ALI AFZALIPOUR

Contribution à l'étude de la théorie mathématique de la démographie

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1936
<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1936__176__1_0>

Série A, N° 317
N° d'Ordre :
341

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

(Sciences Mathématiques)

PAR

ALI AFZALIPOUR

Licencié ès Sciences

Diplômé d'Études Supérieures de Mathématiques

1re THÈSE. — CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DE LA THÉORIE MATHÉMATIQUE DE LA DÉMOGRAPHIE.
2e THÈSE. — Propositions données par la Faculté.

Soutenues le   janvier 1936, devant la Commission d'Examen :

MM. E. BOREL, *Président.*
M. FRECHET, } *Examinateurs.*
G. DARMOIS, }

Librairie L. RODSTEIN
17, rue Cujas, PARIS (Ve)

1936

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen honoraire . . . M. MOLLIARD.

Doyen . . . . C. MAURAIN, *Professeur*, Physique du Globe.

Professeurs honoraires.

H. LE CHATELIER.
H. LEBESGUE.
A. FERNBACH.
A. LEDUC.
Emile PICARD.
Rémy PERRIER.
Léon BRILLOUIN.
GOURSAT.
WALLERANT.
GUILLET.
PÉCHARD.
FREUNDLER.
AUGER.
BLAISE.
DANGEARD.
JANET.
LESPIEAU.
MARCHIS.
VESSIOT.

PROFESSEURS

G. BERTRAND . . .	T	Chimie biologique.
M. CAULLERY . . .	T	Zoologie (Evolution des êtres organisés).
G. URBAIN	T	Chimie générale.
Emile BOREL. . . .	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.
Jean PERRIN. . . .	T	Chimie physique.
H. ABRAHAM. . . .	T	Physique.
E. CARTAN . . .	T	Géométrie supérieure.
M. MOLLIARD . . .	T	Physiologie végétale.
L. LAPICQUE. . . .	T	Physiologie générale.
A. COTTON	T	Recherches physiques.
J. DRACH.	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
Charles FABRY. . .	T	Enseignement de physique.
Charles PÉREZ . . .	T	Zoologie.
Léon BERTRAND . .	T	Géologie structurale et géologie appliquée.
P. PORTIER. . . .	T	Physiologie comparée.
E. RABAUD. . . .	T	Biologie expérimentale.
M. GUICHARD . . .		Chimie minérale.
Paul MONTEL . . .	T	Théorie des fonctions et Théorie des transformations.
P. WINTREBERT . .	T	Anatomie et histologie comparées.
L. BLARINGHEM . .	T	Botanique.
O. DUBOSCQ. . .	T	Biologie maritime.
G. JULIA.	T	Application de l'analyse à la Géométrie.
C. MAUGUIN. . . .	T	Minéralogie.
A. MICHEL-LÉVY . .		Pétrographie.
H. BÉNARD	T	Mécanique expérimentale des fluides.
A. DENJOY	T	Calcul différentiel et calcul intégral.
L. LUTAUD . .	T	Géographie physique et géologie dynamique.
Eugène BLOCH . . .	T	Physique théorique et physique céleste.
G. BRUHAT		Physique.
E. DARMOIS. . . .		Physique.
A. DEBIERNE . . .	T	Radioactivité.
A. DUFOUR. . . .	T	Physique (P. C. B.).
L. DUNOYER. . . .		Optique appliquée.
A. GUILLIERMOND. .	T	Botanique (P. C. B.).
M. JAVILLIER . . .		Chimie biologique.
L. JOLEAUD. . . .		Paléontologie.
ROBERT-LÉVY . . .		Zoologie.
F. PICARD		Zoologie (Evolution des êtres organisés).
Henri VILLAT . . .	T	Mécanique des fluides et applications.
Ch. JACOB	T	Géologie.
P. PASCAL	T	Chimie minérale.
M. FRÉCHET. . . .	T	Calcul des Probabilités et Physique mathématique.
E. ESCLANGON. . .	T	Astronomie.
Mme RAMART-LUCAS.	T	Chimie organique.
H. BÉGHIN	T	Mécanique physique et expérimentale.
FOCH.		Mécanique expérimentale des fluides.
PAUTHENIER. . . .		Physique (P. C. B.).
DE BROGLIE. . . .	T	Théories physiques.
CHRETIEN.		Optique appliquée.
P. JOB.		Chimie générale.
LABROUSTE. . . .		Physique du Globe.
PRENANT.		Zoologie.
VILLEY		Mécanique physique et expérimentale.
BOHN.		Zoologie (P. C. B.).
COMBES		Botanique.
GARNIER.		Calcul différentiel.
PÉRÈS.		Mécanique des fluides.
HACKSPILL		Chimie (P. C. B.).
LAUGIER.		Physiologie générale.
TOUSSAINT		Technique Aéronautique.
M. CURIE.		Physique (P. C. B.).
G. RIBAUD	T	Hautes températures.
CHAZY.	T	Mécanique rationnelle.
GAULT.		Chimie (P. C. B.).
CROZE.		Physique.
DUPONT	T	Théories chimiques.
LANQUINE		Géologie.
VALIRON.		Mathématiques.
BARRABÉ		Géologie structurale et géologie appliquée.
MILLOT		Zoologie (P. C. B.).
F. PERRIN. . . .		Théories physiques.
VAVON		Chimie organique.

Secrétaire . . . . A. PACAUD.

Secrétaire honoraire . . . . D. TOMBECK.

A SA MAJESTÉ IMPÉRIALE

RÉZA SHAH PAHLAVI

A MON PÈRE

A MA MÈRE

A MON MAITRE

MONSIEUR LE PROFESSEUR

G. DARMOIS

Hommages de respectueuses reconnaissances.

CHAPITRE PREMIER

FONCTIONS DÉMOGRAPHIQUES INDÉPENDANTES

I. FONCTIONS DÉMOGRAPHIQUES D'UNE POPULATION. — Pour avoir l'état numérique d'une population humaine sous ses différents aspects à un instant donné, il faut arriver à déterminer un certain nombre de fonctions, que nous appellerons *fonctions démographiques* de cette population. La détermination de toutes ces fonctions s'appelle *résolution démographique de la population.*

Quelques-unes de ces fonctions ne dépendent que du temps. Par exemple le nombre total des naissances dans l'intervalle de temps $(t, t+1)$ est une fonction de l'instant t seul. D'autres enfin dépendent du temps et de l'âge. Par exemple si l'on prend un certain nombre de garçons qui naissent à l'instant t, la fonction qui définit leur nombre lorsqu'ils auront l'âge x dépendra évidemment de t et de x.

Donc en démographie nous aurons *deux variables indépendantes qui sont l'âge x et le temps t.*

Les principales fonctions démographiques dépendant seulement du temps sont :

1.	Nombre total	de la population à l'instant t	$P(t)$
2.	—	— des naissances dans l'intervalle $(t, t+1)$....	$N(t)$
3.	—	— des décès — — —	$M(t)$

4. Taux de natalité	n	(t)
5. — de mortalité	m	(t)
6. Accroissement relatif de la population	σ	(t)
7. Taux de masculinité des naissances	G	(t)
8. Durée moyenne de la vie d'un individu	L	(t)
9. — — d'une génération	$\mathcal{D}$	(t)

Les principales fonctions démographiques dépendant de l'âge et du temps sont :

1. Population d'âge x à l'instant t	p	(x, t)
2. Mortalité de l'âge —	μ	(x, t)
3. Fécondité — —	φ	(x, t)
4. Fonction de survie —	λ	(x, t)
5. Fonction de structure de la population	S	(x, t)
6. Fonction de migration	$\mathcal{M}$	(x, t)

Mais toutes ces fonctions ne sont pas indépendantes les unes des autres. Nous verrons dans la suite quelles sont les relations qui les lient ensemble. Nous essayons seulement de mettre ici en évidence celles de ces fonctions dont la donnée permet de calculer toutes les autres.

D'autre part, il est à peine nécessaire de préciser, que *toutes ces fonctions sont définies, continues, bornées et dérivables* pour toutes les valeurs que x et t peuvent prendre. Il en est de même de toutes leurs dérivées. C'est un point sur lequel nous ne reviendrons plus.

2. Fonctions démographiques indépendantes. — Pour avoir le nombre d'une population à chaque instant, il faut disposer de la fonction qui définit ce nombre pour chaque âge et pour chaque sexe à l'instant initial, et voir comment ce nombre varie dans le temps. Nul doute que c'est seulement

le jeu des naissances et des décès qui détermine toutes les modifications numériques que la population peut subir.

Disons immédiatement que dans tout ce qui suit, *nous ferons abstraction du mouvement migratoire*, qui ne suit aucune règle, et pour lequel on ne peut construire par conséquent aucune théorie mathématique.

Donc si, outre les conditions initiales, nous pouvons avoir le nombre des naissances et celui des décès à chaque instant, nous aurons du même coup, l'état de notre population pour chaque valeur du temps.

Prenons d'abord les naissances. Pratiquement, ce sont les femmes âgées de quinze ans au moins et de cinquante ans au plus, qui peuvent donner naissance à des enfants. Il est évident d'autre part, que l'aptitude à la reproduction n'est pas la même pour tous les âges de la femme. Si nous arrivons donc à avoir pour chaque âge des femmes leur aptitude à donner naissance à des enfants, ou en d'autres termes, le nombre d'enfants qu'elles peuvent mettre au monde pendant un certain intervalle de temps, nous aurons ainsi, en supposant que le nombre de ces femmes soit donné, le nombre total des naissances à chaque instant.

Donc, il est préférable de considérer, au lieu du nombre total des naissances, la fonction qui donne pour chaque âge de la femme, le nombre d'enfants qu'elle peut mettre au monde pendant l'unité de temps. C'est *la fonction de fécondité*; nous la désignons par $\varphi(x, t)$.

Prenons maintenant les décès. Il est évident que la mort d'un individu très âgé, a moins d'effet sur l'avenir démographique de la population, que celle d'un individu jeune à l'âge de reproduction. Il faut donc considérer séparément les décès relatifs à chaque âge.

D'autre part, on conçoit aisément, que le nombre absolu des décès ne joue pas le rôle principal. Il ne suffit pas de dire qu'on a eu tant de décès de gens d'âge x. Il importe d'avoir la fonction qui donne le rapport du nombre des décès des gens d'âge x, au nombre total de ces gens à chaque instant. C'est *la fonction de mortalité* que nous désignons par $\mu\ (x, t)$.

Enfin, comme pour la reproduction, il faut des individus des deux sexes, on doit avoir de même à chaque instant, le nombre des naissances masculines, ou mieux encore, le rapport de ce nombre à la totalité des naissances. C'est ce rapport qui est *le taux de masculinité des naissances* et que nous désignons par G (t).

Nous verrons dans la suite, que la donnée de ces trois fonctions *suffit* pour déterminer l'état démographique d'une population à chaque instant, une fois les conditions initiales déterminées, et que de plus cette condition est *nécessaire*.

Nous allons dire maintenant quelques mots relativement aux facteurs qui influent sur l'évolution de ces trois fonctions dans le temps.

3. Fonction de fécondité. — Nous venons de voir que cette fonction est intimement liée au nombre total des naissances. Dans les conditions normales, ce nombre varie lui-même directement avec le nombre total de la population. L'influence des facteurs extérieurs sur les variations de la fonction de fécondité n'est pas a priori très claire. Par contre, il n'est pas difficile de voir comment ces facteurs exercent leur influence sur le nombre total de la population. Alors, par l'intermédiaire du *taux naturel d'accroissement*, il est aisé de voir, comme nous le montrerons plus loin, quelles seront les variations de la fonction de fécondité dans le temps.

Considérons donc le nombre total de la population. Une chose est évidente : c'est que *ce nombre ne peut pas devenir négatif.* Donc toute population a pour limite inférieure zéro. Pratiquement cette limite ne peut pas être nulle ; mais elle est en tout cas négligeable relativement au nombre de la population au moment où on l'étudie.

La population, ayant ainsi une limite inférieure, a-t-elle aussi une limite supérieure ? Tout porte à le croire. En effet, le fait que les dimensions de notre globe sont finies, montre sans peine, qu'*un nombre infini d'individus ne peut y trouver place et s'y nourrir.*

Il est d'autre part facile de voir, que *les progrès de la civilisation font reculer la limite supérieure de la population humaine, sans jamais arriver à la rendre infinie.*

Il en résulte que l'évolution numérique des hommes suit des *cycles*, correspondant aux différents moyens qui leur permettent, au cours des siècles, de subvenir à leurs besoins. Chaque cycle admet une limite inférieure, qui est la limite supérieure du cycle précédent ; et une limite supérieure qui se confond avec la limite inférieure du cycle suivant. Mais il peut arriver qu'un cycle commence avant que le cycle précédent soit complètement au bout de son évolution. C'est exactement le même fait qui se produit dans les différents cycles de la civilisation, dont les cycles de l'évolution d'une population ne sont qu'une conséquence.

Donc la forme de la courbe représentative de l'accroissement d'une population sera celle qui est indiquée sur la figure (1), présentant des points d'inflexion à tangentes horizontales. En tout cas cette courbe part de zéro, pour arriver asymptotiquement à sa limite supérieure.

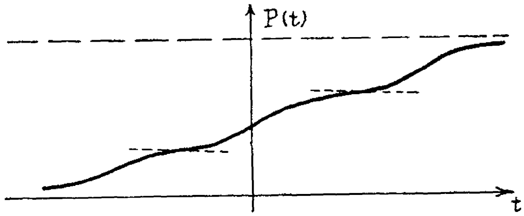


Fig. 1

Ceci étant, voyons quelles seront les variations du taux d'accroissement de la population (c'est-à-dire l'accroissement relatif $\frac{P'(t)}{P(t)}$). Il n'est pas difficile de voir, et nous le préciserons plus loin, que ce taux suit exactement la marche inverse. Il part d'une limite supérieure, décrit des cycles correspondant à ceux de $P(t)$, mais va toujours en décroissant pour venir enfin s'annuler.

Donc, la fonction de fécondité, correspondant à un nombre de plus en plus grand d'individus et à un taux d'accroissement de plus en plus faible, *part évidemment d'une valeur initiale, nécessairement positive, et va toujours en décroissant, pour devenir enfin nulle.*

Examinons l'état des choses vers la fin de l'évolution numérique d'une population. Le chiffre de cette population reste presque constant. Donc les naissances doivent être juste suffisantes pour combler les pertes causées par les décès. Et comme l'aptitude physique de la femme pour avoir des enfants, aptitude qui est déterminée par la fréquence des époques menstruelles, ne semble pas pouvoir se modifier, on est obligé d'avoir recours à des procédés extranaturels, pour arrêter l'excès des naissances. Ces procédés, si peu défendables soient-ils, sont en tout cas moins inhumains que ceux qui consistent à provoquer des décès en bloc par des guerres.

4. Fonction de mortalité. — Disons tout de suite que lorsque nous parlons des décès, nous entendons par là les *décès naturels*, survenus à cause des maladies ordinaires, de la vieillesse, ou des accidents inévitables qui ne coûtent la vie qu'à un nombre extrêmement restreint d'individus. Nous ne pouvons évidemment pas tenir compte des décès en bloc d'un très grand nombre d'individus, causés par des épidémies, des guerres ou des cataclysmes (tremblements de terre, éruptions volcaniques, etc.).

En tout cas, il est presque évident que dans l'état actuel des choses, *la mort est inévitable*, au moins au delà d'un certain âge. Mais il semble aussi qu'il soit impossible de retarder la mort de tous les éléments d'une population, jusqu'au moment où le décès est causé par la vieillesse. Ainsi, du moins avec nos données actuelles, les hommes meurent à tous les âges.

Mais il n'est pas difficile de constater que *la mortalité décroît constamment avec le temps*, et que sa variation relative diminue aussi de plus en plus. C'est le fait qui ressort de l'examen des diverses tables de mortalité.

Il arrivera donc un moment, où toutes les ressources pour améliorer la mortalité seront épuisées. Et ce jour-là, chaque tranche d'âge de la population aura atteint sa mortalité limite.

Nous ferons donc l'hypothèse que la courbe représentative des variations de la mortalité pour chaque âge, *part asýmptotiquement d'une valeur initiale, décroît, passe par une inflexion, et tend encore asymptotiquement vers une limite infé-*

rieure infranchissable. La forme de la courbe relative à l'âge x est montrée sur la figure (2).

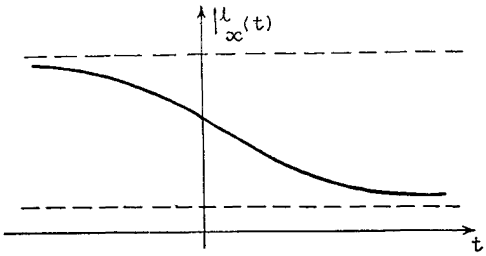


Fig. 2

5. TAUX DE MASCULINITÉ DES NAISSANCES[1]. — Il est à remarquer que ce taux, c'est-à-dire le rapport du nombre des naissances masculines à la totalité des naissances, *reste très sensiblement constant dans le temps et dans l'espace.* Nous ne savons pas si aux points de vue médical et embryologique, ce fait a reçu une explication satisfaisante. Tout ce que nous avons à retenir est la constance très sensible de ce taux, constance que nous supposerons absolue. Cette hypothèse, justifiée amplement par l'expérience, nous sera très utile dans la suite de cette étude.

1. G. Darmois, *Statistique et applications*, p. 6 et p. 9.

CHAPITRE II

NOMBRE TOTAL DES NAISSANCES

6. Progéniture d'un élément de population. — Nous nous proposons de déterminer, dans ce chapitre, de quelle manière les différentes générations issues d'un élément de population donné, se répartissent dans le temps. Nous suivrons pour cela la ligne générale d'une étude de Lotka[1]. Nous nous plaçons pour commencer dans le cas simple où l'élément initial est formé entièrement d'individus tous de même âge, c'est-à-dire dont l'âge est compris entre x et $x+1$. Pour plus de simplicité, nous faisons un changement d'origine des temps, de manière que cet élément, que nous appellerons génération zéro, soit né dans l'intervalle de temps $(-1,0)$.

Ceci étant, nous désignerons par première génération, les enfants issus de la génération zéro, par deuxième génération, les enfants issus de la première génération, et ainsi de suite.

Voyons alors de quelle manière ces différentes générations se répartissent dans le temps. Soient x_i et x_j les limites de la période de reproductivité des femmes. On prend ordinairement :

1. A.-J. Lotka, *The Progenity of a Population Element* (*The Am. Jl, of Hygiene,* nov. 1928).

$$x_i = 15, \qquad\qquad x_j = 50.$$

La première génération naîtra dans l'intervalle $(t_{1i} = x_i,\ t_{2i} = x_j)$;
La deuxième — — — $(t_{1j} = 2x_i,\ t_{2j} = 2x_j)$;
La g^e — — — $(t_{gi} = gx_i,\ t_{gj} = gx_j)$.

Donc si nous portons le temps en abscisse, et le numéro des différentes générations en ordonnée, les limites de l'étalement de la génération g_0 seront données par les abscisses des extrémités du segment $G_i G_j$ de l'horizontale $g = g_0$, compris entre les droites Δ_i et Δ_j d'équations :

$$g = \frac{t}{x_i}, \qquad g = \frac{t}{x_j}.$$

Voir la figure (3).

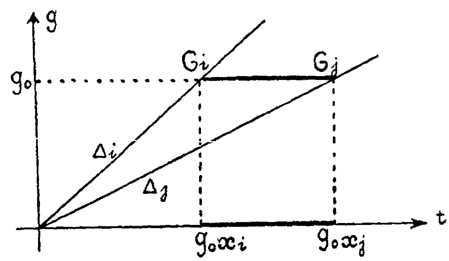


Fig. 3.

7. Relation fondamentale. — Quelle sera alors la relation qui liera le nombre des naissances dans deux générations successives?

Désignons par $\lambda\ (x,\ t)$ la probabilité à l'instant t, pour qu'un enfant né à cet instant atteigne l'âge x. C'est en d'autres termes le rapport du nombre des individus d'âge x et à l'instant $t + x$, au nombre des naissances à l'instant t.

Nous l'appellerons *fonction de survie*. Son expression s'écrira :

$$(1) \qquad \lambda\,(x, t) = \frac{p\,(x, t+x)}{\mathrm{N}\,(t)}\ ;$$

la fonction $p\,(x, t)$ désignant la tranche de la population dont l'âge est compris entre x et $x+1$ à l'instant t, et $\mathrm{N}\,(t)$ le nombre total des naissances à cet instant.

Soit d'autre part $\varphi\,(x, t)$ la fonction de fécondité, c'est-à-dire le nombre d'enfants mis au monde par une femme d'âge x pendant l'intervalle de temps $(t,\ t+1)$. Cette fonction sera définie par :

$$(2) \qquad \mathrm{N}\,(t) = \int_{x_i}^{x_j} p\,(x, t)\ \varphi\,(x, t)\ dx.$$

En effet une femme d'âge x donne naissance à $\varphi\,(x, t)$ enfants dans l'intervalle $(t,\ t+1)$. Alors $p\,(x, t)$ femmes donneront naissance à $p\,(x, t)\ \varphi\,(x, t)$ enfants. Et la totalité des naissances s'obtient en intégrant cette fonction dans tout l'intervalle où les femmes sont fécondes.

Ceci étant, le nombre d'individus d'âge x à l'instant t dans la g^{e} génération sera d'après (1) :

$$p_g\,(x, t) = \mathrm{N}_g\,(t-x)\ \lambda\,(x, t-x).$$

Ces individus reproduisent avec un taux $\varphi\,(x, t)$. Donc le nombre des naissances dans la $(g+1)^{e}$ génération à l'instant t sera donné par :

$$(3) \qquad \mathrm{N}_{g+1}\,(t) = \int_{x_i}^{x_j} \mathrm{N}_g\,(t-x)\ \ \lambda\,(x, t-x)\ \varphi\,(x, t)\ dx,$$

qui est une relation fondamentale.

8. Hypothèses de Lotka. — Cette relation, telle qu'elle se présente, n'est pas facilement maniable. Pour la simplifier, *nous supposerons donc, en première approximation, que les fonctions de survie et de fécondité sont indépendantes du temps.*

$$(4) \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial t} = 0, \qquad\qquad (5) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

Nous étendrons ensuite nos résultats au cas où ces fonctions varient avec le temps.

D'autre part, il est évident que dans la détermination du nombre des naissances, c'est le nombre des femmes qui joue le rôle principal. Et comme la fonction φ (x, t) n'a de signification que pour la population féminine, dans la relation (3) la fonction N (t) désigne exclusivement les naissances féminines. Mais il a été remarqué, comme nous l'avons dit, que le taux de masculinité des naissances, reste très sensiblement constant dans le temps et dans l'espace. Il en sera donc de même du taux de fémininité des naissances. *Supposons donc ces taux essentiellement fixes*, c'est-à-dire :

$$(6) \; \frac{N_m(t)}{N_m(t) + N_f(t)} = G(t) = C^{te}; \quad \frac{N_f(t)}{N_m(t) + N_f(t)} = 1 - G(t) = C^{te}.$$

Et alors il est évident que dans la relation (3), la fonction N (t) peut désigner indifféremment les naissances féminines ou la totalité des naissances.

Avant d'aller plus loin, il est indispensable de faire une petite remarque relativement aux limites d'intégration dans la relation (3). D'après ce que nous avons dit, ces limites sont bien x_i et x_j. Mais comme la fonction φ (x, t) est nulle en dehors de l'intervalle (x_i, x_j), on peut étendre l'intégration depuis l'infini négatif, jusqu'à l'infini positif. Ce changement des limites d'intégration n'entraînera aucune erreur, et permettra l'introduction des moments, qui simplifieront beaucoup nos calculs.

Avec ces trois hypothèses et après ce changement des limites d'intégration, la relation (3) se met sous la forme simple suivante :

$$(7) \quad N_{g+1}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} N_g(t-x)\,\lambda(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

où la fonction N (t) désigne bien cette fois le nombre total des naissances, tant féminines que masculines.

9. Semi-invarints de deux générations successives[1]. — On sait que si F (x) désigne une *loi de probabilité*, c'est-à-dire si :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,dx = 1,$$

on appelle *première fonction caractéristique* de cette loi, la fonction $\Phi(t)$ définie par la relation :

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\,F(x)\,dx.$$

C'est, en d'autres termes, *l'espérance mathématique de* e^{itx}. On montre facilement la relation suivante :

$$\frac{1}{i^k}\left[\frac{d^k\Phi}{dt^k}\right]_{t=0} = m_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k\,F(x)\,dx.$$

Le coefficient m_k est *le* k^{e} *moment* de la loi F (x).

1. G. Darmois, *Statistique mathématique*, p. 44.

La fonction $\Psi(t)$ définie par :

$$\Psi(t) = \mathrm{L}\,\Phi(t),$$

est la *deuxième fonction caractéristique* de la loi $F(x)$, et la quantité

$$\frac{1}{i^k}\left[\frac{d^k\,\Psi}{dt^k}\right]_{t=0} = \mu_k,$$

est appelée *semi-invariant d'ordre k* de la loi $F(x)$.

Ceci étant, désignons respectivement par u_k, v_k et w_k, les moments d'ordre k relatifs aux fonctions $N_{g+1}(t)$, $N_g(t-x)$ et $\lambda(x)\,\varphi(x)$. Ces moments seront définis par les relations :

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} u_k &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^k\, N_{g+1}(t)\, dt, \\ v_k &= \int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^k\, N_g(t-x)\, dt, \\ w_k &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^k\, \lambda(x)\, \varphi(x)\, dx. \end{aligned}\right.$$

Dans ces relations les limites effectives d'intégration sont respectivement :

$$[(g+1)\,x_i,\ (g+1)\,x_j]\ ;\quad [gx_i - x,\ gx_j - x]\ ;\quad [x_i,\ x_j].$$

Mais comme les fonctions $N_{g+1}(t)$, $N_g(t-x)$ et $\lambda(x)\,\varphi(x)$ sont nulles en dehors de ces intervalles, on peut aussi bien prendre pour limites d'intégration $-\infty$ et $+\infty$.

