda = -1$ qui n'est pas constante caractéristique de K, par conséquent on peut affirmer d'après le théorème A que H et L ne sont pas en involution de première espèce.

26. Noyaux hypoorthogonaux — Si deux noyaux H et L sont simultanément en involution de première et seconde espèce, nous dirons qu'ils sont *hypoorthogonaux*.

D'après ce qui précède nous pouvons énoncer la proposition suivante:

Théorème D — *Si deux noyaux* H *et* L *sont hypoorthogonaux les conditions* **A B** *et* **C** *sont simultanément vérifiées.*

Parmi les décompositions d'un noyau K dans la somme de deux autres

$$K = H + L$$

sont particulièrement simples, au point de vue auquel nous nous plaçons, celles pour lesquelles les noyaux H et L sont hypoorthogonaux.

Si deux noyaux H et L sont orthogonaux, c'est à-dire si $HL = LH = o$, ils sont aussi hypoorthogonaux, mais il existe des noyaux hypoorthogonaux qui ne sont pas orthogonaux, par exemple: certains noyaux additifs que nous étudierons dans la suite.

Nous devons remarquer qu'étant donnés deux noyaux H et L, pour vérifier s'ils sont hypoorthogonaux, il faut effectuer une série de calculs qui peut être assez longue, le nombre de ces calculs n'étant pas fixé d'avance. En effet pour que deux noyaux H et L soient hypoorthogonaux il faut et il suffit: ou que $HL = LH = o$, ou qu'il existe un entier r tel que:

$$\begin{array}{rr} H^r L = o & L H^r = o \\ L^r H = o & H L^r = o \\ H L K^r = o & L H K^r = o \\ K^r H L = o & K^r L H = o \end{array}$$

et il pourra arriver que l'on soit obligé de calculer des itérés de K, de H, ou de L d'une ordre très élevé pour que les conditions précédentes soient vérifiées.

Dans tous les cas nous aurons toujours huit conditions à vérifier, ce qui n'est pas très commode.

Nous pouvons résumer les résultats obtenus dans le tableau suivant:

$$\begin{array}{c} \mathrm{H}\ \textit{et}\ \mathrm{L} \\ \textit{hypoorthogonaux} \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} (1) & H \text{ et } L \text{ en involution de première espèce.} \\ (2) & H \text{ et } L \text{ en involution de seconde espèce.} \end{array} \right.$$

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{H}\ \textit{orthogonal à la longue à droite de}\ \mathrm{L} \rightarrow \textit{condition}\ \mathrm{A}' \\ \mathrm{H}\ \textit{orthogonal à la longue à gauche de}\ \mathrm{L} \rightarrow \textit{condition}\ \mathrm{A}'' \\ \mathrm{L}\ \textit{orthogonal à la longue à droite de}\ \mathrm{H} \rightarrow \textit{condition}\ \mathrm{B}' \\ \mathrm{L}\ \textit{orthogonal à la longue à gauche de}\ \mathrm{H} \rightarrow \textit{condition}\ \mathrm{B}'' \end{array} \right.$$

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} H L K^r = o,\ L H K^r = o \rightarrow \textit{condition}\ \mathrm{C}' \\ K^r H L = o,\ K^r L H = o \rightarrow \textit{condition}\ \mathrm{C}'' \end{array} \right.$$

Nous savons d'autre part que l'involution de première est indépendante de l'involution de seconde espèce et réciproquement.

§ 4 — Noyaux caractéristiques de K (M, P)

27. Soit c une contante caractéristique de $K(M, P)$.

Si l'on peut décomposer $K(M, P)$

$$K(M, P) = H(M, P) + L(M, P)$$

de telle manière que:

1.° — $H(M, P)$ a c comme seule constante caractéristique.

2.° — $L(M, P)$ n'a pas c comme constante caractéristique.

3.° — H et L sont hypoorthogonaux; nous dirons que H est *un noyau caractéristique de* K (M, P) *relatif à* c et que la décomposition $K = H + L$ est une *décomposition de* K, *caractéristique pour c.*

S'il en est ainsi nous pouvons remplacer l'étude des équations (K) et $(\overline{K})$, d'après le théorème D, par l'étude des équations (H) et $(\overline{H})$.

Un cas très important c'est le cas où le noyau $K(M, P)$ admet comme noyau caractéristique relatif à c un noyau de rang fini. Dans ce cas la résolution des équations (H) et $(\overline{H})$ se ramène à un problème d'Algèbre.

Remarque — La condition 3.°) est suffisante pour affirmer que les conditions A, B et C du n.° 11 sont vérifiées, mais il pourra, peut être, arriver que ces mêmes conditions soient vérifiées sans que H et L soient hypoorthogonaux; s'il en est ainsi on pourrait donner une définition plus général de noyau caractéristique, mais celle que nous venons de donner nous suffira largement pour les applications que nous indiquerons dans la suite.

CHAPITRE II

Les noyaux additifs

§ 1 — Définition et conditions nécessaires et suffisantes pour que deux noyaux soient additifs

28. *Définition.* Nous supposerons toujours dans la suite que les noyaux à étudier sont tels que la résolvante relative à chacun de ces noyaux existe, c'est-à-dire qu'elle est une fonction holomorphe en λ au voisinage de l'origine. C'est ce qui arrive en particulier si le domaine d'intégration V est fini et si le noyau est borné et intégrable par rapport à M et P sur V.

La résolvante $R(K,\lambda)$ d'un noyau $K(M,P)$ est d'après la théorie classique:

$$R(K;\lambda)=R[K(M,P);\lambda]=\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda^{n-1}K^{(n)}(M,P)$$

Nous verrons plus loin qu'il existe d'autres noyaux ayant les propriètés que nous allons établir; mais nous ne cherchons pas, pour le moment, à étudier une classe plus générale de noyaux de Fredholm ayant ces propriètés. Il nous suffit, pour le moment, de considèrer une classe simple de noyaux, par exemple celle qui été définie plus haut, et à en tirer le plus grand nombre de conséquences. Nous pouvons en tout cas remarquer que les propositions que nous allons établir sont valables pour tous les noyaux bornés ou non, dont les itérés de toutes les ordres existent.

Nous allons considèrer des noyaux de Fredholm de la forme:

$$(S)\qquad \boxed{K(M,P)=H(M,P)+L(M,P)}$$

Nous dirons que les deux noyaux H(M, P) *et* L(M, P) *sont additifs si la résolvante de* K(M, P) *est la somme des résolvantes de* H(M, P) *et de* L(M, P). Cette propriété sera désignée dans la suite par le nom *d'additivité* et elle se rapporte évidemment à l'ensemble de deux noyaux H et L. Analytiquement l'additivité de deux noyaux H et L peut s'exprimer sous une forme abrègée par l'égalité:

$$(S') \qquad \boxed{R(H+L;\lambda)=R(H;\lambda)+R(L;\lambda)}$$

L'additivité de deux noyaux est une propriété très importante comme nous le verrons dans la suite.

La première question qu'on doit naturellement se poser c'est de savoir s'il existe des noyaux additifs. On peut tout de suite, d'après des résultats aujourd'houi classiques, répondre par l'affirmative. En effet rappelons d'abord que deux noyaux $H(M, P)$ et $L(M, P)$ sont dits *orthogonaux* s'ils vérifient les deux conditions:

$$\boxed{HL=o}\;,\quad \boxed{LH=o}$$

MM. Bryon Heywood [1] et [2, p. 10] et E. Goursat [1], [2] et [3, p. 29] ont démontré, simultanément et indépendemment l'un de l'autre, au moyen d'un calcul très simple, le théorème suivant: *Etant donnés deux noyaux orthogonaux* H *et* L, *la résolvante relative au noyau* K = H + L *est égale à la somme des résolvantes* R(H; λ) *et* R(L; λ) *relatives à ces deux noyaux;* théorème que nous pouvons énoncer sous une forme plus courte en disant que: « *deux noyaux orthogonaux sont additifs* ».

Ce théorème nous donne donc une condition suffisante pour que deux noyaux soient additifs. Or, nous connaissons des noyaux orthogonaux; donc il existe des noyaux additifs.

Comme le thèorème de MM. Goursat et Heywood nous donne une condition suffisante por que deux noyaux soient additifs il y a une question, qu'on doit se poser tout de suite, à savoir: Est-ce que l'orthogonalité de deux noyaux est aussi une condition nécessaire pour que les deux noyaux soient additifs? Ce qui nous conduit très naturellement à nous poser le problème suivant:

Déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux noyaux soient additifs.

C'est un problème que nous avons réussi à résoudre complètement; l'exposition du résultat trouvé constitue l'objet de ce chapitre.

29. Première forme de condition nécessaire et suffisante.

Si on remplace dans l'égalité (S') (qui nous a servi à définir les noyaux additifs) les noyaux résolvants par leurs développements en série, nous aurons:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{n-1} K^{(n)}(M, P) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{n-1} H^{(n)}(M, P) + \\ + \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{n-1} L^{(n)}(M, P).$$

Les trois séries étant des fonctions holomorphes en λ au voisinage de l'origine, pour que la relation précédente soit identiquement vérifiée il faut et il suffit que l'on ait:

$$(S'') \qquad \boxed{K^{(n)}(M, P) = H^{(n)}(M, P) + L^{(n)}(M, P)}$$

pour $n = 1, 2, 3, \ldots$

Réciproquement si les conditions (S'') sont vérifiées et si les noyaux H et L ont des résolvantes, on aura l'égalité (S') d'après la définition même de résolvante. Nous pouvons donc dire que:

Lemme I — *La condition nécessaire et suffisante pour que deux noyaux* H (M, P) *et* L (M, P) *soient additifs c'est que l'itéré d'un ordre quelconque de la somme des deux noyaux soit la somme des itérés du même ordre des deux noyaux donnés.*

Ceci nous amène à donner une autre définition des noyaux additifs, qui sera équivalente à la definition donnée précédemment dans le cas où les noyaux donnés ont des résolvantes, mais qui a l'avantage d'être applicable à des noyaux qui n'ont pas des résolvantes. La définition en question est la suivante:

Nous dirons que *deux noyaux* H *et* L *sont additifs lorsque les conditions* (S″) *sont vérifiées.*

Ceci suppose en particulier que tous les itérés successifs de H et de L existent; on peut donner des exemples de noyaux qui vérifient cette condition et pour lesquels la résolvante n'existe pas. La définition de noyaux additifs que nous venons de donner est plus générale que la précédente. Nous verrons plus loin (N.° 32) qu'on peut encore préciser cette définition.

30. Les noyaux anti-permutables — Nous voyons donc que: pour que deux noyaux soient additifs il faut et il suffit qu'ils vérifient les conditions (S'').

Pour $n=1$ la condition en question est vérifiée, parce que par hypothèse:

$$(S) \qquad K = H + L$$

Etudions maintenant le cas où $n=2$. Cherchons la condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait:

$$(9) \qquad K^2 = H^2 + L^2.$$

Par définition:

$$\begin{aligned} K^2 &= [K, K] = [H+L, H+L] \\ &= H^2 + HL + LH + L^2 \end{aligned}$$

Pour que les deux noyaux H et L vérifient la condition (9) il faut et il suffit que:

$$(I) \qquad \boxed{HL + LH = o}$$

D'après ce que nous avons dit plus haut c'est bien une condition nécessaire pour que les noyaux H et L soient additifs. Lorsque nous étudierons la relation (S'') pour $n=3,\ 4, \ldots$ il nous faudra supposer que la condition (I) est vérifiée. Il est donc très naturel de commencer par établir quelques propriètés (qui nous seront utiles plus loin) des noyaux vérifiant la condition (I). Pour abrèger l'exposition nous dirons que deux noyaux H et L sont *anti-permutables* lorsqu'ils vérifient la condition (I). On a depuis longtemps étudié les noyaux permutables, c'est-à-dire tels que:

$$HL - LH = o$$

ou

$$HL = LH$$

Supposons que H et L sont anti-permutables. Transformons l'expression suivante, en utilisant la condition (I):

$$(10) \qquad HL^2 = HLL = -LHL = LLH = L^2H$$

ce que nous montre que H et L^2 *sont permutables.*

De même:

$$(11) \qquad LH^2 = LHH = -HLH = HHL = H^2L$$

Donc les deux noyaux H^2 et L *sont aussi permutables.* En ajoutant (10 et 11) on trouve que:

$$(12) \qquad \boxed{HL^2 + LH^2 = -(LHL + HLH) = L^2H + H^2L}$$

Ces propriètés peuvent être généralisées.

Supposons que H et L^m *sont permutables,* c'est-à-dire que:

$$HL^m = L^mH$$

alors on peut écrire, en tenant compte de (I):

$$HL^{m+1} = HL^mL = L^mHL = -L^mLH = -L^{m+1}H.$$

c'est-à-dire H et L^{m+1} *sont anti-permutables.*

Supposons maintenant que H *et* L^n *sont anti-permutables,* c'est-à-dire que:

$$HL^n = -L^nH$$

On peut écrire, en tenant compte de (I):

$$HL^{n+1} = HL^nL = -L^nHL = L^nLH = L^{n+1}H$$

Donc les noyaux *H et L^{n+1} sont permutables* ce que démontre le:

Théorème I — *Si deux noyaux* H *et* L *sont anti-permutables,* H *est permutable avec tous les itérés de* L *d'ordre pair et anti-permutable avec tous les itérés de* L *d'ordre impair. Les mêmes relations auront lieu entre* L *et les itérés successifs du noyau* H.

Pour démonter la seconde partie de ce théorème il suffit de remarquer que la condition (I) est symétrique en H et L. Ce résultat peut encore se généraliser. Il est très facile, en effet, de démontrer que si deux noyaux H et L sont anti-permutables, on a en général:

$$H^n L^m = (-1)^{n.m} L^m H^n \tag{13}$$

Donc si $m.n$ est un nombre pair H^n et L^m seront permutables. Au contraire si $m.n$ est un nombre impair les mêmes noyaux seront anti-permutables. Ceci aura lieu évidemment quels que soient les entiers positifs m et n. En particulier un itéré H^n d'ordre pair ($n = 2\alpha$) est permutable avec tous les itérés de L.

31. *Les conditions* (II) — Nous allons maintenant étudier la condition (S'') das le cas où $n = 3$.

En supposant que la condition (I) est vérifiée cherchons la condition nécessaire et suffisante pour que:

$$\boxed{K^3 = H^3 + L^3} \tag{14}$$

Par définition, et en tenant compte de (I), nous aurons:

$$K^3 = [K, K^2] = [K + L, H^2 + L^2] = H^3 + HL^2 + \\ + LH^2 + L^3$$

Pour que la relation (14) soit vérifiée il faut et il suffit que

$$\boxed{HL^2 + LH^2 = o} \tag{IIa}$$

D'autre part, on peut aussi écrire:

$$K^3 = [K^2, K] = [H^2 + L^2, H + L] = H^3 + H^2 L + \\ + L^2 H + L^3$$

donc, on doit avoir aussi:

$$(IIb) \qquad \boxed{H^2 L + L^2 H = o}$$

Cette condition est une conséquence de (I) et (IIa) et réciproquement (IIa) est une conséquence de (I) et (IIb).

Remarquons qu'on peut encore écrire:

$$K = [K, K, K] = [H + L, H + L, H + L] = [H^2 + HL + \\ + LH + L^2, H + L] = H^3 + H^2 L + HLH + HL^2 + \\ + LH^2 + LHL + L^2 H + L^3 = H^3 + L^3 + (H^2 L + \\ + L^2 H) + (HL^2 + L H^2) + (HLH + LHL)$$

Si les conditions (IIa) et (Ib) sont vérifiées nous aurons:

$$K^3 = H^3 + L^3 + HLH + LHL$$

Pour que la relation (14) soit vérifiée on doit avoir encore:

$$(IIc) \qquad \boxed{HLH + LHL = o}$$

C'est ce qui arrive en particulier si les conditions (I) et (IIa) ou (I) et (IIb) sont vérifiées.

Nous avons donc montré que:

1.° — Les conditions (I), (IIa) et (I), (IIb) sont équivalentes.

2.° — Les conditions (I), (IIa) ou (I), (IIb) entrainent la condition (IIc).

Nous pouvons établir un résultat plus complet. Supposons que les deux noyaux H et L sont anti-permutables; alors ces noyaux vérifient la condition

$$(12) \qquad H^2 L + L^2 H = -(HLH + LHL) = HL^2 + LH^2.$$

Donc si deux noyaux sont anti-permutables et s'ils vérifient une des conditions (IIa) (IIb) ou (IIc) les deux autres seront aussi vérifiées.

Théorème II — *Si deux noyaux sont anti-permutables les conditions* (II*a*), (II*b*) *et* (II*c*) *sont équivalentes.*

Or la condition (IIa), ou (IIb), est nécessaire et suffisante pour que la relation (14) soit vérifiée, donc la condition (IIc) le sera aussi. En combinant les résultats précédemment obtenus on peut énoncer:

Lemme I — *Pour que le deuxième et troisième itéré du noyau* K = H + L *soient la somme des itérés du même ordre des noyaux* H *et* L *il faut et il suffit que ces deux noyaux vérifient la condition*

$$(I) \qquad \boxed{HL + LH = o}$$

et une des trois relations:

$$(II) \left\{ \begin{array}{ll} a & \boxed{H^2 L + L^2 H = o} \\ b & \boxed{H L^2 + L H^2 = o} \\ c & \boxed{HLH + LHL = o} \end{array} \right.$$

Dans ces conditions les deux autres relations (II) *seront aussi vérifiées;* c'est-à-dire, nous avons déterminé les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'égalité (S'') soit vérifiée pour $n = 2$ et $n = 3$. Or ces conditions sont bien des conditions nécessaires pour que H et L soient additifs, comme nous l'avons vu dans le N.° 29, nous supposerons donc dans la suite qu'elles sont vérifiées.

32. Théorèmes fondamentaux sur l'additivité — Pour que H et L soient additifs il nous reste encore à exprimer que:

$$K^n = H^n + L^n$$

pour $n = 4, 5, 6 \ldots$

Pour $n = 4$ nous avons:

$$K^4 = [K, K^3] = [H + L, H^3 + L^3] =$$
$$= H^4 + HL^3 + LH^3 + L^4.$$

Nous allons démontrer que:

$$(IIIa) \qquad HL^3 + LH^3 = o$$

est une des conséquences des conditions (I) et (II).

H et L étant des noyaux anti-permutables nous avons d'après le théorème I (N° 30)

$$(15) \qquad HL^3 = -L^3 H.$$

D'autre part d'après (IIa) et (IIb)

$$(16) \qquad HL^3 = \underbrace{HL^2}_{IIb} L = -\underbrace{LH^2 L}_{IIa} = L L^2 H = L^3 H.$$

Donc en supposant que la condition (I) et que l'une des conditions (II) sont vérifiées, il en résulte d'après ce qui précède, en comparant (15) et (16), que:

$$\boxed{HL^3 = o} \quad \text{et} \quad \boxed{L^3 H = o}$$

c'est-à-dire *les noyaux* H *et* L^3 *sont orthogonaux.*

D'autre part nous avons aussi, d'après le théorème I (N° 30):

$$(17) \qquad LH^3 = -H^3 L$$

et d'après (IIb) et (IIa)

$$(18) \qquad LH^3 = \underbrace{LH^2}_{IIb} H = -H \underbrace{L^2 H}_{IIa} = H H^2 L = H^3 L.$$

Il en résulte, en comparant (17) et (18) que:

$$\boxed{LH^3 = o} \quad \text{et} \quad \boxed{H^3 L = o}$$

c'est-à-dire: *les noyaux* H^3 *et* L *sont orthogonaux.* La condition ($IIIa$) est donc vérifiée, en supposant tout simplement que les relations (I) et (II) ont lieu.

Par définition nous avons aussi:

$$K^4 = [K^3, K] = [H^3 + L^3, H + L] =$$
$$= H^4 + H^3 L + L^3 H + L^4$$

et on aura aussi d'après ce qui précède:

$$(IIIb) \qquad H^3 L + L^3 H = o.$$

On peut encore calculer K^4 d'une autre façon:

$$K^4 = [K^2, K^2] = [H^2 + L^2, H^2 + L^2] =$$
$$= H^4 + H^2 L^2 + L^2 H^2 + L^4.$$

On doit avoir

$$(IIIc) \qquad H^2 L^2 + L^2 H^2 = o$$

Or d'après la formule (13), qui est une conséquence de (I), on a:

$$(19) \qquad H^2 L^2 = L^2 H^2$$

D'autre part, d'après (IIb) (IIc) et (I)

$$(20) \qquad H^2 L^2 = H \underbrace{H L^2}_{IIb} = -H L H^2 = -\underbrace{H L H}_{IIc} H =$$
$$= L H L H = -L L H H = -L^2 H^2$$

Par conséquent en comparant (19) et (20):

$$\boxed{L^2 H^2 = o} \quad \text{et} \quad \boxed{H^2 L^2 = o}$$

Les noyaux H² *et* L² *sont aussi orthogonaux.* Nous avons donc démontré que:

Lemme II — *Si deux noyaux* H *et* L *vérifient la condition* (I) *et une des conditions* (II) *nous aurons*

1.º $\quad K^4 = H^4 + L^4$

2.º $\quad H^i L^j = o \qquad L^j H_i = o$

pour toutes les valeurs entières et positives de (i) *et* (j) *telles que* $i + j = 4$.

Nous allons généraliser ce résultat. Supposons toujours que les conditions (I) et (II) sont vérifiées et admettons que

$$K^n = H^n + L^n$$

pour $n \geq 4$. Calculons:

$$K^{n+1} = [K^n, K] = [H^n + L^n, H + L] = H^{n+1} + \\ + H^n L + L^n H + L^{n+1}$$

Pour que l'on ait:

$$K^{n+1} = H^{n+1} + L^{n+1}$$

il faut et il suffit que:

$$(N) \qquad H^n L + L^n H = o.$$

Or pour $n \geqq 4$

$$H^n L = H^{n-3} H^3 L.$$

Mais

$$H^3 L = o$$

donc

$$\boxed{H^n L = o} \quad \text{pour } n \geqq 4.$$

De même: pour $n \geqq 4$

$$L^n H = L^{n-3} L^3 H$$

Or

$$L^3 H = o$$

donc

$$\boxed{L^n H = o} \quad \text{pour } n \geqq 4.$$

La relation (N) se trouve donc vérifiée.

Nous pouvons maintenant énoncer la première proposition fondamentale sur l'additivité.

Théorème III — *Pour que deux noyaux* H *et* L *soient additifs, il faut et il suffit qu'ils vérifient la condition.*

$$(I) \qquad \boxed{HL + HL = o}$$

et une des trois conditions :

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} \boxed{H^2 L + L^2 H = o} \\ \boxed{HL^2 + LH^2 = o} \\ \boxed{HLH + LHL = o} \end{array} \right.$$

D'après le Lemme I, nous pouvons aussi dire :

Théorème IV — *Pour que deux noyaux* H *et* L *soient additifs, il faut et il suffit que le deuxième et troisième itérés de* $\mathrm{K} = \mathrm{H} + \mathrm{L}$ *soient la somme des itérés du même ordre des noyaux* H *et* L.

Ce que précise la première forme de condition nécessaire et suffisante énoncée au n° 29. Le problème énoncé au n° 28 se trouve donc complètement résolu.

Nous avons montré dans tous ses détails que les noyaux L^i et H^j sont orthogonaux si $i + j = 4$, en admettant, nous le savons maintenant, que H et L sont additifs.

Généralisons ce résultat. Nous voulons montrer que

$$\boxed{H_i L^j = o} \qquad \boxed{L^j H^i = o}$$

pour toutes les valeurs entières et positives de i et de j tels que : $i + j = n \geqq 4$.

La démonstration étant déjà faite pour $n = 4$, supposons que ces conditions soient vérifiées pour $i + j = n \geqq 4$. Alors nous aurons :

$$H^{i+1} L^j = H H^i L^j = o$$

parce que, par hypothèse:

$$H^i L^j = o.$$

De même on démontre que:

$$L^j H^{i+1} = L^j H^i H = o.$$

Un raisonnement analogue nous montre que:

$$H^i L^{j+1} = o \qquad L^{j+1} H^i = o$$

et la proposition est général. Donc:

Théorème V — *Si deux noyaux sont additifs tous les itérés* H^m *et* L^n, *tels que:* $m + n \geq 4$, *sont orthogonaux.*

Cette proposition jouera un rôle très important dans la suite; elle est, comme nous le voyons, une simple conséquence des conditions (I) et (II), c'est-à-dire de l'additivité. Elle nous donne en même temps une première propriété générale des noyaux additifs.

33. *Remarques sur les résultats obtenus.* Les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux noyaux soient additifs ont une forme très simple, qui nous permet en particulier de vérifier si deux noyaux donnés sont, ou ne sont pas, additifs en effectuant sur ces noyaux des opérations bien déterminées. Les conditions en question sont comme nous l'avons vu: la condition (I) et une quelconque condition (II). Nous choisirons la condition (IIc) qui est la plus symétrique et que nous passons à désigner par (II). Les conditions à vérifier sont donc:

$$(I) \qquad \boxed{HL + LH = o}$$

$$(II) \qquad \boxed{HLH + LHL = o}$$ [1]

Un cas simple où la condition (I) est vérifiée c'est le cas où les noyaux H et L vérifient les deux conditions

$$HL = o, LH = o$$

---

[1] Nous verrons plus loin (n.° 112) que ces deux conditions sont indépendantes, dans le cas général.

c'est-à-dire le cas où les deux noyaux H et L sont orthogonaux. Dans ce cas la relation (II) est aussi vérifiée. En effet:

$$HLH = [H, LH] = [H, o] = o$$
$$LHL = [L, HL] = [L, o] = o$$

Donc: *deux noyaux orthogonaux sont additifs.* C'est le théorème de Goursat — Heywood qui nous apparait ainsi comme un cas particulier du théorème III.

Ceci nous montre qu'on pourrait être conduit très naturellement à considérer les noyaux orthogonaux en prenant comme point de départ l'étude de l'additivité de deux noyaux. Nous avons au contraire été conduits à considérer les noyaux additifs en prenant comme point de départ le théorème de Goursat — Heywood comme nous l'avons montré au n.° 28.

Cette étude nous montre d'autre part qu'à priori l'orthogonalité de deux noyaux est bien une condition suffisante mais n'est pas une condition nécessaire pour que les deux noyaux soient additifs, c'est-à-dire: il pourra arriver que les conditions (I) et (II) soient vérifiées sans que les deux noyaux H et L soient orthogonaux; ces noyaux seront désignés dans la suite par le nom de *noyaux additifs non orthogonaux.* Nous donnerons des exemples de tels noyaux dans le chapitre VII.

Les noyaux additifs peuvent donc être divisés en deux classes:

1.° — La classe des noyaux orthogonaux;

2.° — La classe des noyaux additifs non orthogonaux.

Supposons que les noyaux de ces deux classes ont des résolvantes; alors tous les couples de noyaux additifs auront une propriété commune, qu'on doit énoncer en toute rigueur en disant que: *la fonction résolvante est une fonction additive pour chacun de ces couples;* car si H et L forment le couple en question, on a:

$$R(H + L) = R(H) + R(L)$$

Le théorème III nous montre que tous les couples de noyaux satisfaisant aux conditions (I) et (II) sont les seuls noyaux pour lesquels la résolvante est une fonction additive. Nous les avons nommés noyaux additifs pour abréger l'expression plus exacte mais plus longue « noyaux à résolvantes additives ».

Nous étudierons plus loin les propriétés des noyaux additifs.

§ 2 — Autre méthode pour étudier les noyaux additifs

34. On peut être conduit aux résultats précédents par une autre méthode. Considérons deux noyaux H et L et supposons que chacun d'eux a une résolvante; c'est-à-dire supposons qu'il existe deux fonctions $R(H;\lambda)$, $R(L;\lambda)$ vérifiant les équations fonctionnelles:

$$(21) \qquad \begin{aligned} R(H;\lambda) &= H+\lambda\,[H, R(H;\lambda)] \\ &= H+\lambda\,[R(H;\lambda), H] \end{aligned}$$

$$(22) \qquad \begin{aligned} R(L;\lambda) &= L+\lambda\,[L, R(L;\lambda)] \\ &= L+\lambda\,[R(L;\lambda), L]. \end{aligned}$$

Cherchons les conditions nécessaires et suffisantes pour que:

$$R(H;\lambda)+R(L;\lambda)$$

soit la résolvante du noyau $H+L$. Pour cela il faut et il suffit que:

$$\begin{gathered} R(H;\lambda)+R(L;\lambda) = H+L+\lambda\,[H+L, R(;H\lambda)+ \\ +R(L;\lambda)] = H+L+\lambda\,[R(H;\lambda)+R(L;\lambda), H+L] \end{gathered}$$

ou encore:

$$\begin{gathered} R(H;\lambda)+R(L;\lambda) = H+L+\lambda\,[H, R(H;\lambda)]+ \\ +\lambda[L, R(L;\lambda)]+\lambda[H, R(L;\lambda)]+\lambda\,[L, R(H;\lambda)] = \\ = H+L+\lambda\,[R(H;\lambda), H]+\lambda\,[R(L;\lambda), L]+ \\ +\lambda\,[R(H;\lambda), L]+\lambda\,[R(L;\lambda), H]. \end{gathered}$$

En tenant compte de (21) et de (22) les conditions cherchées sont:

$$(\xi) \qquad [H, R(L;\lambda)]+[L, R(H;\lambda)] = o$$

$$(\gamma) \qquad [R(H;\lambda), LL]+[R(L;\lambda), H] = o.$$

Prenons par exemple la condition (ξ). Comme nous *supposons* que les résolvantes $R(H;\lambda)$ et $R(L;\lambda)$ sont des fonctions holomorphes au voisinage de l'origine, en égalant à zéro les coefficients des diverses puissances de λ on trouve:

$$(I) \qquad [H, L] + [L, H] = o$$

$$(IIa) \qquad [H, L^2] + [L, H^2] = o$$

et
$$[H, L^n] + [L, H^n] = o \quad \text{si} \quad n \geqq 3$$

En effectuant les mêmes calculs qu'on a fait précédemment on verrait de même que:

$$[H, L^n] = o, [L, H^n] = o \quad \text{si} \quad n \geqq 3$$

On trouverait que: les conditions nécessaires et suffisantes pour que $R(H;\lambda) + R(L;\lambda)$ soit la résolvante de $H + L$, sont exprimées par les équations (I) et (IIa) comme nous l'avons trouvé précédemment. Si l'on prenait la condition (η) pour point de départ on arriverait au même résultat. Il est d'ailleurs facile de voir que les conditions (ξ) et (η) sont équivalentes.

Nous pouvons encore obtenir les mêmes résultats en utilisant l'équation fonctionnelle de la résolvante de Plemelj et Hilbert.

En effet, soit

$$(23) \quad \begin{cases} R(H;\lambda) - R(H;\mu) = (\lambda - \mu)[R(H;\lambda), R(H;\mu)] \\ R(H;o) = H \end{cases}$$

$$(24) \quad \begin{cases} R(L;\lambda) - R(L;\mu) = (\lambda - \mu)[R(L;\lambda), R(L;\mu)] \\ R(L;o) = L \end{cases}$$

Ceci exprime que $R(H;\lambda)$ et $R(L;\lambda)$ sont respectivement les résolvantes de H et de L.

Considérons la fonction:

$$\Theta(K;\lambda) = R(H;\lambda) + R(L;\lambda)$$

nous avons

Pour que $\Theta(K;\lambda)$ soit une résolvante on doit avoir d'abord:

$$K = H + L$$

Supposons cette première condition vérifiée. Pour que $\Theta(K,\lambda)$ soit la résolvante de K, il faut et il suffit d'après Plemelj et Hilbert que

$$\Theta(K;\lambda) - \Theta(K;\mu) = (\lambda - \mu)[\Theta(K;(\lambda), \Theta(K;\mu)]$$

ou

$$\begin{aligned} & R(H;\lambda) + R(L;\lambda) - R(H;\mu) - R(L;\mu) = \\ & = (\lambda - \mu)\Big[\{R(H;\lambda) + R(L;\lambda)\}, \{R(H;\mu) + \\ & + R(L;\mu)\}\Big] = (\lambda - \mu)\Big\{[R(H;\lambda), R(H;\mu)] + \\ & + R(H;\lambda), R(L;\mu)] + [R(L;\lambda), R(H;\mu)] + \\ & \qquad + [R(L;\lambda), R(L;\mu)]\Big\} \end{aligned}$$

ou encore en tenant compte de (23) et de (24)

$$(\lambda - \mu)\Big\{[R(H;\lambda), R(L;\mu)] + [R(L;\lambda), R(H;\mu)]\Big\} = o$$

Comme dans l'équation fonctionnelle de Plemelj et Hilbert on supose en général $\lambda = \mu$, on doit avoir:

$$(\gamma) \qquad [R(H;\lambda), R(L;\mu)] + [R(L;\lambda), R(H;\mu)] = o$$

quelles que soient les valeurs de λ et μ. C'est la condition nécessaire et suffisante cherchée.

Nous supposons que les résolvantes de H et L sont des fonctions holomorphes en λ au voisinage de l'origine, donc en égalant à zéro le terme indépendant de λ et μ on a:

$$(I) \qquad HL + LH = o;$$

le coefficient de λ nous donne:

$$(IIa) \qquad H^2 L + L^2 H = o;$$

le coefficient de μ nous donne:

$$(IIb) \qquad HL^2 + LH^2 = o$$

et ainsi de suite. Or les conditions (I) et (IIa) ou (I) et (IIb) sont les conditions nécessaires et suffisantes que doivent vérifier H et L pour qu'ils soient additifs, comme nous l'avons vu précédemment.

Il serait facile de voir que les divers coefficients de $\lambda^m \mu^n$ pour $m + n \geq 4$ sont identiquement nuls en répétant les calculs déjà faits.

Si dans la condition (γ) nous posons $\mu = o$, ou $\lambda = o$, nous retrouvons comme cas particulier les conditions (ξ) et (η).

$$(\xi) \qquad [R(H;\lambda), L] + [R(L;\lambda), H] = o$$

$$(\eta) \qquad [H, R(L;\mu)] + [L, R(H;\mu)] = o.$$

CHAPITRE III

Les propriétés des noyaux additifs

§ 1 — Classification des noyaux additifs d'après leurs propriétés

35. Nous venons de voir que les noyaux orthogonaux et les noyaux additifs non orthogonaux ont une propriété commune, à savoir: ils vérifient la condition (S''). Pour indiquer cette circonstance nous lui avons donné un même nom: celui de *noyaux additifs.* Mais jusqu'à quel point, peut-on considérer les noyaux additifs comme une généralisation des noyaux orthogonaux? Ou, ce qui revient au même, quelles sont les propriétés formelles communes à ces deux classes de noyaux? Pour répondre à cette question il suffit d'étudier les démonstrations des propriétés des noyaux orthogonaux et de voir si elles sont applicables aux noyaux additifs. Dans le cas où l'extension sera possible nous aurons affaire à une propriété qui n'est pas caractéristique pour les noyaux orthogonaux. Dans ces conditions, nous arriverons à montrer que les noyaux orthogonaux ont certaines propriétés parce qu'ils sont additifs et d'autres propriétés parce qu'ils sont orthogonaux. C'est-à-dire: ce que nous voulons c'est étudier le rôle joué par l'additivité des noyaux dans la théorie des équations intégrales et approfondir en même temps la connaissance des noyaux orthogonaux.

36. Prenons, comme premier exemple, une question très simple.

On utilise fréquemment dans la théorie des équations intégrales la proposition suivante: *si un noyau est orthogonal à plusieurs autres il est aussi orthogonal à leur somme.* Prenons, pour simplifier, le cas où un noyau H est orthogonal à deux noyaux donnés L_1 et L_2. Nous aurons par hypothèse:

$$HL_1 = o \qquad L_1 H = o$$

$$HL_2 = o \qquad L_2 H = o.$$

Donc:

$$[H, L_1 + L_2] = HL_1 + HL_2 = o$$
$$[L_1 + L_2, H] = L_1 H + L_2 H = o$$

et la propriété est démontrée.

Voyons si cette propriété se maintient pour les noyaux additifs. Supposons que H est additif à L_1 et L_2. Pour cela il faut et il suffit que

$$(25) \quad \begin{cases} HL_1 + L_1 H = o \\ HL_1 H + L_1 H L_1 = o \end{cases}$$

$$(26) \quad \begin{cases} HL_2 + L_2 H = o \\ HL_2 H + L_2 H L_2 = o. \end{cases}$$

Posons:

$$L = L_1 + L_2.$$

La question qui se pose est de savoir si H et L sont additifs. Écrivons les conditions nécessaires et suffisantes pour que H et L soient additifs:

$$(I) \qquad HL + LH = o$$

$$(II \qquad HLH + LHL = o$$

La première peut s'écrire:

$$[H, L_1 + L_2] + [L_1 + L_2, H] = o$$

ou

$$HL_1 + L_1 H + HL_2 + L_2 H = o$$

relation qui est identiquement vérifiée en tenant compte de (25) et de (26). Nous avons donc montré que: *si un noyau est anti-permutable avec deux autres noyaux* L_1 et L_2 il est anti-permutable avec leur somme $L_1 + L_2$.

On peut généraliser ce résultat en démontrant que: *si un noyau est anti-permutable avec un nombre fini de noyaux* $L_1, L_2, \ldots, L_n$, *il est anti-permutable avec leur somme* $L = L_1 + L_2 + \ldots + L_n$.

La deuxième condition à vérifier peut s'écrire:

$$[H, L_1 + L_2, H] + [L_1 + L_2, H, L_1 + L_2] = o$$

ou

$$[HL_1 + HL_2, H] + [L_1 H + L_2 H, L_1 + L_2] = o$$

ou encore

$$HL_1H + HL_2H + L_1HL_1 + L_2HL_1 + L_1HL_2 + L_2HL_2 = o$$

en tenant compte de (25) et (26) on trouve:

$$(a) \qquad L_2 H L_1 + L_1 H L_2 = o$$

ce qui exprime la condition nécessaire et suffisante cherchée.

Théorème I — *Pour qu'un noyau* H *additif à* L_1 *et* L_2 *soit additif à leur somme* $L = L_1 + L_2$ *il faut et il suffit que*

$$(a) \qquad \boxed{L_2 H L_1 + L_1 H L_2 = o}$$

On peut donner à cette condition une forme différente. En effet par hypothèse

$$L_2 H = - HL_2$$
$$L_1 H = - HL_1$$

donc (a) peut s'écrire:

$$H L_2 L_1 + H L_1 L_2 = o$$

ou encore:

$$(a') \qquad [H, L_2 L_1 + L_1 L_2] = o.$$

D'autre part, en remarquant que:

$$H L_1 = - L_1 H$$
$$H L_2 = - L_2 H$$

(a) peut s'écrire sous la forme:

$$L_2 L_1 H + L_1 L_2 H = o$$

ou

$$(a'') \quad [L_2 L_1 + L_1 L_2, H] = o$$

Ainsi d'après (a') et (a'') H doit être orthogonal à $L_1 L_2 + L_2 L_1$. Nous voyons aussi que les conditions (a), (a') et (a'') sont équivalentes; c'est-à-dire que si une d'elles est vérifiée les autres le seront aussi.

37. *Cas Particuliers* — En général la condition (a) ne sera pas vérifiée et elle n'est nullement une conséquence des conditions (25) et (26) c'est-à-dire: en général un noyau H qui est additif à L_1 et L_2, n'est pas additif à leur somme $L_1 + L_2$ (nous donnerons un exemple au chapitre VII). Cette propriété pourra avoir lieu dans des cas particuliers.

a) C'est ce qui arrive par exemple si $L_1 + L_2$ sont anti-permutables; c'est-à-dire si:

$$L_1 L_2 + L_2 L_1 = o$$

En effet dans ces conditions (a') et (a'') seront vérifiées, donc (a) le sera aussi.

Corollaire I — *Si un noyau* H *est additif à deux noyaux* L_1 *et* L_2 *anti-permutables il est additif à leur somme* $\mathrm{L} = \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2$.

b) En particulier, deux noyaux additifs étant anti-permutables, on peut dire:

Corollaire II — *Si un noyau* H *est additif à deux noyaux additifs* L_1 *et* L_2, *il est additif à leur somme* $\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2$.

Corollaire III — *Si un noyau* H *est additif aux noyaux* $\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2 \ldots, \mathrm{L}_n$, *anti-permutables deux à deux, il est additif à leur somme* $\mathrm{L} = \sum_{i=1}^{n} L_i$.

En effet: H est additif à L_1 et L_2 qui sont anti-permutables; donc, d'après le corollaire I, H est additif à $L_1 + L_2$.

D'autre part H est additif à L_3 qui est anti-permutable à $L_1 + L_2$, d'après une proposition démontré au N.° 36; donc, d'après le corollaire I, H est additif à $L_1 + L_2 + L_3$. La démonstration se termine par induction. Comme cas particulier on peut énoncer la généralisation suivante du corollaire II.

Corollaire IV — *Si un noyau* H *est additif aux noyaux* $\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2, \ldots\ldots, \mathrm{L}_n$, *additifs entre eux deux à deux, il est additif à leur somme* $\mathrm{L} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{L}_i$.

Le corollaire (IV) est une extension d'un théorème bien connu dans la théorie des équations intégrales et qu'on peut énoncer dans le cas ou H et L_i admettent des résolvantes, en disant que «*si plusieurs noyaux sont orthogonaux deux à deux la résolvante de leur somme est la somme des résolvantes*».

c) Comme conséquence du théorème I on peut encore énoncer des corollaires correspondants aux cas encore plus particuliers où: 1.°) L_1 et L_2 sont orthogonaux, 2.°) H et L_1 ou H et L_2 sont orthogonaux. En effet dans ces conditions (a), (a') et (a'') sont vérifiées.

Ce qui est important à retenir c'est que H n'est pas en général additif à $L = L_1 + L_2$, à moins que les noyaux L_1 et L_2 ne satisfassent à des conditions particulières.

38. Abordons maintenant l'étude d'une autre question. Nous savons d'après la théorie des noyaux orthogonaux que: «*Si deux noyaux* H *et* L *sont orthogonaux, deux noyaux déduits de* H *et* L *par un nombre quelconque d'itérations sont aussi orthogonaux*».

C'est au moyen de cette propriété qu'on démontre le théorème de Goursat-Heywood. Que se passe-t-il pour les noyaux additifs? Nous avons déjà vu que si deux noyaux H et L sont additifs, deux noyaux H^i et L^j déduits de H et L par un nombre quelconque d'itérations sont orthogonaux, donc à fortiori additifs, si: $i + j \geq 4$. Par exemple: H est orthogonal à $L^3, L^4, \ldots, L^n, \ldots$.

Est-ce que H est orthogonal à L^2? Ou au moins H sera-t-il additif à L^2? Nous allons résoudre le problème complètement en cherchant les conditions nécessaires et suffisantes pour que H et L^2 soient additifs. En effet, d'après le théorème III du chapitre II, pour cela il faut et il suffit que:

$$(I') \qquad HL^2 + L^2 H = o$$

$$(II') \qquad HL^2 H + L^2 HL^2 = o$$

Les deux noyaux H et L étant additifs, il est facile de voir que:

$$HL^2 H = HHL^2 = H^2 L^2 = o$$

$$L^2 HL^2 = HL^2 L^2 = HL^4 = o$$

La condition (II') est identiquement vérifiée; donc pour que H et L^2 soient additifs il faut et il suffit que la condition (I') soit vérifiée. Or les noyaux H et L étant additifs, on a:

$$HL^2 = L^2 H$$

Donc (I') peut s'écrire

$$2HL^2 = o \quad \text{ou} \quad 2L^2 H = o$$

ou

$$HL^2 = o \qquad L^2 H = o$$

Théorème II — *Si* H *et* L *sont additifs pour que les deux noyaux* H *et* L^2 *soient additifs il faut et il suffit que* H *et* L^2 *soient orthogonaux.*

De même on peut démontrer que:

Théorème II' — *Si deux noyaux* H *et* L *sont additifs, pour que* H^2 *et* L *le soient aussi il faut et il suffit que ces deux derniers noyaux soient orthogonaux.*

Remarque — Si H et L sont additifs on aura:

$$(II) \quad HLH + LHL = H^2 L + L^2 H = HL^2 + LH^2 = o.$$

Mais, si en outre H^2 et L sont additifs, on aura: $H^2 L = LH^2 = o$, donc, d'après les conditions précédentes, on aura aussi $L^2 H = HL^2 = o$; c'est-à-dire, on peut aussi affirmer que H et L^2 sont orthogonaux. On montre aussi que dans les mêmes conditions on aura: $HLH = LHL = o$.

39. Ceci nous amène à diviser les noyaux additifs en trois classes, en considérant les diverses manières par lesquelles les conditions nécessaires et suffisantes (I) et (II) peuvent être vérifiée.

1.°) Si $HL = o$ et $LH = o$. Les noyaux sont dits *orthogonaux*. Alors $HLH = o$, $LHL = o$.

2.°) Supposons maintenant que: $HL \neq o$, donc $LH = - HL \neq o$. Ce seront ce que nous avons appelé les *noyaux additifs non orthogonaux*. Nous allons diviser l'ensemble de ces noyaux en deux catégories suivant la façon dont les conditions (II) sont vérifiées.

a) Si $HLH = o$, donc $LHL = o$, nous dirons que les noyaux H et L sont *quasi-orthogonaux*.

b) Si $HLH \neq o$ (alors $LHL \neq o$) nous dirons que les noyaux H et L sont *propement additifs*.

Les noyaux quasi-orthógonaux ont une propriété commune avec les noyaux orthogonaux, à savoir: *si deux noyaux* H *et* L *sont orthogonaux ou quasi-orthogonaux tous les noyaux déduits de* H *et* L *par un nombre quelconque d'itérations sont orthogonaux.* Les noyaux quasi-orthogonaux se rapprochent donc à ce point de vue des noyaux orthogonaux. Les noyaux propement additifs n'ont pas la même propriété.

Nous pouvons résumer la classification précédente dans le schéma suivant:

$$\text{Noyaux additifs} \begin{cases} \textit{orthogonaux} \\ \textit{non orthogonaux} \begin{cases} \textit{quasi-orthogonaux} \\ \textit{proprement additifs} \end{cases} \end{cases}$$

Ces trois classes sont distinctes et s'excluent mutuellement.

Si nous convenons d'appeler itéré d'ordre 1 d'un noyau H, le noyau H lui-même $H^1 = H$, alors nous aurons pour les noyaux:

a) *Orthogonaux*, H^i et L^j sont orthogonaux pour toutes les valeurs entières et positives de i et j telles que:

$$i + j \geqq 2$$

b) *Quasi-orthogonaux,* la même propriété a lieu si

$$i+j \geqq 3$$

mais n'a pas lieu pour $i+j=2$.

c) *Proprement additifs* la même propriété a lieu pour

$$i+j \geqq 4$$

et elle n'aura pas lieu pour $i+j=2$ et 3.

Dans tous les cas, comme nous l'avons montré au début, H^i et L^j sont orthogonaux pour toutes les valeurs de i et j tels que

$$i+j \geqq 4.$$

D'après cette classification, nous pouvons énoncer le théorème II sous la forme suivante: *Si deux noyaux* H *et* L *sont additifs pour que* H^2 *et* L *le soient aussi, il faut et il suffit que* H *et* L *ne soient proprement additifs et dans ces conditions* H^2 *et* L *sont orthogonaux.*

Dans le chapitre VII nous donnerons des exemples de noyaux quasi-orthogonaux et proprement additifs.

40. Additivité des résolvantes de deux noyaux additifs. — Étant donnés deux noyaux additifs quelconques, on peut en déduire une infinité d'autres noyaux orthogonaux, d'après les résultats précédents. En particulier nous avons une proposition bien connue dans la théorie des noyaux orthogonaux: « Étant donnés deux noyaux orthogonaux H et L, on peut en déduire une infinité d'autres. En effet la somme d'un nombre quelconque de noyaux déduits de H par itération est orthogonale à toute autre noyau déduit de L de la même façon. Les noyaux résolvants eux-mêmes $R(H, \lambda)$, $R(L, \mu)$ sont aussi orthogonaux quels que soient λ et μ ». Voir E. Goursat [4, page 395].

Pourrat-on déduire aussi de deux noyaux additifs non orthogonaux une infinité d'autres noyaux additifs et non orthogonaux? Nous avons déjà vu qu'étant donnés deux noyaux additifs quelconques (orthogonaux ou non) H et L, les itérés de H sont orthogonaux à L au moins à partir du troisième itéré. Donc: ce n'est pas dans les noyaux itérés de H et de L que nous devons chercher des noyaux additifs non orthogonaux.

Nous allons voir ce qui se passe pour les noyaux résolvants de H et de L. Supposons donc que H et L admettent des résolvantes $R(H)$ et $R(L)$ [1], elles sont additives si:

$$[R(H), R(L)] + [R(L), R(H)] = o$$
$$[R(H), R(L), R(H)] + [R(L), R(H), R(L)] = o$$

or

$$[R(H), R(L)] = \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{n-1} H^n, \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{n-1} L^n\right] =$$
$$= HL + \lambda(HL^2 + H^2 L) + \lambda^2(HL^3 + H^2 L^2 + H^3 L) + \ldots +$$
$$+ \lambda^{-1}(HL^n + H^2 L^{n-1} + \ldots H^{n-1} L^2 + H^n L) + \ldots$$

Si les noyaux H et L sont additifs les coefficients des diverses puissances de λ sont nuls d'après les résultats précédents, donc:

$$\boxed{[R(H), R(L)] = HL}$$

De même, on démontre que:

$$\boxed{[R(L), R(H)] = LH}$$

En particulier, si H et L sont orthogonaux les résolvantes respectives sont aussi orthogonales. C'est le résultat rappelé précédemment.

D'autre part:

$$[R(H), R(L), R(H)] = [HL, H + \lambda H^2 + \lambda^2 H^3 + \ldots] =$$
$$= HLH + \lambda HLH^2 + \lambda^2 HLH^3 + \ldots +$$
$$+ \lambda^{n-1} HLH^n + \ldots = HLH + \lambda HLH^2$$

or

$$HLH^2 = -LHH^2 = LH^3 = o$$

donc

$$\boxed{[R(H), R(L), R(H)] = HLH}$$

(1) Nous les supposons calculées pour la même valeur du paramètre λ.

De même on démontre que:

$$\boxed{[R(L), R(H), R(L)] = LHL}$$

Les conditions à vérifier pour les noyaux résolvants, pour qu'ils soient additifs, peuvent donc s'écrire d'après ce qui précède:

$$HL + LH = o$$
$$HLH + LHL = o$$

Ces conditions étant vérifiées par hypothèse, nous pouvons dire que:

Théorème III — *Si deux noyaux* H *et* L *sont additifs les résolvantes respectives* R(H; λ) *et* R(L; λ) *calculées pour la même valeur du paramètre sont aussi additives.*

Les calculs précédents nous montrent encore que:

Corollaire I — *Si deux noyaux* H *et* L *sont orthogonaux, quasi-orthogonaux, ou proprement additifs, leurs résolvantes sont aussi respectivement orthogonales, quasi-orthogonales, ou proprement additives.*

Donc étant donnés deux noyaux additifs (orthogonaux, quasi-orthogonaux, ou proprement additifs), on peut en déduire une infinité d'autres noyaux de la même nature.

41. Étant donnés deux noyaux additifs H et L nous venons de voir que les résolvantes respectives, *calculées pour la même valeur du paramètre,* $R(H; \lambda)$ et $R(L; \lambda)$ sont aussi additives. Or d'après des résultats classiques (voir Goursat, loc. cit.) si deux noyaux H et L sont orthogonaux les résolvantes respectives $R(H; \lambda)$ et $R(L; \mu)$ sont aussi orthogonales *quels que soient* λ *et* μ. Ce résultat subsiste évidemment pour $\lambda = \mu$. C'est le résultat que nous avons trouvé précédemment.

Pour voir ce qui se passe en général, supposons comme toujours que H et L sont additifs et cherchons la condition nécessaire et suffisante pour que $R(H; \lambda)$ et $R(L; \mu)$ soient additives quels que soient λ et μ.

On doit avoir d'abord:

$$[R(H; \lambda), R(L; \mu)] + [R(L; \mu), R(H; \lambda)] = o$$

ou

$$\left[\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{n-1} H^n, \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^{n-1} L^n\right] +$$

$$+ \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \mu^{n-1} L^n, \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{n-1} H^n\right] = o$$

Donc, on doit avoir (en égalant à zéro les coefficients des des diverses puissances de λ et μ)

$$HL + LH = o$$

$$H^2 L + L H^2 = o$$

$$HL^2 + L^2 H = o$$

$$H^2 L^2 + L^2 H^2 = o$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

La première condition est vérifiée par hypothèse.

La deuxième peut s'écrire en remarquant que $H^2 L = L H^2$.

(*a*) $$H^2 L = ,$$

Mais par hypothèse

$$H^2 L = - L^2 H$$

Donc il faut que nous ayons aussi

(*b*) $$L^2 H = o$$

La troisième condition peut s'écrire en remarquant que $HL^2 = L^2 H$:

(*b'*) $$HL^2 = o$$

mais par hypothèse

$$HL^2 = - LH^2 = o$$

Nous aurons donc aussi :

(*a'*) $$LH^2 = o.$$

Il est donc nécessaire que:

$$H^2 L = L H^2 = H L^2 = L^2 H = o.$$

C'est-à-dire: il est nécessaire que les deux noyaux H et L soient non proprement additifs. Les autres conditions à partir de la troisième sont évidemment vérifiées, parce que H et L sont additifs.

Nous avons, en supposant que H et L ne sont pas proprement additifs:

$$[R(H;\lambda), R(L;\mu)] = HL$$
$$[R(L;\mu), R(H;\lambda)] = LH.$$

Calculons alors:

$$[R(H;\lambda), R(L;\mu), R(H;\lambda)] = [HL, R(H;\lambda)] = [HL, H + \lambda H^2 + \lambda^2 H^3 + \dots] = HLH + \lambda HLH^2 + \lambda^2 HLH^3 + \dots + \lambda^{n-1} HLH^n + \dots = o.$$

De même on démontre que

$$[R(L;\mu), R(H;\lambda), R(L;\mu)] = o.$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

Théorème IV — *Si deux noyaux* H *et* L *sont additifs, pour que les résolvantes* R (H; λ), R (L; μ) *soient additives quelles que soient les valeurs de* λ *et de* μ, *il faut et il suffit que les deux noyaux* H *et* L *ne soient pas proprement additifs. Dans ces condition si les deux noyaux* H *et* L *sont respectivement orthogonaux ou quasi-orthogonaux leurs resolvantes seront aussi respectivement orthogonales et quasi-orthogonales.*

Nous avons donc trouvé une propriété commune aux noyaux orthogonaux et quasi-orthogonaux, et qui est caractéristique pour ces deux classes de noyaux. Les noyaux quasi-orthogonaux se rapprochent donc plus, à ce point de vue, des noyaux orthogonaux que des noyaux proprement additifs.

§ 2 — Les singularités de la résolvante de la somme de deux noyaux additifs

42. Considérons deux noyaux additifs $H(M, P)$ et $L(M, P)$; nous aurons par hypothèse:

$$(S) \qquad K(M, P) = H(M, P) + L(M, P)$$

$$(S'') \qquad K^{(n)}(M, P) = H^{(n)}(M, P) + L^{(n)}(M, P).$$

Supposons en outre que les deux noyaux H, L et K ont des résolvantes, alors nous pouvons aussi écrire:

$$(S') \qquad R(K; \lambda) = R(H; \lambda) + R(L; \lambda).$$

Pour que l'on puisse écrire ces relations il faut et il suffit que les noyaux H et L vérifient les conditions (I) et (II). La relation (S') est valable dans un certain voisinage de l'origine, du plan de la variable complexe λ; mais nous allons voir qu'elle peut être encore valable par prolongement analytique en dehors de ce voisinage.

Soit ρ de plus petit des rayons de convergence des trois développements en série qui représentent $R(K; \lambda)$, $R(H; \lambda)$ et $R(L; \lambda)$. Soit λ_0 une valeur du paramètre λ intérieur au cercle de rayon ρ centré à l'origine.

On peut développer $R(K; \lambda)$ suivant les puissances de $(\lambda - \lambda_0)$

$$R(K; \lambda) = R(K; \lambda_0) + \left[\frac{\partial R}{\partial \lambda}\right]_{\lambda_0} (\lambda - \lambda_0) + \dots + \\ + \frac{1}{n!}\left[\frac{\partial^n R}{\partial \lambda^n}\right]_{\lambda_0} (\lambda - \lambda_0)^n + \dots$$

Or on démontre, d'après un calcul classique, voir par exemple Goursat [4, p. 353], que:

$$\frac{1}{n!} \cdot \frac{\partial^n R}{\partial \lambda^n} = R^{(n+1)}(K; \lambda)$$

où $R^{(n)}(K,\lambda)$ représente le $n^{ième}$ itéré de $R(K;\lambda)$; donc

$$(28)\qquad R(K;\lambda)=\sum_{n=1}^{+\infty}(\lambda-\lambda_o)^{n-1}R^{(n)}(K;\lambda_o)=$$
$$=R[R(K;\lambda_o);\lambda-\lambda_o].$$

Mais, d'après ce que nous avons vu (N° 40), si deux noyaux H et L sont additifs leurs résolvantes calculées pour la même valeur du paramètre λ sont aussi additives, c'est-à-dire:

$$(29)\qquad R[R(K;\lambda_o);\lambda-\lambda_o]=R[R(H;\lambda_o)+$$
$$+R(L;\lambda_o);\lambda-\lambda_o]=R[R(H;\lambda_o);\lambda-\lambda_o]+$$
$$+R[R(L;\lambda_o);\lambda-\lambda_o].$$

Si les séries

$$R[R(H;\lambda_o);\lambda-\lambda_o]=R(H;\lambda)$$
$$R[R(L;\lambda_o);\lambda-\lambda_o]=R(L;\lambda)$$

ont un rayon de convergence supérieur à $\rho-|\lambda_o|$ elles nous permettront de définir, par prolongement analytique, les résolvantes $R(H;\lambda)$ et $R(L;\lambda)$ en dehors du cercle de rayon ρ, centré à l'origine. Dans ces conditions la relation (29) nous montre que $R(K;\lambda)$ est aussi prolongeable dans les mêmes régions où $R(H;\lambda)$ et $R(L;\lambda)$ le sont et dans ces régions, nous aurons encore, d'après (28) et (29):

$$(29')\qquad R(K;\lambda)=R(H;\lambda)+R(L;\lambda).$$

D'après ce qui précède, on peut affirmer que: *Si deux noyaux* H *et* L *sont additifs, tout point* λ_o *régulier pour* $\mathrm{R}(\mathrm{H};\lambda)$ *et pour* $\mathrm{R}(\mathrm{L};\lambda)$ *est un point régulier pour* $\mathrm{R}(\mathrm{H}+\mathrm{L};\lambda)$. La relation (29′) nous montre aussi que:

Si deux noyaux H et L sont additifs: 1.°) *Tout point singulier pour* $\mathrm{R}(\mathrm{H}+\mathrm{L};\lambda)$ *est un point singulier pour l'un au moins des noyaux résolvants* $\mathrm{R}(\mathrm{H};\lambda)$ $\mathrm{R}(\mathrm{L};\lambda)$. 2.°) *Tout point qui est singulier pour l'une des résolvantes* $\mathrm{R}(\mathrm{H};\lambda)$, $\mathrm{R}(\mathrm{L};\lambda)$ *et qui est régulier pour l'autre est un point singulier pour* $\mathrm{R}(\mathrm{H}+\mathrm{L};\lambda)$.

Si un point λ_o est singulier pour les deux résolvantes $R(H;\lambda)$ et $R(L;\lambda)$ on ne peut rien dire pour le moment sur la nature du point λ_0 par rapport à la résolvante $R(H+L;\lambda)$ parce qu'à priori les singularités des deux fonctions précédentes peuvent se détruire. Lorsque nous appliquerons la théorie des noyaux additifs à l'étude de l'équation de Fredholm nous complèterons ces résultats. Nous avons supposé, dans ce qui précède, que les résolvantes de H, L et K considérées comme fonctions de λ, définies par des développements en série suivant les puissances de λ, sont des fonctions holomorphes au voisinage de l'origine, et nous avons donné quelques renseignements sur les relations entre les singularités de ces trois fonctions considérées comme fonctions de λ. Dans la théorie des équations intégrales il y a dans certains cas des relations simples entre *les constantes caractéristiques* d'un noyau et les singularités de sa résolvante considérée comme fonction de λ, mais il n'en nest pas toujours ainsi. D'autre part, il peut arriver que les noyaux en question soient additifs sans que ses résolvantes existent et il est encore intéressant dans ce cas de connaître les constantes caractéristiques de la somme $K=H+L$ de deux noyaux additifs. Nous nous occuperons de cette question dans le chapitre suivant; nous allons pour le moment étudier le cas particulier où la théorie de Fredholm est applicable.

§ 3 — **Déterminant de Fredholm de la somme de deux noyaux additifs**

43. Supposons donc que la théorie classique de Fredholm soit applicable aux noyaux H, L et $K=H+L$. Soient $D_K(\lambda), D_H(\lambda), D_L(\lambda)$ les déterminants de Fredholm des noyaux correspondants aux indices; ce sont des fonctions entières en λ. Nous savons que si H et L sont orthogonaux, voir par exemple Goursat [4, p. 396] on a:

$$D_K(\lambda)=D_H(\lambda)\,D_L(\lambda). \tag{30}$$

Cherchons les conditions nécessaires et suffisantes que doivent vérifier les deux noyaux H et L pour que cette égalité ait lieu. Si l'on prend la dérivée logarithmique des deux membres de l'expression précédente, on a:

$$\frac{D'_K(\lambda)}{D_K(\lambda)}=\frac{D'_H(\lambda)}{D_H(\lambda)}+\frac{D'_L(\lambda)}{D_L(\lambda)} \tag{31}$$

condition qui est nécessaire et suffisante pour que l'on ait la relation (30), comme il est facile de voir.

En remarquant que :

$$\int_V R[K(M, M); \lambda]\, dM = \frac{D'_K(\lambda)}{D_K(\lambda)}$$

la condition (31) peut s'écrire :

$$\int_V R[K(M, M); \lambda]\, dM = \int_V R[H(M, M); \lambda]\, dM +$$

$$+ \int_V R[L(M, M); \lambda]\, dM.$$

En remplaçant la résolvante par leurs développements en série suivant les puissances de λ, et en égalant dans les deux membres les coefficients des mêmes puissances de λ, on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème V — *La condition nécessaire et suffisante pour que le déterminant de* Fredholm *du noyau* K = H + L *soit le produit des déterminants de* Fredholm *des noyaux* H *et* L, *c'est que ces deux noyaux vérifient les conditions :*

$$\int_V K^{(n)}(M, M)\, dM = \int_V H^{(n)}(M, M)\, dM +$$

$$+ \int_V L^{(n)}(M, M)\, dM; \; n = 2, 3, \ldots$$

c'est-à-dire que les traces de K = H + L *soient respectivement les sommes des traces de* H *et de* L.