Posons maintenant :

$$t - x = \tau.$$

Alors la première relation (8) devient d'après (7) :

$$u_k = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (\tau + x)^k \, \mathrm{N}g\,(\tau)\,\lambda\,(x)\,\varphi\,(x)\,dx\,d\tau.$$

En développant le binôme sous le signe d'intégration, et en intégrant terme à terme, nous obtenons :

$$u_k = \sum_{h=0}^{k} \mathrm{C}_k^h \int_{-\infty}^{+\infty} \tau^{\,k-h}\,\mathrm{N}_g\,(\tau)\,d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} x^h\,\lambda\,(x)\,\varphi\,(x)\,dx.$$

D'où d'après (8) :

$$u_k = \sum_{h=0}^{k} \mathrm{C}_k^h \, v_{k-h}\, w_h. \tag{9}$$

Introduisons les semi-invariants de Thiele[1], relatifs aux fonctions $\mathrm{N}_{g+1}\,(t)$. $\mathrm{N}_g\,(t-x)$ et $\lambda\,(x)\,\varphi\,(x)$, *semi-invariants dont nous supposerons l'existence*, et que nous désignerons respectivement par a, b et c. On démontre facilement que ces coefficients sont liés aux moments par les relations suivantes :

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} u_k &= \sum_{l=0}^{k-1} \mathrm{C}_{k-1}^l \, a_{l+1}\, u_{k-l-1}\,, \\ v_k &= \sum_{l=0}^{k-1} \mathrm{C}_{k-1}^l \, b_{l+1}\, v_{k-l-1}\,, \\ w_k &= \sum_{l=0}^{k-1} \mathrm{C}_{k-1}^l \, c_{l+1}\, w_{k-l-1}. \end{aligned}\right.$$

1. Thiele, *Theory of observation.*

Alors la relation (9) donne facilement :

$$u_{k+1} = \sum_{h=0}^{k} C_k^h \, v_{k+1-h} \, w_h + \sum_{h=k+1}^{1} C_k^{h-1} \, v_{k+1-h} \, w_h.$$

D'où l'on tire d'après les deux dernières relations (10) :

$$u_{k+1} = \sum_{h=0}^{k} C_k^h \, w_h \sum_{l=0}^{k-h} C_{k-h}^l \, b_{l+1} \, v_{k-h-l}$$

$$+ \sum_{h=k+1}^{1} C_k^{h-1} \, v_{k+1-h} \sum_{l=0}^{h-1} C_{h-1}^l \, c_{l+1} \, w_{h-l-1}.$$

Ou encore :

$$u_{k+1} = \sum_{l=0}^{k} C_k^l \left[b_{l+1} + c_{l+1} \right] \sum_{h=0}^{k-l} C_{k-l}^h \, v_{k-h} \, w_h.$$

D'après la relation (9) ceci s'écrit :

$$u_{k+1} = \sum_{l=0}^{k} C_k^l \left[b_{l+1} + c_{l+1} \right] u_{k-l}.$$

Mais la première relation (10) donne :

$$u_{k+1} = \sum_{l=0}^{k} C_k^l \, a_{l+1} \, u_{k-l}.$$

On en déduit par identification :

$$(11) \qquad a_k = b_k + c_k.$$

D'où le théorème important suivant :

Le k^e semi-invariant de la fonction de distribution des naissances dans la $(g+1)^e$ génération, est égal au k^e semi-inva-

riant de la fonction de distribution des naissances dans la g^e génération, plus le k^e semi-invariant relatif à la fonction $\lambda(x)\varphi(x)$.

Ce théorème peut se démontrer par une méthode plus simple. En effet la première fonction caractéristique relative à la loi de répartition $N_{g+1}(t)$ est :

$$\Phi_s\left[N_{g+1}(t)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{its} N_{g+1}(t)\, dt.$$

En y remplaçant $N_{g+1}(t)$ par son expression fournie par (7) on a :

$$\Phi_s\left[N_{g+1}(t)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty} N_g(t-x)\, e^{is(t-x)}\, dt\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(x)\,\varphi(x)\, e^{isx}\, dx.$$

D'où :

$$\Phi_s\left[N_{g+1}(t)\right]=\Phi_s\left[N_g(t-x)\right]\times\Phi_s\left[\lambda(x)\,\varphi(x)\right].$$

On en tire d'après la définition de la seconde fonction caractéristique :

$$\Psi_s\left[N_{g+1}(t)\right]=\Psi_s\left[N_g(t-x)\right]+\Psi_s\left[\lambda(x)\,\varphi(x)\right].$$

Cette relation montre, d'après la définition des semi-invariants, que l'on a bien :

$$a_k = b_k + c_k.$$

10. Corollaires importants. — En désignant par a_k le k^e semi-invariant de la g^e génération, la relation (11) devient :

$$a_k^{g+1} = a_k^g + c_k.$$

Ecrivons cette relation pour les générations successives jusqu'à la $(g + h)^e$ génération, et ajoutons membre à membre les relations ainsi obtenues, nous aurons :

$$a_k^{g+h} = a_k^g + hc_k. \tag{12}$$

Quand h est très grand, le deuxième membre de cette relation se réduit pratiquement à son second terme, d'où :

Corollaire I. — *Le k^e semi-invariant de la $(g + h)^e$ génération, devient pratiquement indépendant du k^e semi-invariant de la g^e génération, pourvu que h soit suffisamment grand.*

Voyons maintenant comment se répartissent dans le temps les naissances de la g^e génération, quand g devient de plus en plus grand. On a facilement :

$$a_k^g = a_k^0 + gc_k. \tag{13}$$

D'où, d'après la seconde formule de réciprocité de Fourier :

$$\mathrm{N}g\,(t) = \frac{u_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(a_k^0 + gc_k)}{k!}(\iota s)^k}\, e^{-\iota ts}\, ds$$

Quand g tend vers l'infini, le second membre de cette relation ne dépend plus pratiquement que des semi-invariants c. Alors la fonction $\mathrm{N}_g(t)$ tend vers une forme fixe. On peut donc dire :

Corollaire II. — *Quand l'ordre d'une génération est suffisamment grand, la répartition des naissances, relative à cette génération, dans le temps, tend vers une forme fixe, que nous appellerons répartition normale des naissances.*

11. Répartition normale des naissances. — Voyons maintenant quelle sera la forme limite vers laquelle tendra la

distribution des naissances dans la g^e génération, quand g croît indéfiniment. Pour plus de simplicité, nous nous plaçons dans le cas particulier où la génération zéro est composée exclusivement d'individus nés dans l'intervalle de temps $(-1,0)$. On voit facilement que dans ce cas tous les moments, sauf celui d'ordre zéro, et tous les semi-invariants de la génération zéro sont nuls, et que l'on a par conséquent :

$$a_k^g = gc_k. \tag{14}$$

Soit alors $\mathcal{N}_0$ le nombre total des naissances dans la génération zéro ; le nombre des naissances dans la première génération sera :

$$\mathcal{N}_1 = u_0^1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{N}_1(t)\, dt = \mathcal{N}_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(x)\, \varphi(x)\, dx = \mathcal{N}_0\, w_0.$$

De même, le nombre total des naissances dans la $(g+h)^e$ génération s'écrit :

$$\mathcal{N}_{g+h} = u_0^{g+h} = \mathcal{N}_0\, w_0^{g+h}. \tag{15}$$

Donc le rapport du nombre des naissances dans deux générations successives est constant et égal à w_0 :

$$\frac{\mathcal{N}_{g+1}}{\mathcal{N}_g} \doteq w_0 = \mathrm{C}^{te}. \tag{16}$$

C'est le *taux net de reproduction de Kuczynski.*

On a alors, pour la distribution dans le temps de ces $\mathcal{N}_{g+h}$ naissances, en tenant compte de (14) :

$$\mathcal{N}_{g+h}(t) = \frac{\mathcal{N}_0}{2\pi} w_0^{g+h} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(g+h)}{k!} c_k\, (is)^k}\, e^{-its}\, ds.$$

Supposons maintenant que l'on puisse écrire :

$$(17) \qquad t = gc_1,$$

et faisons le changement de variable :

$$r = sc_1.$$

Alors notre relation devient :

$$\mathrm{N}_{g+h}(t) = \frac{\mathcal{N}_0}{2\pi c_1} w^{g+h} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\iota^2}{2!} \frac{(g+h)\,c_2}{c^2} r^2 + \cdots} e^{\iota hr}\, dr.$$

Si g est très grand par rapport à h, cette relation s'écrit encore :

$$(18) \qquad \mathrm{N}_{g+h}(t) = \frac{\mathcal{N}_0}{2\pi c_1} w_0^g \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{gc_2}{c_1^2} r^2 + \cdots} e^{\iota hr}\, dr.$$

Si nous supposons que la série qui forme l'exposant de e dans le premier facteur de la quantité sous le signe somme, est telle que l'on puisse, dans son développement, s'arrêter au terme en r^2, nous voyons que la répartition ainsi obtenue, n'est autre chose que la *loi de fréquence Laplace-Gauss*, avec un écart type :

$$(19) \qquad \sigma_{g+h} = \frac{\sqrt{gc_2}}{c_1} = \frac{\sqrt{g}}{c_1}\sigma_1,$$

où c_1 et σ_1 sont respectivement la moyenne et l'écart type relatifs à la première génération.

Le fait que quand g est très grand relativement à h, la répartition des naissances dans la $(g+h)^e$ génération, tend vers la loi normale Laplace-Gauss, était à prévoir. En effet on voit d'après (14) que pour avoir cette répartition, il suffit de composer $g+h$ fois la loi $\lambda(x)\,\varphi(x)$. Un théorème classique, montre que, dans ce cas, on a bien à la limite la loi normale.

ayant justement pour écart type la quantité σ_{g+h} que nous venons de trouver. Il faut toutefois faire l'hypothèse que l'écart type de la loi $\lambda(x)\,\varphi(x)$ est fini. C'est ce que nous avons fait en supposant l'existence des semi-invariants de cette loi.

12. Représentation graphique. — Il est facile de représenter graphiquement ces résultats. Pour chaque génération on a une courbe de répartition des naissances (Voir la figure 4). L'aire de chaque courbe, donne le moment d'ordre zéro de la génération correspondante, ou ce qui revient au même, le nombre total des naissances dans la génération considérée.

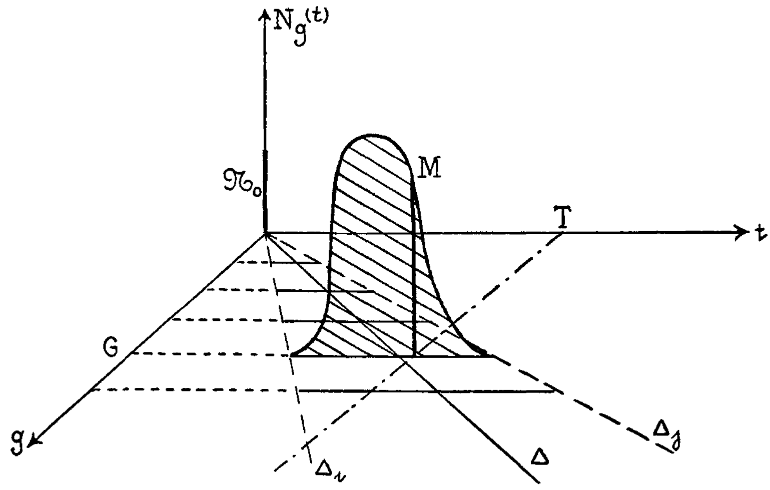


Fig. 4

On voit d'après (15) que *ces aires vont en augmentant suivant une progression géométrique de raison* w_0 *et ayant pour premier terme* $\mathcal{N}_0$, nombre des naissances dans la génération zéro. Si on coupe la surface ainsi obtenue par le plan $t = T$, on obtient la courbe Γ de la distribution totale des naissances, pour les générations successives, à l'instant considéré T. La contribution de chaque génération est donnée par la côte du point M où la courbe Γ coupe la courbe de la distribution des naissances relative à la génération considérée.

13. Nombre total des naissances a l'instant t. — Pour avoir ce nombre, nous n'avons qu'à faire la somme du nombre des naissances de chaque génération à l'instant t. Ce nombre sera d'après (18) :

$$\mathrm{N}(t) = \frac{\mathcal{N}_0}{2\pi c_1} \sum_{g+h=\frac{t}{x_t}}^{\frac{t}{x_j}} w_0^{g+h} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\iota^2}{2!} \frac{(g+h)c_2}{c_1^2} r^2 + \cdots} e^{\iota hr} \, dr.$$

Comme notre loi ne s'écarte pas trop de la loi de fréquence Laplace-Gauss, nous pouvons écrire avec une très bonne approximation pour les grandes valeurs de g :

$$\mathrm{N}(t) = \frac{\mathcal{N}_0 w_g}{2\pi c_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\iota^2}{2!} \frac{gc_2}{c_1^2} r^2 + \cdots} e^{\iota hr} \, dr \, dh,$$

qui s'écrit immédiatement d'après les formules de Fourier :

$$\mathrm{N}(t) = \frac{\mathcal{N}_0 w_0^g}{c_1}.$$

Cette relation n'est vraie que sous l'hypothèse (17). Il faut par conséquent écrire :

$$\text{(20)} \qquad \mathrm{N}(g c_1) = \frac{\mathcal{N}_0 w_0^g}{c_1} = \frac{\mathcal{N}_g}{c_1};$$

qui donne encore :

$$\text{(21)} \qquad \mathrm{N}(t) = \frac{\mathcal{N}_0 w_0^{\frac{t}{c_1}}}{c_1},$$

Cette relation montre que *le nombre total des naissances croît suivant une progression géométrique.*

Désignons maintenant par $P(t)$ la population totale à l'instant t; nous aurons évidemment :

$$P(t) = \int_0^\infty p\,(x,\,t)\;dx.$$

En tenant compte des relations (1) et (21) cela devient :

$$P\,(t) = \frac{\mathcal{N}_0}{c_1}\,w_0^{\frac{t}{c_1}} \int_0^\infty w_0^{-\frac{x}{c_1}}\,\lambda\,(x)\,dx \tag{22}$$

Ce qui montre que *la population totale croît en progression géométrique.*

Remarquons que le semi-invariant c_1, donné par la relation :

$$c_1 = \frac{w_1}{w_0} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\lambda\,(x)\,\varphi\,(x)\,dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\,(x)\,\varphi\,(x)\,dx}\,,$$

est la moyenne de l'âge des mères au moment de la naissance de leur premier enfant. C'est aussi avec une bonne approximation (comme nous le verrons plus loin), la durée moyenne d'une génération; c'est-à-dire la moyenne de l'âge des mères au moment de la naissance de leur première fille.

Ceci étant, la relation (20) veut dire que *pour obtenir le nombre total des naissances à l'instant t, il suffit de distribuer uniformément le nombre total des naissances de la g^{e} génération qui est $\mathcal{N}_0\;w_0^g$, g étant l'entier le plus proche de $\frac{t}{c_1}$, sur une longueur égale à la durée moyenne d'une génération.*

Traçons dans la figure précédente la droite Δ d'équation :

$$y = \frac{t}{c_1}.$$

Pour avoir le nombre total des naissances à l'instant T, on détermine d'abord l'entier G le plus proche de $\frac{T}{c_1}$. On distribue alors uniformément le nombre total des naissances relatives à la génération G, c'est-à-dire l'aire hachurée, sur une longueur égale à c_1.

14. Généralisation. — Dans tout ce que nous avons dit, nous avons supposé les fonctions de survie et de fécondité indépendantes du temps. En réalité ces fonctions varient dans le temps. Mais, comme nous le verrons plus loin, ces variations sont faibles, quand l'intervalle de temps dans lequel on les considère, n'est pas trop étendu.

D'ailleurs, si l'on suppose que ces fonctions ne subissent pas de trop grandes variations à l'intérieur des limites d'une génération, tout ce que nous avons dit subsiste avec une approximation suffisante. En particulier, sous cette condition, le théorème sur la propriété des semi-invariants reste vrai. Il en est de même du fait de l'accroissement du nombre total des naissances suivant une progression géométrique. Ce dernier résultat sera étudié à nouveau et précisé un peu plus loin.

CHAPITRE III

EQUATION AUX NATALITÉS

15. Equation fondamentale[1]. — Reprenons la relation (7), écrivons-la pour les générations successives jusqu'à la $(g+h)^e$ génération, et additionnons ces relations membre à membre ; nous obtenons :

$$\sum_{k=g+1}^{g+h} N_k(t) = \int_0^\infty \left[\sum_{l=g}^{g+h-1} N_l(t-x)\right] \lambda(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

La somme sous le signe d'intégration s'étend à toutes les générations qui, à l'instant t, contribuent au nombre total des naissances. On ne modifiera donc pas cette somme, en prenant pour limites de sommation $(g+1)$ et $(g+h)$. Alors cette somme devient identique au premier membre. Par conséquent, si $N(t)$ désigne le nombre total des naissances à l'instant t, on aura avec la condition (6), la relation fondamentale suivante :

$$N(t) = \int_0^\infty N(t-x)\,\lambda(x)\,\varphi(x)\,dx. \tag{23}$$

Cette relation peut s'obtenir par un raisonnement plus simple. En effet des $N(t-x)$ naissances à l'instant $t-x$, il ne

1. A. J. Lotka, *The Progenily of a Population Element* (*The Am. Journ of Hygiene*, nov. 1928).

restera que $N(t-x)\lambda(x)$ survivants à l'instant t. Ces survivants, reproduisant avec un taux $\varphi(x)$, donnent naissance, pendant l'unité de temps, à $N(t-x)\lambda(x)\varphi(x)$ enfants. Pour avoir la totalité des naissances à l'instant t, il n'y a plus qu'à intégrer cette quantité dans l'intervalle (x_i, x_f), ou ce qui revient au même, dans l'intervalle $(0, \infty)$.

Nous nous proposons de résoudre cette équation, et d'en déterminer tous les éléments, en suivant de près les grandes lignes d'une méthode indiquée par Hertz[1], et mise au point par Lotka.

Essayons une solution de la forme :

$$N(t) = A\, e^{\sigma t}.$$

En remplaçant dans (23), les fonctions $N(t)$ et $N(t-x)$ par leurs expressions fournies par cette relation, nous voyons que σ est racine de l'équation :

$$(24) \qquad Y(\sigma) = \int_0^\infty e^{-\sigma x}\, \lambda(x)\, \varphi(x)\, dx = 1.$$

Par conséquent, une solution de l'équation (23) est fournie par la série :

$$(25) \qquad N(t) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} A_k\, e^{\sigma_k t},$$

où les σ sont les racines de l'équation (24), et où les A sont des coefficients constants, que nous déterminerons un peu plus loin, à partir des conditions initiales.

16. Taux naturel d'accroissement. — L'équation (24) a une infinité de racines en σ. Il n'y en a qu'une de réelle. En effet, les fonctions $\lambda(x)$ et $\varphi(x)$ ne pouvant jamais

1. A. J. Lotka : *The progenity of a population elément The Arm. Jl. of Hygiène,* nov. 1928.

devenir négatives, la fonction Y (σ) est essentiellement positive, et ne s'annule que pour $\sigma = \infty$. D'autre part, on voit que la dérivée :

$$Y'(\sigma) = -\int_0^{\infty} x\, e^{-\sigma x} \lambda\,(x)\, \varphi\,(x)\, dx\,,$$

est toujours négative, et s'annule pour $\sigma = \infty$. Par conséquent, Y (σ) est une fonction positive, constamment décroissante.

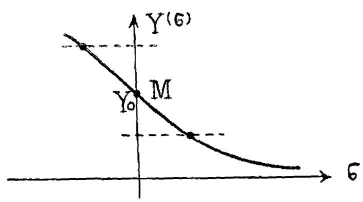


Fig. 5.

Sa courbe représentative, donnée par la figure (5), coupe l'axe des Y au point M d'ordonnée :

$$Y_0 = \int_0^{\infty} \lambda\,(x)\, \varphi\,(x)\, dx = w_0\,.$$

Par conséquent l'horizontale :

$$Y\,(\sigma) = 1$$

coupe cette courbe en un et un seul point. La valeur de σ relative à ce point, et qu'on appelle *taux naturel d'accroissement*, est, comme on le voit sur la courbe, négative, nulle ou positive, selon que la quantité w_0 (qui est le taux net de reproduction de Kuczynski) est plus petite que l'unité, égale à l'unité ou supérieure à l'unité.

Cette racine réelle unique, joue un rôle capital dans l'étude du mouvement des populations qui varient en progression géométrique. On verra que *la population décroît, reste stationnaire ou croît, suivant que cette quantité est négative, nulle ou positive.*

Notons, avant de commencer le calcul de cette racine réelle, que le module de toute racine complexe de (24) est inférieur à σ. Considérons en effet la racine complexe : $\sigma'(\cos\theta + i\sin\theta)$. En la portant dans (24) nous devons avoir :

$$\int_0^\infty e^{-\sigma' x} \lambda(x)\, \varphi(x) \cos\theta x \, dx = 1 .$$

Le fait que $|\cos\theta x| \leq 1$, montre bien que l'on a :

$$\sigma > \sigma' . \tag{26}$$

Par conséquent, dès que le temps est suffisamment grand, c'est le terme relatif à la racine réelle σ, qui, dans la série (25), donne l'ordre de grandeur de N (t). On aura alors :

$$N(t) = A_0 e^{\sigma t} . \tag{27}$$

Cette relation qui est analogue aux relations (20) et (21), montre que *quand le temps est suffisamment grand, le nombre total des naissances tend à croître suivant une progression géométrique.*

17. Calcul de σ. Méthode Dublin-Lotka[1]. — Il s'agit de trouver l'unique racine réelle de l'équation (24). On voit que Y (σ) est la première fonction caractéristique de la loi $\lambda(x)\,\varphi(x)$. Comme nous avons supposé l'existence des

1. L. J. Dublin et A. J. Lotka, *On the rate of natural increase* (*Journ. of the Am. St. Ass.*, 1925, p. 305).

semi-invariants de Thiele relatifs à cette loi, la seconde fonction caractéristique sera :

$$L\frac{Y(\sigma)}{Y_0} = \sum_{h=1}^{\infty} (-1)^h \frac{c_h}{h\,!}\,\sigma^h.$$

Mais Y_0 n'étant autre chose que w_0, on a :

$$Y(\sigma) = w_0\, e^{\sum\limits_{h=1}^{\infty} (-1)^h \frac{c_h}{h\,!}\,\sigma^h}.$$

On veut déterminer σ de telle sorte que le premier membre de cette relation, soit égal à l'unité. On aura donc :

$$w_0 = e^{\sum\limits_{h=1}^{\infty} (-1)^{h+1} \frac{c_h}{h\,!}\,\sigma^h}. \tag{28}$$

La série qui forme l'exposant de e dans cette relation, converge très rapidement. En effet, il n'est pas difficile de voir, que les moments w suivent, avec une très bonne approximation, la loi suivante :

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{w_n}{w_{n-1}} = \cdots\cdots = \frac{w_1}{w_0} = W = C^{te}.$$

On sait, d'autre part, que les semi-invariants, sauf le premier, sont donnés, en fonction des moments, par des expressions homogènes, dont la somme algébrique des coefficients numériques est nulle. On en déduit que si dans les c_h on fait la substitution :

$$w_n = w_0\, W^n,$$

tous ces coefficients s'annulent. Mais comme cette relation n'est qu'approchée, il en résulte que les semi-invariants ne sont pas nuls, mais petits. Si nous admettons donc qu'on aura une approximation suffisante en s'arrêtant au terme en σ^2, nous pouvons écrire :

$$w_0 = e^{c_1 \sigma - \frac{c_2}{2} \sigma^2} .$$

Cette relation donne, pour la détermination de σ, l'équation du second degré :

$$\frac{c_2}{2} \sigma^2 - c_1 \sigma + \mathrm{L}\, w_0 = 0. \tag{29}$$

Cette équation, ayant une racine réelle, a ses deux racines réelles. Mais il est évident qu'une seule de ces racines convient.

En remarquant que la dernière relation (10) donne :

$$c_1 = \frac{w_1}{w_0}, \qquad c_2 = \frac{w_0\, w_2 - w_1^2}{w_0^2};$$

et en posant :

$$y = \frac{w_1\, w_0}{w_0\, w_2 - w_1^2}, \qquad z = \frac{w_1^2}{w_0\, w_2 - w_1^2};$$

on tire immédiatement de la relation (29) :

$$\sigma = y \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{2}{z} \mathrm{L}\, w_0} \right], \tag{30}$$

qui donne le taux naturel d'accroissement.

18. Méthode Pearson-Wicksell[1]. — Considérons, dans la relation (24), la fonction $\lambda(x)\,\varphi(x)$. Des considérations empiriques, résultant de la forme de la courbe $\lambda(x)\,\varphi(x)$,

1. S. D. Wicksell, *Nuptiality, Fertility and Reproductivity* (*Skandinavisk Aktuarietidskrift*, 1931); — K. Pearson, *The fundamental problem of practical statistics* (*Biometrika*, t. XIII); — G. Darmois, *Statistique mathématique*, p. 120.

conduisent à essayer, pour la représenter, une expression analytique de la forme :

$$(31) \qquad \lambda(x)\,\varphi(x) = \frac{B}{\Gamma(z)} y^z\, x^{z-1}\, e^{-yx},$$

qui est la *fonction de fréquence de Pearson type III.* Dans cette relation B, y et z sont des constantes, que nous devons déterminer.

Remplaçons dans les expressions des moments w_0, w_1 et w_2, la fonction $\lambda(x)\varphi(x)$ par le second membre de la relation (31). Nous obtiendrons sans peine :

$$\left\{\begin{aligned} B &= w_0. \\ y &= \frac{w_1\, w_0}{w_0\, w_2 - w_1^2}, \\ z &= \frac{w_1^2}{w_0\, w_2 - w_1^2}. \end{aligned}\right.$$

Et alors l'équation (24) devient :

$$Y(\sigma) = \frac{w_0\, y^z}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} x^{z-1}\, e^{-yx}\, e^{-\sigma x}\, dx = 1.$$

L'intégration devient possible et donne facilement :

$$(32) \qquad Y(\sigma) = w_0 \left[1 + \frac{\sigma}{y}\right]^{-z} = 1,$$

qui est bien la fonction caractéristique de la loi $\lambda(x)\varphi(x)$ donnée par la relation (31). La racine réelle σ est donc donnée par :

$$(33) \qquad \sigma = y\left[\sqrt[z]{w_0} - 1\right].$$

On peut noter que, dans le cas où w_0 diffère peu de l'unité, l'expression donnée pour σ dans (33), est le premier terme du développement de (30). Dans ce cas, ces deux formules donnent pratiquement la même valeur pour σ.