En particulier ces conditions sont vérifiées si H et L sont additifs, car on a alors, $K^n = H^n + L^n$. Nous pouvons donc dire que :

Corollaire I — *Si deux noyaux* H *et* L *sont additifs, le déterminant de* Fredholm *de* K = H + L *est égal au produit des déterminants de* Fredholm *de* H *et de* L.

Ce corollaire généralise un théorème énoncé par Goursat [3, p. 27] et Heywood [3, p. 11] pour le cas où H et L sont orthogonaux.

Nous savons d'après la théorie classique, que dans le cas de FREDHOLM les seules singularités de la résolvante $R(K; \lambda)$ sont des pôles, qui sont les racines de l'équation $D_K(\lambda) = 0$. D'après ce qui précède nous pouvons donc dire que:

Corollaire II — *Si* H *et* L *sont deux noyaux additifs, auxquels les résultats de* FREDHOLM *sont applicables, tout pôle de* R(H; λ) *ou de* R(L; λ) *est un pôle de* R(H + L; λ) *et réciproquement tout pôle de* R(H + L; λ) *est un pôle de l'une au moins des résolvantes* R(H; λ) *et* R(L; λ).

Ce corollaire, abolit donc, dans le cas de FREDHOLM, la lacune rencontrée plus haut (N.° 42) dans l'étude des singularités de la résolvante d'une somme de deux noyaux additifs.

CHAPITRE IV

Applications des noyaux additifs à l'équation de Fredholm

1 — Application à l'équation homogène

44. Dans ce chapitre nous allons nous préoccuper surtout des applications des noyaux additifs à l'équation de FREDHOLM. Pour commencer, nous allons étudier la question suivante: supposons que l'on ait décomposé un noyau $K(M,P)$, par un moyen quelconque, en une somme de deux noyaux additifs $H(M,P)$ et $L(M,P)$

$$(S) \qquad \boxed{K = H + L\,.}$$

Est-ce que cette décomposition est une décomposition simple au sens du n° 11? Ou ce qui revient au même, peut-on affirmer que les conditions A, B et C du n° 11 sont vérifiées? La réponse à cette question est affirmative et pour le démontrer il suffit de prouver que:

Théorème I — *Deux noyaux additifs H et L sont hypoorthogonaux.*

Pour démontrer ce théorème il suffit de prouver (n° 26) que H et L sont en involution de première et de seconde espèce. Le noyau H étant additif à L, nous savons (n° 32) que H est toujours orthogonal à L^3, c'est-à-dire:

$$L^3 H = o \qquad H L^3 = o$$

donc *L est* $(3,3)$ *orthogonal* à H (n° 18).

Nous savons de même que si H est additif à L, L est orthogonal à H^3, c'est-à-dire :

$$H^3 L = o \qquad L H^3 = o$$

donc (n° 15) *H est* (3,3) *orthogonal à L* et par conséquent *H et L sont en involution de première espèce* (n° 19).

Nous venons de voir que L est (3-3) orthogonal à H; peut-il arriver que L ne soit pas (2-2) orthogonal à H? Il en sera ainsi si H et L sont proprement additifs, c'est-à-dire si :

$$HLH = -LHL \neq o$$

En effet dans ce cas

$$L^2 H = LLH = -LHL \neq o$$

$$HL^2 = HLL = -LHL \neq o$$

Au contraire, si H et L sont quasi-orthogonaux, nous aurons $L^2 H = HL^2 = o$, c'est-à-dire: dans ce cas L est (2-2) orthogonal à H et l'on verrait de même que H est aussi (2-2) orthogonal à L.

45. Pour démontrer que H et L sont en involution de seconde espèce il suffit de prouver (n° 24) qu'il existe un entier s tel que

$$(\alpha) \quad \boxed{HLK^s = o} \qquad (\alpha') \quad \boxed{LHK^s = o}$$

$$(\beta) \quad \boxed{K^s HL = o} \qquad (\beta') \quad \boxed{K^s LH = o}$$

Voyons d'abord s'il existe un entier s tel que la condition (α) soit vérifiée. Comme H et L sont additifs on a :

$$K^s = H^s + L^s$$

$$HL + LH = o$$

donc:

$$HLK^s = HLH^s + HLL^s$$
$$= -LHH^s + HL^{s+1} = HL^{s+1} - LH^{s+1}$$

or, si $s = 2$ nous aurons: $HL^3 = o$ et $LH^3 = o$, donc

$$\boxed{HLK^2 = o}$$

De même, on démontre que les conditions (α'), (β) et (β') sont vérifiées par $s = 2$ c'est-à-dire que:

$$LHK^2 = K^2HL = K^2LH = o;$$

par conséquent: H et L sónt en involution de seconde espèce; nous pouvons donc affirmer que H et L sont hypoorthogonaux.

46. Les deux noyaux H et L étant additifs, pourra-t-il arriver que les conditions (α), (α'), (β) et (β') soient vérifiées pour $s = 1$? Pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que:

$$HLK = HLH + HLL = HLH + HL^2 = o$$
$$LHK = LHH + LHL = LH^2 + LHL = o$$
$$KHL = HHL + LHL = H^2L + LHL = o$$
$$KLH = HLH + LLH = HLH + L^2H = o$$

Or, par hypothèse, on a:

(I) $$HL + LH = o$$

(II) $$HLH + LHL = o$$

donc $HLH = -LHL = LLH = L^2H = HLL = HL^2$; et de même on voit que

$$LHL = LH^2 = H^2L$$

Les conditions (α), (α'), (β) et (β') où $s=1$ prennent donc la forme

$$\boxed{HLH=0} \qquad \boxed{LHL=0}$$

Ces conditions seront vérifiées si H et L sont orthogonaux ou quasi-orthogonaux, mais ne le seront pas si H et L sont proprement additifs.

47. D'après le théorème que nous avons démontré précédemment, nous pouvons énoncer le corollaire suivant:

Corollaire — *Si deux noyaux* H *et* L *sont additifs, les conditions* A, B *et* C *du chapitre 1 sont vérifiées.*

La relation d'additivité, entre deux noyaux H et L, est donc une relation simple par rapport à la détermination des constantes caractéristiques et des solutions caractéristiques des noyaux H, L et $K=H+L$.

Remarquons que les propositions que nous venons d'établir sont beaucoup plus générales que celles énoncées au n° 43. En effet: d'une part, dans tout ce que nous venons de dire, on n'a pas besoin de supposer que les noyax H, L et K admettent des résolvantes ou que leurs déterminants de Fredholm aient un sens, il suffit que tous les itérés de H, L et K existent; d'autre part, les propositions actuelles nous permettent, par exemple, d'affirmer que toute constante caractéristique de H est une constante caractéristique de K, tandis que d'après le n° 43 on peut seulement affirmer que les constantes fondamentales de H sont des constantes fondamentales de K (voir n° 5).

48. Pour démontrer que, pour deux noyaux additifs H et L, les conditions A, B et C sont vérifiées, il nous a suffit de démontrer que H et L sont hypoorthogonaux; mais on peut démontrer la même proposition sans introduire la notion de noyaux hypoorthogonaux. La marche que nous avons suivie est intéressante en ce qu'elle nous montre que les propriétés que nous venons d'établir proviennent de l'hypoorthogonalité des noyaux additifs, et cela nous permet de savoir quelles sont les relations qui jouent un rôle important dans la démonstration des propriétés en question.

49. Nous allons maintenant montrer que *la notion d'hypoortogonalité est plus générale que celle d'additivité;* pour cela un exemple suffira.

En effet, soit:

$$X_1(M), X_2(M), X_3(M), X_4(M), X_5(M)$$

$$Y_1(P), Y_2(P), Y_3(P), Y_4(P), Y_5(P)$$

un système de fonctions biorthonormé (sur V) c'est-à-dire tel que

$$\int_V X_i(Q)\, Y_j(Q)\, d\, Q = i, j \quad i, j = 1, 2, 3, 4, 5$$

Les deux suites X_i et Y_j sont alors formées de fonctions linéairement indépendantes (sur V). Considérons les deux noyaux:

$$H(M, P) = \frac{X_1(M)\, Y_1(P)}{\lambda_1} + X_4(M)\, Y_3(P) + X_5(M)\, Y_4(P)$$

$$L(M, P) = \frac{X_2(M)\, Y_2(P)}{\lambda_2} + X_4(M)\, Y_3(P) + X_5(M)\, Y_4(P)$$

Montrons d'abord que ces deux noyaux ne sont pas additifs; pour cela il suffira de montrer qu'ils ne vérifient pas la condition:

$$(\mathrm{I}) \quad \int_V H(M, Q)\, L(Q, P)\, d\, Q + \int_V L(M, Q)\, H(Q, P)\, d\, Q = o$$

or:

$$H\,L = \int_V H(M, Q)\, L(Q, P)\, d\, Q = X_5(M)\, Y_3(P)$$

$$L\,H = \int_V L(M, Q)\, H(Q, P)\, d\, Q = X_5(M)\, Y_3(P)$$

donc: H et L ne sont pas additifs. D'autre part, nous avons

$$H^{(2)}(M, P) = \frac{X_1(M)\, Y_1(P)}{\lambda^2_1} + X_5(M)\, Y_3(P)$$

$$L^{(2)}(M, P) = \frac{X_2(M)\, Y_2(P)}{\lambda^2_2} + X_5(M)\, Y_3(P)$$

Il est maintenant facile de voir que:

$$H^2 L = L H^2 = L^2 H = H L^2 = o$$

donc H et L sont en involution de première espèce.

Posons

$$K(M, P) = H + L = \frac{X_1(M)\, Y_1(P)}{\lambda_1} + \frac{X_2(M)\, Y_2(P)}{\lambda_2} +$$
$$+ 2\, X_4(M)\, Y_3(P) + 2\, X_5(M)\, Y_4(P)$$

on voit immédiatement que:

$$H L K = L H K = o$$

$$K H L = K L H = o$$

donc H et L sont en involution de seconde espèce et par conséquent ils sont hypoorthogonaux.

50. — L'exemple précédent nous montre encore que *la décomposition: $K(M, P) = H(M, P) + L(M, P)$, peut être une décomposition caractéristique sans que les deux noyaux* H *et* L *soient additifs.* En effet, il est facile de voir que: 1°) le noyau $H(M, P)$ a une seule constante caractéristique λ_1 à laquelle correspondent respectivement les solutions à droite et à gauche $X_1(M)$ et $Y_1(P)$; 2°) le noyau $L(M, P)$ a une seule constante caractéristique λ_2 à laquelle correspondent respectivement les solutions à droite et à gauche $X_2(M)$ et $Y_2(P)$. Les deux noyaux H et L étant hypoorthogonaux on en déduit (*si* $\lambda_1 \neq \lambda_2$) que: 1°) $H(M, P)$ est un noyau caractéristique de $K(M, P)$ relatif à λ_1; 2°) $L(M, P)$ est un noyau caractéristique de $K(MP)$ relatif à λ_2, et ceci sans que H et L soient additifs.

Une décomposition de la forme $K = H + L$ peut donc être caractéristique sans que H et L soient additifs. Par conséquent l'additivité de H et L (et à fortiori l'orthogonalité des mêmes noyaux) joue un rôle important mais ne s'impose pas immédiatement dans l'étude des décompositions caractéristiques. Pour comprendre l'importance de la notion d'additivité il faut étudier l'équation de Fredholm non homogène.

2 — Application à l'équation non homogène

51. — Nous supposerons, pour simplifier, que la théorie classique de Fredholm est apllicable aux équations que nous allons étudier. Considérons donc les deux équations

$$X_1(M) = f(M) + \lambda \int_V H(M, Q)\, X_1(Q)\, dQ \tag{32}$$

$$X_2(M) = f(M) + \lambda \int_V L(M, Q)\, X_2(Q)\, dQ \tag{33}$$

qu'on peut écrire sous la forme abrégée:

$$X_1 = f + \lambda\,[H, X_1] \tag{32}$$

$$X_2 = f + \lambda\,[L, X_2] \tag{33}$$

Considérons encore l'équation:

$$X = f + \lambda\,[H + L, X] \tag{34}$$

Si λ n'est une constante fondamentale [1] pour aucun des trois noyaux H, L et $H + L$ (ce qui arrive par exemple si $|\lambda|$ est suffisamment petit) les solutions des trois équations précédentes seront données par:

$$X_1 = f + \lambda\,[R(H; \lambda), f] \tag{32'}$$

$$X_2 = f + \lambda\,[R(L; \lambda), f] \tag{33'}$$

$$X = f + \lambda\,[R(H + L; \lambda), f] \tag{34'}$$

Si les deux noyaux H et L sont additifs nous aurons:

$$(S')\ R(H + L; \lambda) = R(H; \lambda) + R(L; \lambda)$$

Dans ces conditions l'expression (34') devient

$$X = f + \lambda\,[R(H; \lambda), f] + \lambda\,[R(L; \lambda), f]$$

---

[1] Ici, nous appelons constante fondamentale d'un noyau $K(M, P)$, toute racine de l'équation $D_K(\lambda) = 0$.

ou d'après (32′) et (33′)

$$X = X_1 + X_2 - f$$

ce qu'on peut écrire d'une façon plus systématique:

$$\boxed{X - f = (X_1 - f) + (X_2 - f)} \tag{35}$$

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante:

Lemme — *Si X_1, X_2 et X sont les solutions des équations*

$$X_1 - f = \lambda [H, X_1]$$
$$X_2 - f = \lambda [L, X_2]$$
$$X - f = \lambda [H + L, X]$$

(où λ n'est constante fondamentale pour aucun des noyaux H, L et $H + L$) et si les deux noyaux H et L sont additifs on a la relation

$$\boxed{X - f = (X_1 - f) + (X_2 - f)}$$

où f est quelconque.

Cette proposition sera valable, en particulier, comme l'avait déjà démontré M. B. Heywood, [2 — p. 292] ou [3 — p. 14], si les noyaux H et L sont orthogonaux.

D'après la relation (35), si les deux noyaux H et L sont additifs, la solution X de l'équation (34) est

$$\boxed{X = X_1 + X_2 - f} \tag{36}$$

52. L'additivité des deux noyaux H et L est donc une condition suffisante pour que $X_1 + X_2 - f$ soit la solution de l'équation (34); X_1 et X_2 étant les solutions des équations (32) et (33) et f une fonction quelconque.

Cherchons maintenant les conditions nécessaires et suffisantes pour que la propriété que nous venons d'énoncer soit vérifiée; c'est-à-dire cherchons les conditions nécessaires et suffisantes que doivent vérifier les deux noyaux H et L pour que l'on ait, quel que soit f et λ:

$$(37) \qquad X_1 + X_2 - f = f + \lambda [H + L, X_1 + X_2 - f]$$

où X_1 et X_2 sont les solutions de (32) et (33) données par (32′) et (33′), ce qui suppose évidemment que λ n'est constante fondamentale pour aucun des noyaux H et L. Pour montrer l'importance de la notion d'additivité il nous suffira d'étudier le cas où H, L, K et f sont des fonctions continues. En tenant compte de (32) et (33) la relation (37) peut s'écrire:

$$(37') \qquad [H, X_2 - f] + [L, X_1 - f] = o$$

or d'après (32′) et (33′)

$$X_1 - f = \lambda [R(H; \lambda), f]$$

$$X_2 - f = \lambda [R(L; \lambda), f]$$

Donc (37′) peut encore s'écrire:

$$[H, R(L; \lambda), f] + [L, R(H; \lambda), f] = o$$

ou encore

$$[\{[H, R(L; \lambda)] + [L, R(H; \lambda)]\}, f] = o$$

cette relation doit avoir lieu quelle que soit la fonction $f(M)$. On doit donc avoir

$$(38) \qquad \int_V H(M, Q) R(L(Q, P); \lambda) \, dQ + \\ + \int_V L(M, Q) R(H(Q, P); \lambda) \, dQ = o$$

pour chaque valeur de M et de P fixe (sur V) et quelle que soit la valeur du paramètre λ. Quand $|\lambda|$ est suffisament petit, λ n'est pas constante fondamentale de H et de L. Or, $R(H, \lambda)$ et $R(L, \lambda)$ sont des fonctions holomorphes en λ au voisinage de l'origine; on doit donc avoir pour chaque valeur de M et P fixes (sur V).

$$(39) \qquad \int_V H(M, Q)\, L^{(n)}(Q, P)\, d\, Q + \\ + \int_V L(M, Q)\, H^{(n)}(Q, P)\, d\, Q = o$$

où $n = 1, 2, 3, \ldots.$

Or les conditions (39) pour $n = 1$ et 2 sont précisément des conditions nécessaires et suffisantes pour que H et L soient additifs. Dans le cas de la continuité des noyaux nous pouvons énoncer le théorème suivant:

Théorème II — *Si* H *et* L *sont deux noyaux continus et si* X_1 *et* X_2 *sont les solutions des équations:*

$$X_1 - f = \lambda\, [H, X_1]$$

$$X_2 - f = \lambda\, [L, X_2]$$

où f *est une fonction continue; pour que la solution* X *de l'équation*

$$X - f = \lambda\, [H + L, X]$$

vérifie, quels que soient f *et* λ, *la relation*

$$X - f = (X_1 - f) + (X_2 - f)$$

il faut et il suffit que H *et* L *soient deux noyaux additifs.*

Voici donc une propriété que caractérise les noyaux additifs dans le cas de la continuité. Ce que nous venons de dire, nous montre aussi qu'on pourrait être conduit à considérer les noyaux additifs en étudiant le problème posé précédemment.

CHAPITRE V

Sur la forme du noyau le plus général additif à un noyau de rang fini donné

§ 1 — **Préliminaires**

53. Nous venons de voir le rôle joué par les noyaux additifs dans la théorie de l'équation intégrale de FREDHOLM. Nous savons d'autre part que les noyaux orthogonaux sont toujours additifs. Comme nous connaissons des exemples de noyaux orthogonaux, on a par conséquent des exemples de noyaux additifs, mais nous n'avons pas encore donné un exemple de deux noyaux additifs qui ne soient pas orthogonaux, ce qui est nécessaire pour montrer que *la notion d'additivité est plus générale que celle d'orthogonalité.* Ce que nous allons dire dans ce chapitre nous permettra d'aborder la recherche d'un tel exemple, bien qu'il soit possible de l'indiquer directement.

54. Considérons un noyau $H\ (M,P)$ de *rang fini,* c'est-à-dire un noyau, défini sur V, de la forme:

$$(m) \qquad H(M,P) = \sum_{i=1}^{m} U_i\ (M)\, V_i\ (P).$$

Pour simplifier, nous pouvons supposer que les U_i et les V_i sont des fonctions continues sur V. Nous dirons que ce noyau est de rang m si les fonctions $U_i\ (M)$ sont linéairement indépendantes, sur V, et si la même propriété a lieu pour les fonctions $V_i\ (P)$; s'il en est ainsi, nous dirons que $H\ (M,P)$ est écrit sous la *forme réduite.* En général le rang de $H\ (M,P)$, donné sous la forme (m), n'est pas égal à $m,$ mais on peut toujours écrire H sous la forme réduite

$$(r) \qquad H(M,P) = \sum_{h=1}^{r} A_h\,(M)\, B_h\,(P) \text{ avec } r \leq m$$

où les A_h et les B_h sont respectivement des combinaisons linéaires, convenablement choisies, des U_i et des V_i. On peut même préciser encore. A cet effet, considérons les fonctions:

$$A_1(M), A_2(M), \ldots, A_r(M), \overline{B_1(M)}, \overline{B_2(M)}, \ldots, \overline{B_r(M)}$$

si $H \neq o$, elles définissent, dans l'espace des fonctions continues, une variété linéaire à n dimensions M^n (où $r \leq n \leq 2r$). Dans ces conditions il existe, voir Stone [1-p. 12], une suite

$$X_1(M), X_2(M), \ldots, X_n(M)$$

de fonctions, appartenant à R^n, qui sont orthonormées sur V, c'est-à-dire telles que:

$$\int_V X_i(Q)\,\overline{X_j(Q)}\,dQ = \delta_{i,j}.$$

Alors on peut écrire:

$$A_h(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{h,i} X_i(M)$$

$$B_h(P) = \sum_{j=1}^{n} \beta_{h,j} \overline{X_j(P)}$$

et nous aurons:

$$H(M,P) = \sum_{h=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{h,i} X_i(M)\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_{h,j} \overline{X_j(P)}\right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\sum_{h=1}^{n} \alpha_{h,i}\beta_{h,j}\right) X_i(M)\,\overline{X_j(P)}$$

Posons

$$\boxed{a_{i,j} = \sum_{h=1}^{n} \alpha_{h,i}\beta_{h,j}}$$

Nous voyons que *tout noyau $H(M, P)$ de rang fini r,* peut toujours s'écrire sous la forme:

$$(40) \qquad \boxed{H(M,P) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} X_i(M) \overline{X_j(P)}}$$

Nous dirons dans ce cas que $H(M, P)$ est écrit sous *la forme orthonormale.*

Remarque — Pour que l'on ait $n = r$ il faut et il suffit que les fonctions A_h et $\overline{B}_h$ définissent une même variété linéaire R^r, ce qui n'a pas lieu dans le cas général. Si $n = r$ nous dirons que le *noyau $H(M, P)$* est *régulier.* Sauf dans ce cas exceptionnel nous aurons toujours $n > r$. Dans le chapitre III nous aurons à nous occuper des noyaux de rang fini qui sont réguliers; comme exemple de tels noyaux nous pouvons indiquer les noyaux symétriques de rang fini.

55. Tout noyau $H(M, P)$ de rang fini r peut toujours s'écrire sous la *forme biorthonormale:*

$$(41) \qquad \boxed{H(M,P) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} X_i(M)\, Y_j(P)} \quad \text{où } n \geqq r$$

où

$$X_1(M), X_2(M), \ldots\ldots, X_n(M)$$

$$Y_1(P), Y_2(P), \ldots\ldots, Y_n(P)$$

est un système, convenablement choisi, de fonctions biorthonormées (sur V), c'est-à-dire telles que:

$$(42) \qquad \boxed{\int_V X_i(Q)\, Y_j(Q)\, dQ = \delta_{i,j}}$$

il suffit pour cela de poser, par exemple, $Y_j(P) = \overline{X_j(P)}$ dans l'expression (40) de H.

Ceci étant, nous proposons de déterminer la forme du noyau $L(M, P)$ le plus général additif à $H(M, P)$.

Remarque — En général un noyau $H(M, P)$, de rang fini r, peut s'écrire de plusieurs manières sous une forme biorthonormale. La forme orthonormale (40) est une forme biorthonormale particulière, et elle s'écrit au moyen de 2 n fonctions $X_1, X_2, \ldots, X_n, \overline{X}_1, \overline{X}_2 \ldots, \overline{X}_n$, (où $n \geq r$). Il peut arriver (si $n > r$) que l'on puisse écrire $H(M, P)$ sous une forme biorthonormale avec moins de 2 n fonctions. Il en est ainsi, s'il n'existe aucune combinaison linéaire des $A_h(M)$ à coefficients constants (l'un au moins n'étant pas nul) qui soit orthogonale à tous les $B_h(P)$ et inversement. Dans ce cas on peut trouver, voir par exemple GOURSAT [4 — p. 392] un système biorthonormé formé de 2 r fonctions: $X_1, X_2, \ldots, X_r, Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$ tel que les A_h soient des combinaisons linéaires des X_1 à coefficients constants et les B_h des combinaisons linéaires des Y_j.

§ 2 — Étude d'un cas particulier

56. Pour commencer, nous allons d'abord déterminer le noyau le plus général $L_0(M, P)$ de la forme:

$$(43) \qquad \boxed{L_0(M, P) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{i,j} X_i(M)\, Y_j(P)}$$

qui est *additif* à $H(M, P)$. Nous verrons plus loin que le noyau le plus général $L(M, P)$, de rang fini ou non, additif à $H(M, P)$ n'est pas de la forme (43); mais nous verrons (N° 61) qu'il peut toujours s'écrire sous la forme d'une somme de deux noyaux dont l'un est de la forme (43) et additif à $H(M, P)$.

Pour que H et L_0 soient additifs, il faut et il suffit que l'on ait, en notation symbolique:

$$(44) \qquad H L_0 + L_0 H = 0$$

$$(45) \qquad H L_0 H + L_0 H L_0 = 0$$

Calculons:

$$H L_0 = \int_V H(M, Q)\, L_0(Q, P)\, dQ =$$

$$= \int_V \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} X_i(M)\, Y_j(Q) \right) \cdot \left(\sum_{h,k=1}^{n} b_{h,k} X_h(Q)\, Y_k(P) \right) dQ$$

ou d'après (41)

$$H L_0 = \sum_{i,j,k=1}^{n} a_{i,j} b_{j,k} X_i(M)\, Y_k(P)$$

ce qu'on peut encore écrire, en changeant les notations:

$$(46) \qquad HL_0 = \sum_{h,k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{h,i} b_{i,k} \right) X_h(M)\, Y_k(P)$$

On verrait de même que:

$$(47) \qquad L_0 H = \sum_{h,k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} b_{h,i} a_{i,k} \right) X_h(M)\, Y_k(P)$$

$$(48) \qquad HL_0 H = \sum_{h;k=1}^{n} \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{h,i} b_{i,j} a_{j,k} \right) X_h(M)\, Y_k(P)$$

$$(49) \qquad L_0 H L_0 = \sum_{h,k=1}^{n} \left(\sum_{i,j=1}^{n} b_{h,i} a_{i,j} b_{j,k} \right) X_h(M)\, Y_k(P).$$

En remplaçant les expressions (46), (47), (48) et (49) dans les relations (44) et (45), on voit immédiatement que celles-ci sont équivalentes aux conditions algébriques:

$$(44') \qquad \boxed{\sum_{i=1}^{n} a_{h,i} b_{i,k} + \sum_{i=1}^{n} b_{h,i} a_{i,k} = o} \quad h, k = 1, \ldots, n$$

$$(45') \qquad \boxed{\sum_{i,j=1}^{n} a_{h,i} b_{i,j} a_{j,k} + \sum_{i,j=1}^{n} b_{h,i} a_{i,j} b_{j,k} = o} \quad h, k = 1, \ldots, n.$$

57 Les matrices additives — Soit $A = \| a_{h,k} \|$ la matrice d'ordre n constitué par les éléments $a_{i,j}$ et B la matrice $\| b_{h,k} \|$. Les conditions précédentes (44′) et (45′) peuvent alors s'écrire sous la forme:

$$(I') \qquad \boxed{AB + BA = o}$$

$$(II') \qquad \boxed{ABA + BAB = o}$$

Ces deux conditions sont tout à fait analogues aux conconditions (I) et (II) que nous avons trouvées précédemment comme conditions nécessaires et suffisantes pour que deux noyaux $H(M, P)$ et $L(M, P)$ soient additifs. Nous pouvons donc convenir de dire, par analogie, que *deux matrices* A *et* B *sont additives lorsqu'elles vérifient les deux conditions* (I′) *et* (II′), mais cette analogie n'est pas simplement verbale et formelle. Il serait en effet facile de démontrer que les matrices additives ont des propriétés tout à fait analogues à celles que nous avons démontrées pour les noyaux additifs. Nous ne le ferons pas pour abréger l'exposition et nous renvoyons à un travail que nous publierons ailleurs.

58. D'après ce qui précède nous pouvons énoncer la proposition suivante:

Lemme I — *Pour que les deux noyaux*

$$H(M,P) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} X_i(M)\, Y_j(P)$$

et

$$L_0(M,P) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{i,j} X_i(M)\, Y_j(P)$$

où les X_i *et les* Y_i *forment un système de fonctions biorthonormées (sur* V*), soient additifs (sur* V*), il faut et il suffit que les deux matrices d'ordre* n : $A = \| a_{h,k} \|$ *et* $B = \| b_{h,k} \|$ *soient additives.* C'est-à-dire: pour déterminer le noyau $L_0(M,P)$ de plus général additif à $H(M,P)$ il faut et il suffit de savoir déterminer la matrice B la plus générale additive à la matrice A; c'est ce que nous ferons dans le chapitre VI pour certains cas particuliers qui nous serons utiles par la suite.

§ 3 — Étude du cas général

59. Revenons maintenant à la détermination du noyau $L(M,P)$ le plus général additif à un noyau $H(M,P)$ de la forme (42).

Pour que H et L soient additifs il faut et il suffit que l'on ait:

$$(I)\quad \int_V H(M,Q)\,L(Q,P)\,dQ + \int_V L(M,Q)\,H(Q,P)\,dQ = o$$

$$(II)\quad \iint_V H(M,Q)\,L(Q,R)\,H(R,P)\,dQ\,dR + \iint_V L(M,Q)\,H(Q,R)\,L(R,P)\,dQ\,dR = o$$

La condition (I) s'écrit, d'après (42):

$$(50)\qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} X_i(M) \int_V Y_j(Q)\,L(Q,P)\,dQ + \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\,Y_j(P) \int_V L(M,Q)\,X_i(Q)\,dQ = o$$

Posons, pour simplifier:

$$(51)\qquad c_{i,j} = \int_V Y_i(Q)\,L(Q,R)\,X_j(R)\,dQ\,dR$$

et soit $C = \| c_{i,j} \|$ la matrice formée par les nombres $c_{i,j}$ Multiplions les deux membres de l'équation (50) par $X_h(P)\,Y_k(M)\,dM\,dQ$ et intégrons sur le domaine V. On aura:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} \int_V X_i(M)\,Y_k(M)\,dM \int_V Y_j(Q)\,L(Q,P)\,X_h(P)\,dQ\,dP + \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} \int_V Y_j(P)\,X_h(P)\,dP \int_V Y_k(M)\,L(M,Q)\,X_i(Q)\,dQ = o$$

Comme les fonctions X_i et Y_j sont biorthonormées, l'expression précédente s'écrit, en tenant compte de (51):

$$\sum_{j=1}^{n} a_{k,j}\,c_{j,h} + \sum_{i=1}^{n} a_{i,h}\,c_{k,i} = o \qquad h, k = 1, 2, \ldots, n$$

ou, en changeant les notations:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_{h,i}c_{i,k} + \sum_{i=1}^{n} c_{h,i}a_{i,k} = o} \qquad h, k = 1, 2, \ldots, n$$

c'est-à-dire: la matrice C vérifie la condition

$$\boxed{AC + CA = o}$$

De la même manière on démontre que la condition (II) entraîne

$$\boxed{ACA + CAC = o}$$

Les deux conditions précédentes expriment précisément que la matrice C est additive à A.

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante:

Lemme II — *Si* L(M, P) *est le noyau le plus général additif au noyau*

$$H(M, P) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} X_i(M) Y_j(P)$$

défini sur le domaine V, *où les fonctions* X_i (M) *et* Y_j (P) *forment un système biorthonormé sur* V, *la matrice, d'ordre* n, $C = \| c_{j,i} \|$ *où*

$$c_{i,j} = \iint_V Y_i(M) L(M, P) X_j(P) \, d\mathrm{M} \, dP$$

est une matrice additive à la matrice A.

60. Il nous sera commode (voir le corollaire énoncé plus loin) de chercher s'il est possible d'écrire le noyau $L(M, P)$ sous la forme:

$$(52) \qquad L(M, P) = \sum_{i,j=1}^{n} e_{i,j} X_i(M) Y_j(P) + \mathfrak{L}(M, P)$$

les constantes $e_{i,j}$ étant choisies de telle façon que:

$$(53)\quad \iint_V Y_i(M)\,\mathfrak{L}(M,P)\,X_j(P)\,dM\,dP = o \qquad i,j=1,2,\ldots,n$$

Posons

$$E = \| e_{i,j} \|$$

et cherchons à déterminer les constantes $e_{i,j}$ de telle façon que les conditions (53) soient vérifiées. Pour cela il faut et il suffit que l'on ait:

$$\iint_V Y_i(M)\left[L(M,P) - \sum_{h,k=1}^{n} e_{h,k}\,X_h(M)\,Y_k(P)\right] X_j(P)\,dM\,dP = o$$

$$(i,j=1,2,\ldots,n)$$

ou

$$\iint_V Y_i(M)\,L(M,P)\,X_j(P)\,dM\,dP - \sum_{h,k=1}^{n} e_{h,k} \int_V Y_i(M)\,X_h(M)\,dM \,.\, \int_V Y_k(P)\,X_j(P)\,dP = o$$

$$(i,j=1,2,\ldots,n)$$

ou finalement, d'après (41) et (51):

$$c_{i,j} = e_{i,j} \qquad (i,j=1,2,\ldots,n)$$

c'est-à-dire:

$$\boxed{E = C}$$

Nous pouvons par conséquent énoncer la proposition suivante:

Lemme III — *Soit* L(M, P) *un noyau additif au noyau de rang fini*

$$H(M,P) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\,X_i(M)\,Y_j(P)$$

défini sur un domaine V, *où les fonctions* $X_i(M)$ *et* $Y_j(P)$ *forment un système biorthonormé sur* V. *Si nous posons*

$$L(M,P) = \sum_{i,j=1}^{n} c_{i,j} X_i(M) Y_j(P) + \mathfrak{L}(M,P)$$

pour que l'on ait:

$$\int_V Y_i(M) \mathfrak{L}(M,P) X_j \, dM \, dP = o \quad (i,j = 1, 2, \ldots, n)$$

il faut et il suffit que:

$$e_{i,j} = c_{i,j} = \iint_V Y_i(M) L(M,P) X_j(P) \, dM \, dP$$

on en déduit immédiatement que:

Corollaire — *Le noyau le plus général* L (M, P) *additif à* H (M, P) *peut toujours s'écrire sous la forme:*

$$L(M,P) = \sum_{i,j=1}^{n} c_{i,j} X_i(M) Y_j(P) + \mathfrak{L}(M,P)$$

où

$$c_{i,j} = \iint_V Y_i(M) L(M,P) X_j(P) \, dM \, dP \qquad (i,j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$o = \iint_V Y_i(M) \mathfrak{L}(M,P) X_j(P) \, dM \, dP$$

la matrice $C = \| c_{h,k} \|$ *étant additive à la matrice* $A = \| a_{h,k} \|$.

61. Posons pour simplifier

$$\boxed{l(M,P) = \sum_{i,j=1}^{n} c_{i,j} X_i(M) Y_j(P)} \tag{54}$$

alors on peut écrire:

$$\boxed{L(M,P) = l(M,P) + \mathfrak{L}(M,P)} \tag{55}$$

Comme nous l'avons vu, la matrice $C = \| c_{i,j} \|$ étante additive à $A = \| a_{i,j} \|$, on peut affirmer d'après le Lemm I (N° 58) que les deux noyaux $H(M,P)$ et $l(M,P)$ sont additifs, c'est-à-dire: nous aurons en notation symbolique

$$[H, l] + [l, H] = o \tag{56}$$

$$[H, l, H] + [l, H, l] = o \tag{57}$$

Nous allons maintenant démontrer que $\mathfrak{L}\ (M,P)$ est orthogonal à $H\ (M,P)$.

Remarquons que:

$$\int_V H(M,Q)\,\mathfrak{L}(Q,P)\,d\,Q = \sum_{\alpha, j=1}^{n} a_{\alpha,j} X_\alpha(M) \int_V Y_j(Q)$$

$$\mathfrak{L}(Q,P)\,d\,Q = \sum_{\alpha=1}^{n} X_\alpha(M) \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{\alpha,j} \int_V Y_j(Q)\,\mathfrak{L}(Q,P)\,d\,Q \right\}$$

de même on voit que:

$$\int_V \mathfrak{L}(M,Q)\,H(Q,P)\,d\,Q = \sum_{\alpha=1}^{n} Y_\alpha(P) \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_{i,\alpha} \right.$$

$$\left. \int_V \mathfrak{L}(M,Q)\,X_i(Q)\,d\,Q \right\}$$

Comme les X_α (bien comme les Y_α) sont linéairement indépendantes sur V, pour démontrer que H et $\mathfrak{L}$ sont orthogonaux il faut et il suffit de démontrer que l'on a:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{\alpha,j} \int_V Y_j(Q)\,L(Q,P)\,d\,Q = o \tag{58}$$

$$\alpha = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,\alpha} \int_V L(M,Q)\,X_i(Q)\,d\,Q = o \tag{59}$$

Pour cela remarquons que si L est le noyau, le plus général, additif à H, on aura:

$$[H, L] + [L, H] = o$$

ou d'après (55)

$$[H, l + \mathfrak{L}] + [l + \mathfrak{L}, H] = o$$

ou en tenant compte de (56):

$$[H, \mathfrak{L}] + [\mathfrak{L}, H] = o$$

ce qu'on peu écrire:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} X_i(M) \int_V Y_j(Q) \mathfrak{L}(Q, P)\, dQ +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} Y_j(P) \int_V \mathfrak{L}(M, Q) X_i(Q)\, dQ = o$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par $Y_\alpha(M)$ dM et intégrons sur V, on aura:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} \int_V X_i(M)\, Y_\alpha(M)\, dM. \int_V Y_j(Q) \mathfrak{L}(Q, P)\, dQ +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} Y_j(P) \int_V Y_\alpha(M) \mathfrak{L}(M, Q)\, X_i(Q)\, dQ = o$$

ou encore, en tenant compte de (41) et (53)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{\alpha,j} \int_V Y_j(Q) \mathfrak{L}(Q, P)\, dQ = o$$

ce qui démontre l'égalité (58). De la même manière on démontre l'égalité (59) et nous aurons par conséquent;

$$[H, \mathfrak{L}] = [\mathfrak{L}, H] = o$$

Maintenant il est facile de voir que:

$$[H, L] = [H, l + \mathfrak{L}] = [H, l]$$

de même

$$[L, H] = [l, H]$$
$$[H, L, H] = [H, l, H]$$
$$[L, H, L] = [l, H, l]$$

c'est-à-dire pour que l'on ait:

$$H L + L H = o$$
$$H L H + L H L = o$$

il faut et il suffit que

$$H l + l H = o$$
$$H l H + l H l = o$$

nous pouvons donc prendre pour l le noyau le plus général additif à H. Nous aurons donc:

$$l(M, P) = L_o(M, P) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{i,j} X_i(M) Y_j(P)$$

Théorème I — *Le noyau* L(M, P) *le plus général, additif à un noyau* H(M, P) *de rang fini* r, *peut toujours s'écrire sous la forme* $\mathrm{L}(\mathrm{M}, \mathrm{P}) = \mathrm{L}_o(\mathrm{M}, \mathrm{P}) + \mathfrak{L}(\mathrm{M}, \mathrm{P})$, *où* $\mathrm{L}_o(\mathrm{M}, \mathrm{P})$ *est un certain noyau de rang fini additif à* H(M, P) *et où* $\mathfrak{L}(\mathrm{M}, \mathrm{P})$ *est le noyau le plus général orthogonal à* H(M, P). *Si* H(M, P) *est écrit sous une forme biorthonormale*

$$H(M, P) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} X_i(M) Y_j(P) \tag{41}$$

on peut prendre pour $\mathrm{L}_o(\mathrm{M}, \mathrm{P})$ *le noyau le plus général de la même forme*

$$L_o(M, P) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{i,j} X_i(M) Y_j(P) \tag{43}$$

qui est additif à H(M, P).

62. D'après ce que nous avons vu dans le N° 61, si L est le noyau le plus général additif à H, nous aurons, en remarquant que $l = L_0$:

$$\begin{aligned} HL &= HL_0 \\ LH &= L_0 H \\ HLH &= HL_0 L \\ LHL &= L_0 H L_0, \end{aligned}$$

donc: pour que L ne soit pas orthogonal à H il faut et il suffit que L_0 ne soit pas orthogonal à H. La recherche d'un noyau additif et non orthogonal à un noyau de la forme (41), se réduit donc à la recherche d'un noyau de la forme (43) additif et non orthogonal à $H(M, P)$.

D'après le lemme I énoncé dans le N° 58, pour déterminer $L_0(M, P)$ il suffit de déterminer la matrice $B = \| b_{i,j} \|$ la plus générale additive à $A = \| a_{i,j} \|$. Nous étudierons ce problème dans le chapitre suivant, mais nous ne nous occuperons que des cas particuliers qui nous intéresseront par la suite.

63. Pour que le noyau L_0 soit orthogonal à H il faut et il suffit que:

$$[H, L_0] = \sum_{h,k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{h,i} b_{i,k} \right) X_h(M)\, Y_k(P) = o$$

$$[L_0, H] = \sum_{h,k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} b_{h,i} a_{i,k} \right) X_h(M)\, Y_k(P) = o$$

Pour qu'il en soit ainsi, comme les fonctions X_h et Y_k sont linéairement indépendentes, il faut et il suffit que l'on ait:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{h,i} b_{i,k} + \sum_{i=1}^{n} b_{h,i} a_{i,k} = o$$

c'est-à-dire: il faut et il suffit que les deux matrices A et B vérifient les deux conditions

$$AB = BA = o$$

S'il en est ainsi nous dirons que A et B sont *deux matrices orthogonales*.

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante:

Théorème II — *Pour que les deux noyaux* H *et* L_0 *soient orthogonaux il faut et il suffit que les deux matrices* A *et* B *soient orthogonales.*

Donc, la recherche d'un noyau de la forme L_0 additif et non orthogonal à H, se réduit à la recherche d'une matrice B additive et non orthogonale à A. On verrait de même que pour que l'on ait:

$$[H, L_0, H] = [L_0, H. L_0] = o$$

il faut et il suffit que les deux matrices A et B vérifient les deux conditions

$$\boxed{A B A = B A B = o}$$

Nous dirons que *deux matrices* additives A et B sont *quasi-orthogonales* si

$$A B = - B A \neq o$$
$$A B A = B A B = o$$

et nous dirons qu'elles sont *proprement additives* si

$$A B = - B A \neq o$$
$$A B A = - B A B \neq o$$

D'après ce qui précède pour que les deux noyaux H et L_0 soient quasi-orthogonaux ou proprement additifs il faut et il suffit que les deux matrices A et B soient respectivement quasi-orthogonales ou proprement additives.

CHAPITRE VI

Sur les matrices additives à une matrice donnée

§ 1 — Préliminaires

64. Soit A une matrice carrée donnée, d'ordre n [1]:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{Vmatrix} = \| a_{i,j} \|$$

Nous allons chercher toutes les ~~matrices~~ B, du même ordre, additives à la matrice A, c'est-à-dire (nº 57): A étant donnée nous allons chercher les matrices de la forme:

$$B = \begin{Vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \dots & b_{n,n} \end{Vmatrix} = \| b_{i,j} \|$$

qui vérifient les deux conditions:

$$(I') \qquad AB + BA = o$$

$$(II') \qquad ABA + BAB = o.$$

---

(1) Pour les propriétés de ces matrices, que nous aurons à utiliser ici, voir par exemple: TURNBULL et AITKEN [1], WEDDERBURN [1].

Ce problème pouvait se poser, indépendamment des applications, dans la théorie des matrices; nous y avons, au contraire, été conduits directement en étudiant une question relative à la théorie des équations intégrales de FREDHOLM.

La résolution de cette question présente donc, pour nous, un double interet.

65. Les conditions (I') et (II') peuvent s'écrire, sous la forme:

$$(I') \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{h,i} b_{i,k} + \sum_{i=1}^{n} b_{h,i} a_{i,k} = o$$

$$(II') \qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{h,i} b_{i,j} a_{j,k} + \sum_{i,j=1}^{n} b_{h,i} a_{i,j} b_{j,k} = o$$

où:

$$h, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Nous avons donc à résoudre un système de $2n^2$ équations à n^2 inconnues $b_{h,k}$. Les n^2 prémières équations sont du premier degré et les n^2 suivantes sont du deuxième degré par rapport aux inconnues $b_{h,k}$.

L'étude directe de cette question se présente donc sous une forme qui n'est pas très simple.

66. Nous allons commencer par démontrer un théorème qui est intéressant en lui même mais qui nous permettra aussi en même temps de simplifier la résolution du système (I') et (II').

Soit S une matrice dont le déterminant est différent de zéro.

Considérons les transformées des deux matrices A et B au moyen de la matrice S:

$$A' = S^{-1} A S$$

$$B' = S^{-1} B S.$$

Théorème I — *Si deux matrices* A *et* B *sont additives, leurs transformées* A' *et* B' *au moyen d'une même matrice* S, *sont aussi additives.*

En effet, pour que A' et B' soient additives, il faut et il suffit que:

$$(I'') \qquad A'B' + B'A' = o$$

$$(II'') \qquad A'B'A' + B'A'B' = o$$

La condition (I'') peut s'écrire:

$$S^{-1}ASS^{-1}BS + S^{-1}BSS^{-1}AS = o$$

ou

$$S^{-1}ABS + S^{-1}BAS = o$$

ou encore:

$$(I'') \qquad S^{-1}(AB + BA)S = o$$

La condition (II'') peut s'écrire de même:

$$(II'') \qquad S^{-1}(ABA + BAB)S = o$$

Si les matrices A et B sont additives, les conditions (I') et (II') étant vérifiées, les conditions (I'') et (II'') le seront aussi, ce qui démontre le théorème.

L'additivité de deux matrices A *et* B *est donc une propriété qui reste invariante pour toutes les matrices que l'on peut déduire de* A *et* B, *en les transformant au moyen d'une même matrice* S, *à déterminant différent de zéro.* Nous verrons plus loin que cette remarque nous permetra de simplifier la détermination de toutes les matrices B additives à A.

Nous allons nous borner pour le moment à faire la remarque suivante. Soient A' et B' les transformées des matrices A et B dont nous avons parlé précédemment. A étant donnée et A' étant une transformée bien déterminée de A, supposons que l'on sache déterminer toutes les matrices B'' additives à A'. Dans ces conditions, je dis que nous saurons aussi déterminer toutes les matrices B additives à A. En effet, soit B''_0 une des matrices additives à A', alors les deux matrices:

$$B_0 = SB''_0S^{-1}$$
$$A = SA'S^{-1}$$

seront aussi additives, d'après le théorème I. Donc: étant donnée une matrice B''_0 additive à A', nons savons en déduire une matrice B_0 additive à A. Il nous reste à montrer qu'on obtient ainsi toutes les matrices B additives à A. Pour cela il suffit de montrer que toute matrice B_0 additive à A est la transformée d'une matrice B''_0 additive à A':

$$B_0 = S B''_0 S^{-1}$$

En effet soit B_0 une matrice additive à A. La matrice:

$$B'_0 = S^{-1} B_0 S$$

est additive à la matrice:

$$A' = S^{-1} A S$$

Donc parmi les matríces B'', additives à A', il en existe une B'_0 dont la transformée

$$S B'_0 S^{-1} = S S^{-1} B_0 S S^{-1} = B_0$$

est la matrice B_0. Nous avons donc: $B'_0 = B''_0$, et notre proposition est démontrée. On peut encore remarquer que deux matrices différentes B''_1 et B''_2 additives à A' sont les transformées

$$B''_1 = S^{-1} B_1 S$$
$$B''_2 = S^{-1} B_2 S$$

de deux matrices différentes et bien déterminées B_1 et B_2 additives à A; donc les deux ensembles de matrices que nous avons representés par les lettres B' et B'' coïncident.

Les matrices B' étant déterminées, pour obtenir les B, il suffit d'effectuer sur les B' la transformation inverse de celle que nous avons utilisé pour passer de A à A'. Nous pourrons donc simplifier la résolution de notre problème s'il est possible de choisir S de telle façon que A' soit une matrice ayant une forme plus simples que A.

67. On appele déterminant caractéristique relatif à une matrice A, le déterminant:

$$\triangle(\lambda) = | \lambda E - A |$$

où E désigne la matrice unité (d'ordre n) et λ un paramètre. L'équation de degré n en λ

$$\triangle(\lambda) = o$$

s'appele *équation caractéristique* de A. Les racines de cette équation sont ce que nous appelerons dans la suite: *les racines de la matrice* A. Soit $\lambda = c$ une racine, d'ordre de multiplicité $r \leqq n$, de l'équation caractéristique de A. Soit $\triangle_1(\lambda)$ un mineur quelconque d'ordre $n-1$ de $\triangle(\lambda)$ et soit s_1 le plus petit ordre de multiplicité de $\lambda = c$, considérée comme racine des équations

$$\triangle_1(\lambda) = o$$

Soit, en général, $\triangle_i(\lambda)$ un mineur quelconque d'ordre $n-i$ (où $i = 1, 2, \ldots, n-1$) et soit s_i le plus petit ordre de multiplicité de $\lambda = c$, considérée comme racine des équations

$$\triangle_i(\lambda) = o$$

On a:

$$r \geqq s_1 \geqq s_2 \ldots$$

Si $s_i > o$, alors $s_i > s_{i+1}$. Soit s_{h-1} le dernier des nombre s_i qui n'est pas nul, on aura:

$$r > s_1 > s_2 > \ldots > s_{h-1}$$

Posons:

$$\begin{gathered} r - s_1 = r_1 \\ s_1 - s_2 = r_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_{h-2} - s_{h-1} = r_{h-1} \\ s_{h-1} = r_h \end{gathered}$$

On en déduit:

$$r = r_1 + r_2 + \ldots + r_h$$

donc:

$$(\lambda - c)^r = (\lambda - c)^{r_1} \cdot (\lambda - c)^{r_2} \ldots (\lambda - c)^{r_h}$$

les facteurs linéaires que figurent au second membre de l'expression précédente s'appelent d'après Weierstrass *les diviseurs élémentaires de l'équation caractéristique de* A.

Associons à chaque diviseur élémentaire $(\lambda - c)^{r_i}$ une matrice carrée d'ordre r_i de la forme:

$$A_{r_i}(c) = \left\| \begin{matrix} c\,o\,o \ldots o\,o\,o \\ 1\,c\,o \ldots o\,o\,o \\ o\,1\,c \ldots o\,o\,o \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ o\,o\,o \ldots c\,o\,o \\ o\,o\,o \ldots 1\,c\,o \\ o\,o\,o \ldots o\,1\,c \end{matrix} \right\|$$

Cette matrice a une seule racine $\lambda = c$ et un seul diviseur élémentaire $(\lambda - c)^{r_i}$. Nous dirons q'une matrice est irréductible si elle a un seul diviseur élémentaire. Une matrice irréductible qui a la forme que nous avons indiquée précédemment sera appelée dans la suite une *matrice canonique irréductible.*

Nous associons donc à chaque diviseur élémentaire une matrice canonique irréductible ayant le même diviseur élémentaire.

Au moyen de ces matrices $A_{r_i}(c)$ nous allons em former une autre que l'on associera à la racine, d'ordre de multiplicité r, $\lambda = c$ de la matrice A, qu'on peut appeler la matrice canonique associée à la racine c; à savoir la matrice de matrices:

$$A(c) = \begin{Vmatrix} A_{r_1}(c) & (o) & \dots & (o) \\ (o) & A_{r_2}(c) & \dots & (o) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (o) & (o) & \dots & A_{r_h}(c) \end{Vmatrix}$$

qu'on peut écrire sous la forme d'une *somme directe* de matrices, suivant la notation de Kreis:

$$A(c) = A_{r_1}(c) \dotplus A_{r_2}(c) \dotplus \dots \dotplus A_{r_h}(c)$$

Dans la matrice de matrices $A(c)$, le symbole (o) représente une matrice nulle carrée ou rectangulaire. La matrice (o) qui se trouve dans la ligne i et dans la colonne $j \neq i$ a r_i lignes et r_j colonnes. Il est facile de voir que la matrice $A(c)$ a les mêmes diviseurs élémentaires $(\lambda - c)^{r_i}$ que A; on peut l'appeler *matrice canonique associée à la racine* c *de* A.

Soient $c_1, c_2, \dots, c_m$ les racines distinctes de A; considérons les matrices canoniques, associées à chacune des ces racines: $A(c_1)$, $A(c_2)$, ..., $A(c_m)$ et contruisons la matrice

$$A' = A(c_1) \dotplus A(c_2) \dotplus \dots \dotplus A(c_m)$$

qu'on peut appeler *matrice canonique associée à* A.

A' a les mêmes racines et les mêmes diviseurs élémentaires que la matrice A. D'après un résultat classique *ou peut passerde la matrice* A *à la matrice* A' *au moyen d'une transformation de la forme:*

$$A' = S\,A\,S^{-1}$$

D'après ce que nous avons dit précédemment: pour déterminer les matrices additives à A, il nous suffit de savoir déterminer les matrices additives à la matrice canonique associée à A'. Quand une matrice est écrite sous la forme A', on dit qu'elle est sous la *forme canonique classique.*

Nous aurons l'ocasion de voir dans le Chapitre suivant que si un noyau $H(M, P)$ est écrit sous une forme biorthonormale (41) on peut toujours, en changeant convenablement des fonctions X_i et Y_j, remplacer la matrice

$A = \| a_{i,j} \|$ par une quelconque des matrices $A' = SAS^{-1}$; nous pouvons par conséquent nous borner à determiner les matrices B additives à la matrice A, dans le cas où celle-ci est écrite sous la forme canonique classique; c'est ce que nous ferons dans la suite.

§ 2 — Étude du cas particulier où la matrice A a un seul diviseur élémentaire.

68. Supposons que la matrice A a un seul diviseur élémentaire $(\lambda - a)^n$. On peut toujours supposer, comme nous l'avons vu, que A est de la forme:

$$a = \left\| \begin{matrix} a & o & o & \dots & o & o & o \\ 1 & a & o & \dots & o & o & o \\ o & 1 & a & \dots & o & o & o \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ o & o & o & \dots & a & o & o \\ o & o & o & \dots & 1 & a & o \\ o & o & o & \dots & o & 1 & a \end{matrix} \right\|$$

La matrice B, à déterminer, doit vérifier les conditions (I') et (II'). Il est très naturel de commencer notre étude par ce cas particulier parce qu'il est le plus simple qui puisse se présenter. Il est utile d'étudier d'abord ce cas particulier pour deux raisons: 1°) parce que l'étude de ce cas particulier va nous guider dans l'étude du cas général 2°) parce que les résultats que nous allons établir, dans l'étude de ce cas particulier, interviennent effectivement dans l'étude du cas général.

La matrice A étant donnée, nous avons à déterminer les matrices B qui vérifient simultanément les conditions (I) et (II). On pourrait donc trouver qu'il ne serait pas très indiqué, au point de vue de la simplicité, de commencer par déterminer d'abord les matrices B que vérifient seulement la condition (I'), pour déterminer ensuite celles, parmi les précédentes, qui vérifient aussi la condition (II'); mais il se trouve que si nous connaissons, au moins dans certains cas, les matrices B qui vérifient seulement la condition (I'), cela nous permettra de simplifier la résolution de notre problème dans le cas général.

Le cas qui nous interessera plus tard c'est justement le cas où la matrice A a un seul diviseur élémentaire.

a) Détermination des matrices B *qui vérifient la condition* (I').

69. Pour que la condition (I') soit vérifiée, il faut et il suffit que l'on ait:

$$(I') \left\{ \begin{array}{c} \sum_{i=1}^{n} a_{h,i} b_{i,k} + \sum_{i=1}^{n} b_{h,i} a_{i,k} = o \\ h, k = 1, 2, 3, \ldots, n \end{array} \right.$$

Or dans le cas actuel nous avons

$$a_{h,k} = \begin{cases} a \text{ si } h = k \\ 1 \text{ si } h = k + 1 \\ o \text{ dans les autres cas} \end{cases}$$

Donc les conditions (I') prennent la forme

$$\sum_{i=h-1}^{i=h} a_{h,i} b_{i,k} + \sum_{i=k}^{i=k+1} b_{h,i} a_{i.k} = o$$

ou encore

$$a_{h,h-1} b_{h-1,k} + a_{h,h} b_{h,k} + b_{h,k} a_{k,k} + b_{h,k+1} a_{k+1,k} = o$$

ou en remplaçant $a_{h,h}$ et $a_{h,h-1}$ par ses valeurs

$$b_{h-1,k} + a b_{h,k} + b_{h,k} a + b_{h,k+1} = o$$

ou finalement

$$(I') \qquad \boxed{\begin{array}{c} 2 a b_{h,k} + b_{h-1,k} + b_{h,k+1} = o \\ h, k = 1, 2, \ldots, n \end{array}}$$

Dans cette expression les indices ne peuvent prendre que les valeurs $1, 2, \ldots, n$. Donc, si pour une certaine valeur de h ou de k, il y a un indice qui prenne une valeur différente de $1, 2, \ldots, n$; cela voudra dire, comme il est du reste facile de vérifier, que le coefficient du terme qui a cet indice, sera nul. Donc quand on donne à h et à k des valeurs particulières, dans l'expression précédente, on doit suprimer les termes qui auraient un de ses indices différents de $1, 2, \ldots, n$. Cette remarque va nous indiquer le chemin à suivre pour déterminer les $b_{i,j}$.

70. Étude du cas où $a \neq o$. — Commençons par remarquer que si l'on pose $h = 1$, les conditions (I') se réduisent à la forme:

$$(I') \text{ pour } h = 1 \begin{cases} 2 a b_{1,k} + b_{1,k+1} = o \\ k = 1, 2, \ldots n, \end{cases}$$

Écrivons ces conditions en posant successivement:

$$k = n, n-1, n-2, \ldots, 3, 2, 1;$$

on aura

$$\begin{array}{lll} 2 a b_{1,n} & & = o \\ 2 a b_{1,n-1} + b_{1,n} & & = o \\ 2 a b_{1,n-2} + b_{1,n-1} & & = o \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 2 a b_{1,j} & + b_{1,j+1} & = o \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 2 a b_{1,2} & + b_{1,3} & = o \\ 2 a b_{1,1} & + b_{1,2} & = o \end{array}$$

d'où l'on déduit successivement

$$b_{1,n} = b_{1,n-1} = b_{1,n-2} = \ldots = b_{1,3} = b_{1,2} = b_{1,1} = o$$

c'est-à-dire:

$$b_{1,j} = o \text{ pour } j = 1, 2, \ldots, n$$

Les éléments de la prémière ligne de la matrice B sont donc tous nuls. Supposons maintenant que les éléments de la $\text{i}^{\text{ème}}$ ligne de la matrice B sont tous nuls, nous allons démontrer que la même propriété aura lieu pour la $(\text{i}+1)^{\text{ème}}$ ligne.

Supposons donc que

$$b_{i,j} = o \quad \text{pour} \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Écrivons la condition (I') en posant $h = i + 1$

$$(I') \text{ pour } h = i + 1 \left\{ \begin{array}{l} 2ab_{i+1,k} + b_{i,k} + b_{i+1,k+1} = o \\ \qquad\qquad k = 1, 2, \ldots n \end{array} \right.$$

ou d'après notre hypothèse

$$2ab_{i+1,k} + b_{i+1,k+1} = o$$

Si nous écrivons cette condition en posant sucessivement

$$k = n, n-1, \ldots, 3, 2, 1;$$

nous voyons immédiatement que

$$b_{i+1,j} = o \quad \text{pour} \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Nous avons donc démontré par récurrence que, dans le cas où $a \neq o$, tous les éléments de la matrice B sont nuls.

Nous avons seulement assujétti B à vérifier la condition

$$(I') \qquad AB + BA = o$$

Si deux matrices vérifient la condition précédente, nous dirons qu'elles sont anti-permutables.

Dans ces conditions, nous avons démontré la proposition suivante:

Lemme I — *La seule matrice anti-permutable avec une matrice canonique* A *ayant un seul diviseur élémentaire correspondant à une racine différente de zéro, c'est la matrice zéro.*

Pour que B soit additive à A, il faut et il suffit que les conditions (I) et (II) soient vérifiées, or toute matrice est additive à la matrice zéro, donc:

Corollaire. — *La seule matrice* B *additive à une matrice canonique* A *ayant un seul diviseur élémentaire correspondant à une racine différente de zéro, c'est la matrice zéro.*

71. Étude du cas où $a=o$. — Dans ce cas, les conditions (I) que nous avons écrit au n° 69 prennent la forme

$$(I') \qquad \boxed{\begin{matrix} b_{h-1,k}+b_{h,k+1}=o \\ h,k=1,2,\ldots,n \end{matrix}}$$

Commençons par poser $h=1$, alors on a

$$b_{1.k+1}=o \quad \text{pour} \quad k=1,2,\ldots,n$$

on en déduit

$$\boxed{b_{1,j}=o \quad \text{pour} \quad j=2,3,\ldots,n}$$

Posons $b_{1,1}=b_1$.
Posons maintenant $h=2$; alors les conditions (I') s'écrivent

$$(I') \text{ pour } h=2 \begin{cases} b_{1,k}+b_{2,k+1}=o \\ k=1,2,\ldots,n. \end{cases}$$

Pour $k=1$ on a:

$$b_{1,1}+b_{2,2}=o.$$

L'élement b_1 étant pour le moment arbitraire, nous pouvons écrire $b_{2,2}=-b_1$. Comme $b_{1,k}=o$ pour $k\geqq 2$, nous aurons: $b_{2,k}=o$ pour $k\geqq 3$. En résumé, nous avons trouvé les résultats suivants

$$b_{1,j}=\begin{cases} b_1 & \text{arbitraire pour } j=1 \\ o & \text{pour } j\geqq 2 \end{cases}$$

$$b_{2,j}=\begin{cases} b_2 & \text{arbitraire pour } j=1 \\ -b_1 & \text{pour } j=2 \\ o & \text{pour } j\geqq 3 \end{cases}$$

Si l'on pose encore $h=3$ dans les conditions (I'), il est facile de voir que l'on a:

$$b_{3,j}=\begin{cases} b_3 & \text{arbitraire pour } j=1 \\ -b_2 & \text{pour } j=2 \\ (-1)^2 b_1 & \text{pour } j=3 \\ o & \text{pour } j\geqq 4 \end{cases}$$

Supposons que l'on ait démontré que les éléments de la ligne h ont les valeurs suivants

$$b_{h,j}=\begin{cases} b_h & \text{arbitraire pour } j=1 \\ -\ b_{h-1} & \text{pour } j=2 \\ (-1)^2\ b_{h-2} & \text{pour } j=3 \\ (-1)^3\ b_{h-3} & \text{pour } j=4 \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \dots \\ (-1)^{i-1} b_{h-i+1} & \text{pour } j=i \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \\ (-1)^{h-1} b_1 & \text{pour } j=h \\ o & \text{pour } j\geqq h+1. \end{cases}$$

Ecrivons la condititon (I') en remplaçant h par $h+1$

$$b_{h,k}+b_{h+1,k+1}=o$$

ou, en remplaçant $b_{h,k}$ par ses valeurs:

$$\begin{aligned} (-1)^{k-1} b_{h-k+1}+b_{h+1,k+1}&=o \quad \text{pour } k\leqq h \\ b_{h+1,k+1}&=o \quad \text{pour } k>h \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} b_{h+1,k+1}&=(-1)^k b_{(h+1)-(k+1)+1} \quad \text{pour } k\leqq h \\ b_{h+1,k+1}&=o \quad \text{pour } k>h \end{aligned}$$

ou encore

$$b_{h+1,j}=\begin{cases} (-1)^{j-1} b_{(h+1)-j+1} & \text{pour } j\leqq h+1 \\ o & \text{pour } j>h+1 \end{cases}$$

Nous avons donc démontré la proposition suivante :

Lemme II — *La matrice* B *la plus générale anti-permutable avec une matrice canonique donnée* A, *qui a un seul diviseur élémentaire, dont la racine este égale à zéro, est déterminée par les conditions :*

$$\boxed{b_{h,k} = \begin{cases} (-1)^{k-1} b_{h-k+1} & \text{pour } k \leqq h \\ o & \text{pour } k > h \end{cases}}$$

où $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ *sont des constantes arbitraires*

b) Détermination des matrices B *additives à* A.