On obtient une meilleure approximation par l'emploi de la *fonction de fréquence de Pearson type II* :

$$(34) \qquad \lambda(x)\,\varphi(x) = \frac{w_0\, y^z}{\Gamma(z)} (x-\xi)^{z-1}\, e^{-y(x-\xi)}.$$

On détermine comme plus haut les constantes y, z et ξ; mais il faut naturellement introduire un quatrième moment. Ce calcul ne présente aucune difficulté essentielle, et nous l'omettons.

En portant la nouvelle expression de $\lambda(x)\,\varphi(x)$ dans l'équation (24), on obtient facilement :

$$(35) \qquad \mathrm{Y}(\sigma) = w_0\, e^{-\xi\sigma}\left[1+\frac{\sigma}{y}\right]^{-z} = 1.$$

C'est encore la fonction caractéristique de la loi $\lambda(x)\,\varphi(x)$ fournie par (34). Mais l'équation (35) ne peut pas se résoudre aussi facilement que dans le cas précédent. Il faut pour cela employer des méthodes graphiques.

Signalons enfin qu'un ajustement presque parfait peut s'obtenir avec la *fonction de fréquence de Pearson type I* :

$$(36) \quad \lambda(x)\,\varphi(x) = \frac{w_0\,(x-\xi)^{y-1}\,(\eta-x)^{z-1}}{\mathrm{B}(y\,z)\,(\eta-\xi)^{y+z-1}}.$$

Si on y pose :

$$x-\xi = (\eta-\xi)\,u,$$

la fonction $\mathrm{Y}(\sigma)$ devient :

$$\mathrm{Y}(\sigma) = \frac{w_0\, e^{-\xi\sigma}}{\mathrm{B}(y\,z)} \int_0^1 e^{\sigma(\xi-\eta)u}\, u^{y-1}\,(1-u)^{z-1}\, du.$$

On montre, par un calcul que nous omettons, que cette fonction peut se mettre encore sous la forme de la série suivante[1] :

$$(37) \qquad Y(\sigma) = w_0 \, e^{-\xi\sigma} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[(\xi - \eta)\,\sigma]^k}{k\,!} \prod_{h=0}^{k-1} \frac{h+y}{h+(y+z)}.$$

Comme on le voit, les calculs sont sensiblement plus lourds que dans les cas précédents. La détermination de la racine σ présente de sérieuses difficultés.

19. Calcul général des racines de l'équation (24). — Quand w_0 diffère sensiblement de l'unité, les formules que nous avons trouvées, pour la détermination du taux naturel d'accroissement, ne donnent plus une approximation suffisante. D'autre part, il est évident que dans une théorie mathématique du mouvement de la population, il est indispensable de déterminer aussi toutes les racines complexes :

Reprenons donc l'équation (28), et écrivons-la sous la forme suivante :

$$e^{-2k\pi i} = w_0 \, e^{\sum\limits_{h=1}^{\infty} (-1)^h \frac{c_h}{h\,!} \sigma^h}$$

En prenant les logarithmes des deux membres nous aurons :

$$2k\pi i = \sum_{h=1}^{\infty} (-1)^{h+1} \frac{c_h}{h\,!} \sigma^h - \mathrm{L}\, w_0.$$

Pour chaque valeur de l'entier k, cette équation fournit une des racines de l'équation (24). En particulier, pour $k = 0$,

1. G. Darmois, *Cours de calcul des probabilités professé à la Sorbonne*, 1933-1934.

on obtient la racine réelle σ. D'autre part, la forme même de l'équation montre que deux valeurs égales et opposées de k, fournissent deux racines complexes conjugueés de (24).

Dans la résolution de cette équation transcendante, Lotka se contente des puissances de σ jusqu'au quatrième degré et écrit :

$$(38) \qquad 2k\pi i = \frac{c_1}{1\,!}\,\sigma - \frac{c_2}{2\,!}\,\sigma^2 + \frac{c_3}{3\,!}\,\sigma^3 - \frac{c_4}{4\,!}\,\sigma^4 - \mathrm{L}\, w_0.$$

Ceci étant, soit :

$$\sigma = \omega + i\,\rho,$$

une racine complexe de cette équation. En portant sa valeur dans (38), et en séparant les parties réelle et imaginaire on trouve :

$$(39)\begin{cases} \omega^4 - \dfrac{4\,!\,c_3}{3\,!\,c_4}\,\omega^3 + \left(\dfrac{4\,!\,c_2}{2\,!\,c_4} - 6\rho^2\right)\omega^2 - \left(\dfrac{4\,!\,c_1}{1\,!\,c_4} - \dfrac{4\,!\,c_3}{2\,!\,c_4}\,\rho^2\right)\omega - \left[\left(\dfrac{4\,!\,c_2}{2\,!\,c_4} - \rho^2\right)\rho^2 - \dfrac{4\,!}{c_4}\,\mathrm{L}\,w_0\right] = 0, \\[2ex] \rho = \dfrac{2k\pi}{-\,c_4\,\dfrac{\omega^3}{3\,!} + c_3\,\dfrac{\omega^2}{2\,!} - \left(c_2 - c_4\dfrac{\rho^2}{3\,!}\right)\omega + \left(c_1 - c_3\,\dfrac{\rho^2}{3\,!}\right)}. \end{cases}$$

On voit immédiatement que la racine réelle, obtenue pour $k = 0$, est donnée par une équation du quatrième degré.

Le calcul des racines complexes ne peut se faire que par approximations successives, pour chaque valeur entière de k. En supposant ω et ρ suffisamment petits, la seconde équation donne :

$$\rho_1 = \frac{2k\pi}{c_1}.$$

On porte cette valeur dans la première équation, et on en tire la première valeur de ω soit ω_1. On porte alors ω_1 dans la deuxième équation, qui donne la seconde valeur de ρ

soit ρ_2, valeur que l'on porte dans la première équation pour avoir ω_2. On continue ainsi, jusqu'au moment où deux opérations successives donnent pratiquement le même résultat.

20. Autre méthode pour le calcul des racines complexes. — Dans certains cas, la méthode précédente ne peut pas donner les racines complexes avec une approximation suffisante. On peut faire alors le calcul par un procédé de tâtonnement que nous exposons brièvement. Considérons la racine complexe :

$$\sigma = \omega + i\,\rho.$$

En la portant dans (24), et en séparant les parties réelle et imaginaire, nous obtenons :

$$\begin{cases} 1 = \int_0^\infty e^{-\omega x} \cos \rho x\, \lambda(x)\, \varphi(x)\, dx = \mathrm{U}(\omega, \rho), \\ 0 = \int_0^\infty e^{-\omega x} \sin \rho x\, \lambda(x)\, \varphi(x)\, dx = \mathrm{V}(\omega, \rho). \end{cases}$$

Posons d'autre part :

$$\Phi(\omega, \rho) = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \omega} = -\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \rho}, \qquad \Omega(\omega, \rho) = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \rho} = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \omega}.$$

Ces deux relations nous donnent facilement :

$$d\,\omega = \frac{\Phi\, d\,\mathrm{U} + \Omega\, d\,\mathrm{V}}{\Phi^2 + \Omega^2},$$

$$d\,\rho = \frac{\Omega\, d\,\mathrm{U} - \Phi\, d\,\mathrm{V}}{\Phi^2 + \Omega^2}.$$

Supposons que par une des méthodes usuelles (par exemple la méthode des trapèzes), nous ayons déterminé les valeurs approchées ω_0 et ρ_0 qui nous donnent les valeurs approchées

$U_0(\omega_0, \rho_0)$ et $V_0(\omega_0, \rho_0)$, dont les vraies valeurs sont l'unité et zéro. Si l'approximation de ω et ρ n'est pas trop grossière, ces relations s'écrivent alors :

$$(40) \qquad \left\{ \begin{aligned} \omega_0 - \omega &= \frac{\Phi_0 [U_0 - 1] + \Omega_0 V_0}{\Phi_0^2 + \Omega_0^2}, \\ \rho_0 - \rho &= \frac{\Omega_0 [U_0 - 1] - \Phi_0 V_0}{\Phi_0^2 + \Omega_0^2}, \end{aligned} \right.$$

Ces formules permettent la détermination des vraies valeurs ω et ρ.

21. Calcul des coefficients A_k. — L'expression donnée par Hertz[1] pour le coefficient A_k, relatif à σ_k, dans la série (25) est :

$$(41) \qquad A_k = \frac{\int_0^\infty \left[N(t) - \int_0^t N(t-x)\,\lambda(x)\,\varphi(x)\,dx \right] e^{-t\sigma_k}\,dt}{\int_0^\infty x\, e^{-x\sigma_k}\,\lambda(x)\,\varphi(x)\,dx}.$$

Nous savons que le nombre des naissances à l'instant t, dans les générations successives s'écrit :

$$\left\{ \begin{aligned} N_1(t) &= \mathcal{N}_0\,\lambda(t)\,\varphi(t), \\ N_2(t) &= \int_0^t N_1(t-x)\,\lambda(x)\,\varphi(x)\,dx, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ N_g(t) &= \int_0^t N_{g-1}(t-x)\,\lambda(x)\,\varphi(x)\,dx. \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

1. P. Hertz, *Mathematische Annalen*, vol. LXV, p. 86.

Le nombre total des naissances, à l'instant t, sera donc :

$$\mathrm{N}\,(t) = \mathcal{N}_0\,\lambda\,(t)\,\varphi\,(t) + \int_0^t \sum_{g=1}^{\infty} \mathrm{N}_g\,(t-x)\,\lambda\,(x)\,\varphi\,(x)\,dx.$$

Ce nombre s'écrit encore :

$$\mathrm{N}\,(t) = \mathcal{N}_0\,\lambda\,(t)\,\varphi\,(t) + \int_0^t \mathrm{N}\,(t-x)\,\lambda\,(x)\,\varphi\,(x)\,dx.$$

Et alors, comme σ_k est racine de l'équation (24), le numérateur de l'expression de A_k devient tout simplement :

$$\int_0^{\infty} \mathcal{N}_0\,\lambda\,(t)\,\varphi\,(t)\,e^{-t\sigma_k}\,dt = \mathcal{N}_0.$$

On voit de même que son dénominateur peut s'écrire :

$$\frac{\int_0^{\infty} x\,\lambda\,(x)\,\varphi\,(x)\,e^{-x\sigma_k}\,dx}{\int_0^{\infty} \lambda\,(x)\,\varphi\,(x)\,e^{-x\sigma_k}\,dx} = -\frac{d}{d\,\sigma_k}\left[\mathrm{L}\,\frac{\mathrm{Y}\,(\sigma_k)}{\mathrm{Y}_0}\right] = \sum_{h=1}^{\infty} (-1)^{h-1}\,\frac{\sigma_k^{\,h-1}}{(h-1)\,!}\,c_h.$$

On a donc pour A_k l'expression simple suivante :

$$(42) \qquad \mathrm{A}_k = \frac{\mathcal{N}_0}{\sum\limits_{h=1}^{\infty} (-1)^{h-1}\,\frac{\sigma_k^{h-1}}{(h-1)!}\,c_h}$$

Pour le calcul de A_0, relatif à la racine réelle σ, on n'a qu'à porter la valeur de σ dans cette expression, une fois que cette valeur a été calculée.

Considérons maintenant les coefficients A_k et A_{-k}, relatifs aux racines complexes conjuguées :

$$\sigma_k = \omega_k + i\rho_k, \qquad\qquad \sigma_{-k} = \omega_k - i\rho_k.$$

Portons ces valeurs dans (42) et désignons par Q_k et R_k la partie réelle et le coefficient de i dans le dénominateur de A_k ; il vient :

$$\left\{\begin{aligned} A_k &= \frac{\mathcal{N}_0}{Q_k + i\,R_k} = \mathcal{N}_0\,\frac{Q_k - i\,R_k}{Q_k^2 + R_k^2} \\ A_{-k} &= \frac{\mathcal{N}_0}{Q_k - i\,R_k} = \mathcal{N}_0\,\frac{Q_k + i\,R_k}{Q_k^2 + R_k^2} \end{aligned}\right.$$

Les termes relatifs à ce couple de racines conjuguées, dans (25), deviendront :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_k &= A_k\,e^{(\omega_k + i\rho_k)\,t} + A_{-k}\,e^{(\omega_k - i\rho_k)} \\ (43) \qquad &= \frac{2\,\mathcal{N}_0\,e^{\omega_k t}}{Q_k^2 + R_k^2}\left[Q_k \cos \rho_k\,t + R_k \sin \rho_k\,t\right]. \end{aligned}$$

La solution cherchée de l'équation (23) s'écrit enfin :

(44)

$$N\,(t) = \mathcal{N}_0\left[\frac{e^{\sigma t}}{\sum\limits_{h=1}^{\infty}(-1)^{h-1}\frac{\sigma^{h-1}}{(h-1)!}c_h} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{\omega_k t}}{Q_k^2 + R_k^2}\,(Q_k \cos \rho_k\,t + R_k \sin \rho_k\,t)\right].$$

22. Durée moyenne d'une génération. — C'est, par définition, la moyenne des âges des mères, au moment de la naissance de leur première fille, ou, ce qui revient au même, le temps moyen qui sépare les naissances féminines (on considère bien entendu la naissance de la première fille de chaque mère), dans deux générations successives.

Désignons cette durée par $\mathcal{D}$, et écrivons la relation (27) pour deux instants distants de $\mathcal{D}$. Il est évident que le premier membre donnera successivement les nombres des naissances dans deux générations successives :

$$\mathcal{N}_g = A_0\,e^{\sigma t}, \qquad \mathcal{N}_{g+1} = A_0\,e^{\sigma\,(t+\mathcal{D})}.$$

De ces deux relations nous tirons, en tenant compte de (16) :

$$w_0 = e^{\sigma \mathcal{D}}.$$

La comparaison avec la relation (28) donne :

$$\mathcal{D} = \sum_{h=1}^{\infty} (-1)^{h-1} \frac{c_h}{h!} \sigma^{h-1}. \tag{45}$$

Le premier terme de la série du second membre, est le semi-invariant c_1, que nous avons employé précédemment comme une première approximation de la durée moyenne d'une génération.

23. Retardement des mariages[1]. — Supposons que dans une population, les mariages soient en moyenne retardés de n années; et cherchons l'influence de ce fait, sur la valeur du taux naturel d'accroissement. En marquant par des accents les nouvelles valeurs de la durée moyenne d'une génération, du taux net de reproduction et du taux naturel d'accroissement, nous aurons :

$$w_0 = e^{\sigma \mathcal{D}}, \qquad w'_0 = e^{\sigma' \mathcal{D}'}.$$

Ces deux relations nous donnent facilement :

$$\sigma' = \frac{1}{\mathcal{D}'} \left(\sigma\ \mathcal{D} + \mathrm{L}\ \frac{w'_0}{w_0}\right).$$

On peut voir, d'après la définition même de w_0, que l'on a approximativement :

$$\frac{w}{w_0} = \frac{\lambda\ (\mathcal{D}')}{\lambda\ (\mathcal{D})}.$$

1. L. J. Dublin et A. J. Lotka, *On the rate of natural increase* (*Journ. of the Am. St. As.*, 1925).

Mais, quand les mariages sont retardés de n années, il en est très sensiblement de même de la durée moyenne d'une génération, c'est-à-dire de l'âge probable des mères, au moment de la naissance de leur première fille. Nous aurons donc :

$$\frac{w'_0}{w_0} = \frac{\lambda\,(\mathcal{D} + n)}{\lambda\,(\mathcal{D})}.$$

L'expression de σ' s'écrit enfin :

$$(46) \qquad \sigma' = \frac{\mathcal{D}\,\sigma}{\mathcal{D} + n}\left[1 + \frac{1}{\sigma\,\mathcal{D}}.\,\mathrm{L}\,\frac{\lambda\,(\mathcal{D} + n)}{\lambda\,(\mathcal{D})}\right].$$

Mais, comme la fonction de survie décroît quand l'âge croît, le logarithme entre crochets est négatif, et l'on a :

$$(47) \qquad \sigma' < \sigma.$$

Par conséquent, plus les mariages sont retardés, plus le taux naturel d'accroissement de la population est faible. Donc, *la condition optimum pour l'accroissement d'une population s'obtient quand les jeunes filles se marient le plus tôt possible.*

CHAPITRE IV

ETUDE SYSTEMATIQUE DE LA MORTALITE

---

24. Mortalité variable avec le temps. — Dans toutes les études entreprises jusqu'aujourd'hui, dans le domaine de la théorie mathématique de la démographie, la fonction de mortalité a toujours été considérée invariable avec le temps. En effet l'évolution de cette fonction dans le temps, et l'amélioration qui y a été apportée par les progrès de la médecine et de l'hygiène au cours des siècles, ne paraissaient pas suivre des règles facilement abordables avec une théorie mathématique.

D'autre part, il est évident que *cette évolution et cette amélioration existent effectivement*. Comme nous le verrons plus loin, les variations de la mortalité dans le temps sont loin d'être négligeables, même dans un intervalle relativement court.

Il en résulte donc qu'une étude systématique des variations de la mortalité avec le temps est indispensable. C'est cette étude que nous essayerons d'exposer dans le présent chapitre.

25. Hypothèses fondamentales. — Quand on n'étudie la mortalité que pendant un temps très court, elle peut être considérée comme une fonction de l'âge seul. Il n'en est pas du tout de même quand on veut faire l'étude systématique de cette fonction pour de grands intervalles de temps. Pour faire

cette étude, nous sommes amenés à faire les deux hypothèses suivantes, qui permettent un exposé simple de la théorie.

A. Désignons par $\mu(x, t)$, la mortalité de l'âge x à l'instant t, c'est-à-dire le rapport du nombre des individus d'âge compris entre x et $x+1$ qui décèdent dans l'intervalle $(t, t+1)$, au nombre total de ces individus. *Nous supposons que si dans $\mu(x, t)$ le temps tend vers l'infini négatif, cette fonction tend, par valeurs inférieures, vers une limite supérieure $\eta'(x)$, que nous appellerons mortalité initiale de l'âge x; nous supposons d'autre part que si le temps tend vers l'infini positif, la mortalité $\mu(x, t)$ tend, par valeurs supérieures, vers une limite inférieure $\xi'(x)$, que nous appellerons mortalité finale de l'âge x.*

La première partie de cette hypothèse est très commode; elle nous paraît d'ailleurs assez sensée. Car il est indéniable que *les hommes ont toujours cherché à améliorer leur mortalité.* La seconde partie revient à dire que les progrès scientifiques ne peuvent pas diminuer indéfiniment la mortalité. Il arrivera un moment où toutes les maladies (infantiles et autres) auront été étudiées au maximum. *Alors chaque âge aura, en tenant compte aussi des accidents mortels, une mortalité qu'on ne pourra plus diminuer, et qui fournira ainsi une limite inférieure infranchissable.*

B. Posons maintenant :

$$\nu(x, t) = \mu(x, t) - \xi'(x). \tag{48}$$

Notre seconde hypothèse est la suivante : *la dérivée logarithmique de la fonction $\nu(x, t)$ par rapport au temps, qui fournit le taux de décroissement relatif de la mortalité de l'âge x,* *est une fonction linéaire de la mortalité, ou ce qui revient au même, de la fonction* $\nu(x, t)$, *les coefficients dépendant de l'âge seul* :

$$(49) \quad \frac{1}{\nu(x, t)} \cdot \frac{\partial \nu(x, t)}{\partial t} = \omega\, k(x) \Big[D(x)\, \nu(x, t) - C(x) \Big],$$

où ω est une constante positive.

Nous dirions, s'il nous l'était permis, que *la loi exprimée par* (49). *semble être plus générale*, et régir non seulement la fonction de mortalité, mais aussi d'autres fonctions qui définissent les lois de l'évolution des êtres organisés. Nous en verrons un autre exemple dans l'étude des populations et des natalités logistiques, que nous exposerons un peu plus loin.

Nous ne nous attarderons pas davantage sur la justification de ces deux hypothèses. Il nous semble que nos calculs numériques, exposés à la fin de ce travail, en indiqueront suffisamment le degré de validité.

26. Expression générale de la mortalité. — L'intégration de l'équation (49) donne facilement :

$$\nu(x, t) = \frac{C(x)}{D(x) + e^{\omega\, C(x)\, k(x)\, (t - t_0)}}$$

Comme nous le verrons dans nos tables numériques, le coefficient de $t - t_0$, dans l'exposant de e, dans le dénominateur de cette expression, est indépendant de l'âge. Nous écrirons donc :

$$C(x)\, k(x) = 1.$$

Et alors l'expression de $\nu(x, t)$ sera de la forme :

$$\nu(x, t) = \frac{A(x)}{1 + B(x)\, e^{\omega(t - t_0)}}.$$

où l'on a posé :

$$A(x) = \frac{C(x)}{D(x)}, \qquad B(x) = \frac{1}{D(x)}.$$

Mais nous savons que l'on a :

$$\nu(x, -\infty) = \eta'(x) - \xi'(x) = A(x).$$

D'où par conséquent :

$$\frac{1}{D(x)} = k(x)\Big[\eta'(x) - \xi'(x)\Big].$$

Donc, en tenant compte de (48), l'expression générale de la mortalité s'écrit :

$$(50) \qquad \mu(x, t) = \xi'(x) + \frac{\eta'(x) - \xi'(x)}{1 + k(x)\Big[\eta'(x) - \xi'(x)\Big] e^{\omega(t - t_0)}}.$$

Remarquons immédiatement que *quand t devient infini, la fonction de mortalité ne dépend plus que de l'âge seul.*

27. Forme canonique. — Nous verrons plus loin que sous cette forme, la fonction de mortalité n'est pas facilement utilisable dans les calculs. Pour nos études ultérieures, nous avons besoin d'*une mortalité mise sous la forme d'une fonction de l'âge seul, plus une fonction du temps seul, plus enfin un terme correctif, assez petit, fonction des deux variables âge et temps.*

Pour mettre la mortalité sous cette forme, que nous appellerons *canonique*, posons :

$$(51) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\eta'(x) - \xi'(x) = \Gamma + \zeta(x), \\ &k(x)\Big[\eta'(x) - \xi'(x)\Big] = \Lambda + \varpi(x), \end{aligned} \right.$$

où Γ et Λ sont des constantes que nous préciserons plus loin. Alors la fonction de mortalité s'écrit :

$$\mu(x, t) = \xi'(x) + \frac{\Gamma}{1 + \left[\Lambda + \varpi(x)\right] e^{\omega(t - t_0)}} + \frac{\zeta(x)}{1 + \left[\Lambda + \varpi(x)\right] e^{\omega(t - t_0)}}.$$

Le second terme du second membre donne facilement :

$$\frac{\Gamma}{1 + \left[\Lambda + \varpi(x)\right] e^{\omega(t - t_0)}} = \frac{\Gamma}{1 + \Lambda e^{\omega(t - t_0)}}$$

$$- \frac{\Gamma \varpi(x) e^{\omega(t - t_0)}}{\left[1 + \Lambda e^{\omega(t - t_0)}\right] \left\{1 + \left[\Lambda + \varpi(x)\right] e^{\omega(t - t_0)}\right\}}.$$

Alors la forme canonique de la fonction de mortalité devient :

(52)
$$\mu(x, t) = \xi'(x) + \frac{\Gamma}{1 + \Lambda e^{\omega(t - t_0)}} + \frac{\zeta(x) + \left[\Lambda \zeta(x) - \Gamma \varpi(x)\right] e^{\omega(t - t_0)}}{\left[1 + \Lambda e^{(\omega t - t_0)}\right] \left\{1 + \left[\Lambda + \varpi(x)\right] e^{\omega(t - t_0)}\right\}},$$

qui est bien de la forme indiquée :

(53) $$\mu(x, t) = \xi'(x) + \theta'(t) + \beta(x, t);$$

où l'on a posé :

(54)
$$\begin{cases} \theta'(t) = \dfrac{\Gamma}{1 + \Lambda e^{\omega(t - t_0)}} = \dfrac{\Gamma}{2}\left[1 - th\left\{L\sqrt{\Lambda} + \dfrac{\omega(t - t_0)}{2}\right\}\right], \\ \beta(x, t) = \dfrac{\zeta(x) + \left[\Lambda \zeta(x) - \Gamma \varpi(x)\right] e^{\omega(t - t_0)}}{\left[1 + \Lambda e^{\omega(t - t_0)}\right] \left\{1 + \left[\Lambda + \varpi(x)\right] e^{\omega(t - t_0)}\right\}}. \end{cases}$$

On verra facilement que quand t devient grand, le rapport $\dfrac{\beta(x,t)}{\theta'(t)}$ tend vers $\dfrac{\Lambda \zeta(x) - \Gamma \varpi(x)}{\left[\Lambda + \varpi(x)\right] \Gamma}$, qui est petit comme on peut le constater d'après nos calculs numériques.

La forme de la courbe représentative est celle d'une tangente hyperbolique descendante, ayant respectivement pour asymptotes supérieure et inférieure $\eta'(x)$ et $\xi'(x)$. Voir la figure (6).

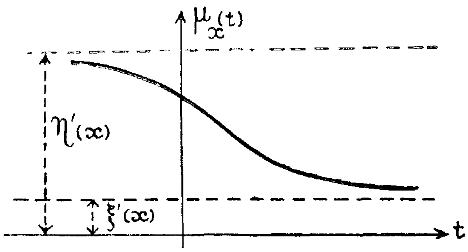


Fig. 6.

En effet, on voit facilement qu'en posant :

$$\left\{\begin{aligned} a &= \eta'(x) - \xi'(x), \\ b &= k(x)\, e^{-\omega t_0} \Big[\eta'(x) - \xi'(x)\Big]; \end{aligned}\right.$$

la fonction de mortalité s'écrit :

$$\text{(55)} \qquad \mu(x, t) = \xi'(x) + \frac{a}{2}\left[1 - th\left(\frac{\mathrm{L}\, b + \omega t}{2}\right)\right].$$

28. Surface aux mortalités et ses sections. — Nous appellerons ainsi la surface qui représente les variations de la mortalité avec l'âge et le temps. On peut la déterminer entièrement avec les tables de mortalité, qui donnent la mortalité pour chaque âge, ou pour chaque groupe d'âges, pendant un certain intervalle de temps.