72. Notre problème est déjà résolu dans le cas où le diviseur élémentaire a est différent de zéro. Le résultat est énoncé dans le corollaire du n° 71, qui est une conséquence immédiate du lemme *I*. Il nous reste donc à étudier le cas où $a = o$. La matrice canonique A est, dans ces conditions, définie par

$$\boxed{a_{h,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } h = k + 1 \\ o & \text{si } h \neq k + 1 \end{cases}} \tag{60}$$

Supposons que la condition (I') est vérifiée; pour cela il faut et il suffit que B soit de la forme

$$\boxed{b_{h,k} = \begin{cases} (-1)^{k-1} b_{h-k+1} & \text{si } k \leqq h \\ o & \text{si } k > h \end{cases}} \tag{61}$$

$$\text{pour } h, k = 1, 2, \ldots, n$$

où $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sont des constantes arbitraires que nous allons déterminer de telle façon que la condition (II') soit aussi vérifiée. Posons, pour simplifier l'exposition :

$$A B = \| c_{h,k} \|$$

on aura

$$(62) \qquad \boxed{c_{h,k} = b_{h-1,k} = \begin{cases} (-1)^{k-1} b_{h-k} & \text{si } k \leqq h-1 \\ o & \text{si } k > h-1 \end{cases}}$$

Dans ces conditions posons

$$A B A = \| \alpha_{h,k} \|$$
$$B A B = \| \beta_{h,k} \|$$

La condition (II') peut alors s'écrire

$$(II') \qquad \alpha_{h,k} + \beta_{h,k} = o \quad [h, k = 1, 2, \ldots, n]$$

Il est facile de voir, d'après ce qui précède, que

$$\alpha_{h,k} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{h,i} b_{i,j} a_{j,k} = \sum_{j=1}^{n} c_{h,j} a_{j,k}$$

ou, en tenant compte de (62) et (60):

$$\alpha_{h.k} = \sum_{i=1}^{h-1} (-1)^{i-1} b_{h-i} \cdot \begin{cases} 1 \text{ si } i = k+1 \\ o \text{ si } i \neq k+1 \end{cases}$$

ou finalement

$$(63) \qquad \boxed{\alpha_{h,k} = \begin{cases} (-1)^{k} b_{h-k-1} & \text{si } k \leqq h-2 \\ o & \text{si } k > h-2 \end{cases}}$$

On aura de même

$$\beta_{h,k} = \sum_{i,j=1}^{n} b_{h,i} a_{i,j} b_{j,k} = \sum_{i=1}^{n} b_{h,i} c_{i,k}$$

ou, en tenant compte de (61) et (62),

$$\beta_{h,k} = \sum_{i=1}^{h} (-1)^{i-1} b_{h-i+1} \cdot \begin{cases} (-1)^{k-1} b_{i-k} & \text{si } i \geqq k+1 \\ o & \text{si } i < k+1 \end{cases}$$

ou finalement

$$(64)\quad \boxed{\beta_{h,k} = \begin{cases} \sum_{i=k+1}^{h} (-1)^{i+k-2} b_{h-i+1} b_{i-k} & \text{si } k \leqq h-1 \\ o & \text{si } k > h-1 \end{cases}}$$

D'après ce qui précède, voir les formules (63) et (64), on a

$$\alpha_{h,k} = o \text{ si } k > h-2$$

$$\beta_{h,k} = o \text{ si } k > h-1$$

donc: la condition (II') est identiquement vérifiée si $k > h-1$, et ceci en admettant seulement que la condition (I') est vérifiée.

Donc, pour chaque valeur donnée de $h = 1, 2, \ldots, n$, il nous reste à exprimer que la condition (II') est vérifiée pour $k = h-1,\ h-2, \ldots, 3, 2, 1$.

Nous allons faire ces identifications par groupes, en posant successivement $k = h-1, h-2, \ldots, 2, 1$, et en donnant à h, dans chaque cas toutes les valeurs possibles; c'est à dire nous allons faire notre identification par diagonales.

D'après les formules (63) et (64) il est facile de voir qu'il y a à identifier $n-1$ diagonales. *Dans tous les cas nous avons donc à faire* n — 1 *identifications*. Ceci nous indique que nous n'avons aucune vérification à faire dans le cas où $n = 1$.

73. Solution du problème dans le cas où $n = 1$.

La matrice A est de la forme $A = \| o \|$. La matrice la plus générale B qui vérifie la condition (I') est la matrice $B = \| b_1 \|$, où b_1 est une constante arbitraire. Cette même matrice vérifie aussi la condition (II') comme il est facile de le voir immédiatement ou en tenant compte des résultats précédents. C'est le seul cas où la matrice la plus généralo B qui vérifie la condition (I') vérifie aussi la condition (II'). Remarquons que dans ce cas

$$AB = BA = o$$

donc

$$ABA = BAB = o$$

C'est-à-dire les matrices A et B sont orthogonales.

74. Nous allons maintenent supposer que $n \geqq 2$.

1ère Identification — Posons $k = h - 1$ (ceci suppose que $h \geqq 2$). D'après les conditions (63) et (64), nous avons

$$\alpha_{h,\,h-1} = o \quad \text{pour} \quad h \geqq 2$$

$$\beta_{h,\,h-1} = (-1)^{2h-3} b_1 \quad \text{pour} \quad h \geqq 2$$

Dans ces conditions les relations (II') s'écrivent

$$(II') \text{ pour } \begin{cases} k = h - 1 \\ h \geqq 2 \end{cases} \qquad (-1)^{2h-3} b_1 = o$$

Nous aurons donc dans tous les cas où $n \geqq 2$

$$(65) \qquad \boxed{b_1 = o}$$

Ce résultat nous permêt de donner immédiatement, d'après ce qui précéde, la

75. Solution du problème dans le cas où $n = 2$. *La matrice la plus générale additive à*

$$A = \begin{Vmatrix} o & o \\ 1 & o \end{Vmatrix}$$

est une matrice de la forme

$$B = \begin{Vmatrix} o & o \\ b_2 & o \end{Vmatrix}$$

où b_2 est une constante arbitraire.

Le résultat que nous avons obtenu, avec cette prémière identification, va nous permettre de simplifier les expressions (61), (62), (63) et (64). Remarquons d'abord que dans (61), nous avons maintenant $b_{h,h} = b_1 = o$, donc: les conditions (61) se transforment dans les conditions suivantes:

$$(61') \quad \boxed{b_{h,k} = \begin{cases} (-1)^{k-1} b_{h-k+1} & \text{si} \quad k \leqq h-1 \\ o & \text{si} \quad k > h-1 \end{cases}}$$

pour $h, k = 1, 2, \ldots, n$

où: $b_2, b_3; \ldots, b_n$, sont des constantes arbitraires.

De même on verrait que

$$(62') \quad \boxed{c_{h,k} = \begin{cases} (-1)^{k-1} b_{h-k} & \text{si} \quad k \leqq h-2 \\ o & \text{si} \quad k > h-2 \end{cases}}$$

Pour que les $c_{h,k}$ ne soient pas tous nuls il faut et il suffit qu'il existe au moins une valeur de k (appartenant à la suite $1, 2, \ldots, n$) qui soit inférieur ou égale à une valeur de $h-2$ appartenant à la même suite, où h peut encore prendre toutes les valeurs de la même suite. Une telle valeur n'existe pas dans le cas où $n = 2$; nous avons donc dans ce cas: $AB = BA = o$ et par conséquent: $ABA = BAB = o$; donc: *dans le cas où* n = 2 *toutes les matrices additives à* A, *lui sont aussi orthogonales,* comme il etait du reste très facile de voir directement.

Il est très facile de voir, en tenant compte de (60), (61′) et (62′), que

$$(63') \quad \boxed{a_{h,k} = \begin{cases} (-1)^{k} b_{h-k-1} & \text{si} \quad k \leqq h-3 \\ o & \text{si} \quad k > h-3 \end{cases}}$$

$$(64') \quad \boxed{\beta_{h,k} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=k+2}^{h-1} (-1)^{i+k-2} b_{h-i+1} b_{i-k} & \text{si} \quad k \leqq h-3 \\ o & \text{si} \quad k > k-3 \end{cases}}$$

76. *II$^{\text{ème}}$ Identification* — Posons maintenant $k = h-2$ (ceci supose que $h \geqq 3$). D'après les conditions (63′) et (64′) nous avons

$$a_{h,h-2} = o$$

$$\beta_{h,h-2} = o$$

Les conditions correspondantes (II') sont donc vérifiées d'elles mêmes, quelles que soient les constantes arbitraires $b_2, b_3, b_4, \ldots, b_n$.

Comme nous avons fait deux identifications, nous pouvons donner tout de suite la

77. Solution de notre problème dans le cas où $n = 3$. — *La matrice la plus générale additive à*

$$A = \begin{Vmatrix} o & o & o \\ 1 & o & o \\ o & 1 & o \end{Vmatrix}$$

est une matrice de la forme

$$B = \begin{Vmatrix} o & o & o \\ b_2 & o & o \\ b_3 & -b_2 & o \end{Vmatrix}$$

où b_2 *et* b_3 *sont des constantes arbitraires.*

Regardons dans ces conditions les valeurs de $c_{h,k}$ et de $a_{h,k}$, où les indices h et k ne peuvent prendre que les valeurs 1, 2 et 3. Comme, d'après (62'), $c_{h,k}$ est nul si $k > h - 2$, $c_{h,k}$ ne peut être différent de zéro que si k (entier positif) est $\leq h - 2$.

La plus petite valeur que peut prendre k c'est la valeur $k = 1$; on doit donc avoir (pour que le $c_{h,1}$ correspondant soit différent de zéro) $1 \leq h - 2$ ou $h \geq 3$, c'est-à-dire: on doit avoir $h = 3$.

Il y a par conséquant, dans le cas où $n = 3$, un seul $c_{h,k}$ qui est différent de zéro, à savoir $c_{3,1}$ qui d'après (62') a la valeur

$$c_{3,1} = b_2$$

Nous aurons dans ces conditions

$$AB = \begin{Vmatrix} o & o & o \\ o & o & o \\ b_2 & o & o \end{Vmatrix}, \quad BA = \begin{Vmatrix} o & o & o \\ o & o & o \\ -b_2 & o & o \end{Vmatrix}.$$

Donc: *dans le cas où* n = 3 *la matrice la plus générale additive à* A *n'est pas en général orthogonale à* A.

Il est évident que si $AB = BA = o$, nous aurons aussi $ABA = BAB = o$. Dans le cas actuel les matrices A et B n'étant pas orthogonales il est intéressant de déterminer la valeur du produit $ABA = -BAB$. C'est pour cela que nous allons chercher les valeurs des $\alpha_{h,k}$.

D'après (63′) $\alpha_{h,k}$ est nul si $k > h - 3$, donc pour que $\alpha_{h,k}$ soit différent de zéro il est nécessaire que $k \leqq h - 3$ ou $h \geqq k + 3$; or ceci est impossible car $h, k = 1, 2, 3$.

Les $\alpha_{h,k}$ étant tous nuls nous aurons *dans le cas où* $n = 3$

$$ABA = BAB = o$$

c'est-à-dire A *et* B *ne sont pas proprement additives.*

78. *3ème Identification.* Posons maintenant $k = h - 3$ (ceci suppose que $h \geqq 4$). D'après les conditions (63′) et (64′), on a

$$\alpha_{h,k} = (-1)^{h-3} \quad b_2 \qquad \text{où} \quad h \geqq 4$$

$$\beta_{h,k} = (-1)^{h+k-3} b_2 b_2 \quad \text{où} \quad h \geqq 4$$

Dans ces conditions les relations (II') s'écrivent

$$(II') \text{ pour } \begin{cases} k = h - 3 \\ h \geqq 4 \end{cases} \qquad b_2[1 + (-1)^{h-3} b_2] = o.$$

Cette condition doit être vérifiée quel que soit $h = 4, 5, 6, \ldots, n$. Si $n = 4$ nous avons donc une seule condition à vérifier, à savoir

$$b_2(1 - b_2) = o.$$

On doit donc avoir

$$b_2 = \delta = \begin{cases} 1 \\ o. \end{cases}$$

79. Solution du problème dans le cas où $n = 4$. *La matrice la plus générale additive à*

$$A = \begin{Vmatrix} o & o & o & o \\ 1 & o & o & o \\ o & 1 & o & o \\ o & o & 1 & o \end{Vmatrix}$$

est une matrice de la forme

$$B = \begin{Vmatrix} o & o & o & o \\ \delta & o & o & o \\ b_3 & -\delta & o & o \\ b_4 & -b_3 & \delta & o \end{Vmatrix}$$

où: b_3 *et* b_4 *sont des constantes arbitraires et où* δ *est aussi une constante mais qui ne peut prendre que les deux valeurs* o *et* 1.

Voyons dans ces conditions quelles sont les valeurs des $c_{h,k}$ et des $a_{h,k}$. Comme d'après (62') $c_{h,k} = o$ si $k > h - 2$, pour que $c_{h,k}$ soit différent de zéro il faut que $k \leqq h - 2$, ou ce que revient au même que $h \geqq k + 2$. Si $k = 1$ on doit avoir $h \geqq 3$, donc h pourra prendre les deux valeurs $h = 3, 4$. Or d'après (62')

$$c_{h,1} = b_{h-1} \text{ pour } h = 3, 4$$

c'est-à-dire

$$c_{3,1} = b_2 = \delta = \begin{cases} 1 \\ o \end{cases}$$

$$c_{4,1} = b_3$$

Si $k = 2$ on doit avoir $h \geqq 4$ donc $h = 4$, et d'après (62')

$$c_{4,2} = -b_2 = -\delta$$

Nous aurons dans ces conditions

$$AB = \begin{Vmatrix} o & o & o & o \\ o & o & o & o \\ \delta & o & o & o \\ b_3 & -\delta & o & o \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} o & o & o & o \\ o & o & o & o \\ -\delta & o & o & o \\ -b_3 & \delta & o & o \end{Vmatrix} .$$

Donc: *dans le cas où* n $= 4$ *la matrice la plus génerale additive à* A *n'est pas en général orthoganale à* A.

Voyons maintenant quels sont les valeurs des $\alpha_{k,k}$. D'après (63'), $\alpha_{h,k}$ est nul si $k > h - 3$, donc pour que $\alpha_{h,k}$ soit différent de zéro il est nécessaire que $k \leqq h - 3$ ou $h \geqq k + 3$. Dans le cas actuel, comme $n = 4$, ceci n'est possible que si $k=1$ et $h=4$, c'est-à-dire: il n'y peut y avoir q'un seul $a_{h,k}$ que ne soit pas nul, à savoir:

$$a_{4,1} = -b_2 = -\delta = -\begin{cases} 1 \\ o \end{cases}$$

Ceci nous montre que $a_{h,k}$ n'est pas toujours nul. Nous avons dans ces conditions:

$$ABA = \begin{Vmatrix} o & o & o & o \\ o & o & o & o \\ o & o & o & o \\ -\delta & o & o & o \end{Vmatrix}, \quad BAB = \begin{Vmatrix} o & o & o & o \\ o & o & o & o \\ o & o & o & o \\ \delta & o & o & o \end{Vmatrix}$$

Donc: *dans le cas où* n $=4$ *le produit* ABA $=-$BAB *n'est pas toujours nul.* Pour que ce produit soit nul il faut et il suffit que $\delta=o$. La valeur $n=4$ est la plus petite valeur de n pour laquelle nous avons trouvé une matrice B additive à une matrice A, ayant un seul diviseur élémentaire correspondant a une racine égale à zéro, telle que le produit ABA ne soit pas toujours nul.

80. Nous avons terminé l'étude du cas où $n=4$, passons maintenant au cas où $n>4$. La condition (II') que nous avons écrit précédemment doit être vérifiée pour $h=4, 5, \ldots, n$.

Il suffit d'écrire cette condition pour $h=4$ et $h=5$

$$b_2(I-b_2)=o$$
$$b_2(I+b_2)=o$$

pour conclure immédiatement que: $b_2=o$ si n >4.

Au moyen de ce résultat nous allons simplifier les expressions (61′), (62′), (63′) et (64′). Remarquons d'abord que dans (61′) nous avons maintenant: $b_{h,h-1}=b_2=o$, donc les conditions (61′) s'écrivent

$$(61'') \qquad \boxed{b_{h,k} = \begin{cases} (-1)^{k-1} b_{h-k+1} & \text{si } k \leq h-2 \\ o & \text{si } k > h-2 \end{cases}}$$

où $b_3, b_4, \ldots, b_n$ sont des constantes arbitraires.

On verrait de même que (62′) et (63′) s'écrivent

$$(62'') \qquad \boxed{c_{h,k} = \begin{cases} (-1)^{k-1} b_{h-k} & \text{si } k \leqq h-3 \\ o & \text{si } k > h-3 \end{cases}}$$

$$(63'') \qquad \boxed{a_{h,k} = \begin{cases} (-1)^{k} b_{h-k-1} & \text{si } k \leqq h-4 \\ o & \text{si } k > h-4 \end{cases}}$$

Pour transformer (64′) remarquons d'abord que l'expression (64′) elle même nous montre (en tenant compte de $b_2 = o$) que

$$\beta_{h,h-3} = o$$
$$\beta_{h,h-4} = o$$

Par conséquent

$$\beta_{h,k} = \begin{cases} \sum\limits_{i=k+2}^{h-1} (-1)^{i+k-2} b_{h-i+1} b_{i-k} & \text{si } k \leqq h-5 \\ o & \text{si } k > h-5 \end{cases}$$

Or le premier et le dernier terme de la somme que figure dans l'expression précédente sont respectivement

$$(-1)^{2k} b_{h-k-1} b_2 = o$$
$$(-1)^{h+k-3} b_2 b_{h-k-1} = o$$

Nous pouvons donc finalement écrire (64′) sous la forme

$$(64'') \qquad \boxed{\beta_{h,k} = \begin{cases} \sum\limits_{i=k+3}^{h-2} (-1)^{i+k-2} b_{h-i+1} b_{i-k} & \text{si } k \leqq h-5 \\ o & \text{si } k > h-5 \end{cases}}$$

L'étude de l'additivité, pour les matrices d'ordre au plus égal à 4, ne nous a pas conduit à des résultats très réguliers, ce que n'est pas très surprenant, se nous tenons compte de la différence qu'existe entre l'ensemble des formules (61), (62), (63), (64), (61′), (62′) (63′), (64′) et (61″), (62″), (63″), (64″).

Pour les valeurs de $n \geqq 5$ nous trouverons au contraire une certaine régularité dans les résultats. Nous allons encore donner en détail la solution de notre problème dans le cas où $n = 5$, pour passer ensuite au cas général.

Pour avoir la solution de notre problème dans le cas où $n = 5$ il nous faut et il nous suffit de faire une

81. *4ème identification* — Posons maintenant $k = h - 4$ (ce que suppose $h \geqq 5$ et par conséquent $n \geqq 5$).

D'après (63'') et (64'') on a

$$\alpha_{h,\,h-4} = (-1)^{h-4} b_3 \quad \text{si} \quad h \geqq 5$$

$$\beta_{h,\,h-4} = \quad o \quad \text{si} \quad h \geqq 6$$

La condition (*II'*) s'écrit alors

$$(II') \text{ pour } \begin{cases} k = h - 4 \\ h \geqq 5 \end{cases} \quad (-1)^{h-4} b_3 = o$$

ceci nous montre que

$$\boxed{b_3 = o \quad \text{pour} \quad n \geqq 5}$$

Alors on voit immédiatement d'après (61''), (62'') et (63'') que

$$b_{h,\,h-2} = o, \qquad c_{h,\,h-3} = o, \qquad \alpha_{h,\,h-4} = o$$

Dans ces conditions (61''), (62'') et (63'') s'écrivent

$$(61''') \qquad b_{h,\,k} = \begin{cases} (-1)^{k-1}\, b_{h-k+1} & \text{si} \quad k \leqq h - 3 \\ o & \text{si} \quad k > h - 3 \end{cases}$$

où $b_4, b_5, \ldots, b_n$ sont des constantes arbitraires

$$(62''') \qquad c_{h,\,k} = \begin{cases} (-1)^{k-1}\, b_{h-k} & \text{si} \quad k \leqq h - 4 \\ o & \text{si} \quad k > h - 4 \end{cases}$$

$$(63''') \qquad \alpha_{h,\,k} = \begin{cases} (-1)^{k} \quad b^{h-k-1} & \text{si} \quad k \leqq h - 5 \\ o & \text{si} \quad k > h - 5 \end{cases}$$

En tenant compte de (64″) et de $b_3 = o$, il est facile de voir que

$$\beta_{h,\,h-5} = o, \quad \beta_{h,\,h-6} = o.$$

D'autre part, le premier et le dernier terme de la somme que figure dans l'expression (64″) sont respectivement

$$\begin{array}{llll} \text{pour } i = k+3 & (-1)^{2k+1} & b_{h-k-2}\, b_3 & = o \\ \text{pour } i = h-2 & (-1)^{h+k-4}\, b_3 & b_{h-k-2} & = o. \end{array}$$

Nous pouvons finalement écrire (64″) sous la forme

$$(64''') \quad \beta_{h,k} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=k+4}^{i=h-3} (-1)^{i+k-2}\, b_{h-i+1}\, b_{i-k} & \text{si } k \leqq h-7 \\ b & \text{si } k > h-7 \end{cases}$$

Cherchons les $c_{h,k}$ *que peuvent être différents de zéro.* D'après (62‴) les $c_{h,k}$ sont nuls si $k > h-4$, donc pour que les $c_{h,k}$ soient différents de zéro il est nécessaire que $k \leqq h-4$ ou $h \geqq k+4$. Dans le cas où $n = 5$, ceci ne peut avoir lieu que si $k = 1$, $h = 5$; c'est-à-dire: le seul terme que peut ne pas être nul est: $c_{5,1} = b_4$ arbitraire. Ceci nous montre que les $c_{h,k}$ ne sont pas en général tous nuls dans le cas où $n = 5$.

Cherchons les $a_{h,k}$ *que peuvent être différents de zéro.* D'après (63‴) les $a_{h,k}$ sont tous nuls si $k > h-5$, donc pour que les $a_{h,k}$ soient différents de zéro il est nécessaire que $k \leqq h-5$ ou $h \geqq k+5$. Ceci ne peut pas avoir lieu dans le cas où $n = 5$; donc dans ce cas les $a_{h,k}$ sont tous nuls. Nous pouvons maintenant donner la

82. Solution de notre problème dans le cas où $n = 5$. *La matrice la plus générale additive à*

$$A = \left\| \begin{matrix} o & o & o & o & o \\ 1 & o & o & o & o \\ o & 1 & o & o & o \\ o & o & 1 & o & o \\ o & o & o & 1 & o \end{matrix} \right\|$$

est une matrice de la forme

$$B = \begin{Vmatrix} o & o & o & o & o \\ o & o & o & o & o \\ o & o & o & o & o \\ b_4 & o & o & o & o \\ b_5 & -b_4 & o & o & o \end{Vmatrix}$$

où b_4 *et* b_5 *sont des constantes arbitraires; et nous aurons dans ces conditions*

$$AB = \begin{Vmatrix} o & o & o & o & o \\ o & o & o & o & o \\ o & o & o & o & o \\ o & o & o & o & o \\ b_4 & o & o & o & o \end{Vmatrix}$$

et

$$BA = -AB$$
$$ABA = BAB = o$$

Dans le cas où $n = 5$, *la matrice la plus générale additive à* A, *n'est pas en général orthogonale à* A, *mais les produits* ABA *et* BAB *sont toujours nuls.*

Nous allons maintenant passer à

83. L'étude du cas général où la matrice A est d'ordre $n \geq 5$.

Nous savons, d'après ce que nous avons dit précédemment, que pour déterminer complètement la matrice la plus générale additive à une matrice donnée d'ordre n, il ne nous reste à faire que $n-1$ identifications. Dans notre cas nous avons donc à faire un nombre d'identifications que varie de 4 à $n-1$, suivant les cas. Nous avons déjà fait la quatrième identification, ce que nous a permis en particulier de donner la solution de notre problème dans le cas où $n = 5$. Supposons maintenant qu'ayant fait p

identifications (où $4 \leqq p < n-1$) on ait trouvé les résultats suivants

$$(61^{(p-1)}) \quad b_{h,k} = \begin{cases} (-1^{k-1} b_{h-k+1} & \text{si } k \leqq h-(p-1) \\ o & \text{si } k > h-(p-1) \end{cases}$$

$$(62^{(p-1)}) \quad c_{h,k} = \begin{cases} (-1)^{k-1} b_{h-k} & \text{si } k \leqq h-p \\ o & \text{si } k > h-p \end{cases}$$

$$(63^{(p-1)}) \quad \alpha_{h,k} = \begin{cases} (-1)^{k} \quad b_{h-k-1} & \text{si } k \leqq h-(p+1) \\ o & \text{si } k > h-(p+1) \end{cases}$$

$$(64^{(p-1)}) \quad \beta_{h,k} = \begin{cases} \sum_{i=k+p}^{h-(p-1)} (-1)^{i+k-2} b_{h-i+1} b_{i-k} & \text{si } k \leqq h-(2p-1) \\ o & \text{si } k > h-(2p-1) \end{cases}$$

84. Nous allons démontrer que le même résultat a encore lieu pour la $(p+1)^{ième}$ *identification*. On doit poser $k = h-(p+1)$, ceci suppose $h \geqq p+2$ et par conséquent $n \geqq p+2$.

D'après $(62^{(p-1)})$ on a

$$\alpha_{h,\,h-(p+1)} = (-1)^{h-(p+1)} b_p$$

D'après $(64^{(p-1)})$ on a $\beta_{h,\,h-(p+1)} = o$, si $h-(p+1) > h-(2p-1)$, c'est-à-dire si $p > 2$, et comme $n \geqq p+2$), on aura nécessairement $n \geqq 5$. Cette condition est vérifiée d'après notre hypothèse. Comme on doit avoir

$$\alpha_{h,\,h-(p+1)} + \beta_{h,\,h-(p+1)} = o$$

on voit tout de suite que $b_p = o$, si $n \geqq 5$.

Dans ces conditions

$$\begin{aligned} b_{h,\,h-(p-1)} &= (-1)^{h-p} \quad b_p = o \\ c_{h,\,h-p} &= (-1)^{h-p-1} b_p = o \\ \alpha_{h,\,h-(p+1)} &= (-1)^{h-p-1} b_p = o \end{aligned}$$

Alors $(61^{(p-1)})$, $(62^{(p-1)})$ et $(63^{(p-1)})$ s'écrivent

$$(61^{(p)}) \quad b_{h,k} = \begin{cases} (-1)^{k-1} b_{h-k+1} & \text{si } k \leqq h-p \\ o & \text{si } k > h-p \end{cases}$$

$$(62^{(p)}) \quad c_{h,k} = \begin{cases} (-1)^{k-1} b_{h-k} & \text{si } k \leqq h-(p+1) \\ o & \text{si } k > h-(p+1) \end{cases}$$

$$(63^{(p)}) \quad \alpha_{h,k} = \begin{cases} (-1)^{k} \quad b_{h-k-1} & \text{si } k \leqq h-[(p+1)+1] \\ o & \text{si } k > h-[(p+1)+1] \end{cases}$$

D'autre part, le premier et le dernier terme de la somme que figure dans l'expression ($64^{(p-1)}$) sont respectivement

pour $i=k+p \qquad (-1)^{2k+p-2} b_{h-(k+p)+1} b_p = o$

pour $i=h-(p-1) \quad (-1)^{h-p+k+1} \, b_p b_{h-(p-1)-k} = o$

La somme en question peut donc s'écrire

$$\sum_{i=k+p+1}^{h-(p-1)-1} (-1)^{i+k-2} b_{h-i+1} b_{i-k} =$$

$$= \sum_{i=k+(p+1)}^{h-[(p+1)-1]} (-1)^{i+k-2} b_{h-i+1} b_{i-k}$$

Pour que cette somme existe il faut et il suffit que $k+(p+1) \leqq h-[(p+1)-1]$, ou $k \leqq h-(2p+1)$, ou encore $k \leqq h-[2(p+1)-1]$. On aura donc

$$\beta_{h,k} = o \quad \text{si} \quad k > h-[2(p+1)-1]$$

La condition ($64^{(p-1)}$) peut finalement s'écrire

$$(64^{(p)}) \qquad \beta_{h,k} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{h=k+(p+1)}^{h-[(p+1)-1]} (-1)^{i+k-2} b_{h-i+1} b_{i-k} & \\ & \text{si } k \leqq h-[2(p+1)-1] \\ o & \text{si } k > h-[2(p+1)-1] \end{cases}$$

et notre proposition est démontrée.

Les formules ($61^{(p-1)}$), ($62^{(p-1)}$), ($63^{(p-1)}$) et ($64^{p-1)}$) sont donc valables, quel que soit p, si $n \geqq 5$.

85. *Solution de notre problème dans le cas général où* n $\geqq$ 5. Pour avoir la solution de notre problème dans le cas général il nous suffit de poser $p=n-1$ dans ($61^{(p-1)}$).

On a d'abord

$$b^{h,k} = \begin{cases} (-1)^{k-1} b_{h-k+1} & \text{si } k \leqq h-(n-2) \\ o & \text{si } k > h-(n-2) \end{cases}$$

Tous les termes de la matrice B seront donc nuls sauf ceux pour lesquels $k \leqq h-(n-2)$, ou $h \geqq k+(n-2)$, où $h, k = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Posons $\mathrm{k}=1$, on doit avoir $h \geqq n-1$, par conséquent h ne pourra prendre que les deux valeurs suivantes $h = n-1, n$.

Pour $\mathrm{k}=2$, on doit avoir $h \geqq n$, par conséquent: $h = n$.

Pour $\mathrm{k}=3$, on doit avoir $h \geqq n+1$; ceci est impossible. Cela veut dire que les éléments de la troisième colonne de la matrice B sont tous nuls. On verrait de même que les $4^{\text{ème}}$, $5^{\text{ème}}$, .. , $n^{\text{ème}}$ colonnes ont tous ses éléments nuls. Donc tous les $b_{h,k}$ sont nuls sauf:

$$b_{n-1,1} = b_{n-1}$$

$$b_{n,1} = b_n \qquad\qquad b_{n,2} = -b_{n-1}$$

où b_{n-1} et b_n sont des constantes arbitraires,

Nous savons d'avance que la matrice B que nous venons de définir, vérifie les conditions (I') et (II').

La solution que nous avons indiqué dans le cas où $n=5$ est analogue à la solution que nous venons de déterminer dans le cas où $n \geqq 5$.

86. Nous pouvons maintenant énoncer la proposition suivante:

La matrice la plus générale additive à une matrice d'ordre $\mathrm{n} \geqq 5$ *de la forme:*

$$A = \begin{Vmatrix} o & o & o & \ldots & o & o & o \\ 1 & o & o & \ldots & o & o & o \\ o & 1 & o & \ldots & o & o & o \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot \\ o & o & o & \ldots & o & o & o \\ o & o & o & \ldots & 1 & o & o \\ o & o & o & \ldots & o & 1 & o \end{Vmatrix}$$

est une matrice de la forme

$$B = \left\| \begin{matrix} o & o & o & \dots & o \\ . & . & . & \dots & . \\ o & o & o & \dots & o \\ b_{n-1} & o & o & \dots & o \\ b_n & -b_{n-1} & o & \dots & o \end{matrix} \right\|$$

où b_{n-1} *et* b_n *sont des constantes arbitraires.*

Pour déterminer les valeurs correspondantes des $c_{h,k}$, posons $p = n - 1$ dans $(62^{(p-1)})$; alors on a

$$c_{h,k} = \begin{cases} (-1)^{k-1} b_{h-k} & \text{si } k \leqq h - n + 1 \\ o & \text{si } k > h - n + 1 \end{cases}$$

Par conséquent les $c_{h,k}$ ne peuvent pas être différents de zéro que si $h \geqq k + n - 1$.

Posons $k = 1$, on doit avoir $h \geqq n$; donc: $h = n$.

Posons $k = 2$, on doit avoir: $h \geqq n + 1$. Ceci est impossible, car $h \leqq n$, et cela veut dire que les éléments de la 2ème colonne de la matrice B sont tous nuls.

On verrait de même que les 3ème, 4ème, ..., $n$ème, colonnes ont tous ses éléments nuls. Par conséquent tous les $c_{h,k}$ sont nuls sauf $c_{n,1} = b^{n-1}$. C'est-à-dire:

$$AB = \left\| \begin{matrix} o & o & \dots & o & o \\ o & o & \dots & o & o \\ . & . & \dots & . & . \\ o & o & \dots & o & o \\ b_{n-1} & o & \dots & o & o \end{matrix} \right\|$$

et $AB = -BA$.

Dans le cas où $n \geqq 5$, *la matrice la plus générale additive à* A *n'est pas en général orthogonale à* A.

Si l'on pose finalement $p = n - 1$ dans $(63^{(p-1)})$, on a

$$a_{h,k} = \begin{cases} (-1)^k b_{h-k-1} & \text{si } k \leqq h - n \\ o & \text{si } k > h - n \end{cases}$$

Pour que les $a_{h,k}$ ne soient pas nuls il faut que: $h \leqq k+n$, où $h, k=1, 2 \ldots, n$. Comme ceci est impossible, les $a_{h,k}$ sont tous nuls.

Dans le cas où $\mathrm{n} \geqq 5$, *la matrice la plus générale additive à* A *vérifie toujours la condition* $\mathrm{ABA}=\mathrm{BAB}=o$.

Nous avons terminé la résolution de notre problème dans le cas où A est une matrice canonique ayant un seul diviseur élémentaire dont la racine est égale à zéro.

Remarquons que dans le dernier cas que nous venons d'étudier, cas où $n \geqq 5$, la matrice B peut s'écrire sous la forme d'une matrice de matrices

$$B = \begin{Vmatrix} (o) & (o) \\ B_0 & (o) \end{Vmatrix}$$

où

$$B_0 = \begin{Vmatrix} b_{n-1} & o \\ b_n & -b_{n-1} \end{Vmatrix}$$

et où (o) désignent des matrices nulles carrées ou rectangulaires avec un nombre de lignes et de colonnes convenablement choisies pour que B soit une matrice carrée d'ordre n.

Remarquons encore que les résultats obtenus ne sont pas très réguliers pour $n=1, 2, 3, 4$ mais qu'au contraire si $n \geqq 5$ le résultat se présente sous une forme très régulière.

Si nous laissons de côté la solution singulière, qui se présente dans le cas où $n=4$ et qui correspond à la valeur $\delta=1$, la régularité que nous venons d'indiquer se présentera pour $n \geqq 3$. Il est très naturel de considérer à part ce cas exceptionel si nous voulons résumer dans une seule proposition, la plus simple possible, tous les résultats que nous venons d'obtenir.

Si l'on tient compte de tout ce que nous venons de dire, nous pouvons finalement énoncer la proposition suivante:

87. Théorème II — *Soit* A *une matrice canonique, d'ordre* n, *ayant un seul diviseur élémentaire* $(\lambda - a)^n$.

ξ) *Si* $\mathrm{a} \neq \mathrm{o}$, *la seule matrice* B, *d'ordre* n, *additive à* A *est la matrice zéro et dans ces conditions* B *est orthogonale à* A.

η) *Si* a $=$ o, *la matrice la plus générale* B, *d'ordre* n, *additive à* A *est:*

1) *si* n $=1$, B $= \| \alpha \|$.
2) *si* n $=2$

$$B = \left\| \begin{matrix} o & o \\ \alpha & o \end{matrix} \right\|$$

3) *si* n $\geqq 3$ *et si nous laissons pour le moment de côté une solution singulière qui se présente dans le cas où* n $=4$:

$$B = \left\| \begin{matrix} B_0 & (o) \\ (o) & (o) \end{matrix} \right\|$$

où

$$B_o = \left\| \begin{matrix} \alpha & o \\ \beta & -\alpha \end{matrix} \right\|$$

Dans les expressions précédentes α *et* β *désignent des constantes arbitraires. Dans ces conditions la matrice* B *est toujours orthogonale à* A *dans le cas où* n $=1, 2$, *mais n'est pas toujours orthogonale à* A *dans le cas où* n $\geqq 3$; *au contraire les produits* A B A *et* B A B *sont toujours nuls.*

4) *dans le cas où* n $=4$ *la solution singulière que nous avons laissé de côté est*

$$B = \left\| \begin{matrix} o & o & o & o \\ 1 & o & o & o \\ \alpha & -1 & o & o \\ \beta & -\alpha & 1 & o \end{matrix} \right\|$$

où α *et* β *sont des constantes arbitraires. Dans ces conditions* B *n'est jamais orthogonale à* A *et les produits* ABA *et* BAB *ne sont jamais nuls.*

Le cas singulier que nous venons d'indiquer, au n.º 4 du théorème précédent, est le seul cas où les produits ABA et BAB ne sont pas nuls. Comme α et β sont des constantes arbitraires, on obtient la matrice la plus simple que vérifie cette condition en posant $\alpha = o$ et $\beta = o$.

Si A *est une matrice canonique ayant un seul diviseur élémentaire* λ^n, *le seul cas où, la matrice la plus générale additive à* A *est telle que les produits* A B A *et* B A B *ne soient pas nécessairement nuls c'est le cas où* n $=4$. Dans ces conditions l'exemple le plus simples qu'on puisse indiquer de deux telles matrices est

$$A = \begin{Vmatrix} o & o & o & o \\ 1 & o & o & o \\ o & 1 & o & o \\ o & o & 1 & o \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} o & o & o & o \\ 1 & o & o & o \\ o & -1 & o & o \\ o & o & 1 & o \end{Vmatrix}$$

et nous aurons alors

$$A\,B = \begin{Vmatrix} o & o & o & o \\ o & o & o & o \\ 1 & o & o & o \\ o & -1 & o & o \end{Vmatrix} = -B\,A,$$

$$A\,B\,A = \begin{Vmatrix} o & o & o & o \\ o & o & o & o \\ o & o & o & o \\ -1 & o & o & o \end{Vmatrix} = -B\,A\,B$$

§ 3 — **Étude du cas particulier où la matrice A a une seule racine (non nulle)**

88. La matrice A ayant une seule racine, nous avons à distinguer deux cas: le premier sera celui, déjà étudié, où A aura un seul diviseur élémentaire, le deuxième cas sera celui où le nombre de diviseurs élémentaires de A est plus grand que l'unité.

Nous allons maintenant étudier le dernier cas, et pour cela nous pouvons toujours supposer que la matrice A est sous la forme canonique classique.

Soit $a \neq o$ la seule racine de A et $(\lambda - a)^{\alpha_1}$, $(\lambda - a)^{\alpha_2}$ ...., $(\lambda - a)^{\alpha_i}$, où $i > 1$, les diviseurs élémentaires de A; soit:

$$(65)\quad A_h = \begin{Vmatrix} a & o & o & \dots & o & o & o \\ 1 & a & o & \dots & o & o & o \\ o & 1 & a & \dots & o & o & o \\ . & . & . & \dots & a & o & o \\ o & o & o & \dots & 1 & a & o \\ o & o & o & \dots & o & 1 & a \end{Vmatrix}$$

la matrice canonique, d'ordre α_h, associée au diviseur élémentaire $(\lambda - a)^{\alpha_h}$.

La matrice A, étant supposée sous la forme canonique classique, s'écrit:

$$(66)\ A = \begin{Vmatrix} A_1 & o & \dots & o & o \\ o & A_2 & \dots & o & o \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & o \\ o & o & \dots & A_{i-1} & o \\ o & o & \dots & o & A_i \end{Vmatrix}$$

89. La matrice A étant donnée, le problème que nous avons à résoudre c'est de déterminer la matrice, d'ordre n, B la plus générale qui vérifie simultanément les conditions

$$(I')\quad AB + BA = o$$

$$(II'')\quad ABA + BAB = o$$

Nous allons d'abord, comme dans le § 2 et par les mêmes raisons, commencer par la:

a) Détermination des matrices B *que vérifient la condition* (I).

90. Commençons par écrire B sous la forme d'un «*canevas*» analogue à A.

Soit:

$$B = \begin{Vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,n} \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \dots & b_{n,n} \end{Vmatrix}$$

Nous allons diviser ce tableau en tableaux, en général rectangulaires, avec i bandes horizontales comprenant:

les α_1 premières lignes horizontales
les α_2 lignes suivantes
. . . .
les α_i lignes suivantes

et i bandes verticales, comprenant

les α_1 premières colonnes
les α_2 colonnes suivantes
. . . .
les α_i colonnes suivantes.

alors:

$$B = \begin{Vmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & \dots & B_{1,i} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & \dots & B_{2,i} \\ . & . & \dots & . \\ B_{i,1} & B_{i,2} & \dots & B_{i,i} \end{Vmatrix}$$

est une matrice de matrices où $B_{h,k}$ $(h, k = 1, 2, \dots, i)$, est une matrice à α_h lignes et α_k colonnes. C'est ce qu'on appelle un *canevas analogue* à A, qu'on peut représenter par la notation $B = [[B_{h,k}]]$.

91. Cherchons maintenant à déterminer la matrice B de telle façon que la condition (I') soit vérifiée. Pour cela nous avons besoin de calculer les deux produits AB et BA.

Pour uniformiser les notations, posons d'abord:

$$A = [[A_{h,k}]] \quad h, k = 1, 2, \dots, i$$

où

$$A_{h,k} = \begin{cases} A_h & \text{si } h = k \\ o & \text{si } h \neq k \end{cases}$$

soit:

$$AB = [[C_{h,k}]] \quad h, k = 1, 2, \dots, i$$

Nous aurons d'après ce qui précède:

$$C_{h,k} = \sum_{j=1}^{i} A_{h,j} B_{j,k} = A_{h,h} B_{h,k} = A_h B_{h,k}$$

on verrait de même que:

$$BA = [[D_{h,k}]] \quad h, k = 1, 2, \dots i$$

où

$$D_{h,k} = \sum_{j=1}^{i} B_{h,j} A_{j,k} = B_{h,k} A_{k,k} = B_{h,k} A_k.$$

La condition (I') est donc équivalente au système de conditions:

$$(J) \begin{cases} A_h B_{h,k} + B_{h,k} A_k = o \\ h, k = 1, 2, \ldots, i \end{cases}$$

Les matrices A_h et A_k sont données.

Pour déterminer la matrice B, nous n'avons donc qu'à déterminer les matrices $B_{h,k}$ de telle façon que le système (J) soit vérifié.

Étude d'une question préliminaire

92. Dans le système (J) les deux matrices A_k et A_k sont des matrices canoniques ayant un seul diviseur élémentaire (pour toutes les valeurs de h, $k = 1, 2, \ldots, 1$) qui est toujours le même, quels que soient h et k.

Nous aurons plus tard à étudier un système analogue où A_h et A_k sont encore des matrices canoniques irréductibles (ayant par conséquent chacune un seul diviseur élémentaire) mais qui n'auront plus nécessairement, en général, le même diviseur élémentaire.

Pour abréger l'exposition nous allons donc étudier d'abord le système (J) dans ce cas plus général, que nous désignerons par (J') et nous en déduirons après comme cas particulier la solution du système (J). Considérons donc le système:

$$(J') \begin{cases} A_h B_{h,k} + B_{h,k} A_k = o \\ h, k = 1, 2. \ldots, 1 \end{cases}$$

où A_k est une matrice canonique irréductible dont la seule racine sera désignée par a_h $(h = 1, 2, \ldots 1)$.

A_h sera comme nous l'avons supposé une matrice d'ordre α_h. Elle est de la forme:

$$A_h = \begin{Vmatrix} a_h & o & \ldots & o & o \\ 1 & a_h & \ldots & o & o \\ . & . & \ldots & . & . \\ o & o & \ldots & a_h & o \\ o & o & \ldots & 1 & a_h \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} a_h & o & \dots & o & o \\ o & a_h & \dots & o & o \\ . & . & \dots & . & . \\ o & o & \dots & a_h & o \\ o & o & \dots & o & a_h \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} o & o & \dots & o & o \\ 1 & o & \dots & o & o \\ . & o & \dots & . & . \\ o & o & \dots & o & o \\ o & o & \dots & 1 & o \end{Vmatrix}$$

ou encore:

$$A_h = a_h E_h + U_h \tag{68}$$

où E_h désigne une matrice unité, d'ordre α_h, et U_h une matrice canonique irréductible, d'ordre α_h, ayant le seul diviseur élémentaire λ^{α_h}.

Nous aurons de même:

$$A_k = a_k E_k + U_k \tag{69}$$

$B_{h,k}$ est une matrice, en général rectangulaire, à α_h lignes et α_k colonnes.

Posons:

$$B_{h,k} = \begin{Vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,\alpha k} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,\alpha k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{\alpha h,1} & b_{\alpha h,2} & & b_{\alpha h,\alpha k} \end{Vmatrix}$$

Après cette notation, pour représenter $B_{h,k}$, nous n'avons pas à craindre des confusions, si nous remarquons que le système (J') nous permet de déterminer séparément chacune des i^2 matrices $B_{h,k}$. Ceci étant, nous supposerons que nous avons à déterminer la matrice $B_{h,k}$, où h et k sont fixes, c'est-à-dire nous allons étudier une des i^2 équations (J'). De la même manière on étudierait les autres équations de ce système.

93. Cherchons maintenant, dans ces conditions, à déterminer la matrice la plus générale $B_{h,k}$ qui vérifie l'équation:

$$A_h B_{h,k} + B_{h,k} A_k = o \tag{J}$$

Cette équation peut s'écrire, d'après les formules (68) et (69), sous la forme:

$$(a_h E_h + U_h) B_{h,k} + B_{h,k}(a_k E_k + U_k) = o$$

ou:

$$(J) \qquad (a_h + a_k) B_{h,k} + U_h B_{h,k} + B_{h,k} U_k = o$$

Posons:

$$\left.\begin{array}{ll} U_h \quad B_{h,k} = \| c_{p,q} \| \\ B_{h,k} U_k \quad = \| d_{p,q} \| \end{array}\right\} \begin{array}{l} p = 1, 2, \ldots, \alpha_h \\ q = 1, 2, \ldots, \alpha_k \end{array}$$

Il est facile de voir que:

$$(70) \qquad c_{p,q} = \begin{cases} b_{p-1,q} & \text{si } p > 1 \\ o & \text{si } p = 1 \end{cases}$$

$$(71) \qquad d_{p,q} = \begin{cases} b_{p,q+1} & \text{si } q < \alpha_k \\ o & \text{si } q = \alpha_h \end{cases}$$

94. Pour que la condition (J) soit vérifiée il faut et il suffit que l'on ait:

$$(72) \qquad (a_h + a_k) b_{p,q} + c_{p,q} + d_{p,q} = o$$

$$\text{pour } \begin{cases} p = 1, 2, \ldots, \alpha_h \\ q = 1, 2, \ldots, \alpha_k \end{cases}$$

Dans l'étude de ce système il a à distinguer deux cas: 1°) le cas où $a_h + a_k \neq o$, 2°) le cas où $a_h + a_k = o$. Nous allons nous borner à l'étude du cas 1°), parce que c'est le cas qui se présente dans le système (J).

Posons pour simplifier $a = a_h + a_k \neq o$. On doit avoir:

$$(72') \qquad a b_{p,q} + c_{p,q} + d_{p,q} = o$$

$$\text{pour: } p = 1, 2, \ldots \alpha_h; \ q = 1, 2, \ldots \alpha_k.$$

Pour déterminer les $b_{p,q}$ nous allons faire les identifications par lignes.

95. *Posons d'abord* $p=1$. On aura, en tenant compte de (70):

$$a b_{1,q} + d_{1,q} = o$$

ou

$$a b_{1,q} + \left\{ \begin{array}{ll} b_{1,q+1} & \text{si } q < \alpha_k \\ o & \text{si } q = \alpha_k \end{array} \right\} = o$$

Pour $q = \alpha_k$, nous avons donc:

$$a b_{1,\alpha k} = o$$

c'est-à-dire

$$\boxed{b_{1,\alpha k} = o}$$

Pour $q = \alpha_k - 1$, nous aurons:

$$a b_{1,\alpha k-1} + b_{1,\alpha k} = o$$

où

$$\boxed{b_{1,\alpha k-1} = o}$$

et l'on démontre par récurrence que

$$\boxed{b_{1,q} = o} \quad \text{pour } q = 1, 2, \ldots, \alpha_k.$$

C'est-à-dire: *tous les éléments de la première ligne de la matrice* $B_{h,k}$ *sont nuls.*

96. Supposons maintenant, que la ligne r de $B_{h,k}$ a tous ses éléments nuls; c'est-à-dire supposons que

$$b_{r,q} = o \quad \text{pour } q = 1, 2, \ldots, \alpha_k$$

où

$$1 \leq r \leq \alpha_k$$

la condition (72') s'écrit, pour $p = r+1$:

(73) $$a b_{r+1,q} + c_{r+1,q} + d_{r+1,q} = o$$

Remarquons que, d'après (70):

$$c_{r+1,\,q} = \begin{cases} b_{r,\,q} & \text{si } r+1>1 \\ o & \text{si } r+1=1 \end{cases}$$

Comme r n'est pas nul, on aura, dans tous les cas

$$c_{r+1,\,q} = b_{r,\,q}$$

et par conséquent (73) peut s'écrire:

$$(74) \qquad a\, b_{r+1,\,q} + d_{r+1,\,q} = o$$

D'autre part, d'après (71)

$$d_{r+1,\,q} = \begin{cases} b_{r+1,\,q+1} & \text{si } q<\alpha_k \\ o & \text{si } q=\alpha_k \end{cases}$$

Donc, si nous posons, dans (74), $q=\alpha_k$ on aura:

$$\boxed{b_{r+1,\,\alpha k} = o}$$

Si l'on pose encore, dans (74), $q=\alpha_k-1$, on aura:

$$a\, b_{r+1,\,\alpha k-1} + b_{r+1,\,\alpha k} = o$$

ou

$$a\, b_{r+1,\,\alpha k-1} = o$$

ou

$$\boxed{b_{r+1,\,\alpha\quad-1} = o}$$

Par récurrence on démontre que:

$$\boxed{b_{r+1,\,q} = o} \quad \text{pour } q=1, 2, \ldots, \alpha_k$$

c'est-à-dire: *si la* $\mathrm{r}^{\text{ème}}$ *ligne de* $\mathrm{B}_{\mathrm{h,\,k}}$ *a tous ses éléments nuls, la même propriété aura lieu pour la* $(\mathrm{r}+1)^{\text{ème}}$ *ligne.*

Comme la première ligne de $B_{h,\,k}$ a tous ses éléments nuls, nous avons démontré que la matrice $B_{h,\,k}$ a tous ses éléments nuls, c'est-à-dire: $B_{h,\,k} = \|\, o \,\|$

Nous pouvons maintenant énoncer la proposition suivante:

97. Lemme III — *Si* A_h *et* A_k *sont deux matrices canoniques et irréductibles, ayant respectivement pour racines* a_h *et* a_k, *la première étant une matrice d'ordre* α_h *et la seconde d'ordre* α_k; *la matrice la plus générale* $B_{h,k}$ *à* α_h *lignes et* α_k *colonnes qui vérifie la condition:*

$$(J) \qquad A_h B_{h,k} + B_{h,k} A_k = o$$

est une matrice nulle si $a_h + a_k \neq o$.

Cette proposition contient comme cas particulier le lemme I (nº 70) qui correspond au cas où: $\alpha_h = \alpha_k$ et $a_h = a_k = a \neq o$.

98. *Application à la résolution du problème en étude.* Revenons à la fin du nº 91. On avait à résoudre le système (J) où A_h et A_k sont des matrices canoniques irréductibles qui ont toutes la même racine a.

Nous n'avons donc qu'à appliquer le lemme III en supposant: $a_h = a_k = a$. Alors: $a_h + a_k = 2a$. Comme nous avons supposé que $a \neq o$, nous pouvons dire que les matrices $B_{h,k}$ sont toutes nulles et par conséquent la matrice $B_{h,k}$ est une matrice nulle. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante:

Lemme IV — *Si* A *est une matrice carrée ayant une seule racine, non nulle, la matrice la plus générale* B, *du même ordre, qui vérifie la condition*

$$AB + BA = o$$

est une matrice nulle.

b) Détermination des matrices B *que vérifient les conditions* (I′) et (II′).

99. Pour que la matrice B soit additive à A il faut et il suffit que les deux conditions (I') et (II') soient vérifiées. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante comme un corollaire du lemme IV.

Corollaire — *La seule matrice* B *additive à une matrice canonique* A *ayant une seule racine, non nulle, est la matrice zéro.*

§ 4 — Étude d'un cas mixte

100. Il serait naturel d'étudier maintenant le cas où la matrice A aurait une seule racine nulle, à laquelle correspondraient plusieurs diviseurs élémentaires, pour terminer complètement l'étude du cas où A a une seule racine, et passer ensuite à l'étude du cas général. Mais comme nous n'aurons pas besoin, pour les applications de résoudre ce problème dans toute sa généralité, nous allons pour terminer étudier encore un cas particulier qui nous sera utile plus loin et nous renvoyons pour l'étude du cas général à un travail ultérieur.

101. Le cas mixte que nous allons étudier c'est le cas où la matrice A a deux racines différentes une desquelles est nulle. Soient donc a et o les seules racines de A.

Nous supposerons encore qu'à la racine *zéro* correspond un seul diviseur élémentaire.

Dans ces conditions A, supposée sous la forme canonique classique, est du type:

$$A = \begin{Vmatrix} A' & (o) \\ (o) & A'' \end{Vmatrix}$$

où A' est une matrice de la forme (66), où $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots \alpha_i < n$ et A'' une matrice, d'ordre $n - \sum_{j=1}^{i} \alpha_j$, de la forme:

$$A'' = \begin{Vmatrix} o & o & \dots & o & o \\ 1 & o & \dots & o & o \\ . & . & \dots & . & . \\ o & o & \dots & o & o \\ o & o & \dots & 1 & o \end{Vmatrix}$$

La matrice A est ainsi écrite sous la forme d'un canevas $A = [[A_{h,k}]]$ d'ordre $i+1$ où

$$A_{h,k} = \begin{cases} A_h & \text{si } h = k < i+1 \\ A'' & \text{si } h = k = i+1 \\ o & \text{si } h \neq k \end{cases}$$

Supposons B écrite sous la forme d'un canevas $B = [(B_{h,k})]$, analogue à A, et cherchons à déterminer les $B_{h,k}$ de telle façon que B soit additive à A.

Pour que (I') soit vérifiée il faut et il suffit comme au n° 91 que l'on ait:

$$A_h B_{h,k} + B_{h,k} A_k = o \qquad h, k = 1, 2, \ldots, i \tag{75}$$

$$A_h B_{h,k} + B_{h,k} A'' = o \qquad h = 1, 2, \ldots, i; k = i+1 \tag{76}$$

$$A'' B_{h,k} + B_{h,k} A_k = o \qquad k = 1, 2, \ldots, i; h = i+1 \tag{77}$$

$$A'' B_{h,k} + B_{h,k} A'' = o \qquad h, k = i+1 \tag{78}$$

les relations (75), (76) et (77) nous montrent d'après le lemme III du n° 97, que $B_{h,k} = o$ sauf si $h = k = i+1$. Donc la matrice B la plus générale qui vérifie la condition (I') est une matrice de la forme:

$$B = \begin{Vmatrix} (o) & (o) \\ (o) & B'' \end{Vmatrix} \tag{79}$$

où: $B'' = B_{i+1, i+1}$ est la matrice la plus générale qui vérifie la condition $A'' B'' + B' A'' = o$, et on a:

$$AB = \begin{Vmatrix} (o) & (o) \\ (o) & A'' B'' \end{Vmatrix}, \quad BA = \begin{Vmatrix} (o) & (o) \\ (o) & B'' A'' \end{Vmatrix}$$

$$ABA = \begin{Vmatrix} (o) & (o) \\ (o) & A'' B'' A'' \end{Vmatrix}, \quad BAB = \begin{Vmatrix} (o) & (o) \\ (o) & B'' A'' B'' \end{Vmatrix}$$

donc pour que B soit additive à A il faut et il suffit que B'' soit additive à A''.

Nous pouvons donc dire que: la matrice la plus générale additive à la matrice canonique A est une matrice B de la forme (79) où B'' est la matrice la générale additive à A''.

102. Il est facile de voir que: pour que les matrices A et B soient respectivement orthogonales, quasi-orthogonales, ou proprement additives, il faut et il suffit que A'' et B'' soient respectivement orthogonales, quasi-orthogonales, ou proprement additives. Pour avoir des exemples de telles matrices il nous suffira donc d'utiliser les résultats établis au § 3, n° 87. Pour avoir un exemple simple, nous pouvons supposer que *o est une racine simple de la matrice* A. Pour avoir un exemple de deux matrices A et B quasi-orthogonales, nous pouvons prendre pour A'' la matrice du plus petit ordre pour laquelle il existe une matrice B'' qui lui soit quasi-orthogonale. Comme nous avons vu au n° 77, une telle matrice sera d'ordre 3. La matrice A sera donc de la forme:

$$A = \begin{Vmatrix} a & o & o & o \\ o & o & o & o \\ o & 1 & o & o \\ o & o & 1 & o \end{Vmatrix}$$

Pour B nous pouvons prendre par exemple, en posant (voir n° 77) $b_2 = 1$ et $b_3 = o$:

$$B = \begin{Vmatrix} o & o & o & o \\ o & o & o & o \\ o & 1 & o & o \\ o & o & -1 & o \end{Vmatrix}$$

Ces deux matrices sont d'après ce qui précède quasi-orthogonales, la matrice A ayant une seule racine différente de zéro. C'est l'exemple le plus simple qu'on puisse donner.

103. Cherchons maintenant un exemple, le plus simple possible, de deux matrices A et B proprement additives, la matrice canonique A ayant une seule racine différente de zéro. En tenant compte de ce que nous avons dit à la fin du n° 87 on voit que l'on doit prendre:

$$A = \begin{Vmatrix} a & o & o & o & o \\ o & o & o & o & o \\ o & 1 & o & o & o \\ o & o & 1 & o & o \\ o & o & o & 1 & o \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} o & o & o & o & o \\ o & o & o & o & o \\ o & 1 & o & o & o \\ o & o & -1 & o & o \\ o & o & o & 1 & o \end{Vmatrix}$$

Dans le chapitre suivant nous appliquerons ces résultats aux noyaux de Fredholm.

CHAPITRE VII

Applications des résultats précédents aux noyaux de Fredholm

§ I. — Préliminaires

104. Dans ce chapitre nous aurons surtout à nous occuper des noyaux de rang fini. Nous pouvons toujours (N° 55) supposer qu'ils sont écrits sous une forme biorthonormale:

$$(80) \qquad H(M,P) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} X_i(M)\, Y_j(P)$$

où les X_i et les Y_j forment un système de fonctions biorthonormé sur un domaine V.

Il nous sera utile par la suite de savoir déterminer les constantes caractéristiques c d'un noyau H, lorsqu'il est écrit sous la forme (80). Si c est une constante caractéristique de H, nous aurons:

$$(81) \qquad X(M) = c \int_V H(M,Q)\, X(Q)\, dQ$$

où $X(M)$ n'est pas équivalente à zéro.

Pour étudier cette équation, posons dans (80):

$$(82) \qquad \Theta_i(P) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, Y_j(P)$$

Dans ces conditions, (80) prend la forme:

$$(83) \qquad H(M,P) = \sum_{i=1}^{n} X_i(M)\, \Theta_i(P)$$

Remarquons que les $\Theta_i(P)$ peuvent ne pas être linéairement indépendantes sur V.

L'équation (81) peut dans ces conditions s'écrire sous la forme:

$$X(M) = c \sum_{i=1}^{n} X_i(M) \int_V X(Q)\, \Theta_i(Q)\, dQ$$

ou encore:

$$\boxed{X(M) = c \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i(M)} \tag{84}$$

où nous avons posé:

$$\alpha_i = \int_V X(Q)\, \Theta_i(Q)\, dQ \tag{85}$$

Comme les $X_i\ (M)$ sont linéairement indépendantes, pour que $X(M)$ soit une solution effective de l'équation (81) il faut et il suffit que les α_i ne soient pas tous nuls. Or les α_i peuvent, en tenant compte de (84) et (85), s'écrire sous la forme:

$$\boxed{\alpha_h = c \sum_{i=1}^{n} c_{h,i}\, \alpha_i} \tag{86}$$

où nous avons posé:

$$c_{h,i} = \int_V X_i(Q)\, \Theta_h(Q)\, dQ$$

Les fonctions X_i et Y_j étant biorthonormées, la relation précédente nous montre, en tenant compte de (82), que:

$$c_{h,i} = a_{h,i}$$

Par conséquent (86) doit s'écrire:

$$\boxed{\alpha_h = c \sum_{i=1}^{n} a_{h,i}\, \alpha_i} \tag{86'}$$

Pour que l'équation (81) ait une solution effective il est donc nécessaire et suffisant que l'équation précédente (86') ait aussi une solution effective. L'étude de l'équation (81) se ramène ainsi à l'étude de l'équation (86'). Si l'équation (86') a une solution effective, nous dirons que c est une constante caractéristique de la matrice $A = \| a_{i,j} \|$.

Comme il est facile de voir, les constantes caractéristiques de A sont les racines de l'équation

$$| E - \lambda A | = o$$

où E représente la matrice unité. Il est du reste facile de vérifier que le premier membre de l'équation précédente représente précisément le déterminant de Fredholm relatif au noyau H $(M. P.)$.

105. Systèmes biorthonormés équivalents — Considérons les deux systèmes biorthonormés sur V

$$(b) \begin{cases} X_1(M), X_2(M), \ldots, X_n(M) & R^n \\ Y_1(P), Y_2(P), \ldots, Y_n(P) & V_n \end{cases}$$

$$(b') \begin{cases} X'_1(M), X'_2(M), \ldots, X'_n(M) & R'_n \\ Y'_1(P), Y'_2(P), \ldots, Y'_n(P) & V'_n \end{cases}$$

c'est-à-dire tels que:

$$\int_V X_i(Q)\, Y_j(Q)\, d\, Q = \delta_{i,j} = \int_V X'_i(Q)\, Y'_j(Q)\, d\, Q$$

Soient: R^n, V^n, R'^n et V'^n, les variétés linéaires définies respectivement par les n fonction X_i, Y_i, X'_i et Y'_i.