Ces tables donnent les sections de cette surface par les plans $t = C^{te}$. On en déduit facilement les sections par les plans $\mu(x,t) = C^{te}$, *sections qui jouent un rôle très important*, comme nous le verrons plus loin. De même, on peut déterminer les sections par les plans $x = C^{te}$. *Ce sont ces dernières sections qui nous ont permis d'ajuster notre fonction de mortalité.* L'aspect schématique de ces différentes sections est représenté sur la figure (7).

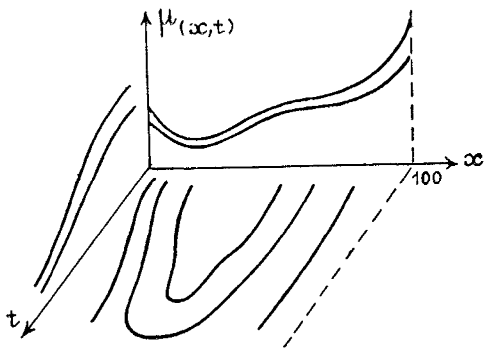


Fig. 7.

29. Ajustement de la fonction de mortalité. — Pour faire cet ajustement, il nous faut déterminer tous les éléments de la formule (50), à savoir · $\xi'(x)$, $\eta'(x)$, $k(x)$, ω et t_0.

A. Quand on a tracé les courbes $\mu_x(t)$ pour chaque âge, il est très facile de déterminer graphiquement, d'après la forme même de ces courbes, la position de l'asymptote inférieure, pour chaque valeur de l'âge x. Pour la mortalité de la population suédoise, dont nous nous sommes servis comme application, cette détermination se fait sans ambiguïté et sans tâtonnement; et cela à cause du fait que cette population se trouve justement à un moment de son évolution, où il n'y a plus beaucoup à gagner quant à l'amélioration de la mortalité.

Nous croyons qu'il devrait en être de même pour tous les peuples ayant un degré élevé de civilisation, et disposant par conséquent de tous les moyens scientifiques et médicaux pour empêcher ou retarder les décès.

En tout cas, *la détermination de la fonction de mortalité finale* $\xi'(x)$, *semble pouvoir se faire sans difficulté pour chaque âge.*

B. Pour déterminer ω, voici comment nous procédons. Nous partons de la relation (49); nous y remplaçons $C(x)$ et $D(x)$ par leurs valeurs. Alors cette équation devient :

$$(56) \qquad \frac{\nu_t'(x,t)}{\nu(x,t)} = \psi[\nu] = \frac{\nu(x,t)}{\eta'(x) - \xi'(x)}\,\omega - \omega.$$

Disposant des tables donnant les variations de la mortalité en fonction du temps pour chaque âge, et de la fonction $\xi'(x)$ graphiquement déterminée, il nous est facile d'obtenir, d'après (48), cette même table pour la fonction $\nu(x,t)$. Alors, pour chaque âge, nous pouvons dresser le tableau des variations de

$$\psi[\nu] = \frac{1}{\nu}\,\frac{\Delta\nu}{\Delta t}\,.$$

en fonction de $\nu(x,t)$. La relation (56) montre que les courbes représentatives des variations de $\psi[\nu]$, en fonction de ν, pour chaque âge, forment un faisceau de droites, rencontrant toutes l'axe $\psi[\nu]$ en un même point A. Voir la figure (8). La valeur absolue de l'ordonnée de ce point fournira ω. Ces droites peuvent se tracer facilement par la méthode des moindres carrés[1]. En désignant par ν_0 et ψ_0 les moyen-

1. G. Darmois, *Statistique mathématique*; — R. Deltheil, *Erreurs et moindres carrés.*

nes des valeurs de ν et celles de ψ, les équations de ces droites sont de la forme bien connue :

$$\bar{\psi}_x[\bar{\nu}] = \frac{\Sigma\,[\psi_x - \psi_{0x}]\,[\nu_x - \nu_{0x}]}{n\,\Sigma\,[\nu_x - \nu_{0x}]^2}\,[\bar{\nu} - \nu_{0x}] + \psi_{0x}, \tag{57}$$

où n désigne le nombre des points par lesquels on veut faire passer la droite.

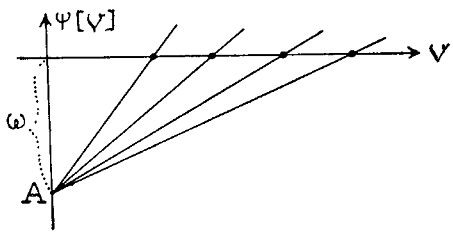


Fig. 8.

Une fois ces droites tracées, on a facilement ω. On verra effectivement dans les tables où nous donnons les valeurs de ω, pour les différents âges, qu'il y a une très grande régularité entre ces valeurs.

C. Ces droites coupent d'autre part l'axe des ν aux points dont les abscisses donneront, d'après (56), la valeur de $\eta'(x) - \xi'(x)$ relative à chaque âge. Disposant déjà des valeurs de $\xi'(x)$, il nous est donc possible d'avoir la fonction de mortalité initiale $\eta'(x)$.

D. Pour déterminer la fonction $k(x)$, nous posons :

$$k(x) = \frac{1}{\omega}\,e^{-\omega h(x)}. \tag{58}$$

Nous aurons alors d'après (48) et (50) :

$$\nu(x, t) = \frac{\eta'(x) - \xi'(x)}{1 + \frac{1}{\omega}\left[\eta'(x) - \xi'(x)\right] e^{-\omega[t_0 + h(x)]} e^{\omega t}}.$$

Cette relation nous donne facilement :

$$(59) \quad t_0 + h(x) = t + \frac{1}{\omega} \mathrm{L} \left[\frac{\eta'(x) - \xi'(x)}{\omega} \cdot \frac{\nu(x, t)}{\left[\eta'(x) - \xi'(x)\right] - \nu(x, t)}\right]$$

Tout est connu dans le second membre; on pourra donc calculer :

$$t_0 + h(x) = t_0 - \frac{1}{\omega} \mathrm{L}\left[\omega k(x)\right].$$

E. Les valeurs effectives de Γ, de Λ et de t_0 ne se déterminent que par un choix plus ou moins judicieux.

Nous avons pris pour Γ la moyenne arithmétique des valeurs de $\eta'(x) - \xi'(x)$. Nous rendons ainsi la fonction $\theta'(t)$ grande, et la fonction $\beta(x, t)$ petite. Cela donne immédiatement la fonction $\zeta(x)$.

Pour t_0 nous avons pris la moyenne des valeurs de $t_0 + h(x)$; ce qui permet d'avoir $h(x)$, et par conséquent $k(x)$, pour tous les âges. Il est à remarquer, comme nous le verrons plus loin, que cette constante de temps, ainsi déterminée, diffère peu pour les deux sexes, tandis que les valeurs de ω diffèrent sensiblement.

Pour Λ nous avons encore adopté la moyenne des valeurs de $k(x)\left[\eta'(x) - \xi'(x)\right]$. La fonction $\varpi(x)$ en a résulté immédiatement.

Ainsi, dans la forme canonique (52), toutes les constantes sont déterminées, de même que toutes les fonctions de l'âge pour toutes les valeurs de x. La fonction de mortalité est compètement ajustée.

CHAPITRE V

POPULATIONS MALTHUSIENNES GÉNÉRALISÉES

30. DÉFINITION. — Nous désignons par *population malthusienne généralisée*, une *population fermée* (c'est-à-dire sans mouvement migratoire), ayant un *taux fixe de masculinité des naissances*, soumise à une *fonction de mortalité satisfaisant à nos deux hypothèses* du chapitre précédent, et dans laquelle *la fonction de fécondité est supposée indépendante du temps.*

Donc, à partir d'un nombre initial de naissances N_0, d'une fonction de mortalité $\mu(x, t)$ et d'une fonction de fécondité $\varphi(x)$, il faut arriver à déterminer tous les éléments démographiques de la population. Cette opération, que nous appellerons *résolution démographique de la population*, comporte la recherche de toutes les fonctions qui peuvent intervenir dans le mouvement d'une population.

Notons que dans toutes les études antérieures à la nôtre, on a toujours supposé la fonction de mortalité indépendante du temps.

31. EQUATION FONDAMENTALE. — Considérons à l'instant t, la tranche $p(x, t)$ de la population, dont l'âge est compris entre x et $x+1$. A l'instant $t + \Delta t$, par le jeu de la fonction de mortalité $\mu(x, t)$, cette tranche aura perdu une partie de

son effectif, et ne comprendra plus que $p(x + \Delta x, t + \Delta t)$ individus.

Mais il est évident que plus la mortalité $\mu(x, t)$ est grande, et plus la population est nombreuse, plus la perte de l'effectif de la population pendant Δt est importante. Nous supposons, ce qui nous paraît logique, que Δp est *proportionnel à* $\mu(x, t)$ *et à* $p(x, t)$, c'est-à-dire que l'on peut écrire :

$$(60) \qquad \Delta p = p(x + \Delta x, t + \Delta t) - p(x, t) = -\mu(x, t)\, p(x, t)\, \Delta t;$$

le facteur de proportionnalité sera évidemment égal à -1. De cette relation nous tirons :

$$\frac{p(x + \Delta x, t + \Delta t) - p(x, t + \Delta t)}{\Delta t} + \frac{p(x, t + \Delta t) - p(x, t)}{\Delta t} = -\mu(x, t)\, p(x, t).$$

En remarquant que $\Delta x = \Delta t$, et en faisant tendre Δt vers zéro, nous obtenons la relation fondamentale :

$$(61) \qquad \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial t} = -p(x, t)\, \mu(x, t).$$

Si nous posons maintenant :

$$(62) \qquad q(x, t) = \mathrm{L}\, p(x, t),$$

nous aurons l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$(63) \qquad \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial t} = -\mu(x, t),$$

qui joue, dans la théorie de l'évolution démographique d'une population, un rôle capital.

En prenant pour $\mu(x, t)$ sa forme générale fournie, par (50) ou (52), la recherche de l'intégrale générale de cette équation n'est pas très commode par des méthodes classiques. Mais si *l'on suppose que le terme* $\beta(x, t)$ *est négligeable*, en première approximation, devant les deux autres termes, dans l'expression de la mortalité, cette équation s'intègre aisément, et fournit des résultats simples, qui généralisent l'étude des populations malthusiennes, faite jusqu'à ce jour. C'est cela qui fera l'objet du présent chapitre. Nous indiquerons ensuite comment il est possible de tenir compte de ce troisième terme, par des développements en série.

32. Intégration de l'équation réduite. — Nous supposons donc qu'il a été possible de mettre la fonction de mortalité $\mu(x, t)$, avec une approximation suffisante, sous la forme de *la somme d'une fonction* $\xi'(x)$ *de l'âge et d'une fonction* $\theta'(t)$ *du temps*. L'équation aux dérivées partielles (63) s'écrira alors :

$$(64) \qquad \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial t} = -\xi'(x) - \theta'(t).$$

En désignant par σ_0 une constante, cette équation donne :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial q}{\partial x} + \xi'(x) = -\sigma_0, \\ &\frac{\partial q}{\partial t} + \theta'(t) = \sigma_0 \end{aligned}\right.$$

En portant les dérivées partielles de la fonction $q(x, t)$, fournies par ce système, dans la relation :

$$dq = \frac{\partial q}{\partial x} dx + \frac{\partial q}{\partial t} dt,$$

on obtient :

$$dq = -\Big[\xi'(x) + \sigma_0\Big] dx - \Big[\theta'(t) - \sigma_0\Big] dt.$$

L'intégration de cette équation donne enfin :

$$q(x, t) = q_0 + \sigma_0 (t - x) - \xi(x) - \theta(t),$$

où q_0 est une seconde constante. En remplaçant dans (62), $q\ (x, t)$ par son expression, et en posant :

$$p_0 = \text{U}e^{q_0},$$

nous obtenons :

$$p\ (x, t) = \frac{p_0}{\text{U}}\, e^{\sigma_0\,(t-x)}\, e^{-\xi\,(x)}\, e^{-\theta\,(t)}$$

Mais la première relation (54) donne, par intégration et en tenant compte de (55) :

$$\theta\ (t) = \int \frac{\Gamma\, dt}{1 + \Lambda\, e^{\omega\,(t-t_0)}} = \Gamma\left[\frac{t-t_0}{2} - \text{L}\left\{ch\left[\text{L}\sqrt{\Lambda} + \frac{\omega(t-t_0)}{2}\right]\right\}\frac{1}{\omega}\right].$$

D'où l'on tire facilement :

$$e^{\theta\,(t)} = \left[\frac{2\sqrt{\Lambda}}{\Lambda + e^{-\omega\,(t-t_0)}}\right]^{\frac{\Gamma}{\omega}}$$

Si l'on pose maintenant :

$$\begin{cases} \dfrac{\Gamma}{\omega} = \text{Q}, \\ \left[2\sqrt{\Lambda}\, e^{-\omega t_0}\right]^{\frac{\Gamma}{\omega}} = \\ \Lambda e^{-\omega\, t_0} = \text{V}, \end{cases}$$

l'expression de $p\ (x, t)$ devient enfin :

$$(65) \qquad p\ (x, t) = p_0\, e^{\sigma_0\,(t-x)}\, e^{-\xi\,(x)}\, (\text{V} + e^{-\omega t})^{\text{Q}}$$

relation qui donne la tranche d'âge x à l'instant t.

33. Résolution démographique de la population malthusienne généralisée. — C'est la relation (65) qui va nous permettre de déterminer toutes les autres fonctions démographiques de la population.

A. Pour avoir la population totale à l'instant t, il n'y a qu'à additionner les effectifs des différentes tranches d'âge, depuis zéro jusqu'à l'âge maximum que l'on puisse atteindre (pratiquement égal à cent ans). Nous pouvons évidemment mettre pour limite supérieure de notre sommation l'infini positif, ce qui donnera pour la population totale :

$$P(t) = \int_0^\infty p(x, t)\, dx = p_0 e^{\sigma_0 t}\left(V + e^{-\omega t}\right)^Q \int_0^\infty e^{-\sigma_0 x} e^{-\xi(x)} dx;$$

ou encore :

$$P(t) = P_0 \left(V + e^{-\omega t}\right)^Q e^{\sigma_0 t}. \tag{66}$$

On ne trouve pas la forme ordinaire de la population malthusienne, qui varie en progression géométrique. Il y a un facteur correctif qui est $(V + e^{-\omega t})^Q$. *C'est seulement pour les grandes valeurs de t que nous retrouvons les résultats de Malthus.*

B. Pour avoir le nombre total des naissances, il n'y a qu'à considérer la relation (65), pour la valeur nulle de l'âge. On a alors :

$$N(t) = p_0 e^{\sigma_0 t} e^{-\xi(0)} \left(V + e^{-\omega t}\right)^Q;$$

ou encore :

$$N(t) = N_0 \left(V + e^{-\omega t}\right)^Q e^{\sigma_0 t} \tag{67}$$

Ce résultat est à rapprocher de ceux qu'on a trouvés précédemment, et qui s'expriment par les relations (21) et (44). Pour les grandes valeurs de t on a la même chose que dans les cas précédents.

C. La fonction de survie devient d'après la relation (1) :

$$\lambda(x, t) = e^{\xi(0) - \xi(x)} \left(V + e^{-\omega t}\right)^Q \left[V + e^{-\omega(t+x)}\right]^Q, \tag{68}$$

qui s'écrit encore :

$$(69) \qquad \lambda(x, t) = e^{-\int_0^x \mu(x, t+x)\,dx}\,.$$

Cette formule est absolument générale, quelle que soit la fonction de mortalité.

C'est l'intégration graphique du second membre de cette relation, à l'aide des sections de la surface aux mortalités par les plans $\mu(x, t) = C^{te}$, qui nous permettra, à la fin de ce travail, de trouver la tranche $p(x+k, t+k)$ de la population à partir de la tranche $p(x, t)$.

D. Pour avoir le taux de natalité, c'est-à-dire le rapport du nombre total des naissances à la totalité de la population, nous n'avons qu'à diviser membre à membre les relations, (67) et (66), nous aurons :

$$(70) \qquad n = \frac{N(t)}{P(t)} = \frac{N_0}{P_0} = \frac{e^{-\xi(0)}}{\int_0^\infty e^{-\sigma_0 x} e^{-\xi(x)}\,dx}.$$

Donc, dans une population malthusienne généralisée, où l'on suppose $\beta(x, t)$ négligeable devant $\xi'(x)$ et $\theta'(t)$, *le taux de natalité est essentiellement indépendant du temps.*

E. Le nombre total des décès à l'instant t se trouve de la manière suivante : la tranche $p, (x, t)$ perd, dans l'intervalle $(t, t+1)$, un nombre $p(x, t)\,\mu(x, t)$ de son effectif. Pour avoir le nombre total des décès à l'instant t, il n'y a donc qu'à sommer les décès de la tranche $p(x, t)$ pour tous les âges; cela nous donnera :

$$(71) \qquad M(t) = \int_0^\infty \mu(x, t)\,\nu(x, t)\,dx.$$

En tenant compte des relations (61), (66) et (69), on a facilement :

$$(72) \qquad M(t) = P(t)\left[n - \sigma_0 + \frac{\Gamma}{1 + \Lambda e^{\omega(t - t_0)}}\right].$$

F. Le taux des décès s'en déduit immédiatement :

$$(73) \quad m(t) = \frac{M(t)}{P(t)} = n - \sigma_0 + \frac{\Gamma}{1 + A\, e^{\omega(t - t_0)}},$$

Ce taux est une fonction du temps. Il n'en est indépendant que si la mortalité elle-même est indépendante du temps, ce qui était à prévoir.

G. Le taux net d'accroissement de la population peut se définir ou bien comme la dérivée logarithmique du nombre total de la population, ou encore comme la différence entre le taux des naissances et celui des décès. En désignant ce taux par $\sigma(t)$ nous avons :

$$(74) \quad \sigma(t) = n - m(t) = \frac{P'(t)}{P(t)} = \sigma_0 - \frac{\Gamma}{1 + A\, e^{\omega(t - t_0)}}.$$

C'est une fonction du temps, représentée par une tangente hyperbolique ascendante, ayant respectivement pour asymptotes inférieure et supérieure $\sigma_0 - \Gamma$ et σ_0. Voir la figure (9). A mesure que la mortalité décroît, ce taux croît. Quand la mortalité se fixe en $\xi'(x)$ pour $t = \infty$, ce taux devient aussi fixe, ce qui était à prévoir.

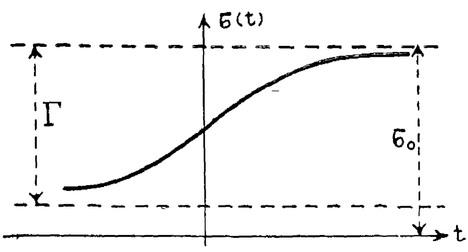


Fig. 9.

H. Nous savons que l'on désigne ordinairement par fréquence relative de l'âge x, ou *fonction de structure* de la population, le rapport du nombre des individus d'âge x à l'instant t, au nombre total de la population à cet instant.

$$(75) \qquad S(x, t) = \frac{p(x, t)}{P(t)}.$$

Son expression s'obtient facilement d'après (65) et (66).

$$(76) \qquad S(x) = \frac{e^{-\sigma_0 x} e^{-\xi(x)}}{\int_0^\infty e^{-\sigma_0 x} e^{-\xi(x)} dx}.$$

Nous voyons que dans une population malthusienne généralisée, toujours sous l'hypothèse que dans l'expression de la fonction de mortalité $\beta(x, t)$ est négligeable devant les deux autres termes, *la fonction de structure est essentiellement fixe dans le temps*. Cela veut dire qu'à tout instant, le rapport du nombre des individus d'âge x à la totalité de la population, est une fonction de l'âge x seul. La fonction de structure peut s'écrire encore :

$$(77) \qquad S(x) = n e^{\xi(0) - \xi(x)} e^{-\sigma_0 x}.$$

I. Proposons-nous maintenant de calculer la constante d'intégration σ_0. Considérons pour cela la relation (2); elle donne en tenant compte de (65) et (67) :

$$(78) \qquad \int_0^\infty e^{-\sigma_0 x} e^{\xi(0) - \xi(x)} \varphi(x)\, dx = 1.$$

La donnée de la fonction de fécondité $\varphi(x)$ permet de calculer la constante σ_0, qui est, comme on vient de le voir, *le taux limite d'accroissement de la population*. On remarque d'autre part que cette relation est exactement du même type que la relation (24). La fonction $e^{\xi(0) - \xi(x)}$ n'est en effet autre chose que $\lambda(x)$, quand on suppose la mortalité indépendante du temps. Donc, pour les grandes valeurs du temps, nous retombons sur les résultats antérieurs, obtenus sous la condition (4).

J. Il est facile d'avoir *la durée moyenne de la vie d'un individu*, fonction qu'il ne faut pas confondre avec la durée moyenne d'une génération. Ce n'est autre chose que l'âge probable d'un individu au moment de sa mort. Son expression est donnée par :

$$L(t) = \int_0^\infty \lambda(x, t)\, dx.$$

En tenant compte de (69), cette relation s'écrit encore :

$$(79) \qquad L(t) = \frac{e^{\xi(0)}}{\left(V + e^{-\omega t}\right)^{\Omega}} \int_0^\infty e^{-\xi(x)} \left[V + e^{-\omega(t+x)}\right]^{\Omega} dx.$$

Cette durée est une fonction du temps.

Remarquons, avant d'aller plus loin, que *la donnée de la fonction de mortalité nous a permis de déterminer toutes les fonctions démographiques d'une population, sauf la fonction de fécondité, et par conséquent le taux naturel d'accroissement; et que la donnée de la fonction de fécondité a été indispensable pour le calcul de ce taux.*

Inversement si pour une population on se donne, outre la fonction de mortalité, un taux limite d'accroissement σ_0, le relation (78) fournit la fonction de fécondité de la population considérée.

On se rend bien compte maintenant de l'*indépendance des fonctions de mortalite et de fécondité*, ainsi que de l'*interdépendance du taux naturel d'accroissement et de la fonction de fécondité.*

34. Passage a la limite. — Cette étude étant faite, plaçons-nous dans le cas limite, c'est-à-dire faisons tendre, dans l'expression de la mortalité, fournie par (50) ou (52), le temps vers l'infini. Les termes où figure le temps s'annulent, et la mortalité ne sera plus qu'une fonction $\mu(x)$ de l'âge seul. Tous nos calculs subsistent et se simplifient considérablement.

Dans le second membre de l'équation aux dérivées partielles (64), le second terme s'annule. L'intégration se fait immédiatement et donne pour la tranche de population d'âge x à l'intant t :

$$(80) \qquad p(x, t) = p_0 e^{\sigma(t-x)} e^{-\int_0^{\infty} \mu(x)\, dx}$$

d'où pour le nombre total de la population à l'instant t :

$$(81) \qquad P(t) = p_0 e^{\sigma t} \int_0^{\infty} e^{-\sigma x} \left[e^{-\int_0^x \mu(x)\, dx} \right] dx = P_0 e^{\sigma t}.$$

La population varie suivant une progression géométrique (loi de Malthus). Il en est de même du nombre total des naissances, qui lui est proportionnel, et qui s'obtient en annulant x dans (80) :

$$(82) \qquad N(t) = N_0 e^{\sigma t} = n\, P(t).$$

La fonction de survie garde sa forme générale, sauf qu'*elle ne dépend plus du temps* :

$$(83) \qquad \lambda(x) = \frac{p(x, t)}{N(t-x)} = e^{-\int_0^x \mu(x)\, dx}.$$

La formule (70), donnant le taux de natalité, reste telle quelle. Elle s'écrit en tenant compte de (83) :

$$(84) \qquad n = \frac{1}{\int_0^{\infty} e^{-\sigma x} \lambda(x)\, dx}$$

Le nombre total des décès s'écrit de même :

$$(85) \qquad M(t) = (n - \sigma) P(t).$$

Il est proportionnel à la population totale.

Quant au taux des décès, il ne dépend plus du temps :

$$(86) \qquad m = n - \sigma.$$

On voit alors que le taux naturel d'accroissement σ n'est autre chose que la constante introduite dans l'intégration de la forme réduite de (64).

La structure de la population, toujours indépendante du temps, garde sa forme, et s'écrit en tenant compte de (83) et (84) :

$$(87) \qquad S(x) = n\lambda(x) e^{-\sigma x}.$$

La fonction de fécondité étant toujours supposée indépendante du temps, la constante σ, c'est-à-dire le taux naturel d'accroissement, sera fournie par la racine réelle de l'équation (24) :

$$Y(\sigma) = \int_0^\infty e^{-\sigma x} \lambda(x) \varphi(x)\, dx = 1,$$

que nous avons résolue précédemment.

La durée moyenne de la vie humaine devient maintenant :

$$(88) \qquad L = \int_0^\infty \lambda(x)\, dx = \int_0^\infty \left[e^{-\int_0^x \mu(x)\, dx} \right] dx.$$

Elle est indépendante du temps.

35. Cas particulier. — Si l'on suppose la mortalité absolument constante, tous nos résultats subsistent sans aucun changement. Le nombre total de la population, ainsi que ceux des naissances et des décès, varient en progression géomé-

trique. Les taux des naissances, des décès et de l'accroissement sont constants. Les fonctions de survie et de structure s'écrivent :

$$(89)\qquad \left\{ \begin{aligned} \lambda(x) &= e^{-\mu x}, \\ S(x) &= e^{-(\mu+\sigma)x}. \end{aligned} \right.$$

Elles suivent des progressions géométriques, décroissante dans tous les cas pour la fonction de survie, et décroissante pour la fonction de structure, tant que la somme de la mortalité et du taux naturel d'accroissement est positive.