Nous dirons que les *deux systèmes biorthonormés* (b) *et* (b') *sont équivalents* si les variétés R^n et R'^n, bien comme V^n et V'^n coïncident. S'il en est ainsi, on peut écrire:

$$(s) \qquad X'_i(M) = \sum_{h=1}^{n} s_{i,h}\, X_h(M)$$

$$(u) \qquad Y'_j(P) = \sum_{k=1}^{n} u_{j,k}\, Y_k(P)$$

Comme les X_i et les X'_i sont linéairement indépendantes, le déterminant $| s_{h,k} |$ est nécessairement différent de zéro. De même on prouve que $| u_{h,k} | \neq o$. Les deux matrices $S = \| s_{h,k} \|$ et $U = \| u_{h,k} \|$ ne peuvent pas être prises arbitrairement; en effet, on doit avoir:

$$\delta_{i,j} = \int_V X'_i(Q)\, Y'_j(Q)\, dQ = \sum_{h,k=1}^{n} s_{i,h} u_{j,k}$$

$$\int_V X_h(Q)\, Y_k(Q)\, dQ = \sum_{h=1}^{n} s_{i.h} u_{j,h}$$

c'est-à-dire S et U vérifient la conditon:

$$(87) \qquad \boxed{S.\dot{U} = 1}$$

où $\dot{U}$ désigne la matrice transposée de U, c'est-à-dire $\dot{U} = \| u_{k,h} \|$.

Réciproquement, si l'on transforme les fonctions d'un système biorthonormé (b) au moyen des expressions (s) et (u), où les matrices S et U vérifient la condition (86), les nouvelles fonctions ainsi obtenues X'_i et Y'_i forment un nouveau système (b') biorthonormé équivalent au système (b). En effet, la relation (87) exprime la biorthogonalité des fonctions X'_i et Y'_i, et elle nous montre aussi que les deux déterminants $| s_{h,k} |$ et $| u_{h,k} |$ sont différents de zéro. Ceci étant, on déduit de (s) et (u) qu'on a: $R^n = R'^n$ et $V^n = V'^n$. Nous venons de démontrer la proposition suivante:

Lemme I. — *Pour que deux systèmes biorthonormés* (b) *et* (b′) *soient équivalents, il faut et il suffit qu'il existe entre les fonctions* X_i, X'_i, Y_i et Y'_i *des relations de la forme* (s) *et* (u), *telles que les deux matrices* $\mathrm{S} = \| \mathrm{s}_{\mathrm{h,k}} \|$ et $\mathrm{U} = \| \mathrm{u}_{\mathrm{h,k}} \|$ *vérifient la condition* $\mathrm{S}.\dot{\mathrm{U}} = 1$.

Cette proposition nous montre: qu'étant donné un système biorthonormé (b), pour déterminer un système biorthonormé équivalent (b'), il suffit de se donner une matrice arbitraire $S = \| s_{h,k} \|$ à déterminant différent de zéro. La matrice U est d'après (87) déterminé par $\dot{U} = S^{-1}$, c'est-

-à-dire: $U = \dot{S}^{-1}$. Si (b) et (b') sont équivalents, nous, aurons aussi:

$$(t) \qquad X_i(M) = \sum_{h=1}^{n} t_{i,h} X'_h(M)$$

$$(v) \qquad Y_j(P) = \sum_{k=1}^{n} v_{j,k} Y'_k(P)$$

où

$$(88) \qquad T\dot{V} = 1 \quad \text{ou} \quad V = \dot{T}^{-1}$$

Dans ces conditions, le noyau H peut s'écrire sous la forme biorthonormale

$$H(M,P) = \sum_{i,j,h,k=1}^{n} a_{i,j} t_{i,h} v_{j,k} X'_h(M) Y'_k(P)$$

ou

$$\boxed{H(M,P) = \sum_{h,k=1}^{n} a'_{h,k} X'_h(M) Y'_k(P)}$$

$$\boxed{a'_{h,k} = \sum_{i,j=1}^{n} t_{i,h} a_{i,j} v_{j,k}}$$

Posons $A' = \| a'_{h,k} \|$ et cherchons à profiter de l'indétermination du système (b') pour simplifier la matrice A'. On a:

$$A' = \dot{T} A V$$

ou d'après (88)

$$A' = \dot{T} A \dot{T}^{-1}$$

D'après (s) et (t) on a:

$$S\,T = 1 \text{ ou } T = S^{-1}$$

donc
$$\dot{T} = \dot{S}^{-1}\,,\ \dot{T}^{-1} = \dot{S}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{A' = \dot{S}^{-1}\,A\,\dot{S}}$$

Comme S est arbitraire, $\dot{S}$ le sera aussi, nous pouvons donc d'après les résultats rappelés au N° 67 supposer que A' est sous la forme canonique classique, c'est-à-dire: *étant donné un noyau* H (M, P) *écrit sous une forme biorthonormale, on peut toujours remplacer le système biorthonormé* X_i, Y_j *par un autre système équivalent, de façon que la matrice correspondante* $\mathrm{A} = \| \mathrm{a}_{h,k} \|$ *soit une matrice canonique.* Cela justifie donc que nous nous soyons borné, dans le chapitre précédent, à étudier les matrices canoniques.

§ 2. — Exemples de noyaux additifs

106. Nous allons maintenant donner plusieurs exemples de noyaux additifs, non orthogonaux, et montrer ainsi que la notion d'additivité est plus générale que celle d'orthogonalité. Il est naturel de chercher des exemples les plus simples possible; nous pouvons donc supposer que les deux noyaux H et L sont de rang fini. Il est tout indiqué de commencer par supposer que H, par exemple, est un noyau de rang un, c'est-à-dire de la forme $H\,(M, P) = \varphi\,(M)\,\psi\,(P)$, où les deux fonctions ψ et φ ne sont pas identiquement nulles. Nous allons démontrer la proposition suivant:

Lemme II — *Il n'existe aucun noyau* L (M, P) *qui soit additif et non orthogonal à un noyau* H (M, P) *de rang un.*

Supposons en effet que H (de rang un) et L sont additifs, alors on aura

$$(I) \quad \varphi(M)\int_V \psi(Q)\,L(Q,P)\,d\,Q + \int_V L(M,Q)\,\varphi(Q)\,d\,Q.\,\psi(P) = o$$

$$(II) \quad \varphi(M)\iint_V \psi(Q)\,L(Q,R)\,\varphi(R)\,d\,Q\,d\,R.\,\psi(P) +$$

$$+ \int_V L(M,Q)\,\varphi(Q)\,d\,Q.\int_V \psi(R)\,L(R,P)\,d\,R = o$$

ou en notation abrégée, voir N° 8:

$$(I)\quad \varphi[\psi, L] + [L, \varphi]\psi = o$$
$$(II)\quad \alpha\varphi\psi + [L, \varphi].[\psi, L] = o$$

où nous avons posé: $\alpha = [\psi, L, \varphi]$. Si nous multiplions la condition (I) par $\varphi\,(P)\,dP$ et si nous intégrons sur V, on en déduit:

$$(89)\qquad \alpha\varphi = -c[L.\varphi],\ \text{où}\ c = [\varphi, \psi]$$

Si nous multiplions la même condition par $\psi(M)\,dM$ et si nous intégrons sur V, on en déduit:

$$(90)\qquad \alpha\psi = -c[\psi, L]$$

a) *Suposons que* c = o. Les conditions précédentes nous montrent qu'on aura $\alpha = o$. Ceci étant, de la relation (II) on déduit que l'on aura: soit $[L, \varphi] = o$, soit $[\psi, L] = o$; alors la condition (I) nous montre que si une de ces deux conditions est vérifiée l'autre le sera aussi. En résumé: si $c = o$, on aura $[L, \varphi] = [\psi, L] = o$, ce qui exprime précisément que H et L sont orthogonaux.

b) *Supposons que* c ≠ o. Si $c \neq o$ on peut écrire d'après (89) et (90): $[L, \varphi] = -\frac{\alpha}{c}\varphi$ et $[\psi, L] = -\frac{\alpha}{c}\psi$. En remplaçant dans (I), on aura: $-\frac{2\alpha}{c}\varphi\psi = o$, ou encore $\alpha\varphi\psi = o$, donc: $\alpha = o$. Alors on démontre de la même manière que H et L sont orthogonaux, ce qui prouve la proposition précédente.

107. D'après le lemme I, pour que H et L soient additifs et non orthogonaux il est nécessaire que ces deux noyaux soient au moins de rang deux. Les résultats trouvés dans les deux chapitres précédents vont nous permettre de donner un exemple *de deux noyaux de rang deux, qui sont additifs et non orthogonaux.*

En effet, nous avons trouvé au N° 77, le premier exemple de deux matrices A et B qui sont additives et non orthogonales. Les deux matrices en question sont du troisième ordre. Pour qu'elles ne soient pas orthogonales il faut et il suffit, voir N° 77, que $b_2 \neq o$; nous pouvons donc supposer, pour avoir un exemple simple, que $b_2 = 1$ et $b_2 = o$, alors nous aurons

$$A = \begin{Vmatrix} o & o & o \\ 1 & o & o \\ o & 1 & o \end{Vmatrix} \qquad B = \begin{Vmatrix} o & o & o \\ 1 & o & o \\ o & -1 & o \end{Vmatrix}$$

Nous pouvons donc affirmer, d'après les resultats trouvés au N° 63, que les deux noyaux:

$$H(M,P) = X_2(M)\,Y_1(P) + X_3(M)\,Y_2(P)$$
$$L(M,P) = X_2(M)\,Y_1(P) - X_3(M)\,Y_2(P)$$

sont additifs et non orthogonaux, ce qui do reste est facile de vérifier. En effet, on a:

$$AB = \begin{Vmatrix} o & o & o \\ o & o & o \\ 1 & o & o \end{Vmatrix} \qquad BA = \begin{Vmatrix} o & o & o \\ o & o & o \\ -1 & o & o \end{Vmatrix}$$

donc:

$$[H, L] = X_3(M)\,Y_1(P); \quad [L, H] = -X_3(M)\,Y_1(P)$$

c'est-à-dire: H et L ne sont pas orthogonaux. D'autre part on a (N° 77) $ABA = BAB = o$; c'est-à-dire (N° 53) les deux matrices A et B sont quasi-orthogonales, c'est-à-dire: $HLH = LHL = o$. Les deux noyaux H et L sont de rang deux, comme il est facile de voir.

108. Nous allons maintenant donner *un exemple de deux noyaux proprement additifs.* D'après un résultat établi dans le chapitre VI, N° 87 — théorème II, si la matrice A a un seul diviseur élémentaire correspondant à une racine nulle de A, il y a un seul cas où la matrice B, la plus générale, additive à A n'est pas orthogonale ou quasi-orthogonale à A, c'est le cas où $n = 4$.

L'exemple le plus simple qu'on puisse donner de deux matrices proprement additives est celui indiqué à la fin du N° 87, et il nous permettra de donner un exemple de deux noyaux proprement additifs, exemple que nous avons indiqué dans une note au C. R., MONTEIRO [1], à savoir:

$$H(M, P) = X_2(M)\, Y_1(P) + X_3(M)\, Y_2(P) + X_4(M)\, Y_3(P)$$
$$L(M, P) = X_2(M)\, Y_1(P) - X_3(M)\, Y_2(P) + X_4(M)\, Y_3(P)$$

Pour ces deux noyaux, nous aurons:

$$[H, L] = \quad X_3(M)\, Y_1(P) - X_4(M)\, Y_2(P)$$
$$[L, H] = - X_3(M)\, Y_1(P) + X_4(M)\, Y_2(P)$$

et:

$$[H, L, H] = - X_4(M)\, Y_1(P); \ [L, H, L] = X_4(M)\, Y_1(P)$$

Dans les deux exemples de noyaux additifs que nous venons d'indiquer, les deux noyaux H et L n'ont pas de constante caractéristique, mais ces exemples sont suffisants pour montrer que la notion d'additivité est plus générale que celle d'orthogonalité et qu'il existe des noyaux quasi-orthogonaux et proprement additifs.

109. Nous allons maintenant donner des exemples de deux noyaux additifs non orthogonaux H et L, où l'un au moins de ces deux noyaux a une seule constante caractéristique. En tenant compte de ce que nous avons dit au N° 102, il est facile de voir que les deux noyaux:

$$H(M_1 P) = X_1(M)\, Y_1(P) + X_3(M)\, Y_2(P) + X_4(M)\, Y_3(P)$$
$$L(M_1 P) = X_3(M)\, Y_2(P) - X_4(M)\, Y_3(P)$$

sont quasi-orthogonaux et que $H(M, P)$ a une seule constante caractérisque, à savoir l'unité, qui n'est pas constante caractéristique de $L(M, P)$.

110. On verrait de même que les deux noyaux:

$$H(M, P) = X_1(M)\, Y_1(P) + X_3(M)\, Y_2(P) +$$
$$+ X_4(M)\, Y_3(P) + X_5(M)\, Y_4(P)$$
$$L(M, P) = X_3(M)\, Y_2(P) - X_4(M)\, Y_3(P) + X_5(M)\, Y_4(P)$$

sont proprement additifs et que le noyau $H(M, P)$ a une seule constante caractéristique, à savoir l'unité, qui n'est pas constante caractéristique de $L(M, P)$. Nous venons donc de donner les exemples annoncés à la fin du N° 39 et au N° 33.

§ 3. **Indépendance des conditions** (I) et (II)

111. Nous avons affirmé, au N° 37, qu'un noyau H qui est additif à deux autres noyaux L_1 et L_2 n'es pas en général additif à leur somme $L_1 + L_2$; pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit, d'après le théorème I du N° 33, que l'on ait:

$$(a) \qquad L_2 H L_1 + L_1 H L_2 = o.$$

Supposons en particulier que l'on ait: $L_1 = L_2 = L$; la condition précédente prend alors la forme:

$$L H L + L H L = o \quad \text{ou} \quad L H L = o$$

et exprime la condition nécessaire et suffisante pour qu'un noyau H, additif à L, soit aussi additif à 2 L. Si H et L sont additifs, la condition $L H L = o$ entraîne $H L H = o$, donc on peut affirmer: *pour qu'un noyau* H, *additif à* L, *soit additif à* 2 L *il faut et il suffit que H ne soit pas proprement additif à* L. Par conséquent pour montrer que la condition (a) n'est pas toujours vérifiée, il suffit de donner un exemple d'un noyau H proprement additif à L, ce que nous avons déjà fait aux N° 108 et 110.

112. Nous pouvons remarquer que si H est proprement additif à L, H n'est pas additif à 2 L, mais on a

$$2 H L + 2 L H = o$$

c'est-à-dire le noyau 2 L est anti-permutable avec H. Si l'on a un exemple de deux noyaux proprement additifs H et L, nous avons donc en même temps un exemple de deux noyaux H et $L' = 2L$ qui vérifient la condition (I) $HL' + L'H = o$ et qui ne vérifient pas la condition (II) $HL'H + L'HL' = o$. Ceci nous montre que la condition (II) n'est pas une conséquence de la condition (I).

Prouvons maintenant que la condition (I) n'est pas une conséquence de la condition (II); pour le démontrer il suffit de trouver un exemple de deux noyaux H et L que vérifient la condition (II) sans vérifier la condition (I). Nous allons trouver un tel exemple dans le cas particulier où $H = L'$: dans ce cas, les conditions (I) et (II) prennent la forme:

$$(I) \quad \boxed{H^2 = o} \qquad\qquad (II) \quad \boxed{H^3 = o}$$

et expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un noyau H soit additif à soi-même.

Considérons le noyau H écrit sous la forme biorthonormale:

$$H(M, P) = X_2(M)\, Y_1(P) + X_3(M)\, Y_2(P)$$

on a:

$$H^{(2)}(M, P) = X_3(M)\, Y_1(P)$$
$$H^{(3)}(M, P) = o$$

c'est-à-dire: ce noyau vérifie la condition (II) et ne vérifie pas la condition (I). donc nous pouvons affirmer, comme nous l'avons dit au N^e 33 que:

Théorème — *Les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux noyaux* H *et* L *soient additifs:*

$$(I) \quad \boxed{HL + LH = o} \qquad (II) \quad \boxed{HLH + LHL = o}$$

sont indépendantes.

§ 4 — **Sur la notion de noyau principal**

113. Nous avons introduit, au n° 27, la notion de *noyau caractéristique* de $K(M, (P)$ relatif à c.

Si la décomposition $K = H + L$ est une décomposition caractéristique pour c, nous pouvons remplacer l'étude des équations (K) et $(\overline{K})$, voir n° 12, par l'étude des équations

(H) et $(\overline{H})$. Dans la décomposition d'un noyau caractéristique de $K(M, P)$ relatif à c nous avons supposé (voir la condition 3° du n° 27) que les deux noyaux H et L sont hypoorthogonaux. Nous avons montré (N° 26 — Théorème D) l'utilité de la relation d'hypoorthogonalité entre H et L pour l'étude de l'équation homogène correspondante à $K(M, P)$; mais dans les chapitres II, III et IV, nous avons montré que parmi les relations d'hypoorthogonalité il y en avait une, celle *d'additivité* entre H et L, qui s'imposait dans l'étude de l'équation non homogène correspondante à $K(M, P)$.

Dans ces conditions il serait tout-à-fait naturel d'introduire la notion suivante:

Définition. — Nous dirons que H *est un noyaux hypercaractéristique de* K (M, P) *relatif à* c, *si la décomposition:* K = H + L, *vérifie les conditions suivantes:* 1°) H *a* c *comme seule constante caractéristique,* — 2°) L *n'a pas* c *comme constante caractéristique,* — 3°) H *et* L *sont additifs.*

Il serait très important de savoir déterminer, même dans le cas classique de Fredholm, un noyau hypercaractéristique H relatif à une constante caractéristique c.

Le probléme est résolu si K est un noyau de rang fini. On peut aussi le considérer comme résolu, si le noyau K relève de la théorie de Fredholm, à condition de ne considérer comme solution des équations homogènes correspondantes que les fonctions sommables sur V. Dans ces deux cas, il suffit de prendre pour H le noyau principal de K correspondant à c.

C'est en particularisant convenablement la notion de noyau hypercaractéristique que nous allons introduire une notion analogue qui, cette fois-ci, sera utilisable dans l'état actuel de nos connaissances sur l'équation de Fredholm et qui nous permettra de mieux comprendre la notion de noyau principal introduite par MM. Goursat et Heywood.

114. Supposons que la théorie classique de Fredholm est applicable aux noyaux K, H et L. Nous ne faisons cette hypothèse que pous simplifier l'exposition, car on peut en réalité faire une extension des résultats que nous allons obtenir à des noyaux plus généraux.

Définition. — Nous dirons que H(M, P) *est un noyau polaire relatif à* c *si la décomposition* K (M, P) = H (M, P) + + L(M, P), *vérifie les conditions suivantes: 1°)* R(H; λ) *a* *un seul pôle* c *à distance finie.* 2°) R(L; λ) *est holomorphe au voisinage de* c. 3°) H *et* L *sont additifs* (1).

S'il en est ainsi, le noyau $K(M, P)$ a pour résolvante:

$$(S') \qquad \boxed{R(K;\lambda) = R(H;\lambda) + R(L;\lambda)}$$

ce qui nous montre d'après les hypothèses, que la partie principale $\pi(M, P; \lambda)$ de $R(K; \lambda)$ relative au pôle $\lambda = c$, est égale à la partie principale de $R(H; \lambda)$ relative au même pôle. Posons:

$$(91) \qquad R(H;\lambda) = \pi(M, P; \lambda) + h(M, P; \lambda)$$

alors on peut affirmer que $h(M, P; \lambda)$ est une fonction entière en λ.

Pour simplifier nous allons encore supposer que le noyau polaire $H(M, P)$ est de rang fini. S'il en est ainsi $h(M, P; \lambda)$ sera un polynôme en λ, qui pourra être, éventuellement, identiquement nul.

La notion de noyau polaire, n'est qu'un intermédiaire provisoire, pour arriver à la notion de noyau principal.

115. Nous allons montrer, par un exemple, qu'une décomposition polaire est possible sans que les deux noyaux H et L soient orthogonaux. Pour cela, posons:

$$H(M, P) = X_1(M)\,Y_1(P) + X_3(M)\,Y_2(P) + \\ + X_4(M)\,Y_3(P) + X_5(M)\,Y_4(P)$$

$$L(M, P) = \frac{X_6(M)\,Y_6(P)}{2} + X_3(M)\,X_2(P) - \\ - X_4(M)\,Y_3(P) + X_5(M)\,Y_4(P)$$

(1) *Remarque* — Si H et L sont des noyaux de rang fini, un noyau polaire est toujours un noyau hypercaractéristique, parce que pour de tels noyaux on peut affirmer que toute constante caractéristique est un pôle de la résolvante et réciproquement. Pour fixer la terminologie, si c est un pôle de la résolvante de $K(M, P)$ nous dirons que c est une *constante polaire* de $K(M, P)$.

On voit d'abord que $H(M, P)$ a une seule constante caractéristique $\lambda = 1$ et que sa résolvente est:

$$R(H;\lambda) = \frac{X_1(M)\,Y_1(P)}{1-\lambda} + \Big\{ X_3(M)\,Y_2(P) + X_4(M)\,Y_3(P) + $$
$$+ X_5(M)\,Y_4(P) \Big\} + \lambda \Big\{ X_4(M)\,Y_2(P) + X_5(M)\,Y_3(P) \Big\} +$$
$$+ \lambda^2 X_5(M)\,Y_2(P)$$

D'autre part il est facile de voir que H et L sont proprement additifs et que $R(L;\lambda)$ est holomorphe au voisinage du point $\lambda = 1$. Dans ces conditions $H(M, P)$ est un noyau polaire, relatif à c, du noyau $K(M, P) = H(M, P) + L(M, P)$.

Si l'on pose $H_1(M, P) = X_1(M)\,Y_1(P)$ et $L_1 = K - H_1$, H_1 est aussi un noyau polaire relatif à $c = 1$, donc un noyau K peut admettre plusieurs noyaux polaires. L'unicité du noyau polaire H est assurée si l'on suppose que la résolvante de H est nulle à l'infini.

116. Il y a des cas particuliers où l'on peut affirmer que le noyau polaire H est orthogonal à L. En effet, nous allons démontrer la proposition suivante:

Théorème — *Si* H *est un noyau de rang fini dont la résolvante a un seul pôle et est nulle à l'infini; alors si l'on sait que* H *est additif à un noyau* L *on peut affirmer que* H *est orthogonal à* L.

Par hypothèse, H étant de rang fini, ou peut écrire (voir N° 55).

$$H(M, P) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\,X_i(M)\,Y_j(P) \tag{41}$$

où les X_i et les Y_j forment un système biorthonormé sur V. Comme $R(H;\lambda)$ a un seul pôle et est nulle à l'infini, on peut affirmer que le déterminant $|\,a_{i,j}\,|$ est différent de zéro et que le déterminant de Fredholm: $|\,E - \lambda A\,|$ relatif à H a une seule racine $\lambda = c$, d'ordre n de multiplicité.

D'autre part, d'après le théorème I énoncé au n° 61, si $L(M, P)$ est additif à $H(M, P)$ on peut toujours écrire:

$$L(M, P) = L_0(M, P) + \mathfrak{L}(M, P)$$

où $\mathfrak{L}$ est orthogonal à H et L_0 est un noyau de la forme:

$$L_0(M, P) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{i,j} X_i(M) Y_j(P)$$

qui est additif à $H(M, P)$.

Pour démontrer que H et L sont orthogonaux il nous suffira de montrer que $L_0(M, P) \equiv o$, c'est-à-dire que la matrice $B = \| b_{h,k} \| = o$. Or, d'après le Lemme I du n° 58, la matrice B est additive à A.

Remarquons maintenant que, d'après les résultats établis au n° 105, on peut toujours, en changeant convenablement le système biorthonormé $\{ X_i \}, \{ Y_j \}$ supposer que la matrice $A = \| a_{h,k} \|$ est écrite sous la forme canonique classique.

Or, la matrice $A = \| a_{h,k} \|$ a une seule racine $a = \frac{1}{c}$ à laquelle correspondent un ou plusieurs diviseurs élémentaires. D'après une proposition énoncée au n° 99, la seule matrice B additive à une matrice canonique A ayant une seule racine non nulle, est la matrice zéro, donc: $B = \| o \|$ et notre proposition est démontrée.

Le théorème que nous venons de démontrer nous montre: qu'un noyau de rang fini n, ayant une seule constante caractéristique c, ne peut être additif et non orthogonal à un autre noyau L, que dans le cas où sa résolvante $R(H; \lambda)$ n'est pas nulle à l'infini.

117. Noyau principal — Soit $H(M,P)$ un noyau polaire de $K(M, P)$ relatif à c; alors si l'on pose $K = H + L$ les deux noyaux H et L vérifient les conditions 1°), 2°) et 3°) du n° 114. En particulier nous aurons.

$$R(H; \lambda) = \pi(M, P; \lambda) + h(M, P; \lambda) \tag{91}$$

où $\pi(M, P; \lambda)$ est de la forme:

$$\pi(M, P', \lambda) = \frac{B_p(M, P)}{(c-\lambda)^p} + \frac{B_{p-1}(M, P)}{(c-\lambda)^{p-1}} + \ldots + \frac{B_1(M, P)}{(c-\lambda)} \tag{92}$$

et $h(M, P)$ une fonction entière en λ. Si $R(H; \lambda)$ est nulle à l'infini on aura

$$h(M, P; \lambda) = o$$

donc

$$R(H; \lambda) = \pi(M, P; \lambda) \tag{93}$$

Dans ce cas nous dirons que le noyau polaire $H(M, P)$ est un *noyau principal* et nous voyons que pour déterminer un tel noyau il suffit de poser $\lambda = o$, dans la partie principale de la résolvante.

Nous venons de démontrer, que, si H est un noyau principal le rang fini, l'additivité de H et de L (hypothèse 3[e]) implique l'orthogonalité de H et L.

Nous allons maintenant montrer que la notion de noyau principal introduite par MM. Goursat et Heywood, par une autre voie, coïncide avec la définition que nous venons de donner.

Soit c un pôle de la résolvante $R(K; \lambda)$ et $\pi(M, P; \lambda)$ la partie principale correspondante. Posons

$$R(K; \lambda) = \pi(M, P; \lambda) + L(M, P; \lambda)$$

Alors $L(M, P; \lambda)$ est une fonction holomorphe au voisinage de c. Posons $\lambda = o$, on a:

$$K(M, P) = \pi(M, P) + L(M, P)$$

où

$$\pi(M, P) = \pi(M, P; o)$$
$$L(M, P) = L(M, P; o)$$

Le résultat fondamental de MM. Goursat et Heywood consiste précisément à démontrer que:

a) la partie principale $\pi(M, P; \lambda)$ est un noyau résolvant, donc

$$\pi(M, P; \lambda) = R[\pi(M, P); \lambda]$$

ce qui nous permet d'affirmer que $R(\pi, \lambda)$ a un seul pôle à distance finie et est nulle à l'infini.

b) La partie régulière au voisinage de $\lambda = c$ est aussi un noyau résolvant, c'est-à-dire

$$L(M, P; \lambda) = R[L(M, P; \lambda)]$$

c) Les deux noyaux π et L sont orthogonaux.

Toutes ces propriétés peuvent se démontrer en utilisant seulement l'équation fonctionnelle de la résolvante de Plemelj et Hilbert, comme l'a montré M. Lalescco [1], ce qui est très important au point de vue méthodologique.

Remarque. On peut encore généraliser la notion de noyau principal. Supposons que $K(M, P)$ est tel que sa résolvante

$$R(K, \lambda) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{n-1} K^{(n)}(M, P)$$

a c comme point singulier isolé; c pourra être, par exemple, un point singulier essentiel isolé. Soit $\pi(M, P; \lambda)$ la partie principale de $R(K; \lambda)$ au voisinage d'un tel point. Posons:

$$R(K; \lambda) = \pi(M, P; \lambda) + L(M, P; \lambda)$$

on peut encore démontrer, dans certains cas, que les deux noyaux

$$\pi(M, P) = \pi(M, P; o)$$
$$L(M, P) = L(M, P; o)$$

sont orthogonaux et qu'ils ont pour résolvantes $\pi(M, P; \lambda)$ et $L(M, P; \lambda)$. Nous donnerons les démonstrations dans un autre travail.

CHAPITRE VIII

Sur les noyaux réguliers

§ 1 — Préliminaires

118. Soit $K(M, P)$ un noyau tel que :

$$\iint_V |K(M,P)|^2 dM\,dP < +\infty \tag{94}$$

$\{\lambda_i\}$ la suite des constantes polaires de ce noyau, c'est-à-dire les pôles de $R(K; \lambda)$, et $\pi_i(M, P)$ la suite des noyaux principaux correspondants. On sait que la série

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \pi_i(M, P) \tag{95}$$

n'est pas toujours convergente. Dans le cas particulier où $K(M, P)$ est, par exemple, symétrique on sait déjà (1) que la série (95) converge en double moyenne quadratique (voir N° 119). La convergence de la série (95) n'a pas été étudiée, à notre connaissance, dans le cas général.

Nous indiquerons plus loin, une classe de noyaux pour lesquels la série (95) converge en double moyenne quadratique. Cette classe contiendra comme cas particuliers les noyaux symétriques et Hermitiques. Nous allons d'abord rappeler quelques notions, avant d'aborder l'étude de cette question.

119. *Espaces d'Hilbert* — Représentons par $\mathfrak{L}^2$ l'espace des fonctions $f(M)$ d'une variable réelle, définies sur un domaine V (borné), telles que

$$\int_V |f(M)|^2 dM < +\infty$$

(1) Voir par exemple: Goursat [4 — p. 480].

Représentons par $\mathfrak{L}_2^2$ l'espace des fonctions $F(M, P)$ de deux points réels, de l'espace à n dimensions, M et P, définies sur V, telles qne

$$\iint_V |F(M,P)|^2 dM\, dP < +\infty$$

Les deux espaces $\mathfrak{L}^2$ et $\mathfrak{L}_2^2$ sont des espaces d'Hilbert, voir Stone [1, chapitre I].

Nous dirons avec M.M. Fréchet [1] qu'une suite de fonctions $S_n(M, P)$, de l'espace $\mathfrak{L}_2^2$, *converge en double moyenne quadratique,* vers une fonction $S(M, P)$ si

$$\lim_{n=\infty} \iint_V |S(M,P) - S_n(M,P)|^2 dM\, dP = 0$$

S'il en est ainsi, on a: $S(M, P) \subset \mathfrak{L}_2^2$. Remarquons que $S(M, P)$ n'est déterminé, sur V, qu'à un ensemble de double mesure nulle près.