36. Relation entre les taux de natalité et de mortalité[1]. — Partons de la relation (84) elle donne :

$$\frac{1}{n} = \int_0^{\infty} e^{-\sigma x} \lambda(x)\, dx.$$

Développons l'exponentielle sous le signe somme, et intégrons terme à terme, en désignant par ϖ^i le i^e moment de la fonction de survie; nous aurons :

$$(90)\qquad \frac{1}{n} = \varpi_0 + \frac{\varpi_1}{1\,!}\sigma + \dots + \frac{\varpi_n}{n\,!}\sigma^n + \cdots$$

D'autre part, la relation (71) donne, en tenant compte de (75), (83), (84) et (87) :

$$\frac{1}{m} = -\frac{\int_0^{\infty} e^{-\sigma x} \lambda(x)\, dx}{\int_0^{\infty} e^{-\sigma x} \lambda'(x)\, dx}.$$

En désignant par ϖ'_i le i^e moment de la fonction $\lambda'(x)$, cette relation devient :

$$(91)\ \frac{1}{m} = -\frac{\varpi_0 + \varpi_1\sigma + \cdots}{\varpi'_0 + \varpi'_1\sigma + \cdots} = \pi_0 + \frac{\pi_1}{1\,!}\sigma + \dots + \frac{\pi_n}{n\,!}\sigma^n + \cdots,$$

où les π peuvent se calculer facilement.

1. A. J. Lotka, *Relation entre les taux de natalité et de mortalité* (*Journ. of the Am. St. Ass.*, 1918, p. 121).

Remarquons maintenant que d'après (88) nous avons :

$$\varpi_0 = L.$$

D'autre part comme :

$$\varpi'_0 = \int_0^\infty \frac{\partial \lambda}{\partial x}\, dx = -1,$$

on a aussi :

$$\pi_0 = -\frac{\varpi_0}{\varpi'_0} = L.$$

Par conséquent, en négligeant les puissances de σ de degré supérieur à l'unité dans (90) et (91), nous avons :

$$\frac{1}{n} = L + \varpi_1 \sigma, \qquad \frac{1}{m} = L + \pi_1 \sigma.$$

L'élimination de σ entre ces deux relations donne enfin :

$$\frac{\pi_1}{\pi_1 - \varpi_1} \cdot \frac{1}{n} - \frac{\varpi_1}{\pi_1 - \varpi_1} \cdot \frac{1}{m} = L. \tag{92}$$

Donc, *au voisinage de $\sigma = 0$, il existe une relation hyperbolique simple entre les taux des naissances et des décès et la duré moyenne de la vie.* Il est à remarquer que la somme des coefficients de $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{m}$ est égale à l'unité.

37. Populations stationnaires. — L'étude de ces populations n'offre peut-être pas d'intérêt démographique immédiat, car la population humaine n'est pas encore au bout de son évolution numérique. Mais cette étude est intéressante en elle-même, surtout dans le cas particulier envisagé par Lotka.

Soit donc une population de nombre constant :

$$P(t) = P = C^{te}, \tag{93}$$

soumise à une fonction de mortalité $\mu(x, t)$ a priori quelconque.

Le nombre total des décès sera d'après (1) et (71) :

$$M(t) = \int_0^\infty N(t-x)\,\lambda(x,\,t-x)\,\mu(x,\,t)\,dx.$$

D'autre part la relation évidente :

$$\frac{dP}{dt} = N(t) - M(t),$$

donne d'après (93) :

$$N(t) = M(t).$$

On aura par conséquent :

$$N(t) = \int_0^\infty N(t-x)\,\lambda(x,\,t-x)\,\mu(x,\,t)\,dx.$$

La comparaison avec la forme générale de l'équation (23) donne :

$$\mu(x,\,t) = \varphi(x,\,t). \tag{94}$$

Donc *dans une population stationnaire les fonctions de mortalité et de fécondité sont égales* :

Le nombre total des naissances s'écrira encore d'après (69) :

$$N(t) = -\int_0^\infty N(t-x)\,\lambda(x,\,t-x)\,\frac{\partial}{\partial x}\,L\left[\lambda(x,\,t-x)\right]dx. \tag{95}$$

La résolution de cette équation, dans le cas le plus général, offre des difficultés sérieuses, et n'a par ailleurs aucun intérêt pratique. Mais si on suppose la mortalité indépendante du temps, on retombe sur les résultats obtenus précédemment, sauf que la fonction de fécondité est remplacée par la fonction de mortalité.

Dans ce cas, l'équation (24) s'écrit tout simplement :

$$Y(\sigma) = \int_0^\infty e^{-\sigma x}\,\lambda'(x)\,dx = 1.$$

L'unique racine réelle est égale à zéro, qui est bien le taux d'accroissement d'une population stationnaire.

Il existe un cas particulier remarquable envisagé par Lotka[1]. C'est quand le nombre des naissances dans l'intervalle $(t, t+1)$ ne dépend pas de t. On peut voir en effet que la solution :

$$\text{(96)} \qquad N(t) = N = C^{te},$$

satisfait à l'équation (95), qui se réduit alors à l'égalité évidente :

$$\int_0^\infty d\lambda(x, t-x) = -1.$$

Le nombre des décès sera évidemment constant et égal à N. Les taux des naissances et des décès s'obtiennent facilement; ils sont naturellement égaux et constants.

Mais alors, la relation (84) donnera, en tenant compte de (79) :

$$\text{(97)} \qquad n = \frac{1}{\int_0^\infty \lambda(x, t)\, dx} = \frac{1}{L(t)}.$$

Quand dans une population stationnaire, le nombre annuel des naissances est constant, le taux de natalité est égal à l'inverse de la durée moyenne de la vie d'un individu.

38. Cas général. — Nous allons maintenant reprendre l'équation (63), en tenant compte cette fois du terme $\beta(x, t)$, dans l'expression de la fonction de mortalité. Pour cela nous devons chercher l'intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles :

$$\text{(98)} \qquad \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial t} = -\left[\xi'(x) + \theta'(t)\right] - \beta(x, t).$$

1. A. J. Lotka, *Etude du mode d'accroissement des agregats matériels* (*Journ. of the Am. St. Ass.*, 1907, p. 199).

Cette équation étant linéaire, son intégrale générale peut s'obtenir en ajoutant à l'intégrale générale de l'expression entre crochets, une intégrale particulière relative au terme $\beta\,(x,\,t)$.

L'intégrale générale de l'expression entre crochets est fournie par la relation qui donne $q\,(x,t)$. Nous devons donc chercher une intégrale particulière de l'équation aux dérivées partielles :

$$(99)\quad \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} = -\frac{\zeta\,(x) + [\Lambda\,\zeta\,(x) - \Gamma\,\varpi\,(x)]\,e^{\omega\,(t-t_0)}}{\left[1 + \Lambda\,e^{\omega\,(t-t_0)}\right]\left\{1 + \left[\Lambda + \varpi\,(x)\right]e^{\omega\,(t-t_0)}\right\}},$$

correspondant aux valeurs nulles des constantes d'intégration, et l'ajouter au second membre de la relation précédemment trouvée, pour avoir l'intégrale générale de (98).

On voit facilement qu'en posant :

$$\left\{\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{1+\Lambda}, \\ a_p &= \sum_{i=1}^{\infty} i^p\,(-\Lambda)^i; \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} b_0\,(x) &= \frac{1}{1+[\Lambda+\varpi\,(x)]}, \\ b_p\,(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} i^p\left[-\Lambda-\varpi\,(x)\right]^i; \end{aligned}\right.$$

on a :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{1+\Lambda\,e^{\omega(t-t_0)}} &= \sum_{j=0}^{\infty} a_j\,\frac{\omega^j\,(t-t_0)^j}{j\,!}, \\ \frac{1}{1+[\Lambda+\varpi\,(x)]\,e^{\omega\,(t-t_0)}} &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k\,(x)\,\frac{\omega^k\,(t-t_0)^k}{k\,!}. \end{aligned}\right.$$

Si maintenant on pose :

$$c_l\,(x) = \omega^l\left[a+b\,(x)\right]^{(l)},$$

où $l = j + k$, et où la puissance symbolique a trait aux indices de a et de $b(x)$, il est facile de voir que l'on a :

$$\frac{1}{\left[1 + \Lambda e^{\omega(t-t_0)}\right] \left\{ 1 + \left[\Lambda + \varpi(x)\right] e^{\omega(t-t_0)} \right\}} = \sum_{l=0}^{\infty} c_l(x) \frac{(t-t_0)^l}{l\,!}.$$

Si l'on pose encore :

$$d_0(x) = \zeta(x) + \left[\Lambda \zeta(x) - \Gamma \varpi(x)\right], \qquad d_p(x) = \omega^p \left[\Lambda \zeta(x) - \Gamma \varpi(x)\right];$$

on a pour le numérateur de la fonction $\beta(x, t)$:

$$\zeta(x) + \left[\Lambda \zeta(x) - \Gamma \varpi(x)\right] e^{\omega(t-t_0)} = \sum_{h=0}^{\infty} d_h(x) \frac{(t-t_0)^h}{h\,!}.$$

Si nous posons enfin :

$$f_n(x) = \left[c(x) + d(x)\right]^{(n)}$$

la puissance symbolique ayant la même signification que plus haut, nous aurons en fin de compte :

$$(100) \qquad \beta(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \frac{(t-t_0)^n}{n\,!},$$

L'équation (99) s'écrit alors :

$$(101) \qquad \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} = -\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \frac{(t-t_0)^n}{n\,!}.$$

Essayons pour $q(x, t)$ une série de la forme :

$$(102) \qquad \bar{q}(x, t) = -\sum_{m=1}^{\infty} g_m(x) \frac{(t-t_0)^m}{m\,!}.$$

En portant les dérivées partielles de cette fonction dans l'équation (101), et en identifiant les deux membres, nous aurons :

$$(103) \qquad g_{n+1}(x) + \frac{d}{dx}\, g_n(x) = f_n(x)\,; \qquad n = 1, 2, \ldots \infty.$$

Ce système se résout de proche en proche et fournit toutes les fonctions $g\,(x)$.

On a pu obtenir ainsi une solution de l'équation (99), et l'intégrale générale de l'équation (98) devient :

$$(104) \quad q\,(x, t) = q_0 + \sigma_0\,(t - x) - \xi\,(x) - \theta\,(t) - \sum_{m=1}^{\infty} g_m\,(x)\, \frac{(t - t_0)^m}{m\,!}\,.$$

Si l'on pose maintenant :

$$\mathrm{J}\,(x, t) = e^{-\sum\limits_{m=1}^{\infty} g_m\,(x)\, \frac{(t - t_0)^m}{m\,!}}\,,$$

la tranche d'âge x de la population à l'instant t sera donnée par :

$$(105) \qquad p(x, t) = p_0\, e^{\sigma_0\,(t-x)}\, e^{-\xi\,(x)} \left(\mathrm{V} + e^{-\omega t}\right)^{\Omega} \mathrm{J}\,(x, t).$$

Mais le système caractéristique de l'équation (99) :

$$(106) \quad \left\{ \begin{aligned} & x = x_0 + t \\ & \bar{q}\,(x, t) = -\int_0^t \beta\,(x_0 + u, u)\, du\,; \end{aligned} \right.$$

montre que la fonction $\bar{q}\,(x, t)$ est petite en même temps que $\beta\,(x, t)$. Alors on voit que dans le second membre de la relation (105), *le facteur correctif* $\mathrm{J}\,(x, t)$ *est voisin de l'unité.*

La population totale et le nombre total des naissances s'écriront :

$$(107) \quad \mathrm{P}\,(t) = p_0\, e^{\sigma_0 t} \left(\mathrm{V} + e^{-\omega t}\right)^{\Omega} \int_0^{\infty} \mathrm{J}\,(x, t)\, e^{-\sigma_0 x}\, e^{-\xi\,(x)}\, dx.$$

$$(108) \quad \mathrm{N}\,(t) = \mathrm{N}_0\, e^{\sigma_0 t} \left(\mathrm{V} + e^{-\omega t}\right)^{\Omega} \mathrm{J}\,(0, t)\,.$$

Le taux des naissances ne sera plus une constante :

$$(109)\qquad n(t) = \frac{N(t)}{P(t)} = \frac{e^{-\xi(0)}\, J(0,t)}{\int_0^\infty e^{-\sigma_0 x}\, e^{-\xi(x)}\, J(x,t)\, dx}.$$

Il en est de même de la fonction de structure :

$$(110)\qquad S(x,t) = \frac{e^{-\sigma_0 x}\, e^{-\xi(x)}\, J(x,t)}{\int_0^\infty e^{-\sigma_0 x}\, e^{-\xi(x)}\, J(x,t)\, dx}.$$

La détermination des autres fonctions démographiques de la population ne présente aucune difficulté. Il nous faut seulement remarquer que *dans le cas général, le taux des naissances et la fonction de structure (indépendants du temps dans le cas particulier où $\beta(x,t)$ est négligeable), dépendent effectivement du temps.*

CHAPITRE VI

STABILISATION SPONTANÉE DE LA STUCTURE D'UNE POPULATION

39. Structure stable. — Nous avons vu dans les pages précédentes que, si l'on suppose les fonctions de mortalité et de fécondité ainsi que le taux de masculinité des naissances indépendants du temps, *la structure de la population, fournie par la relation* (87), *était indépendante du temps.* D'autre part, nous avons remarqué qu'il en était de même, quand la mortalité pouvait se mettre sous la forme d'une fonction de l'âge, plus une fonction du temps.

Si on considère la mortalité sous sa forme la plus générale, cette structure n'est plus fixe quand le temps varie. Mais nous avons vu que quand le temps devient très grand, le deuxième et le troisième termes de l'expression de la mortalité tendent vers zéro. Cette fonction ne dépendra plus que de l'âge seul; et la fonction de structure aura encore une forme fixe, indépendante du temps, puisqu'on est ramené au cas précédent.

Il en résulte donc, d'une manière générale, que pour les

1. A. J. Lotka, *Stabilité de la distribution normale par âges* (*Proc. of the Nl, Acad. of Sc.*, 1922, p. 339).

grandes valeurs du temps, la structure d'une population, dont on suppose la fonction de fécondité et le taux de masculinité des naissances indépendants du temps, tend vers une limite fixe, fournie par la relation (87).

Dans le présent chapitre nous nous proposons de montrer, avec Lotka, par une méthode géométrique, que *cette limite existe* et *qu'elle est stable*. C'est-à-dire que dans une population satisfaisant aux conditions (4), (5) et (6), la structure tend vers une forme fixe; et que de plus si cette structure vient à être modifiée pour une raison ou pour une autre, la nouvelle structure tend toujours à reprendre *la même forme limite*. Cette méthode aura l'avantage de faire voir le mécanisme par lequel une limite stable, indépendante du temps et des perturbations éventuelles, existe.

Nous verrons ensuite que tous ces résultats subsistent encore si l'on suppose que la fonction de fécondité, variable avec le temps, reste pratiquement fixe dans les limites d'une génération (variation séculaire), et tend vers une limite indépendante du temps, quand t devient très grand.

40. Mortalité et fécondité indépendantes du temps. — Considérons donc dans une population de structure absolument quelconque, la tranche d'âge x à l'instant t, soit $p_t(x)$. Nous savons que l'on a :

$$p_t(x) = \mathrm{P}(t)\,\mathrm{S}(x, t).$$

Traçons maintenant la courbe Γ, obtenue en portant à l'instant t les âges en abscisse, et $p_t(x)$ en ordonnée. Donc la tranche dont l'âge est compris entre x et $x+1$ à l'instant t, est donnée par l'aire comprise entre les ordnnées x et $x+1$, la courbe Γ et l'axe des âges. Voir la figure (10).

Ceci étant, considérons deux populations ayant la même fonction de fécondité, le même taux de masculinité des naissances et la même fonction de mortalité que la population considérée. Donc le taux naturel d'accroissement σ sera le même pour les trois populations. Nous supposerons de plus, que la structure de ces deux populations est fixe, comme nous l'avons dit précédemment. Elles ne différeront donc l'une de l'autre que par leur nombre.

Choisissons alors les constantes p_1, et p_2, de sorte que les tranches d'âge x de ces populations à l'instant t étant représentées d'après (65) par :

$$(111) \qquad \left\{ \begin{aligned} p_{1t}(x) &= p_{10}\, e^{\sigma t}\, e^{-\sigma x}\, \lambda(x), \\ p_{2t}(x) &= p_{20}\, e^{\sigma t}\, e^{-\sigma x}\, \lambda(x); \end{aligned} \right.$$

leurs courbes représentatives C_1 et C_2 soient situées d'une manière respective entièrement au-dessous et au-dessus de Γ, et qu'elles aient avec elle un ou plusieurs points de contact.

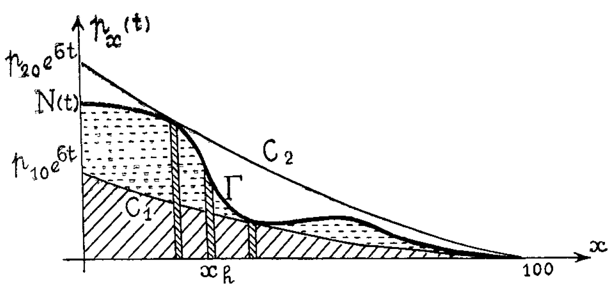


Fig. 10.

Comme $\lambda(x)$ et $S(x, t)$ s'annulent pour la même valeur de x (pratiquement vers cent ans), ces trois courbes viennent aboutir toutes au même point sur l'axe des âges. Il est facile de voir, d'après les équations de ces trois courbes, que les constantes p_{10} et p_{2}, satisfont à la double inégalité :

$$p_{10} < \mathrm{N}(t)\, e^{-\sigma t} < p_{20}.$$

Considérons ces mêmes populations à un instant ultérieur t'. Les nouvelles équations des courbes C'_1 et C'_2 sont :

$$(112) \qquad \left\{ \begin{aligned} p_{1t'}(x) &= p_{10}\, e^{\sigma(t'-t)}\, e^{-\sigma x}\, \lambda(x), \\ p_{2t'}(x) &= p_{20}\, e^{\sigma(t'-t)}\, e^{-\sigma x}\, \lambda(x). \end{aligned} \right.$$

Voyons quelle sera la nouvelle position Γ' de Γ, par rapport à ces nouvelles courbes. La population en question se compose d'une part de la partie hachurée située au-dessous de C_1, et de l'autre, de la partie positive en pointillé située entre C_1 et Γ. La mortalité étant la même pour les trois populations, aucun point de Γ' ne peut être au-dessous du point correspondant de C'_1. On voit de même qu'aucun point de Γ' ne peut être au-dessus du point correspondant de C'_2. Précisons :

Prenons à l'instant t, la tranche $p_t(x_h)$ de la population en question, satisfaisant à la double inégalité :

$$p_{1t}(x_h) < p_t(x_h) < p_{2t}(x_h),$$

c'est-à-dire une bande de l'aire délimitée par Γ, telle que son extrémité supérieure soit entre les deux courbes C_1 et C_2. Considérons d'autre part les bandes correspondantes des courbes C_1 et C_2.

Ces trois tranches de population sont soumises à la même fonction de mortalité. Donc, aussi longtemps qu'il y aura des survivants dans ces tranches, la double inégalité précédente subsistera.

De même, si l'on considère une bande de la courbe Γ qui est en contact avec l'une des courbes C_1 ou C_2, ce contact subsistera, jusqu'à l'extinction complète de cette bande.

En d'autres termes, on peut dire, que les points de Γ qui sont à l'instant t sur l'une des courbes C_1 ou C_2, seront encore à l'instant t' sur ces courbes; et que les points de Γ situés à l'instant t entre ces courbes, seront encore compris entre ces courbes à l'instant t'.

Ceci étant, désignons par x_i et x_j les âges limites de fécondité des femmes, et supposons qu'à l'instant t il y ait contact, entre Γ et la courbe C_1 par exemple, sur tout un intervalle d'âge inférieur à :

$$x_j - x_i = X.$$

Il y aura donc à l'intérieur de l'intervalle (x_i, x_j), une portion positive de l'aire de Γ, placée au-dessus de la courbe C_1. Ce qui revient à dire qu'il y a plus d'individus à l'âge de reproduction dans notre population que dans la population représentée par C_1. Par conséquent, la fonction de fécondité et le taux de masculinité des naissances étant les mêmes pour les deux populations, il y aura plus d'enfants des deux sexes dans notre population que dans la population représentée par C_1.

On verra de même, que si le contact entre Γ et C_2 a lieu sur une longueur inférieure à X, il y aura moins d'enfants des deux sexes dans notre population que dans celle qui est représentée par C_2.

Par conséquent, et c'est là le résultat important, *dès que la population dont on est parti se sera éteinte, il n'y aura plus* *de contact entre* Γ *et les nouvelles courbes* C_1 *et* C_2. Notre nouvelle courbe Γ' sera évidemment toujours à l'intérieur de l'aire délimitée par C_1' et C_2'. Mais elle sera séparée de ces courbes par une bande de largeur finie. Voir les figures (11).

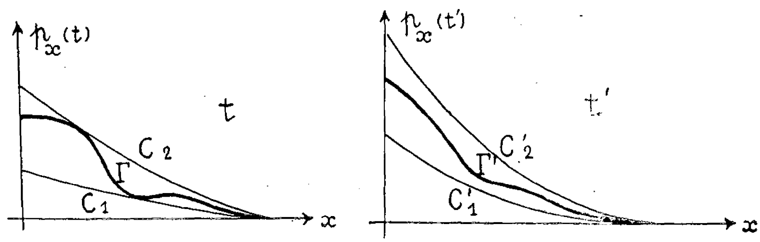


Fig. 11.

Nous pourrons maintenant choisir deux autres constantes p'_{10} et p'_{20}, et recommencer notre raisonnement. Il est évident que la différence entre les deux nouvelles valeurs de nos constantes sera inférieure à cette même différence pour la génération précédente. C'est-à-dire que les deux courbes C_1 et C_2 se sont rapprochées l'une de l'autre; la bande qu'elles délimitent s'est resserrée.

Nous voyons donc, que les aires situées entre Γ et chacune des courbes C_1 et C_2, deviennent de plus en plus petites, à mesure que les générations successives s'éteignent. Comme Γ ne peut tomber ni au-dessous de C_1 ni au-dessus de C_2, chacune de ces aires garde son signe et décroît constamment. Mais ces aires, représentant un certain nombre d'individus, ont toutes les deux une limite inférieure qui est nulle.

Il arrivera donc un moment T, *où les deux courbes* C_1 *et* C_2

viendront se confondre toutes les deux avec la courbe Γ; alors les équations de nos trois courbes confondues seront :

$$
(113) \quad \left\{
\begin{aligned}
p_{1T}(x) &= r_1 e^{\sigma(T-t)} e^{-\sigma x} \lambda(x), \\
p_\Gamma(x) &= P(T)\, \varphi(x, T), \\
p_{2T}(x) &= p_2 e^{\sigma(T-t)} e^{-\sigma x} \lambda(x);
\end{aligned}
\right.
$$

où l'on a :

$$p_1 = p_2 = p.$$

L'équation de Γ sera par conséquent de la forme :

$$p_T(x) = p\, e^{\sigma(T-t)} e^{-\sigma x} \lambda(x),$$

qui peut s'écrire encore :

$$(114) \qquad p_T(x) = P(T)\, n\, e^{-\sigma x} \lambda(x).$$

Il est alors évident que la fonction de structure :

$$S(x) = \frac{p_T(x)}{P(T)} = n\, \lambda(x)\, e^{-\sigma x},$$

qui a exactement la forme fournie par (87), ne dépendra plus du temps.

Par conséquent une structure limite existe.

Supposons maintenant que le contact entre Γ et l'une des courbes, C_1 par exemple, ait lieu sur toute une longueur

$$x_h\, x_k > x_i\, x_j = X.$$

Comme la portion de la population représentée par $(x_j\, x_k)$ n'a pas d'influence sur les générations futures, nous pouvons supposer que le contact n'a lieu que dans l'intervalle (x_h, x_j). Voir la figure (12). Posons :

$$x_h x_j = qX;$$

nous aurons :

$$x_h x_i = (q-1) X.$$

Quand la portion $(x_i\ x_j)$ de la population, viendra en entier à droite de x_j, comme elle n'influe plus sur les naissances futures, le contact utile entre Γ et C_1 n'aura lieu que sur une longueur égale à $(q - 1)$ X. Pour la génération sui-

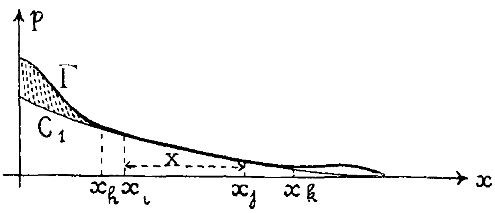


Fig. 12.

vante, ce contact utile n'aura lieu que sur une longueur égale à $(q - 2)$ X, et ainsi de suite. Donc au bout d'un temps relativement très court, il n'y aura plus de contact entre Γ et C_1, et cela par le jeu de l'aire positive située entre Γ et C_1, avant x_i.

Le raisonnement est exactement le même dans le cas où Γ aurait un contact avec C_2, courbe tangente supérieure, sur une longueur plus grande que la période X de fécondité des femmes.

Il y aurait encore à considérer le cas, où le contact entre Γ et l'une des courbes tangentes, a lieu depuis $x = 0$ jusqu'à $x > x_j$. La structure de la population est alors pratiquement fixée dès le début.

41. Perturbation dans la structure. — Nous avons vu que, sous nos trois hypothèses fondamentales, il a été possible de démontrer que la structure d'une population tend vers une limite. Il nous reste à faire voir que cette structure limite est stable, c'est-à-dire à montrer comment après un cataclysme (guerre, épidémie, mouvement migratoire, etc.), qui vient modifier la structure de la population, cette fonction tend encore vers *la même forme limite.*

Il faut supposer essentiellement que cette perturbation laisse vraies nos hypothèses, et qu'elle ne modifie ni les fonctions de mortalité et de fécondité, ni le taux de masculinité des naissances.

Alors, si on considère l'état de la population après cette perturbation, cet état peut être considéré comme un état initial, à partir duquel il est possible de refaire tout notre raisonnement. *La structure limite à laquelle on arriverait serait toujours celle que l'on vient de trouver.*

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Quand le temps devient très grand, la structure d'une population, qui satisfait aux conditions (4), (5) et (6), *tend vers une forme limite stable, quelle que soit la structure initiale, et quelles que soient, par conséquent, les perturbations qui peuvent être apportées dans l'évolution de cette population, pourvu que ces perturbations n'altèrent pas les hypothèses initiales.*

42. Effets des variations de la fécondité. — Dans tout ce que nous avons dit, nous avons supposé la fonction de fécondité indépendante du temps. Voyons quel sera l'effet des variations de cette fonction dans le temps.