Nous dirons que *la série*

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \pi_i(M,P), \text{ où } \pi_i \subset \mathfrak{L}_2^2$$

converge en double moyenne quadratique, sur V, si la suite de fonctions

$$S_n(M,P) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i(M,P)$$

converge en double moyenne quadratique, sur V, vers une fonction

$$\pi(M,P) \subset \mathfrak{L}_2^2$$

S'il en est ainsi, on écrit:

$$\boxed{\pi(M,P) \simeq \sum_{i=1}^{+\infty} \pi_i(M,P)}$$

Soit $\Phi_{i,j}(M, P)$ une suite de fonctions de $\mathfrak{L}_2^2$, où $i, j = 1, 2, \ldots,$. Nous dirons que les fonctions $\Phi_{i,j}(M, P)$ forment un système orthonormé, sur V, si:

$$(96) \quad \iint_V \Phi_{i,j}(M, P)\overline{\Phi_{p,q}(M, P)}\, dM\, dP = \begin{cases} 1, \text{ si: } i = p, j = q \\ o, \text{ dans les autres cas.} \end{cases}$$

Un système orthonormé est dit complet, si

$$\iint_V F(M, P)\overline{\Phi_{i,j}(M, P)}\, dM\, dP = o$$

où $F(M, P) \subset \mathfrak{L}_2^2$, entraîne:

$$\iint_V |F(M, P)|^2\, dM\, dP = o$$

120. Soit $K(M,P)$ un noyau vérifiant la condition (94), alors $K \subset \mathfrak{L}_2^2$.

Si $\Phi_{i,j}(M, P)$ est un système orthonormé et complet, d'après un théorème de Fischer-Riesz, voir Stone (loc. cit.), on peut écrire:

$$(97) \qquad K(M, P) \backsim \sum_{i,j=1}^{\infty} c_{i,j}\, \Phi_{i,j}(M, P)$$

où:

$$(98) \qquad c_{i,j} = \iint_V K(M P)\overline{\Phi_{i,j}(M, P)}\, dM\, dP$$

Donc tout noyau de Fredholm, qui vérifie la condition (94), peut s'écrire sous la forme (97), mais ce développement ne met pas en évidence, dans le cas général, les propriétés de $K(M,P)$ considéré comme noyau de Fredholm. Cependant, dans un certain nombre de cas particuliers, on est arrivé à écrire $K(M,P)$ sous la forme (97), de façon à mettre en évidence les propriétés du noyau $K(M, P)$, en choisissant convenablement les fonctions $\Phi_{i,j}(MP)$; mais à notre connaissance ce problème n'est pas résolu dans le cas général. On a obtenu un développement très important de la forme (97) à savoir le développement de Schmidt.

Soient $\{c_i\}$ les constantes de SCHMIDT du noyau $K(M,P)$ et $X_i(M)$ et $Y_i(P)$ les solutions de SCHMIDT correspondantes; voir, par exemple, GOURSAT [4, p. 470]. On peut supposer que chacun des deux systèmes $\{X_i(M)\}$ et $\{Y_i(P)\}$ est orthonormé sur V, c'est-à-dire que:

$$\int_V X_i(Q)\overline{X_j(Q)}\,dQ = \int_V Y_i(Q)\overline{Y_j(Q)}\,dQ = \delta_{i,j}$$

Alors, on prouve que:

$$K(M,P) \backsimeq \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{X_i(M)\,Y_i(P)}{c_i} \text{ (1)}$$

Mais, comme il est facile de voir par des exemples très simples, ce développement ne met pas en évidence, dans le cas général, les constantes polaires λ_i de K, ni les noyaux principaux π_i correspondants.

En tout cas, si $K(M,P)$ est Hermitique, on peut montrer que $c_i = \lambda_i$ et que $X_i(M) = \overline{Y_i(M)}$ est une solution de l'équation homogène correspondante.

§ 2 — Les noyaux réguliers de rang fini

121. Nous allons considérer, pour commencer, les noyaux de rang fini $H(M,P)$, appartenant à l'espace $\mathfrak{L}^2_2$, c'est à-dire les noyaux de la forme:

$$(99) \qquad H(M,P) = \sum_{i=1}^{m} U_i(M)\,V_i(P)$$

où les $U_i(M)$ et les $V_i(P)$ sont des fonctions de l'espace $\mathfrak{L}^2$. Nous avons expliqué au N° 54, ce qu'on entend par *forme réduite* d'un noyau $H(M,P)$ de rang fini; mais, pour cela, nous avons supposé que les $U_i(M)$ et les $V_i(P)$ étaient des fonctions continues sur V; il nous faut donc préciser cette notion pour le cas actuel.

(1) Ce developpement peut être utilisé, pour exprimer le n ième itéré $K^{(n)}(MP)$ en fonction de n, comme l'a montré M. MAURICE FRÉCHET [1].

122. On dit que n fonctions $U_i(M) \subset \mathfrak{L}^2$ sont linéairement indépendantes, s'il n'existe aucune combinaison linéaire des $U_i(M)$, à coefficients constants non tous nuls, qui soit équivalente à zéro [1], c'est-à-dire: si la condition:

$$\int_V \left| \sum_{i=1}^{m} a_i U_i(M) \right|^2 dM = o$$

entraîne nécessairement: $a_i = o$, quel que soit i.

Il est facile de voir qu'on peut toujours trouver deux suites de fonctions de $\mathfrak{L}^2$:

$$\begin{array}{lll} A_1(M), & A_2(M), \ldots, & A_n(M) \\ B_1(P), & B_2(P), \ldots, & B_n(P) \end{array}$$

chaque suite étant formée de fonctions linéairement indépendantes, au sens que nous venons d'indiquer, de telle manière que:

$$H(M,P) \simeq \sum_{i=1}^{n} A_i(M) B_i(P) \tag{100}$$

c'est-à-dire que:

$$\int_V \left| H(M,P) - \sum_{i=1}^{n} A_i(M) B_i(P) \right|^2 dM\, dP = o \tag{101}$$

Posons

$$H'(M,P) = \sum_{i=1}^{n} A_i(M) B_i(P)$$

L'égalité (101) exprime que $H(M,P)$ et $H'(M,P)$ ne diffèrent que sur un ensemble de double mesure nulle; nous dirons dans ces conditions que les *deux noyaux* H et H' sont *équivalents* et que H est écrit sous la forme réduite. Nous dirons aussi que $H(M,P)$ est de rang n.

---

(1) On dit qu'une *fonction* $F(M) \subset \mathfrak{L}^2$, est *équivalente à zéro* si: $\int_V | F(M) |^2 dM = o$. Alors on écrit: $F(M) \sim o$.

123. Les fonctions: $A_1(M), \ldots, A_n(M)$ étant linéairement indépendantes, elles définissent, sur $\mathfrak{L}^2$, une variété linéaire R'_n à n dimensions, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions:

$$A(M) \sim \sum_{i=1}^{n} a_i A_i(M)$$

où les a_i sont des nombres réels ou complexes quelconques.

De même, les $\overline{B_i(M)}$ définissent sur $\mathfrak{L}^2$ une autre variété linéaire R''_n, à n dimensions. Considérons maintenant la variété linéaire, définie, sur $\mathfrak{L}^2$, par les fonctions:

$$A_1(M),\ A_2(M), \ldots,\ A_n(M),\ \overline{B_1(M)},\ \overline{B_2(M)}, \ldots,\ \overline{B_n(M)}$$

Ce sera une variété linéaire à r dimensions R_r, où: $n \leq r \leq 2n$. Nous dirons que R_n *est la variété associée à* $\overline{A}$(M, P).

Le cas où $n = r$ se présentera, par exemple, si: $H(M, P) = A_1(M)\overline{A_1(P)}$. Dans ce cas le noyau $A(M, P)$ est Hermitique, c'est-à-dire: $H(M, P) = \overline{H(P, M)}$.

On a aussi $n = r$, pour le noyau non Hermitique

$$H(M, P) = A_1(M)\overline{A_1(P)} + A_2(M)\left[\overline{A_1(P)} + \overline{A_2(P)}\right].$$

Le cas où: $n = 2r$, se présentera par exemple pour: $H(M, P) = A_1(M) B_1(P)$, si $\overline{B_1(M)}$ est linéairement distincte de $A_1(M)$.

124. Dans le cas général, les deux variétés R'_n et R''_n, que nous venons de définir, sont distinctes, alors $r > n$. Si les deux variétés R'_n et R'_n sont identiques $[R'_n \equiv R''_n]$, on aura aussi: $R_r \equiv R'_n \equiv R'_n$, donc $n = r$ et réciproquement si $n = r$, on aura: $R_r \equiv R'_n \equiv R''_n$.

S'il en est ainsi nous pouvons dire comme au N° 54 (Remarque) que $H(M, P)$ est *un noyau régulier*. Nous reviendrons plus loin sur cette définition, qu'on doit considérer comme provisoire. Pour le moment nous n'avons pas de raison spéciale pour introduire une autre notion; c'est par la suite que nous serons conduits à la modifier. En tout cas nous pouvons dire tout de suite que les résultats que nous allons établir resteront valables, avec la nouvelle définition.

125. Supposons donc que $H(M, P)$ est un noyau régulier. La variété associée à H (N° 123) sera une variété à n dimensions. Considérons une base orthonormale de R_n, c'est-à-dire: un système de n fonctions de R_n:

$$\varphi_1(M),\ \varphi_2(M),\ \ldots,\ \varphi_n(M)$$

telles que:

$$\int_V \varphi_i(Q)\,\overline{\varphi_j(Q)}\,dQ = \delta_{i,j}.$$

Toute fonction $f(M) \subset R_n$, peut s'écrire sous la forme:

$$f(M) \sim \sum_{i=1}^{n} f_i\,\varphi_i(M)$$

où

$$f_i = \int_V f(M)\,\overline{\varphi_i(M)}\,dM.$$

Dans ces conditions on peut écrire:

$$\boxed{A_i(M) \sim \sum_{h=1}^{n} \alpha_{i,h}\,\varphi_h(M)}$$

$$\boxed{B_i(P) \sim \sum_{k=1}^{n} \beta_{i,k}\,\overline{\varphi_k(P)}}$$

où

$$\alpha_{i,h} = \int_V A_i(M)\,\overline{\varphi_h(M)}\,dM$$

$$\beta_{i,k} = \int_V B_i(P)\,\varphi_k(P)\,dP$$

Alors $H(M, P)$ peut s'écrire sous la forme:

$$H(M, P) \leftrightharpoons \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{h=1}^{n} \alpha_{i,h}\,\varphi_h(M)\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \beta_{i,k}\,\overline{\varphi_k(P)}\right)$$

ou

$$\boxed{H(M,P) \simeq \sum_{h,\,k=1}^{n} c_{h,k}\,\varphi_h(M)\,\overline{\varphi_k(P)}}$$

où nous avons posé:

$$c_{h,k} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,h}\,\beta_{i,k}$$

Nous dirons, dans ce cas, que $H(MP)$ est écrit sous la *forme orthonormale,* dont la base est: $\varphi_1(M), \varphi_2(M), \ldots, \varphi_n(M)$.

126. Étudions maintenant le noyau $H(M,P)$ considéré comme une fonction de l'espace $\mathfrak{L}_2^2$. Pour cela considérons les n^2 fonctions:

$$\Phi_{p,q}(M,P) = \varphi_p(M)\,\overline{\varphi_q(P)} \tag{102}$$

où $$p, q = 1, 2, \ldots, n$$

Il est facile de voir que les fonctions $\Phi_{p,q}(M,P) \subset \mathfrak{L}_2^2$ forment un système orthonormé sur V (n° 119); elles peuvent donc être considérées comme la base d'une variété linéaire $V(M,P)$ à n^2 dimensions de l'espace $\mathfrak{L}_2^2$. Si $F(M,P)$ est une fonction de cette variété, on aura:

$$F(M,P) \simeq \sum_{h,\,k=1}^{n} c_{h,k}\,\Phi_{h,k}(M,P) \tag{103}$$

où

$$c_{h,k} = \iint_V F(M,P)\,\overline{\Phi_{h,k}(M,P)}\,dM\,dP. \tag{104}$$

Réciproquement si $F(M,P)$ est de la forme (103) $F(M,P) \subset V(M,P)$ et les $c_{h,k}$ seront données par (104); par conséquent $H(M,P) \subset V(M,P)$.

Nous dirons par la suite que les fonctions (102) constituent une *base complète correspondant au noyau* $H(M,P)$.

127. Il y a une question qu'on doit naturellement se poser, à savoir: est-ce que deux noyaux de FREDHOLM de rang fini $H(M, P)$ et $H'(M, P)$ qui sont équivalents (n. 122) peuvent être remplacés, l'un par l'autre, dans l'étude de l'équation de FREDHOLM? En particulier ont-ils les mêmes constantes caractéristiques et les memes solutions à droite et à gauche? La réponse est affirmative à condition de remplacer les équations:

$$X = c[H, X]; \quad Y = c[Y, H]$$

par les équations:

$$X \sim c[H, X]; \quad Y \sim c[Y, H].$$

Dans ce cas les solutions de ces équations sont définies à un ensemble de mesure nulle près.

§ 3 — Les noyaux réguliers

128. Soit $K(M, P)$ un noyau que vérifie la condition (94) du n° 118. Les résultats de FREDHOLM sont alors applicables à ce noyau. Soient λ_i les constantes polaires de ce noyau et $\pi_i(M, P)$ les noyaux principaux correspondants.

Posons

$$K(M, P) = \pi_i(M, P) + H_i(M, P)$$

On sait que π_i et H_i sont orthogonaux. Tout noyau principal $\pi_i(M, P)$, est de rang fini; plus précisément π_i est de la forme:

$$\pi_i(M, P) = \sum_{h=1}^{n} X_h^{(i)}(M)\, Y_h^{(i)}(P) \tag{105}$$

où: $X_h^{(i)}(M) \subset \mathfrak{L}^2$, $Y_h^{(i)}(P) \subset \mathfrak{L}^2$, forment deux systèmes de fonctions linéairement indépendantes.

Définition: Nous dironx que K(M, P) *est un noyau régulier si tous ses noyaux principaux* π_i (M, P) *sont réguliers.*

Cette définition est évidemment applicable à un noyau K qui n'est pas de rang fini. Remarquons que si K est de rang fini, cette définition n'est pas identique à celle que nous avons donnée au n° 124, elle est plus générale. Un noyau de rang fini K, peut être régulier au nouveau sens, sans être régulier au sens du n° 124, comme il arrive, par exemple, pour

$$K(M,P)=\varphi_1(M)\ \overline{\varphi_1(P)}+\varphi_2(M)\ \overline{\varphi_3(P)}$$

où: $\varphi_1(M), \varphi_2(M)$ et $\varphi_3(M)$ sont des fonctions orthonormées sur V. Au contraire si K, de rang fini, est régulier au sens du n° 124, il est aussi régulier au nouveau sens, comme il est facile de voir. Les deux définitions coïncident pour un noyau principal de rang fini. Nous adopterons donc la définition que nous venons de donner.

129. Nous allons supposer, dans la suite, que $K(M,P)$ est un noyau régulier. Donnons quelques indications sur le noyau principal $\pi_i(M,P)$ correspondant à la constante λ_i. D'après l'hypothèse que nous venons de faire, π_i est un noyau régulier; dans ces conditions les deux systèmes de n_i fonctions linéairement indépendantes: $\{X_h^{(i)}(M)\}$, $\{\overline{Y_h^{(i)}(M)}\}$ définissent une même variété linéaire R_i à n_i dimensions. Soit $\{\varphi_h^{(i)}(M)\}$, où $h=1,2,\ldots,n_i$, une base orthonormale de R_i; on aura:

$$X_h^{(i)}(M)\sim\sum_{j=1}^{n_i} a_{h,j}^{(i)}\,\varphi_j^{(i)}(M)$$

$$Y_h^{(i)}(P)\sim\sum_{j=1}^{n} \beta_{h,j}^{(i)}\,\overline{\varphi_j(P)}$$

Dans ces conditions π_i, s'écrit sous la forme orthonormale

$$\boxed{\pi_i(M,P)\leftrightharpoons\sum_{h,k=1}^{n} c_{h,k}^{(i)}\,\varphi_h^{(i)}(M)\,\overline{\varphi_k^{(i)}(P)}} \tag{106}$$

Les fonctions orthonormées dans $\mathfrak{L}_2^2$

$$\Phi_{h,k}^{(i)}(MP)=\varphi_h^{(i)}(M)\,\overline{\varphi_k^{(i)}(P)} \tag{107}$$

constituent alors (n° 126) une *base complète correspondante* à $\pi_i(M,P)$ que nous désignerons par $B_i(MP)$.

D'après le n° 126, on a:

$$(108) \qquad c_{h,k}^{(i)} = \iint_V \pi_i(M, P)\, \overline{\Phi_{h,k}^{(i)}(M, P)}\, dM\, dP.$$

Comme $\pi_i(M, P)$ est un noyau orthogonal à $H_i(M, P)$, on peut affirmer, par exemple, que les fonctions $X_h^{(i)}(M)$ sont orthogonales à droite de $H_i(M, P)$; il en sera de même pour toute combinaison linéaire à coefficients constants, en particulier les fonctions $\varphi_h^{(i)}(M)$ seront toutes orthogonales à droite de $H_i(M, P)$, c'est-à-dire on a:

$$(109) \qquad \int_V H_i(M, P)\, \varphi_h^{(i)}(P)\, dP = o, \; (h = 1, 2, \ldots, n_i).$$

De même on démontre que:

$$(110) \qquad \int_V \overline{\varphi_h^{(i)}(M)}\, H_i(M, P)\, dM = o, \; (h = 1, 2, \ldots, n_i).$$

La seule hypothèse qui intervient dans notre raisonnement c'est l'orthogonalité de φ_i et H_i.

Ceci étant, nous allons déterminer la:

130. *Meilleure approximation de* K (M, P) *en double moyenne quadratique dans la base* B$_i$ (M, P).

Considérons la base $B_i(M, P)$, correspondante au noyau principal $\pi_i(M, P)$ de $K(M, P)$, définie par (107) et cherchons la meilleure approximation de $K(M, P)$ en double moyenne quadratique dans cette base.

La meilleure approximation sera donnée par

$$\sum_{h,k=1}^{n_i} \theta_{h,k}^{(i)}\, \Phi_{h,k}(M, P)$$

où

$$\theta_{h,k}^{(i)} = \iint_V K(M, P)\, \overline{\Phi_{h,k}^{(i)}(M, P)}\, dM\, dP =$$

$$= \iint_V \pi_i(M, P)\, \overline{\Phi_{h,k}^{(i)}(M, P)}\, dM\, dP +$$

$$+ \iint_V H_i(MP)\, \overline{\Phi_{h,k}^{(i)}(M, P)}\, dM\, dP$$

Le dernière intégrale étant nulle, d'après (109) et (110) on a:

$$\Theta_{h,k}^{(i)} = c_{h,k}^{(i)}$$

donc la meilleure approximation cherchée est donnée par le noyau principal lui-même $\pi_i(M, P)$.

Lemme I — *La meilleure approximation d'un noyau régulier, en double moyenne quadratique, dans la base complète* $B_i(M, P)$, *correspondant au noyau principal* $\pi_i(MP)$, *est donnée par le noyau principal lui-même.*

Ce lemme nous sera utile plus loin.

131. Etudions maintenant les relations qui existent entre deux bases B_i et B_j, correspondantes à deux noyaux principaux π_i et π_j relatifs à deux constantes polaires distinctes, λ_i et λ_i.

Deux noyaux principaux π_i et π_j relatifs à deux constantes polaires distinctes λ_i et λ_j sont toujours orthogonaux.

Soient R_i et R_j les variétés linéaires associées respectivement à π_i et π_j, $\{ \varphi_h^{(i)}(M) \}$ et $\{ \varphi_h^{(j)}(P) \}$ les bases correspondantes. D'après le N° 129, on aura:

$$\int_V \pi_j(M, P)\, \varphi_h^{(i)}(P)\, dP = \int_V \overline{\varphi_h^{(i)}(M)}\, \pi_j(M, P)\, dM = o$$

$$\int_V \pi_i(M, P)\, \varphi_h^{(j)}(P)\, dP = \int_V \overline{\varphi_h^{(j)}(M)}\, \pi_i(M, P)\, dM = o.$$

D'après la forme des noyaux π_i et π_j, il est maintenant facile de démontrer que:

$$\int_V \varphi_h^{(i)}(M)\, \overline{\varphi_k^{(j)}(M)}\, dM = o$$

quels que soient h et k, c'est-à-dire pour $h = 1, 2, \ldots, n_i$, $k = 1, 2, \ldots, n_j$. Cela nous montre que les deux variétés R_i e et R_j sont orthogonales. Nous aurons aussi:

$$\iint_V \Phi_{h,k}^{(i)}(M, P)\, \overline{\Phi_{p,q}^{(j)}(M, P)}\, dM\, dP = o$$

pour $h, k = 1, 2, \ldots, n_i$; $p, q = 1, 2, \ldots, n_j$, c'est-à-dire: les deux bases $B_i(M, P)$ et $B_j(M, P)$ sont orthogonales si $\lambda_i \neq \lambda_j$.

L'ensemble des fonctions $\Phi^{(i)}_{h,k}(M, P)$ et $\Phi^{(j)}_{p,q}(M, P)$ où $h, k = 1, 2, \ldots, n_i$; $p, q = 1, 2, \ldots, n_j$, constituent donc une base, d'une certaine variété linéaire de l'espace $\mathfrak{L}^2_2$, qu'on peut représenter par $B_i + B_j$.

132. Soient: $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m$ les noyaux principaux correspondants aux constantes polaires, distinctes deux à deux, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ de $K(M, P)$ et $B_1, B_2, \ldots, B_m$ les bases complètes correspondantes.

L'ensemble des fonctions $\Phi^{(i)}_{h_i, k_i}(M, P)$, où: $i = 1, 2, \ldots, m$ et $h_i, k_i = 1, 2, \ldots, n_i$, forment aussi une base orthonormale, qu'on peut représenter par $B_1 + B_2 + \ldots B_m$, d'une certaine variété linéaire de l'espace $\mathfrak{L}^2_2$.

Cherchons la meilleure approximation de $K(M, P)$ en double moyenne quadratique, dans cette base.

Il est facile de voir que

$$\iint_V K(M,P)\,\overline{\Phi^{(i)}_{h_i, k_i}(M,P)}\,dM\,dP = c^{(i)}_{h_i, k_i}$$

par conséquent, la meilleure approximation cherchée est $\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_m$.

Lemme II — *La meilleure approximation d'un noyau régulier* K(M, P), *en double moyenne quadratique, dans la base* $\mathrm{B}_1 + \mathrm{B}_2 + \mathrm{B}_3 + \ldots + \mathrm{B}_m$ *est donné par* $\sum_{i=1}^{m} \pi_i(\mathrm{M}, \mathrm{P})$.

133. Cherchons maintenant la meilleure approximation, en double moyenne quadratique, de $K(M, P)$ dans la base infinie: $B_1 + B_2 + \ldots + B_m + \ldots$.

Les fonctions $\Phi^{(i)}_{h_i, k_i}$ de cette base forment un système orthonormé qui ne sera pas complet dans le cas général.

En tout cas on a, d'après l'inégalité de Bessel:

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{h_i=1}^{n_i} \sum_{k_i=1}^{n_i} \left| c^{(i)}_{h_i, k_i} \right|^2 \leqq \iint |K(M, P)|^2\, dM\, dP$$

donc il existe, d'après Fischer-Riesz, une fonction $\pi(M, P) \subset \mathfrak{L}_2^2$ telle que

$$\boxed{\pi(M, P) \simeq \sum_{i=1}^{+\infty} \pi_i(M, P)}$$

c'est-à-dire: telle que la série $\sum_{i=1}^{+\infty} \pi_i$ converge en double moyenne quadratique vers $\pi(M, P) \subset \mathfrak{L}_2^2$.

134. Nous allons étudier les propriétés de $\pi(MP)$ et de la décomposition $K = \pi + H$, mais pour simplifier nous supposerons que K est un noyau continu sur l'ensemble V de mesure finie. Posons:

$$\pi(M, P) = \pi_1(M, P) + \theta_1(M, P)$$

Le noyau π_1 est orthogonal à $\pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_i, \ldots$, donc π_1 est orthogonal à $\sum_{i=1}^{m} \pi_i(M, P) = P_m(M, P)$, c'est-à-dire on a:

$$\int_V \pi_1(M, Q) P_m(Q, P)\, dQ = \int_V P_m(M, Q) \pi_1(Q, P)\, dQ = o$$

Or $P_m(M, P)$ converge en double moyenne quadratique vers $\theta_1(M, P)$. Dans ces conditions, nous pouvons affirmer que

$$\int_V \pi_1(M, Q) \theta_1(Q, P)\, dQ = \int_V \theta_1(M, Q) \pi_1(Q, P)\, dQ = o$$

sauf sur un ensemble de double mesure nulle de positions de M et de P, sur V. Si deux noyaux π_1 et θ_1 vérifient ces conditions nous dirons qu'ils sont *orthogonaux au sens généralisé* et il serait facile de voir que pour deux noyaux de cette nature on peut encore énoncer des propositions analogues à celles que nous avons trouvées pour l'orthogonalité au sens ordinaire; nous le montrerons ailleurs.

Pour abréger nous dirons provisoirement que deux noyaux sont orthogonaux s'ils sont orthogonaux au sens généralisé.

Posons:

$$K(M,P) = \pi(M,P) + H(M,P)$$
$$= \pi_1(M,P) + \Theta_1(M,P) + H(M,P)$$

Le noyau π_1 étant le noyau principal de K relatif à la constante polaire λ_1, il est orthogonal à $\Theta_1 + H$; comme il est orthogonal à Θ_1, il est aussi orthogonal à H.

Les mêmes propriétés auront lieu pour $\pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_i, \ldots$, c'est-à-dire: *a)* π_i est orthogonal à $\Theta_i = \pi - \pi_i$; *b)* π_i est orthogonal a H. On peut donc affirmer que

$$S_m(M,P) = \sum_{i=1}^{m} \pi_i(M,P)$$

est orthogonal à $H(M,P)$; et comme $S_m(M,P)$ converge en double moyenne quadratique vers $\pi(M,P)$ on en déduit que π est orthogonal à H. Par conséquent, dans la décompostion

$$K(M,P) = \pi(M,P) + H(M,P)$$

π et H sont orthogonaux (au sens généralisé).

D'après ce qui précède les λ_i sont des constantes polaires de π auxquelles correspondent les noyaux principaux π_i, donc les λ_i ne sont pas des constantes polaires de H. Comme π et H sont orthogonaux, H n'a pas de constante polaire. Nous pouvons maintenant énoncer la proposition suivante:

Théorème — *Tout noyau* K(M, P) *régulier et continu sur un ensemble* V *de mesure finie, peut-être décomposé en une somme de deux noyaux dont les modules sont de carré doublement sommables sur* V

$$K(M,P) = \pi(M,P) + H(M,P)$$

qui sont orthogonaux, sur V, *au sens généralisé; dont l'un* H(M, P) *n'a pas de constante polaire et dont l'autre est la somme généralisée de la série des noyaux principaux* π_i (M, P) *de* K(M, P), *série qui converge, sur* V, *vers* π(M, P) *en double moyenne quadratique. De plus chaque* π_i (M, P) *est le noyau principal de* π(M, P) *relatif à* λ_i, *comme de* K(M, P).

§ 4 — Exemples de noyaux réguliers

135. *Tout noyau réel et symétrique est régulier.* En effet si K est un tel noyau et si c est une constante polaire de K le noyau principal correspondant est de la forme

$$\pi(M,P)=\sum_{j=1}^{m}\frac{\varphi_j(M)\varphi_j(P)}{c}$$

où les fonctions réelles $\varphi_i(M)$ forment un système orthonormé sur V. Le noyau π étant régulier quel que soit c, K est régulier.

136. *Tout noyau Hermitique est régulier.* En effet si

$$K(M,P)=\overline{K(P,M)}$$

et si c est une constante polaire de K, le noyau principal correspondant est de la forme

$$\pi(M,P)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\varphi_i(M)\overline{\varphi_i(P)}}{c}$$

ou les fonctions réelles ou complexes $\varphi_i(M)$ sont orthonormées, sur V, c'est-à-dire:

$$\int_V \varphi_i(M)\,\overline{\varphi_j(M)}\,dM=\delta_{i,j}$$

Dans ces conditions π est régulier quel que soit c, donc K est régulier.

137. Nous allons maintenant montrer que la notion de noyau régulier est plus générale que celle de noyau symétrique ou Hermitique; pour cela il suffit de donner un exemple d'un noyau régulier ayant un pôle multiple, c'est ce qui arrive pour le noyau

$$R(M,P)=\varphi_1(M)\varphi_1(P)+\varphi_2(M)[\varphi_1(P)+\varphi_2(P)]$$

et pour le noyau

$$K(M, P) = R(M, P) + S(M, P)$$

où S est un noyau réel et symetrique, $\varphi_1(M)$ et $\varphi_2(M)$ deux fonctions réelles telles que

$$\int_V \varphi_i(Q)\, \varphi_j(Q)\, dQ = \delta_{i,j}\,, (i, j = 1, 2)$$

$$\int_V \quad S(M, P)\, \varphi_i(P)\, dP = o, (i = 1, 2)$$

Un grand nombre des résultats que nous avons établis dans ce travail sont susceptibles d'être étendus à d'autres domaines de l'Analyse et en particulier à la théorie des équations linéaires à une infinité d'inconnues; nous y reviendrons dans un autre mémoire.

FIN

BIBLIOGRAPHIE

FRÉCHET (M.) — [1] — *Sur une expression générale des noyaux itérés* — C. R., t. 199, 2ème sem. 1934 (p. 1008-1010).

FRÉCHET ET HEYWOOD — [1] — *L'équation de* Fredholm *et ses applications a la physique mathématique* — Paris, Hermann & Fils, 1912.

FREDHOLM (I.) — [1] — *Sur une classe d'équations fonctionelles* — « Acta Mathematica », t. 27, 1903 (p. 365-390).

GOURSAT (E.) — [1] — *Sur les équations intégrales* — C. R., t. 145, 2ème sem., 1907 (p. 667-670).

—— [2] *Sur quelques propriétés des équations intégrales* — C. R., t. 145, 2ème sem., 1907 (p. 752-754).

—— [3] *Recherches sur les équations intégrales linéaires* — « Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse », 2ème série, t. 10, 1908 (p. 5-98).

—— [4) *Cours d'analyse mathématique* — T. III, Quatrième édition, Paris, 1927.

HEYWOOD (B.) — [1] — *Sur quelques points de la théorie des fonctions fondamentales relatives a certaines équations intégrales* — C. R., t. 145, 2ème sem., 1907 (p. 908-910).

—— [2] *Sur l'équation fonctionelle de* Fredholm — « Journal de Mathématiques Pures et Appliquées », 6ème série, t. 4, 1908 (p. 283-330).

—— [3] *Sur l'équation fonctionelle de* Fredholm — « Thèse », Gauthier-Villars, 1908.

LALESCO (T.) — [1] — *L'étude des noyaux résolvants* — « Bulletin de la Société Mathématique de France », t. 39, 1911 (p. 85-103).

MONTEIRO (A.) — [1] — *Sur les noyaux additifs dans la théorie des équations intégrales de* Fredholm. C. R., t. 198, 1er sem., 1934 (p. 1737).

—— [2] *Sur une classe de noyaux de* Fredholm *développables en série de noyaux principaux* — C. R., t. 200, 1er sem., 1935 (p. 2143).

STONE (M. H.) — [1] — *Linear transformations in* Hilbert *space and their applications to Analysis* — « American Mathematical Society », Colloquium Publications, volume xv, New-York, 1932.

TURNBULL ET AITKEN — [1] — *An introduction to the theory of canonical matrices* — Blackie & Son Limited, London and Glasgow, 1932.

URYSOHN (P.) — [1] — *Sur l'unicité de la solution des équations intégrales linéaires de* M. Volterra — « Bull. Acad. Polon. des Sciences et L. », A, 1927 (p. 57-62).

WEDDERBURN — [1] — *Lectures on Matrices* — « American Mathematical Society, Colloquium Publicatios », vol. xvii, New-York, 1934.

VOLTERRA (V.) — [1] — *Leçons sur les fonctions de lignes* — Gauthiers-Villars, Paris, 1913.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE V

Sur la forme du noyaux le plus général additif a un noyau de rang fini donnée

CHAPITRE VI

Sur les matrices additives a une matrice donnée

CHAPITRE VII

Application des résultats précédents aux noyaux de Fredholm

CHAPITRE VIII

Sur les noyaux réguliers