Deux cas à distinguer :

A. Les variations de la fécondité sont telles, que la portion de la courbe Γ située par exemple au-dessus de C_1, reste toujours au-dessus de cette courbe. *Alors notre raisonnement subsiste.*

B. La fécondité varie de telle sorte qu'il y a des points de Γ, qui tombent au-dessous des points correspondants de C_1. Deux cas à considérer :

a) Ce déficit par rapport à la population représentée par C_1 pour quelques âges, peut être contrebalancé par l'excédent apporté par les autres âges. *Dans ce cas notre raisonnement continue à subsister.*

b) Ce déficit est plus grand que l'excédent apporté par les autres âges. *Alors notre raisonnement tombe en défaut.*

Le raisonnement est exactement le même, quand on tient compte de la courbe tangente supérieure.

Il reste encore à considérer le cas, où la fonction de fécondité tend vers une limite, quand le temps devient très grand. En se plaçant au moment où la fonction de fécondité est pratiquement fixée, on se trouve dans le cas de fécondité indépendante du temps, *et le raisonnement continue à valoir.*

CHAPITRE VII

POPULATIONS LOGISTIQUES

---

43. Préliminaires. — Nous avons étudié, au début de cet exposé, les conditions générales dont toute théorie mathématique du mouvement de la population doit tenir compte. Nous allons les résumer :

A. Le domaine territorial dans lequel on étudie une population, doit être considéré comme *limité*.

B. Les progrès de la civilisation augmentent le nombre limite que peut atteindre une population dans un domaine fermé. Mais, dans des conditions données, *une population ne peut pas croître indéfiniment*. Elle a une *limite supérieure, fonction de ces conditions*.

C. La limite inférieure d'une population, toujours positive, est *négligeable* devant le nombre de la population au moment où on l'étudie.

D. La civilisation humaine passant par des cycles (primitif, pastoral, agricole, industriel, etc.), il en est de même du chiffre de la population. Il passe par des *cycles successifs*, ayant chacun une limite inférieure au commencement et une limite supérieure à la fin.

E. Le *taux naturel d'accroissement* de la population dans chaque cycle, décroît d'abord lentement, puis plus vite, passe par un point d'inflexion et décroît de nouveau lentement pour venir enfin s'annuler.

La loi malthusienne non généralisée, en considérant une valeur fixe pour le taux naturel d'accroissement, *convient seulement au voisinage des limites*. Elle tombe évidemment en défaut si on considère la population vers le milieu d'un cycle. *La loi logistique d'accroissement de la population*, que nous exposerons dans ce chapitre, a l'avantage de convenir pendant tout un cycle de l'évolution.

44. Définition de la population logistique. — La loi que nous allons étudier dans ce chapitre, a été envisagée d'abord par Quételet, puis par Verhulst. Elle a été généralisée par Reed et Pearl. Elle satisfait aux conditions générales que nous venons d'exposer. Voici les hypothèses que nous faisons sur cette population[1] :

A. *Le taux de masculinité des naissances est indépendant du temps.*

B. *La fonction de mortalité est indépendante du temps.*

C. *La dérivée logarithmique du nombre total de la population (taux naturel d'accroissement) est une fonction linéaire du nombre de la population :*

$$\frac{1}{\mathrm{P}(t)}\frac{d\,\mathrm{P}}{dt} = \sigma(t) = \mathrm{K} - h\,\mathrm{P}(t). \tag{115}$$

Comme ce taux devra s'annuler quand le temps devient très grand, on voit que $\frac{\mathrm{K}}{h}$ doit représenter le nombre limite

1. R. Pearl, *Studies in Human Biology*, p. 567.

que la population peut atteindre, et que nous désignerons par P_∞. On a donc :

$$\frac{P'(t)}{P(t)} = h\left[P_\infty - P(t)\right].$$

Afin d'avoir une forme plus générale, Reed et Pearl ont proposé de prendre pour h non plus une constante positive, mais une fonction positive du temps :

$$\frac{P'(t)}{P(t)} = h(t)\left[P_\infty - P(t)\right]. \tag{116}$$

Nous appellerons donc population logistique, une population qui satisfait à ces trois conditions, et nous désignerons par loi logistique générale, la loi exprimée par la relation (116).

Nous voyons que, même dans ce cas, *nous ne sommes pas en présence de la forme la plus générale de la loi d'une population*, puisqu'il est évident que notre seconde hypothèse ne donne qu'une première approximation.

45. Nombre total de la population. — Le nombre total de la population, en fonction du temps, s'obtient immédiatement par l'intégration de l'équation différentielle (116). En désignant par k une constante positive et en posant :

$$H(t) = -P_\infty \int_0^t h(t)\,dt;$$

cette équation donne :

$$P(t) = \frac{P_\infty}{1 + k\,e^{H(t)}}. \tag{117}$$

Dans cette formule, la fonction $H(t)$, est a priori quelconque. Nous préciserons un peu plus loin la forme qu'il convient de lui donner.

Si nous prenons la fonction P (t) sous la forme (117), nos calculs ultérieurs seront trop lourds. Il a été remarqué d'autre part, qu'on peut, avec une approximation suffisante, considérer h comme une constante. Posons donc :

$$h \mathrm{P}\infty = \rho, \qquad k = e^{\rho t_0};$$

et portons l'origine des temps à l'instant t_0. Nous obtenons alors la forme réduite de la loi d'une population logistique, qui est :

$$\mathrm{P}(t) = \frac{\mathrm{P}\infty}{1 + e^{-\rho t}}, \tag{118}$$

et qui peut s'écrire encore :

$$\mathrm{P}(t) = \frac{\mathrm{P}\infty}{2}\left[1 + th\,\frac{\rho t}{2}\right]. \tag{119}$$

Il est évident que cette loi ne peut donner aucun renseignement sur la tranche d'âge x de la population, ni sur sa fonction de structure.

46. Nombre total des naissances[1]. — Prenons la relation (1) dans le cas de mortalité indépendante du temps :

$$p(x, t) = \mathrm{N}(t - x)\,\lambda(x).$$

Intégrons maintenant les deux membres de cette relation par rapport à x, en tenant compte de (118); nous aurons :

$$\int_0^{\infty} \mathrm{N}(t - x)\,\lambda(x)\,dx = \frac{\mathrm{P}\infty}{1 + e^{-\rho t}}. \tag{120}$$

1. A. J. Lotka, *Applications de l'Analyse aux phénomenes démographiques* (*Journ. de la Sté de St. de Paris*, nov. 1933); — *Structure d'une population croissante* (*Human Biology*, déc. 1931, p. 459).

Le nombre total des naissances est donné par la solution de cette équation qui s'écrit encore :

$$\int_0^{\infty} N(t-x)\,\lambda(x)\,dx = P\infty \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1}\, e^{j\rho t}.$$

Essayons une solution de la forme :

$$N(t) = P\infty \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1}\, g(j\rho)\, e^{j\rho t}. \tag{121}$$

Nous voyons facilement, après identification, que nous devons avoir :

$$g(j\rho) = \frac{1}{\int_0^{\infty} e^{-j\rho x}\,\lambda(x)\,dx}. \tag{122}$$

Cette relation exprime que la fonction $g(j\rho)$ est l'inverse de la fonction caractéristique de la loi de survie $\lambda(x)$.

Si maintenant nous posons :

$$\alpha_k = \frac{1}{k\,!}\left[\frac{d^k}{d\rho^k}\, g(\rho)\right]_{\rho=0},$$

nous voyons que $g(j\rho)$ peut s'écrire :

$$g(j\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k\, j^k\, \rho^k\,.$$

En portant cette expression dans (121) nous aurons :

$$N(t) = P\infty \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k\, \rho^k\, j^k\right] e^{j\rho t}\,.$$

Un calcul qui ne présente aucune difficulté essentielle, et que nous omettons, montre qu'à partir de cette relation on peut obtenir :

$$N(t) = P_{\infty} e^{\rho t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k \rho^k}{\left(1 + e^{\rho t}\right)^{k+1}} \sum_{h=1}^{k} \left[\left(-e^{\rho t}\right)^{h-1} \sum_{j=0}^{h-1} (-1)^j C_j^{k+1} (h-j)^k \right].$$

En tenant compte de la relation (119), il ne sera pas difficile de voir, que cette relation peut s'écrire simplement :

$$(123) \qquad N(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \frac{d^j P(t)}{d \rho^j}$$

C'est l'expression générale du nombre total des naissances.

Cette relation peut se mettre sous une forme plus simple par un changement d'origine du temps. Posons :

$$t' = t - \pi_1 ;$$

π_1 étant le premier semi-invariant de la fonction de survie. On peut montrer qu'après ce changement d'origine, l'expression du nombre total des naissances, dans une population logistique sera, en supprimant l'accent :

(124)

$$N(t) = \frac{1}{L_0} \left[P(t) - \frac{\pi_2}{2!} P''(t) + \frac{\pi_3}{3!} P'''(t) - \frac{\pi_4 - 3\pi_2^2}{4!} P^{IV}(t) + \frac{\pi_5 - 10\pi_2\pi_3}{5!} P^{V}(t) + \ldots \right]$$

Le premier terme de cette série fournit à lui seul la presque totalité des naissances. Il donne pour le taux de natalité *l'inverse de la durée moyenne de la vie*, résultat déjà trouvé.

Mais il est à remarquer que si ce premier terme donne le nombre total des naissances, avec une bonne approximation (comme nous le verrons à la fin de cet exposé), par contre, l'erreur qu'on commettrait sur le taux de natalité, en se contentant de ce seul terme, serait inadmissible.

47. Autre méthode. — On peut résoudre l'équation (210) par une méthode basée sur la propriété des semi-variants. Cette équation montre en effet que le h^e semi-invariant du nombre total des naissances s'obtient, en retranchant le h^e semi-invariant de la fonction de survie, du h^e semi-invariant du nombre total de la population.

Commençons donc par chercher les semi-invariants de cette dernière fonction. Considérons pour cela au lieu de P (t) la fonction :

$$P(t)\, e^{-\rho t} = \frac{P_\infty\, e^{-\rho t}}{1 + e^{-\rho t}}.$$

En désignant par m_0 le moment d'ordre zéro de cette fonction, sa première fonction caractéristique sera :

$$\Phi(u) = \frac{P_\infty}{m_0} \int_0^\infty \frac{e^{-\rho t}\, e^{-ut}}{1 + e^{-\rho t}}\, dt.$$

D'où en développant :

$$\Phi(u) = \frac{P_\infty}{m_0} \int_0^\infty \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j\, e^{-[u + (j+1)\rho] t}\, dt.$$

En intégrant terme à terme nous aurons :

$$\Phi(u) = \frac{P\infty}{m_0} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{u+(j+1)\rho} .$$

En posant :

$$K_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^k} \quad :$$

nous voyons que cette fonction caractéristique peut s'écrire encore :

$$\Phi(u) = \frac{P\infty}{m_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{K_{k+1}}{\rho^{k+1}} (-u)^k .$$

Donc le moment d'ordre k de notre fonction sera :

$$m_k = \frac{P\infty}{m_0} \cdot \frac{k!\,K_{k+1}}{\rho^{k+1}} .$$

Il sera donc possible de calculer tous les semi-invariants[1] de cette fonction d'après la relation :

$$\varpi_h = \frac{h!}{m_0^h} \sum_{k=1}^{h} (-1)^{(k-1)} \sum \frac{(k-1)!\, m_0^{h-k}}{\prod_{i=1}^{h} a_i!} \prod_{j=1}^{h} \left(\frac{m_j}{j!}\right)^{a_j} ,$$

1. Frisch Ragnar, *Sur les semi-invariants et moments employés dans l'étude des distributions statistiques.*

où la seconde sommation s'étend aux valeurs entières non négatives des a_i, telles que :

$$\Sigma\, a_i = k, \qquad\qquad \Sigma\, i\, a_i = h.$$

Désignons d'autre part ε_h le h^e semi-invariant de la fonction $\mathrm{N}(t)\, e^{-\rho t}$; nous aurons :

$$\varepsilon_h = \varpi_h - \pi_h;$$

d'où, pour le nombre total des naissances :

$$\text{(125)} \qquad \mathrm{N}(t) = \frac{n_0\, e^{\rho t}}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{\sum\limits_{h=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_h u^h}{h\,!}}\, e^{-tu}\, du,$$

n_0 désignant le moment d'ordre zéro de cette fonction.

On peut développer la quantité sous le signe somme et l'intégrer terme à terme. Ce calcul n'offre aucune difficulté essentielle et nous l'omettons.

48. Décroissance de la fonction de fécondité[1]. Nous avons supposé, avec la relation (115), que le taux d'accroissement de la population allait toujours en décroissant. Comme d'ailleurs la mortalité est supposée constante dans le temps, ce fait correspond à une décroissance de la fécondité.

Supposons donc que quand le temps varie, la courbe représentative des variations de la fécondité avec l'âge, pour une génération quelconque, garde toujours sa forme, mais qu'elle

1. A. J. Lotka, *Structure d'une population croissante* (*Human Biology*, déc. 1931).

change seulement d'amplitude d'une génération à l'autre. Si nous partons de l'instant T, en désignant par $f(t)$ une fonction du temps, qu'il faut déterminer, notre hypothèse conduit à la relation :

$$\varphi(x, t) = f(t)\,\varphi(x, \mathrm{T}). \tag{126}$$

La relation (23) s'écrit alors :

$$\mathrm{N}(t) = f(t)\int_0^{\infty} \mathrm{N}(t-x)\,\lambda(x)\,\varphi(x, \mathrm{T})\,dx. \tag{127}$$

Dans cette relation tout est connu sauf $f(t)$. Donc si l'on se donne la fonction de fécondité à l'instant T, il est possible, sous notre condition, de l'avoir pour tout autre instant.

49. Formes de la courbe logistique. — Reprenons la courbe des variations de la population, sous sa forme générale fournie par (117), et supposons que la fonction H (t) soit développable en série. Il est évident qu'à cause de la continuité de la courbe, la constante k est positive. Donc le nombre total de la population à l'instant t sera fourni par :

$$\mathrm{P}(t) = \frac{\mathrm{P}\infty}{1 + e^{\rho_0 + \rho_1 t + \rho_2 t^2 + \rho_3 t^3 + \cdots}}. \tag{128}$$

Les maxima et minima sont donnés d'après la relation (116) par les racines de l'équation :

$$h(t) = 0. \tag{129}$$

D'autre part comme :

$$\mathrm{P}(-\infty) = 0, \qquad \mathrm{P}(+\infty) = \mathrm{P}\infty,$$

l'axe du temps et l'horizontale d'ordonnée P_∞ constituent les asymptotes de notre courbe, qui sera contenue en entier dans la bande déterminée par ces horizontales.

Pour avoir les points d'inflexion de cette courbe, il faut annuler la dérivée seconde de P (t). On a facilement :

$$\frac{d^2 P}{dt^2} = \left[\frac{H'(t)\,P(t)}{P\infty}\right]^2 \left[P\infty - P(t)\right] \left\{ \frac{P\infty}{P(t)} \left[1 - \frac{H''(t)}{\{H'(t)\}^2}\right] - 2 \right\}.$$

On voit que le second membre ne s'annule, pour les valeurs finies de t, que quand le dernier facteur est nul.

Les points d'inflexion seront les points d'intersection de la courbe .

$$Q(t) = \frac{P\infty}{2}\left[1 - \frac{H''(t)}{\{H'(t)\}^2}\right], \tag{130}$$

avec la courbe logistique.

Supposons maintenant que H (t) soit un polynome de degré n. Son terme de plus haute puissance sera $\rho_n t^n$. Si H (t) n'est pas un polynôme, arrêtons-nous dans son développement au terme $\rho_n t^n$. Il y a quatre cas à considérer suivant la parité de n et le signe de ρ_n. Ces cas sont résumés dans le tableau ci-dessous :

	ρ_n	$P(-\infty)$	$P(+\infty)$
$n = 2m$	> 0	0	0
	< 0	P_∞	P_∞
$n = 2m+1$	> 0	P_∞	0
	< 0	0	P_∞

et représentés par les figures (13).

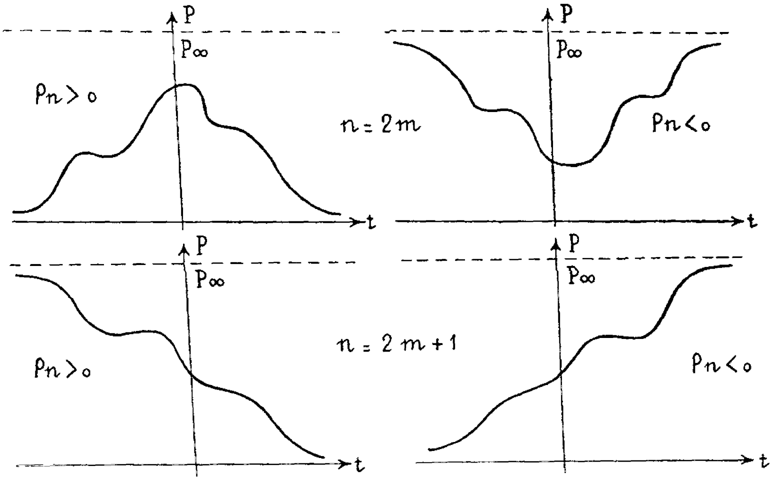


Fig. 13

La seule forme convenable de la courbe est la dernière. Nous devons donc, dans le développement de H (t), nous arrêter à un terme de degré pair; et le coefficient de ce terme doit être nécessairement négatif. C'est ce que nous avons fait par l'emploi de la forme (118).

On peut, dans le développement de H (t), prendre un nombre quelconque de termes. Pratiquement il suffit de s'arrêter au terme du troisième degré en t. La forme que nous choisirons pour notre courbe sera donc :

$$\text{(131)} \qquad P(t) = \frac{P\infty}{1 + e^{\rho_0 + \rho_1 t + \rho_2 t^2 + \rho_3 t^3}}.$$

La courbe représentative de cette loi peut avoir des formes diverses. La plus intéressante, c'est-à-dire celle qui convient le mieux aux populations humaines, est celle qui n'a *ni maximum ni minimum.* et qui ne possède qu'*un seul point d'inflexion.* Pour la première condition on doit avoir .

$$\rho_2^2 < 3\,\rho_1\,\rho_3 ;$$

et comme ρ_3 est négatif, il en sera de même de ρ_1.

L'assymétrie de cette courbe, par rapport au point d'inflexion, qui d'ailleurs n'est pas placé à égale distance des asymptotes, lui donne un caractère plus approprié aux besoins d'un ajustement effectif.

Théoriquement, on peut prendre cette courbe avec autant de constantes arbitraires que l'on veut, afin de donner tous les cycles de l'évolution d'une population. Pratiquement, il vaut mieux étudier chaque cycle séparément. On prendra alors pour P (t), au commencement de chaque cycle, le chiffre atteint par la population dans le cycle précédent. La relation (131) s'écrit alors pour un cycle :

$$(132) \qquad P(t) = H + \frac{P_\infty}{1 + e^{\rho_0 + \rho_1 t + \rho_2 t^2 + \rho_3 t^3}} .$$

La forme générale de la courbe sera donnée par la figure (14).

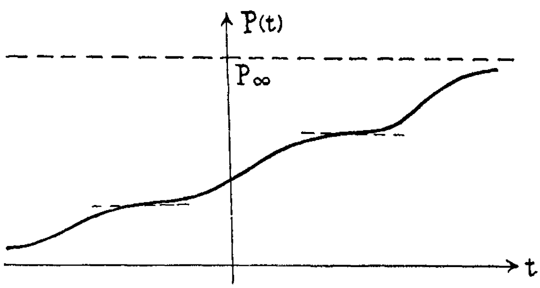


Fig 14

Généralement, dans deux cycles consécutifs, l'asymptote supérieure du premier est au-dessus de l'asymptote inférieure du second. Cela tient, comme nous l'avons dit, au fait que les différents cycles de civilisation commencent, quand le cycle qui les précède immédiatement, n'est pas encore au bout de son évolution.

Si, à l'intérieur d'un cycle, la loi de la population est symétrique par rapport au point d'inflexion, il est préférable de supprimer les termes du deuxième et du troisième degrés en t.

50. Méthode d'ajustement de Pearl et Reed. — Prenons la courbe logistique sous sa forme fournie par (131), et supposons que l'on dispose des valeurs $(P_0, P_1, P_2, P_3, P_4)$ de $P(t)$, pour les cinq ordonnées $(0, T, 2T, 3T, 4T)$. Cette relation donne :

$$\left\{\begin{array}{l} \rho_0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \dfrac{P\infty - P_0}{P_0} = 0, \\ \rho_0 + \rho_1 T + \rho_2 T^2 + \rho_3 T^3 - L\,\dfrac{P\infty - P_1}{P_1} = 0, \\ \rho_0 + 2\rho_1 T + 4\rho_2 T^2 + 8\rho_3 T^3 - L\,\dfrac{P\infty - P_2}{P_2} = 0, \\ \rho_0 + 3\rho_1 T + 9\rho_2 T^2 + 27\rho_3 T^3 - L\,\dfrac{P\infty - P_3}{P_3} = 0, \\ \rho_0 + 4\rho_1 T + 16\rho_2 T^2 + 64\rho_3 T^3 - L\,\dfrac{P\infty - P_4}{P_4} = 0. \end{array}\right.$$

L'élimination des coefficients $(\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3)$ dans ce système conduit à l'équation :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{L}\,\dfrac{P\infty - P_0}{P_0} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \mathrm{L}\,\dfrac{P\infty - P_1}{P_1} \\ 1 & 2 & 4 & 8 & \mathrm{L}\,\dfrac{P\infty - P_2}{P_2} \\ 1 & 3 & 9 & 27 & \mathrm{L}\,\dfrac{P\infty - P_3}{P_3} \\ 1 & 4 & 16 & 64 & \mathrm{L}\,\dfrac{P\infty - P_4}{P_4} \end{vmatrix} = 0,$$

qui donne pour la détermination de $P\infty$ l'équation de huitième degré :

$$(133) \qquad P_1^4\, P_3^4\, (P\infty - P_0)\, (P\infty - P_4)\, (P\infty - P_2)^6 \\ - P_0\, P_4\, P_2^6\, (P\infty - P_1)^4\, (P\infty - P_3)^4 = 0$$

Posons d'autre part :

$$\pi_i = \mathrm{L}\, \frac{P_0\,(P\infty - P_i)}{P_i\,(P\infty - P_0)}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Les coefficients $(\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3)$ seront donnés par :

$$(134) \quad \left\{ \begin{aligned} \rho_0 &= \mathrm{L}\, \frac{P\infty - P_0}{P_0}, \\ \rho_1 &= \frac{18\,\pi_1 - 9\,\pi_2 + 2\,\pi_3}{6\,T}, \\ \rho_2 &= \frac{-5\,\pi_1 + 4\,\pi_2 - \pi_3}{2\,T^2}, \\ \rho_3 &= \frac{2\,\pi_1 - 3\,\pi_2 + \pi_3}{6\,T^3}. \end{aligned} \right.$$

En particulier, si l'on s'arrête au terme du premier degré en t, ces relations se simplifient, et l'on a immédiatement :

$$(135) \quad \begin{cases} P_\infty = \dfrac{2\,P_0\,P_1\,P_2 - P_1\,(P_0 + P_2)}{P_0\,P_2 - P_1^2} \\[2ex] \rho_0 = L\,\dfrac{P_\infty - P_0}{P_0}, \\[2ex] \rho_1 = \dfrac{1}{T}\,L\,\dfrac{P_0\,(P_\infty - P_1)}{P_1\,(P_\infty - P_0)}. \end{cases}$$

Ce sont des formules analogues à ces dernières, qui nous permettent l'ajustement du nombre total des naissances, à la fin de cet exposé.

51. Cas d'un cycle[1]. — Considérons la relation (132) sous sa forme réduite, c'est-à-dire en nous arrêtant au terme du premier degré en t, dans le développement de $H(t)$:

$$(136) \qquad P(t) = \Pi + \frac{P_\infty}{1 + k\,e^{-\rho t}}.$$

Il s'agit de déterminer Π, P_∞, k et ρ. Posons :

$$(137) \qquad Q(t) = P(t) - \Pi = \frac{P_\infty}{1 + k\,e^{-\rho t}}.$$

et supposons que l'on dispose des valeurs $(P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3)$ de $P(t)$ pour les instants $(0,\ T,\ 2\,T,\ 3\,T)$. Posons d'autre part :

$$\pi_i = \frac{1}{Q_{i-1}} - \frac{1}{Q_i}\,; \qquad i = 1,\ 2,\ 3.$$

Nous aurons facilement :

$$\frac{\pi_1}{\pi_2} = \frac{\pi_2}{\pi_3} = e^{\rho T}$$

1. F. Krummreich, *Contribution à l'étude du mouvement de la population* p. 21.

ce qui donne :

$$\frac{(Q_1 - Q_0)(Q_3 - Q_2)}{Q_0\, Q_3} = \frac{(Q_2 - Q_1)^2}{Q_1\, Q_2}.$$

Alors, pour la détermination de Π, on aura l'équation de second degré :

$$(138) \quad (P_1 - P_0)(P_3 - P_2)(P_1 - \Pi)(P_2 - \Pi) = (P_2 - P_1)^2 (P_0 - \Pi)(P_3 - \Pi).$$

Une fois Π déterminé, la forme (136) peut être ajustée par les relations (135).

Il existe d'autres procédés d'ajustement, que nous n'exposerons pas, parce que cela sortirait du cadre plutôt théorique que nous nous sommes imposé. Indiquons toutefois le fait que, quand on a un grand nombre d'ordonnées, on aura une meilleure approximation, en prenant quelques groupes de trois ordonnées, et en faisant le calcul que nous avons indiqué, pour chaque groupe. On prendra alors pour les valeurs des constantes, la moyenne des valeurs obtenues pour chacune d'elles.

52. Erreurs probables[1]. — Prenons la courbe logistique sous la forme :

$$P(t) = \frac{a}{b + e^{-ct}},$$

où l'on a posé pour simplifier :

$$a = P\infty\, e^{-\rho_0}, \qquad b = e^{-\rho_0}, \qquad c = \rho_1;$$

1. H. Schultz, *The standard error of a forecast from a curve* (*Journ. of the Am. St. Ass.*, juin 1930).

les vraies valeurs de ces quantités étant a_0, b_0 et c_0. Supposons que l'on dispose de n points de la courbe. Développons P (t) pour le j^e point, en négligeant les puissances d'ordre supérieur à l'unité des erreurs :

$$\Delta a = a - a_0, \qquad \Delta b = b - b_0, \qquad \Delta c = c - c_0.$$

Nous aurons :

$$\begin{aligned}\Delta P_j &= P_j(t) - \frac{a_0}{b_0 + e^{-c_0 t_j}} \\ &= \frac{\Delta a}{b_0 + e^{-c_0 t_j}} - \frac{a_0 \Delta b}{\left(b_0 + e^{-c_0 t_j}\right)^2} + \frac{a_0 t_j e^{-c_0 t_j} \Delta c}{\left(b_0 + e^{-c_0 t_j}\right)^2} \\ &= \alpha_j \Delta a + \beta_j \Delta b + \gamma_j \Delta c. \qquad\qquad j = 1, 2, \ldots, n.\end{aligned}$$

La détermination des erreurs Δa, Δb, et Δc se fait en rendant minimum la somme :

$$\sum_{j=1}^{n} (S_j)^2 = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j \Delta a + \beta_j \Delta b + \gamma_j \Delta c - \Delta P_j)^2.$$

Si nous posons :

$$(yz) = \sum_{j=1}^{n} y_j z_j,$$

nous aurons sans peine le système :

$$(139) \quad \left\{\begin{aligned} (\alpha\alpha) \Delta a + (\alpha\beta) \Delta b + (\alpha\gamma) \Delta c - (\alpha \Delta P) &= 0, \\ (\beta\alpha) \Delta a + (\beta\beta) \Delta b + (\beta\gamma) \Delta c - (\beta \Delta P) &= 0, \\ (\gamma\alpha) \Delta a + (\gamma\beta) \Delta b + (\gamma\gamma) \Delta c - (\gamma \Delta P) &= 0.\end{aligned}\right.$$

Ce système permet le calcul des erreurs probables Δa, Δb, et Δc quand on connaît les ΔP, qui sont les écarts entre les valeurs observées de P(t) et celles qui sont fournies par la courbe ajustée.

On peut déterminer l'erreur type sur la fonction logistique, ainsi que les poids des différentes erreurs Δa, Δb et Δc, par une méthode indiquée par Schultz, et que nous ne développerons pas.

53. — Généralisation. — Dans toute notre étude de la population logistique, nous n'avons tenu aucun compte des variations de la fonction de mortalité dans le temps. Si l'on veut tenir compte de ces variations, c'est-à-dire si l'on emploie la forme générale de la fonction de mortalité, fournie par (50) ou (52), dans la fonction de survie donnée par (69), *la résolution de l'équaiton devient très lourde*, puisqu'elle prend la forme :

$$\mathrm{P}(t) = \int_0^\infty \mathrm{N}(t-x) \left[e^{-\int_0^x \left\{ \xi'(x) + \frac{\eta'(x) - \xi'(x)}{1 + k(x)\,[\eta'(x) - \xi'(x)]\, e^{\omega(t-t_0)}} \right\} dx} \right] dx.$$

Nous ne croyons pas qu'il soit possible de tirer quelque chose d'intéressant de cette équation, pour la détermination du nombre total des naissances. A plus forte raison, la détermination des autres fonctions démographiques, qui déjà, dans le cas particulier où la mortalité restait invariable avec le temps, demandait quelque effort, devient particulièrement difficile dans ce cas.

Mais nous verrons plus loin que déjà une *natalité logistique* simple, de la forme réduite, n'est pas trop en désaccord avec les données fournies par les recensements. Les erreurs qui en résultent sont de l'ordre de celles que l'on rencontre dans toute science basée sur l'expérience.

CONCLUSION

Nous venons d'exposer dans ce travail, les grandes lignes des résultats généraux obtenus jusqu'à ce jour, dans le domaine de la démographie mathématique. Nous avons abrégé et mis au point quelques calculs, éclairci divers points, approfondi certains détails, précisé quelques hypothèses et enfin généralisé des résultats.

L'introduction de la *surface aux mortalités*, son ajustement et les applications de ses sections, qui sont à notre connaissance des résultats nouveaux, pourraient donner aux démographes un instrument de travail et de recherche d'une certaine utilité.

D'autre part, l'équation aux dérivées partielles (63), qui n'a encore été employée dans aucun ouvrage de démographie, permet d'aborder le problème de la *résolution démographique d'une population*, d'une façon systématique et féconde.

Les résultats généraux auxquels nous sommes arrivés peuvent se résumer ainsi :

Si le champ d'accroissement d'une population est illimité, cette population (ainsi que le nombre des naissances et des décès qui y sont relatifs) varie en *progression géométrique*, si la mortalité est supposée indépendante du temps. Si on fait seulement l'hypothèse que la mortalité a une limite, c'est pour les grandes valeurs du temps qu'on aura la variation en progression géométrique. Dans les deux cas, quand le temps est grand, *la fonction de structure de la population est fixe*, quelle que soit la structure dont on est parti.

Il faut d'autre part supposer *la fonction de fécondité indépendante du temps*.

L'accroissement des populations humaines, qui se fait sur des aires limitées, est voisin de *la loi logistique*. Il peut être représenté par des arcs, finis ou non, de tangentes hyperboliques généralisées. Il en est très sensiblement de même du nombre total des naissances. Mais ici *la fonction de fécondité est variable avec le temps*, constamment décroissante, avec une limite inférieure, évidemment positive.

Dans le cas des populations logistiques, si l'on tient compte des variations de la mortalité avec le temps, *le problème se complique singulièrement*. Il nous semble cependant que les résultats généraux auxquels on arriverait, ne seraient pas très différents de ceux qu'on a trouvés sous l'hypothèse de la constance de la fonction de mortalité dans le temps.

Nous sommes loin de prétendre avoir épuisé la théorie mathématique de la démographie. Ce problème contient encore *trop de côtés inconnus ou mal définis*, pour pouvoir être résolu complètement et rigoureusement.

Ce sera seulement avec des données de recensements s'étendant sur de très grandes périodes, et avec un plus grand progrès des autres sciences (médecine, biologie, embryologie biométrie, etc...) que *la démographie mathématique peut enfin arriver à donner tout ce qu'on peut en espérer.*

ANNEXE

TABLES DE MORTALITE DE LA SUEDE

S. M.[1]

Années / Ages	1816 1840	1841 1850	1851 1860	1861 1870	1871 1880	1881 1890	1891 1900	1901 1910	1911 1915	1916 1920
0-1	179,7	165,25	157,40	149,20	140,60	119,98	110,83	92,55	78,79	73,95
1-2	47,9	38,60	45,80	49,00	40,70	35,85	29,60	22,77	17,61	17,04
2-3	28,3	26,95	30,35	31,90	26,00	22,10	16,49	10,90	7,82	8,61
3-4	18,2	18,50	24,90	23,60	19,60	16,98	12,56	7,87	5,68	6,83
4-5	12,3	13,45	19,15	17,80	15,30	13,49	9,88	6,10	4,51	5,70
5-6	10,9	11,25	15,55	13,50	12,20	10,80	7,89	5,02	3,72	4,70
6-7	8,9	9,45	12,60	10,80	9,50	8,84	6,54	4,35	3,63	4,24
7-8	7,6	8,05	10,20	8,50	8,30	7,40	5,63	4,01	3,23	3,95
8-9	6,6	6,65	9,05	7,20	7,00	6,26	4,98	3,54	2,76	3,42
9-10	5,6	5,45	7,85	6,00	5,80	5,37	4,31	3,23	2,72	3,07
10-11	5,1	4,65	6,40	5,30	5,20	4,71	3,94	3,22	2,62	3,14
11-12	4,7	4,40	5,75	4,80	4,60	4,22	3,43	2,96	2,46	2,99
12-13	4,4	4,40	5,20	4,10	3,80	3,78	3,38	2,80	2,35	2,80
13-14	4,4	4,50	5,70	4,00	3,60	3,43	3,23	2,76	2,41	2,90
14-15	4,8	4,55	5,45	3,80	3,40	3,31	3,17	2,85	2,66	3,23
15-16	4,9	4,60	4,90	4,10	3,70	3,50	3,38	3,22	3,10	3,66
16-17	5,1	4,70	5,20	4,30	4,10	3,95	4,01	3,88	3,80	3,68
17-18	5,6	4,80	6,05	4,90	4,60	4,51	4,81	4,12	4,61	5,50
18-19	5,7	4,90	5,90	5,20	5,10	5,07	5,16	5,33	5,41	7,21
19-20	6,5	5,00	6,20	5,80	5,70	5,59	5,98	5,94	5,83	7,54
20-21	6,7	6,05	7,10	6,40	6,30	6,09	6,48	6,41	6,62	9,40
21-22	7,3	6,75	7,25	6,80	6,80	6,41	6,76	6,53	6,93	9,52

1. Voir le graphique I.

TABLES DE MORTALITE DE LA SUEDE

S. M. (*suite*)

Années / Ages	1816 1840	1841 1850	1851 1860	1861 1870	1871 1880	1881 1890	1891 1900	1901 1910	1911 1915	1916 1920
22-23	7,9	7,00	8,10	7,00	7,00	6,64	6,84	6,46	6,65	9,23
23-24	8,1	7,25	8,15	7,00	7,20	6,72	6,72	6,49	6,37	9,13
24-25	8,6	7,65	7,80	7,20	7,30	6,78	6,65	6,39	6,27	9,24
25-26	8,8	7,70	8,05	7,30	7,40	6,74	6,62	6,28	6,09	9,46
26-27	9,4	7,85	8,80	7,20	7,50	6,65	6,64	6,28	5,97	9,25
27-28	9,8	8,05	8,00	7,40	7,50	6,65	6,62	6,14	5,80	9,29
28-29	10,2	8,15	8,45	7,30	7,50	6,77	6,50	6,14	5,89	9,00
29-30	10,5	8,40	8,50	7,60	7,60	6,81	6,64	6,14	6,01	8,62
30-31	10,9	8,85	9,60	7,80	7,80	6,73	6,97	6,04	5,99	8,49
31 32	11,3	9,25	9,25	7,80	7,90	6,70	6,71	6,06	5,98	8,30
32-33	11,6	9,70	9,85	8,10	8,10	6,78	6,64	6,05	6,05	8,28
33-34	12,1	10,20	10,45	8,20	8,20	6,92	6,58	6,00	6,07	8,25
34 35	12,4	10,65	10,20	8,60	8,50	6,94	6,82	6,07	6,25	8,08
35-36	12,7	11,25	10,55	9,20	8,70	7,11	7,15	6,37	6,38	7,90
36-37	13,1	11,90	11,40	9,60	9,00	7,43	7,37	6,39	6,47	7,67
37-38	13,6	12,45	11,95	9,70	9,20	7,77	7,69	6,54	6,47	7,47
38-39	14,0	12,95	11,85	9,80	9,50	7,94	7,78	6,74	6,49	7,55
39-40	14,7	13,65	12,80	10,60	9,80	8,27	7,89	7,15	6,63	7,55
40-41	15,1	14,15	13,70	11,50	10,20	8,75	8,24	7,57	6,79	7,19
41-42	15,9	14,75	14,45	11,30	10,40	9,13	8,42	7,79	7,04	7,46
42-43	16,8	15,40	14,35	12,00	10,70	9,38	8,65	8,03	7,33	7,97
43-44	17,4	16,05	15,00	12,50	11,10	9,73	9,09	8,30	7,80	8,18

TABLES DE MORTALITE DE LA SUEDE

S. M. (*suite*)

Années / Ages	1816 1840	1841 1850	1851 1860	1861 1870	1871 1880	1881 1890	1891 1900	1901 1910	1911 1915	1916 1920
44-45	18,5	16,75	15,95	13,00	11,60	10,19	9,46	8,54	7,96	8,28
45-46	19,1	17,30	16,60	14,10	12,10	10,62	9,66	9,25	8,35	8,45
46-47	20,3	18,00	16,80	14,30	12,60	11,00	10,16	9,42	8,81	8,79
47-48	21,3	18,80	19,35	14,80	13,20	11,41	10,72	10,02	9,36	9,27
48-49	22,2	19.60	19,10	15,10	13,80	12,03	11,03	9,86	9,94	9,66
49-50	23,4	20,55	19,65	16,80	14,50	12,61	11,85	10,92	10,13	9,65
50-51	24,4	22,05	19,55	17,90	15,30	13,15	12,58	11,26	10,78	10,08
51-52	25,9	23,40	22,85	18,80	16,00	13,64	12,86	12,13	11,40	10,89
52-53	26,8	24,55	24,30	19,80	16,80	14,42	13,18	12,75	12,25	11,97
53-54	28,3	25,85	24,45	21,10	17,70	15,31	13,96	13,46	13,14	12,57
54-55	29,6	27,15	26,55	21,70	18,80	16,27	15,72	14,45	14,06	13,36
55-56	31,0	28,15	27,20	23,70	19,90	17,09	16,18	15.26	14,63	13,85
56-57	32,5	29,65	28,35	25,00	21,00	18,16	17,48	15,69	15,65	15,00
57-58	33,9	31,05	30,30	27,20	22,30	19,47	18,65	16,64	16,62	16,38
58-59	35,7	32,60	30,50	27,90	23,90	21,14	19,41	17,89	17,86	17,41
59-60	37,9	34,30	35,05	30,40	25,70	22,79	20,65	19,38	19,49	18,87
60-61	40,0	36,25	37,20	33,40	27,50	24,33	22,61	20,66	20,67	20,06
61-62	42,6	38,40	39,50	35,20	29.30	25,75	22,94	22.89	22,14	21,03
62-63	45.5	40,55	41,25	38,20	31,20	27,32	25,67	23,13	23,53	22,64
63-64	48,0	43,55	42,30	41,00	33,70	29,40	27,71	26,22	25,29	24,52
64-65	51,5	47,75	45,80	44,60	36,50	31,73	30,53	27,87	27,91	27,53
65-66	55,1	54,40	50,55	45,70	40,00	34,44	32,96	30,04	29,95	30,07
66-67	59,5	60,40	54,25	51,50	43,40	37,36	35,24	32,21	32,60	32,13

S. M. (*suite*)

Années / Ages	1816 1840	1841 1850	1851 1860	1861 1870	1871 1880	1881 1890	1891 1900	1901 1910	1911 1915	1916 1920
67-68	63,7	65,05	57,55	54,60	47,00	40,80	38,99	36,54	35,83	34,68
68-69	68,0	68,80	62,00	58,70	51,00	44,16	41,94	38,69	39,35	38,22
69-70	74,0	73,00	68,20	65,00	55,90	48,03	46,06	41,96	42,13	41,82
70-71	80,4	77,80	72,80	70,70	61,40	52,55	51,25	46,40	47,39	45,57
71-72	88,6	83,10	81,90	74,90	66,70	58,08	53,91	50,54	52,64	49,55
72-73	96,6	89,25	86,95	83,20	72,40	63,82	60,64	55,49	57,38	54,47
73-74	104,1	97,05	99,50	89,70	78,70	70,04	66,95	60,56	62,47	60,23
74-75	111,5	106,10	106,05	95,20	86,00	77,10	72,19	67,43	67,39	66,49
75-76	119,2	116,35	114,50	105,80	94,30	85,36	79,75	74,60	73,73	73,42
76-77	127,3	125,60	121,20	115,60	103,60	94,24	89,33	81,03	81,55	81,71
77-78	134,3	135,25	132,75	125,20	113,70	102,66	98,46	89,86	89,55	90,19
78-79	144,4	147,20	133,50	139,50	124,80	110,65	109,06	101,02	98,94	99,12
79-80	156,3	159,95	165,25	112,40	135,80	120,68	118,60	109,13	109,64	107,62
80-81	168,5	174,50	161,95	156,40	147,50	134,10	131,27	120,81	120,01	108,06
81-82	181,9	193,25	169,00	169,50	159,30	149,00	144,39	130,97	132,14	130,89
82-83	202,2	218,20	191,30	179,90	172,60	164,12	160,62	146,57	145,26	143,26
83-84	222,6	246,90	206,60	196,20	187,40	179,84	178,09	159,08	160,03	156,59
84-85	246,7	279,45	233,35	233,60	201,40	196,80	193,29	176,99	173.98	173,38
85-86	269,0	299,80	232,40	243,50	222,30	209,21	204,06	192,27	192,60	189,41
86-87	288,0	307,90	233,65	262,40	240,60	224,57	221,78	210,76	209,02	203,60
87-88	292,1	313,50	307,30	269,90	262,30	245,46	237,62	225,22	226,92	221,05
88-89	301,6	330,75	316,75	310,90	289,00	270,12	265,73	241,33	246,44	237,79
89-90	318,2	390,70	370,35	341,50	314,70	287,92	297,05	258,21	264,12	260,32

TABLES DE MORTALITE DE LA SUEDE

S. F.[1]

Années / Ages	1816 1840	1841 1850	1851 1860	1861 1870	1871 1880	1881 1890	1891 1900	1901 1910	1911 1915	1916 1920
0-1	154 9	140,55	134,40	128,20	119,30	100,52	92,07	75,86	63,62	58,47
1-2	43,2	35,85	42,35	45,90	38,30	33,55	28,07	21,21	16,05	15,90
2-3	26,2	23,80	27,45	30,10	24,70	21,45	15,80	10,32	7,64	8,63
3-4	17,1	16,65	22,85	23,10	19,00	16,58	11,98	7,58	5,47	6,34
4-5	12,9	12,60	17,80	16,80	14,80	13,24	9,99	6,14	4,66	5,60
5-6	10,5	9,90	15,00	12,80	11,70	10,58	8,11	5,16	3,85	4,47
6-7	8,1	8,40	11,05	10,20	9,50	8,67	6,52	4,36	3,26	4,04
7-8	7,1	7,20	9,40	8,20	7,90	7,30	5,73	3,79	3,13	3,77
8-9	6,0	6.05	8,85	6,40	6,70	6,15	4,93	3,66	2,86	3,44
9-10	5,4	5,05	7,10	5.60	5,90	5,28	4,43	3,31	2,58	3,25
10-11	5,2	4.65	5,80	5,10	4,90	4,61	3,97	3,25	2,43	3,09
11-12	4,6	4,15	5,15	4,10	4,40	4,13	3,70	3,16	2 54	3.18
12-13	4,1	4,05	5,05	3,90	3,90	3,89	3,62	3,20	2,67	3,08
13-14	4,3	4,25	4,55	3,80	4,00	3,92	3,78	3,56	3,09	3,48
14-15	4,6	4,40	5,55	4,00	4,00	4,08	3,83	3,82	3,38	3,86
15-16	4,6	4,45	4,80	4,20	4,20	4,26	4,35	4,19	3,80	4,55
16-17	4,9	4,70	5,20	4,30	4,30	4,43	4,53	4,61	4,20	5,35
17-18	5,1	4,80	5,30	4,30	4,50	4,54	4,56	4,84	4,34	5,88
18-19	5,4	4,85	4,85	4,70	4,60	4,68	5,01	5,00	4,61	6,27
19-20	5,7	4,95	5,80	4,80	4,80	4,82	5,33	5,05	4,97	6,51
20-21	6,0	5,15	5,15	5,10	5,00	4,96	5,31	5,26	5,09	6,68
21-22	6,0	5,45	5,55	5,10	5,20	5,10	5,48	5,53	5,06	6,81

1. Voir le graphique II.

TABLES DE MORTALITÉ DE LA SUÈDE

S. F. (*suite*)

Années / Ages	1816 1840	1811 1850	1851 1860	1861 1870	1871 1880	1881 1890	1891 1900	1901 1910	1911 1915	1916 1920
22-23	6,1	5,75	5,80	5,40	5,50	5,27	5,75	5,66	5,13	6,92
23-24	6,8	5,80	6,15	5,60	5,70	5,47	5,98	5,55	5,19	7,23
24-25	7,0	6,00	6,55	5,80	6,00	5,65	6,08	5,68	5,56	7,35
25-26	7,4	6,05	6,30	5,80	6,20	5,85	6,09	5,96	5,72	7,65
26-27	7,6	6,25	6,55	6,00	6,50	6,02	6,14	6,06	5,56	7,84
27-28	8,1	6,30	6,65	6,10	6,70	6,09	5,97	5,96	5,56	7,71
28-29	8,3	6,50	7,10	6,20	6,80	6,13	6,10	5,95	5,35	7,64
29-30	8,5	6,75	7,55	6,50	6,90	6,25	6,31	6,01	4,96	7,52
30-31	8,7	7,20	7,80	6,70	7,00	6,44	6,39	6,12	5,52	7,47
31-32	9,1	7,65	8,25	6,80	7,10	6,55	6,46	5,99	5,78	7,46
32-33	9,4	7,85	7,15	7,30	7,20	6,60	6,58	5,96	5,70	7,45
33-34	9,5	8,15	9,10	7,00	7,10	6,66	6,54	6,16	5,74	7,44
34-35	9,9	8,50	9,30	7,80	7,60	6,84	6,64	6,36	5,80	7,31
35-36	10,1	8,75	9,20	8,00	7,70	7,06	7,03	6,50	5,95	7,26
36-37	10,4	9,25	10,05	8,10	7,90	7,26	7,03	6,52	6,06	7,24
37-38	10,8	9,60	9,90	8,20	8,10	7,42	6,95	6,73	6,24	7,16
38-39	11,3	9,90	9,80	9,00	8,50	7,64	7,36	6,86	6,15	7,06
39-40	11,4	10,30	11,20	9,10	8,70	7,89	7,59	6,87	6,37	7,22
40-41	11,9	10,65	10,50	9,80	8,90	8,06	7,66	7,00	6,79	7,35
41-42	12,2	11,00	11,50	9,60	9,00	8,15	7,83	7,15	7,06	7,42
42-43	12,7	11,30	12,00	10,20	9,00	8,15	7,80	7,22	7,16	7,37
43-44	12,8	11,65	12,20	10,30	9,10	8,18	7,91	7,27	7,72	7,43

TABLES DE MORTALITE DE LA SUEDE

S. F. (*suite*)

Années Ages	1816 1840	1841 1850	1851 1860	1861 1870	1871 1880	1881 1890	1891 1900	1901 1910	1911 1915	1916 1920
44-45	13,7	11,90	11,55	9,90	9,10	8,32	8,14	7,50	7,13	7,65
45-46	14,1	12,05	11,70	10,70	9,20	8,60	8,19	7,68	7,19	7,75
46-47	14,7	12,25	13,05	10,70	9,50	8,84	8,19	7,73	7,39	7,94
47-48	15,1	12,55	13,45	11,10	9,80	8,99	8,17	8,44	7,73	7,91
48-49	15,7	12,75	13,25	11,30	10,30	9,18	8,89	8,40	7,96	8,32
49-50	16,1	13,10	14,20	12,40	10,80	9,49	9,38	8,95	8,41	8,71
50-51	17,0	14,35	14,20	13,50	11,40	9,90	10,12	9,11	8,91	9,23
51-52	17,9	15,75	15,95	13,90	12,10	10,38	10,29	9,56	9,10	9,51
52-53	18,8	17,20	17,30	14,40	12,80	11,05	10,90	9,83	9,64	9,91
53-54	20,0	18,25	17,80	14,80	13,40	11,86	11,37	10,54	10,23	10,70
54-55	21,2	19,40	20,15	16,40	14,10	12,76	11,74	11,46	10,74	11,53
55-56	22,5	20,25	20,65	18,10	15,00	13,64	12,21	11,96	11,24	12,07
56-57	23,9	21,50	22,75	18,70	16,00	14,41	13,06	12,59	12,02	12,79
57-58	25,9	22,90	23,75	20,30	17,20	15,10	14,09	13,37	12,81	13,26
58-59	27,3	24,35	23,10	22,50	18,60	16,05	15,71	14,46	13,83	14,19
59-60	29,0	25,85	27,80	23,60	20,20	17,48	16,05	14,88	15,07	15,23
60-61	31,5	27,55	29,85	26,00	21,80	19,13	17,99	16,60	16,43	16,43
61-62	34,1	29,65	32,05	28,20	23,80	20,80	19,63	17,84	17,52	17,93
62-63	37,1	32,20	31,25	31,10	25,90	22,63	20,96	19,06	19,45	19,39
63-64	40,2	35,70	37,60	32,70	28,10	24,64	22,31	20,98	21,06	20,74
64-65	4,33	39,40	38,70	36,00	30,50	26,87	24,77	22,85	22,36	22,41
65-66	46,7	43,95	45,40	37,50	33,20	29,59	27,61	21,92	25,13	24,68
66-67	50,6	48,25	48,30	43,20	36,40	32,59	30,27	27,14	27,39	27,54

TABLES DE MORTALITE DE LA SUEDE

S. F. (*suite*)

Années / Ages	1816 1840	1841 1850	1851 1860	1861 1870	1871 1880	1881 1890	1891 1900	1901 1910	1911 1915	1916 1920
67-68	54,2	52,85	49,85	47,30	39,70	35,33	33,37	29,95	30,05	30,06
68-69	59,4	57,35	55,10	49,60	43,30	38,26	35,21	32,97	33,35	32,82
69-70	65,0	61,95	59,50	54,40	47,20	42,19	40,58	36,17	36,81	36,02
70-71	70,7	67,55	65,30	60,40	51,70	46,52	44,12	40,32	40,79	40,49
71-72	77,3	73,35	74,05	63,90	56,40	50,79	47,94	43,49	45,09	44,84
72-73	83,8	79,95	80,00	70,80	61,90	55,54	51,05	49,84	48,87	49,41
73-74	91,5	86,50	89,40	74,10	68,10	61,15	58,49	53,85	54,07	55,18
74-75	99,1	93,25	91,10	82,90	74,80	67,02	65,56	59,00	59,93	61,15
75-76	105,7	101,55	97,05	91,80	81,90	73,36	71,77	67,02	66,09	66,33
76-77	113,4	110,70	111,10	97,10	89,50	80,55	79,81	73,76	74,24	72,79
77-78	121,0	121,10	121,75	110,90	97,70	88,71	86,52	83,73	82,19	79,68
78-79	128,0	132,25	128,30	119,70	106,80	97,77	97,38	87,93	90,62	87,24
79-80	136,7	147,70	142,05	131,80	115,70	107,57	106,01	99,58	101,77	96,17
80-81	149,0	161,40	150,55	146,70	125,30	117,73	117,88	109,48	112,38	105,98
81-82	161,4	177,55	156,50	154,70	135,40	128,18	126,58	120,77	123,05	116,96
82-83	177,8	189,85	170,10	169,30	147,00	140.27	139,35	131,15	134,79	129,56
83-84	196,4	207,35	189,90	177,80	160,60	153,05	153,80	144,98	146,89	142,53
84-85	217,3	229,85	199,80	198,00	175,40	166,75	166,34	161,70	159,26	155,26
85-86	239,7	241,50	212,45	211,60	191,70	181,65	183,47	173,55	176,26	169,10
86-87	265,6	254,40	218,15	231,60	209,40	198,88	198,21	189,31	192,34	181,48
87-88	271,2	279,40	253,50	246,60	231,00	216,06	219,13	205,52	211,53	198,02
88-89	279,1	315,45	274,40	286,40	255,30	234,06	236,40	220,95	225,22	215,73
89-90	290,3	374,10	308,50	286,60	279,60	253,28	248,82	238,07	241,05	233,76

TABLES AUX MORTALITES CONSTANTES

S. M.[1]

Mortalité / Années	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	9	10	12	15	20	30	50	100	200	300
1828 ...				11,6 13,5	10,2 15,5	9,2 17,0	8,4 18,2	7,9 19,3	7,4 20,4	7,1 21,6	6,7 22,7	6,0 25,1	5,4 27,5	4,7 33,1	3,7 39,8	2,8 45,7	1,9 54,4	0,9 63,6	0,6 72,5	0,0 81,9	0,0 87,9
1845				10,5 14,0	9,5 17,2	8,9 18,7	8,5 19,6	8,0 20,7	7,6 22,3	7,3 24,3	6,9 27,0	6,3 30,4	5,7 32,6	4,8 36,2	3,9 41,4	2,9 48,4	1,8 56,4	0,9 64,5	0,5 73,3	0,0 81,3	0,0 85,0
1855 ...						11,5 16,5	10,7 17,7	10,1 18,9	9,6 20,1	9,1 21,8	8,7 23,9	7,8 28,8	7,1 32,8	6,2 37,4	5,1 42,7	3,9 49,5	2,0 57,2	0,9 65,1	0,5 73,1	0,0 82,6	0,0 86,9
1865 ...			12,5 15,1	11,1 16,5	10,1 17,5	9,4 18,4	8,8 19,2	8,3 20,3	7,9 22,6	7,6 28,7	7,3 31,5	6,8 35,1	6,4 37,8	5,5 41,8	4,6 46,9	3,7 52,0	2,8 58,8	1,0 65,7	0,5 74,5	0,0 83,1	0,0 87,8
1875 ...		12,8 14,9	11,8 15,9	10,8 16,9	9,9 17,8	9,2 18,6	8,6 19,4	8,1 20,2	7,8 22,0	7,4 27,0	7,1 31,9	6,5 36,2	6,0 39,7	5,1 44,9	4,1 49,7	3,0 55,1	1,7 61,4	0,9 67,7	0,5 75,6	0,0 83,8	0,0 88,4
1885 ...		12,7 14,9	11,5 16,1	10,4 17,0	9,6 17,9	8,8 18,8	8,3 19,8	7,8 21,2	7,3 34,5	6,9 36,5	6,5 38,1	5,8 40,9	5,3 43,5	4,6 48,0	3,5 52,7	2,4 57,3	1,4 63,3	0,8 69,5	0,2 76,7	0,0 84,4	0,0 89,8
1895 ...		11,0 15,2	9,7 15,9	8,7 16,7	7,9 17,5	7,2 18,2	6,6 19,0	6,0 20,0	5,7 35,0	5,3 37,2	5,0 39,2	4,5 42,7	4,0 45,5	3,2 49,5	2,4 53,7	1,7 58,1	1,0 63,9	0,8 70,0	0,1 77,1	0,0 84,7	0,0 89,1
1905 ...	10,7 14,4	8,3 15,6	6,8 16,4	5,8 17,1	5,0 17,6	4,5 18,1	4,0 18,9	3,7 21,8 36,6	3,4 38,9	3,1 40,7	2,9 42,3	2,6 45,3	2,3 47,4	1,9 15,0	1,7 55,1	1,2 59,3	0,9 64,8	0,8 70,8	0,0 78,0	0,0 85,5	0,0 90,8
1912 ...	7,4 14,8	5,8 15,7	4,7 16,3	4,0 17,0	3,5 17,7	3,1 18,4	2,8 19,1 25,3 30,0	2,5 19,8 22,8 38,2	2,3 40,8 21,0	2,1 42,4	2,0 43,9	1,9 46,3	1,7 48,6	1,5 51,7	1,2 55,3	0,8 59,5	0,8 65,0	0,5 70,5	0,0 78,1	0,0 85,5	0,0 90,6
1918 ...	10,0 13,5	7,7 14,7	6,4 15,4	5,4 16,0	4,6 16,5	3,9 16,9	3,4 17,2	3,0 17,6	2,7 18,0	2,4 18,4 37,7 41,5	2,2 18,8 34,6 43,4	2,0 19,7 27,8 46,5	1,8 49,1	1,6 52,4	1,2 55,9	0,7 59,9	0,8 65,1	0,4 71,0	0,0 78,0	0,0 85,8	0,0 90,6

1. Voir le graphique III.

TABLES AUX MORTALITES CONSTANTES

S. F.[1]

Mortalité / Années	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	9	10	12	15	20	30	50	100	200	300
1828 ...				10,8 14,3	9,7 16,4	8,9 18,3	8,1 20.2	7,5 22,1	7,0 23,8	6,5 25.5	6,1 27,2	5,6 30,9	5,2 34,3	4,4 40,4	3,4 46,8	2,7 53,0	1,8 59,3	0,9 65,9	0,5 74,2	0,0 83,2	0,0 89,8
1845 ...			12,0 12,0	10,0 15,0	9,1 18,8	8,3 21,4	7,7 24,6	7,2 27,7	6,7 29,7	6,3 31,1	6,0 32,6	5,5 35,6	5,1 38,3	4,3 44,8	3,3 50,5	2,6 54,5	1,5 61,2	0,9 66,4	0,4 74,8	0,0 82,6	0,0 87,6
1855 ...				13,3 13,3	11,4 15.9	10,5 18,8	9,8 22,4	9,2 25,7	8,7 28,1	8,2 30,0	7,7 31,6	6,9 34.5	6,3 37,2	5,7 43,5	4,9 50,2	3,6 54,0	1,8 60,1	0,9 66,5	0,4 75,2	0,0 84,0	0,0 88,8
1865 ...			11,6 14,7	10,5 17,0	9,7 19,7	9,1 22,7	8,6 26,4	8,1 29,2	7,6 31,5	7,3 33,6	6,9 35,5	6,4 39,2	6,0 42,8	5,3 48,9	4,3 53,0	3,5 56,2	2,0 61,8	0,9 67,9	0,4 76,2	0,0 84,1	0,0 90,0
1875 ...			11,9 14,3	10,6 17,6	9,9 20,0	9,3 22.1	8,7 24,1	8,2 26,1	7,8 29,9	7,3 33,4	6,9 36,1	6,2 41,4	5,7 47,4	4,9 50,9	4,0 55,0	2,8 58,8	1,6 63,9	0,8 69,7	0,3 77,3	0,0 85,5	0,0 91,0
1885 ...			11,3 13,6	10,3 16,6	9,4 20,4	8,7 23,2	8,2 26,0	7,7 30,8	7,2 34,8	6,7 37,2	6,4 39,8	5,8 47,0	5,3 50,1	4,5 53,2	3,5 56,8	2,2 60,5	1,3 65,2	0,8 70,8	0,0 78,2	0,0 86,0	0,0 91,0
1895 ...			9,9 14,5	8,8 16,5	7,9 18,4	7,3 20,7	6,7 23,4	6,2 31,4	5,8 36,4	5,4 39,1	5,1 42,7	4,5 48,7	4,0 50,6	3,3 54,6	2,3 57,9	1,7 61,4	1,0 65,9	0,7 71,2	0,0 78,3	0,0 86,1	0,0 92,0
1905 ...		8,2 13,2	6.7 14,6	5.8 15,9	5,2 18,2	4,6 21,2	4,1 25,1 27,5 32,1	3.8 35,2	3,4 40,0	3,1 44,3	2,9 47,0	2,4 50,0	2,1 52,1	1,9 55,1	1,5 58,8	1,1 62,5	0,8 67,1	0,5 72,3	0,0 79,0	0,0 86,6	0,0 92,3
1912 ...	7,2 13,1	5,8 14,5	4,9 15,7	4,3 17,3	3,8 19,4	3,4 24,0 26,9 30,5	3,1 35,7	2,8 39,2	2,6 41,1	2,4 46,4	2.2 48,1	1,8 50,6	1,7 52,6	1,4 56,0	1,1 59,0	0,9 63,0	0,7 66,8	0,3 72,1	0,0 78,9	0,0 86,4	0,0 92,4
1918 ...		7,9 13,0	6,3 14,0	5,2 14,9	4,5 15,5	3,9 16,3	13,4 7 ,4	3,0 19,1	2,8 22,1 28,0	2,5 24,1 29,5 43,1	2,3 46,4	1,9 49,7	1,7 51,8	1,4 54,9	1,1 58,7	0,9 62,8	0,7 67,0	0,2 72,2	0,0 79,4	0,0 87,1	0,0 92,5

1. Voir le graphique IV.

CALCUL DE LA POPULATION SUÉDOISE

Les graphiques III et IV, qui représentent les tables aux mortalités constantes, donnent les sections des surfaces aux mortalités masculine et féminine, par les plans :

$$\mu\,(x,\,t) = C^{te}$$

Pour plus de clarté, nous y avons doublé l'échelle des abscisses, dans l'intervalle ($x = 0$, $x = 20$).

Ce sont ces graphiques qui nous ont permis de calculer la population suédoise de l'année 1910, à partir de la population de l'année 1900, par la relation :

$$p\,(x + 10\,,1910) = p\,(x\,,1900)\,e^{-\int_1^{10} \mu\,(x + y\,,\,1900\,+\,y)\,dy}$$

Pour avoir la valeur de l'intégrale :

$$\int_1^{10} \mu\,(x + y\,,1900 + y)\,dy,$$

relative à l'âge x, nous avons tracé à partir du point de coordonnées (x, 1900), sur les graphiques III et IV, une parallèle à la première bissectrice. Les points où cette droite coupe les ordonnées successives donnent évidemment :

$$\mu\,(x + 1\,,1901)\quad \mu\,(x + 2\,,1902)\,,\,\ldots\,,\,\mu\,(x + 10\,,1910).$$

En additionnant ces quantités, on a la valeur de l'intégrale précédente.

Il nous a fallu tenir compte du mouvement migratoire. Pour cela nous avions besoin de connaître, année par année, le nombre des émigrants et des immigrants, pour chaque âge des hommes et des femmes. Malheureusement il ne nous a pas été possible d'avoir des renseignements suffisants. Nous ne disposions que de quelques nombres globaux.

Nous avons été obligés d'adopter des coefficients de masculinité pour l'émigration et pour l'immigration, et de répartir plus ou moins judicieusement, d'après quelques données très grossières, le nombre total des émigrants et des immigrants de chaque sexe. aux différents âges. Nous n'avons pas cru nécessaire de reproduire ici les détails de ce calcul, d'ailleurs très long. Nous n'avons donné que les résultats définitifs, qui entrent comme termes correctifs dans nos calculs.

Dans le calcul de la population suédoise nous avons posé pour abréger :

A : L'âge x.

B : $p_{1900}\ (x)$.

C : $\mathrm{L}\ p_{1900}\ (x)$.

D : $\int_1^{10} \mu\ (x + y,\ 1900 + y)\ dy$.

E : $\mathrm{L}\ p_{1900}\ (x) - \int_1^{10} \mu\ (x + y,\ 1900 + y)\ dy = \mathrm{L}\ p_{1910}\ (x + 10)$.

F : $p_{1910}\ (x + 10)$ (Valeur calculée).

G : Emigrants d'âge $(x + 10)$.

H : Immigrants d'âge $(x + 10)$.

I : Terme correctif.

J : $p_{1910}\ (x + 10)$ (Valeur corrigée).

K : $p_{1910}\ (x + 10)$ (Valeur recensée).

L : Erreur absolue.

M : Erreur relative.

CALCUL DE LA POPULATION SUEDOISE

S M

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0- 1	64 689	11,079	0,081	10,998	59 762	716	275	— 441	59 321	57 793	+1 528	+0,026
1- 2	59 360	10,993	0,058	10,935	56 113	968	337	— 631	55 482	55 166	+ 316	+0,006
2- 3	59 980	11 004	0 047	10 957	57 360	1 169	399	— 770	56 590	56 367	+ 223	+0,004
3- 4	58 373	10 976	0,041	10,935	56 113	1 259	477	— 782	55 331	55 447	- 116	– 0,002
4 5	57 280	10,957	0,038	10,919	55 221	1 451	514	— 907	54 314	54 729	— 415	—0,007
5- 6	57 506	10,961	0,036	10 925	55 555	1 657	616	—1 041	54 514	55 008	— 494	—0,009
6- 7	55 840	10,931	0,035	10 896	53 966	1 858	691	—1 167	52 799	53 189	— 390	– 0,007
7- 8	55 982	10,934	0,035	10,899	51 127	2 693	806	—1 887	52 240	52 839	— 599	—0 011
8- 9	53 890	10,896	0,037	10,859	52 006	3 559	916	—2 643	49 363	49 853	— 490	—0,010
9 10	55 224	10,921	0,040	10,881	53 162	4 111	1 033	—3 078	50 084	49 532	+ 552	+0 011
10-11	53 456	10,888	0,043	10,845	51 283	4 930	1 148	—3 782	47 501	45 911	+1 590	+0,035
11-12	52 175	10,864	0,047	10,817	49 867	5 480	1 209	—4 271	45 596	45 144	+ 452	+0,010
12-13	53 773	10,894	0,049	10,845	51 283	5 513	1 242	—4.271	47 012	46 591	+ 421	+0,007
13-14	54 765	10,911	0 053	10,858	51 954	5 543	1 281	—4 262	47 692	45 856	+1 836	+0,040
14-15	53 656	10,892	0,055	10,837	50 873	6 240	1 302	—4 938	45 935	43 839	+2 096	+0,050
15-16	52 316	10,867	0,059	10,808	49 420	6 680	1 322	—5 358	44 062	42 305	+1 757	+0,040
16-17	51 953	10,840	0 062	10,778	47 959	6 714	1 345	—5 369	42 590	41 517	+1 073	+0,024
17 18	49 335	10,808	0,064	10,744	46 356	6 312	1 322	—4 990	41 366	38 719	+2 647	+0,068
18-19	47.853	10,777	0,065	10,712	44 897	5 987	1 296	—4 691	40 206	38 107	+2 099	+0,055
19-20	46 238	10,713	0,066	10,677	43 352	5 278	1 276	—4 002	29 350	37 698	+1 652	+0,040

CALCUL DE LA POPULATION SUEDOISE

S M (*suite*)

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
20 21	44 596	10 707	0,066	10,641	41 819	4 659	1 258	—3 401	38 418	36 810	+1 608	+0,039
21 22	45 537	10,728	0,067	10,661	42 658	4 248	1 238	3 010	39 648	37 380	+2 268	+0,059
22 23	42 708	10,674	0,067	10 607	40 421	3 912	1 180	2 726	37 695	35 454	+2 241	+0,063
23 24	42 798	10,666	0,067	10,599	40 099	3 644	1 133	— 2 511	37 588	36 160	+1 428	+0,039
24 25	39 920	10,596	0,068	10,528	37 351	3 524	1 067	— 2 457	34 894	34 196	+ 698	+0,020
25 26	38 653	10 564	0,068	10,496	36 176	3 268	1 009	—2 259	33 917	33 743	+ 174	+0,005
26-27	35 989	10,492	0,068	10,424	33 663	2 993	948	—2 045	31 618	31 662	— 44	—0,001
27-28	34 672	10,455	0,068	10,387	32 461	2 724	892	— 1 832	30 629	30 875	— 246	—0,008
28 29	32 921	10,403	0,069	10,334	30 766	2 507	831	— 1 676	29 090	29 568	— 478	—0,016
29 30	33 071	10,408	0,069	10,339	30 911	2 118	781	—1 337	29 574	29 839	— 265	—0,008
30 31	30 365	10 312	0 069	10 243	28 081	1 705	737	— 968	27 113	27 562	— 449	—0,017
31-32	28 941	10,274	0,070	10,204	27 017	1 432	688	744	26 273	26 256	+ 17	+0,0007
32-33	25 310	10,140	0,071	10,069	23 603	1 432	688	— 744	22 859	23 149	— 290	—0,013
33-34	28 368	10,254	0,072	10,182	26 425	1 432	688	— 744	25 681	25 956	— 275	—0,010
34 35	31 130	10,347	0,073	10,274	28 972	1 432	688	— 744	28 228	28 546	— 318	—0,010
35 36	30 353	10,322	0,076	10,246	28 172	1 432	688	— 744	27 428	27 697	— 269	—0,010
36-37	30 350	10,322	0,078	10,244	28 116	1 432	688	— 744	27 372	27 806	— 434	—0,015
37 38	30 030	10,312	0,082	10,230	27 726	1 432	688	— 744	26 982	27 424	— 442	—0,016
38 39	28 671	10,265	0,085	10,180	26 374	1 432	688	— 744	25 630	26 239	— 609	—0,027
39 40	26 981	10,181	0,088	10,093	24 175	1 432	688	— 744	23 431	24 557	—1 126	—0,046

CALCUL DE LA POPULATION SUEDOISE

S M (*suite*)

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
40 41	28 467	10,258	0,092	10,166	26 007	1 432	688	— 744	25 263	25 700	— 437	—0,016
41-42	28 661	10,265	0,097	10,168	26 059	1 432	688	— 744	25 315	26 015	— 700	—0,027
42-43	28 060	10,244	0,102	10,142	24 448	1 281	635	— 646	23 802	25 307	—1 505	—0,060
43-44	25 343	10,142	0,107	10,035	22 814	1 160	581	— 579	22 235	22 822	— 587	—0,026
44 45	24 443	10,105	0,113	9,992	21 848	1 106	515	— 591	21 257	21 839	— 582	—0,027
45-46	24 590	10,112	0,119	9,993	21 879	991	457	— 534	21 345	21 762	— 417	—0,019
46-47	25 833	10,161	0,126	10,035	22 814	868	396	— 472	22 342	22 861	— 519	—0,023
47-48	23 351	10,062	0,133	9,929	20 515	747	340	— 407	20 108	20 550	— 442	—0,022
48-49	21 733	9,988	0,142	9,846	18 888	650	279	— 371	18 517	18 912	— 395	—0,021
49-50	22 894	10,040	0,151	9,889	19 719	452	230	— 222	19 497	19 832	— 335	—0,017
50-51	22 614	10,028	0,161	9,867	19 282	267	186	— 81	19 201	19 360	— 159	—0,008
51-52	23 184	10,053	0,171	9,882	19 572	144	136	— 8	19 564	19 608	— 41	—0,002
52 53	21 051	9,956	0,183	9,773	17 551	144	136	— 8	17 543	17 626	— 83	—0,004
53-54	19 985	9,904	0,196	9,708	16 446	144	136	— 8	16 438	16 685	— 247	—0,015
54 55	19 336	9,871	0,211	9,660	15 675	144	136	— 8	15 667	15 790	— 123	—0,008
55 56	20 044	9,907	0,228	9,679	15 976	144	136	— 8	15 968	16 143	— 175	—0,010
56 57	20 939	9,951	0,245	9,706	16 413	144	136	— 8	16 405	16 692	— 287	—0,020
57-58	19 475	9,878	0,266	9,612	14 941	144	136	— 8	14 933	15 162	— 229	—0,015
58-59	19 277	9,858	0,287	9,571	14 340	144	136	— 8	14 332	14 702	— 370	—0,027
59-60	18 103	9,805	0,312	9,493	13 268	144	136	— 8	13 260	13 497	— 273	—0,017

CALCUL DE LA POPULATION SUEDOISE

S M (*suite*)

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
60 61	18 568	9,830	0,339	9,491	13 239	144	136	— 8	13 231	13 658	— 427	—0,03
61 62	16 600	9,719	0,367	9,352	11 520	144	136	— 8	11 512	11 760	— 252	—0,02
62 63	15 755	9 666	0 396	9 270	10 612	144	136	— 8	10 604	10 836	— 232	—0 02
63 64	16 166	9,692	0,457	9,235	10 248	144	136	— 8	10 240	10 792	— 552	—0,05
64 65	16 123	9 689	0,480	9,209	9 985	144	136	— 8	9 977	10 328	— 351	—0,03
65 66	16 508	9,713	0,529	9,184	9 739	144	136	— 8	9 731	10 088	— 357	—0,03
66-67	16 185	9,693	0,580	9,113	9 071	144	136	— 8	9 063	9 516	— 453	—0,05
67 68	15 607	9,656	0,636	9,020	8 266	144	136	— 8	8 258	8 594	— 336	—0,04
68 69	13 718	9,528	0,696	8,832	6 849	144	136	— 8	6 841	7 245	— 404	—0,05
69 70	12 266	9,416	0,764	8,652	5 721	144	136	— 8	5 713	5 934	— 221	—0,04
70 71	12 435	9,430	0 847	8,583	5 340	144	136	— 8	5 332	5 668	— 336	—0,06
71 72	12 420	9 428	0,935	8,493	4 880	144	136	— 8	4 872	5 019	— 147	—0,04
72 73	10 937	9,301	1 034	8,267	3 893	0	0	0	3 893	4 114	— 221	—0,05
73 74	9 635	9,173	1,138	8,035	3 087	0	0	0	3 087	3 361	— 274	—0,08
74 75	10 100	9,220	1,245	7,975	2 907	0	0	0	2 907	3 068	— 161	—0 08
75 76	9 565	9,166	1,364	7,802	2 445	0	0	0	2 445	2 539	— 94	—0,04
76 77	8 229	9,015	1,491	7,524	1 852	0	0	0	1 852	1 901	— 49	—0,02
77 78	8 018	8,989	1,636	7,353	1 561	0	0	0	1 561	1 608	— 47	—0,03
78 79	6 784	8,822	1,794	7,028	1 128	0	0	0	1 128	1 202	— 74	—0,06
79 80	6 118	8,719	1,958	6,761	863	0	0	0	863	878	— 15	—0,02

CALCUL DE LA POPULATION SUEDOISE

S. F.

A	B	C	D	F	F	G	H	I	J	K	L	M
0-1	62.601	11,046	0,081	10,965	57.820	572	233	— 339	57.481	56.431	+1.050	+ 0,018
1-2	57.549	10,962	0,058	10,904	54.400	792	323	— 469	53.931	53.529	+ 402	+ 0,008
2-3	57.590	10,963	0,049	10,914	54.945	964	410	— 554	54.391	54.386	+ 5	+ 0,0001
3-4	55.916	10,936	0,044	10,892	53.750	1.091	512	— 581	53.169	53.087	+ 82	+ 0,001
4-5	55.789	10,931	0,041	10,890	53.643	1.296	610	— 686	52.957	53.128	— 171	— 0,003
5-6	55.624	10,928	0,040	10,888	53.535	1.515	718	— 797	52.738	52.992	— 254	— 0,005
6-7	54.207	10,921	0,039	10,882	53.206	1.728	812	916	52.290	51.342	+ 948	+ 0,018
7-8	53.676	10,893	0,039	10,854	51.746	2.235	919	· 1.316	50.430	50.332	+ 98	+ 0,002
8-9	52.295	10,867	0,041	10,826	50.312	2.801	1.011	—1.790	48.522	48.424	+ 98	+ 0,002
9-10	53.569	10,891	0,043	10,848	51.436	3.293	1.095	—2.198	49.238	48.922	+ 316	+ 0,006
10-11	52.592	10,872	0,044	10,828	50.420	3.765	1.188	- 2.577	17.843	47.390	+ 153	+ 0,009
11-12	51.181	10,845	0,045	10,800	49.023	4.039	1.197	- -2.842	46.181	45.660	+ 521	+ 0,011
12-13	52.439	10,868	0,047	10,821	50.067	4.106	1.175	—2.931	47.136	46.129	+1.007	+ 0,021
13-14	53.174	10,883	0,048	10,835	50.774	4.240	1.154	—3.086	47.688	46.302	+1.386	+ 0,030
14-15	52.159	10,864	0,050	10 814	49.717	4.561	1.127	—3.434	46.283	44.714	+1.569	+ 0,035
15-16	50.551	10,833	0,051	10,782	48,152	4.790	1.100	— 3.690	44.462	43.381	+1.081	+ 0,022
16-17	50.003	10,822	0,053	10,769	47.530	4.865	1.071	—3.794	43.736	42.855	+ 881	+ 0,021
17-18	47.041	10,761	0,054	10,707	44.673	4.674	1.040	—3.634	41.039	40.637	+ 402	+ 0,010
18-19	45.788	10,734	0,055	10,679	43.439	4.467	1.007	—3.460	39.979	39.659	+ 320	+ 0,009
19-20	44.132	10,697	0,055	10,642	41.862	4.152	979	—3.173	38.689	38.701	— 12	— 0,0003

CALCUL DE LA POPULATION SUEDOISE

S. F. (*suite*)

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
20-21	43.490	10,682	0,056	10,626	41.075	3.855	954	—2.901	38.174	38.493	— 319	— 0,009
21-22	44.081	10,696	0,057	10,639	41.737	3.659	926	—2.733	39.004	39.207	— 203	— 0,005
22 23	41.394	10,633	0,057	10,576	39.184	3.416	892	—2.524	36.660	37.268	— 608	— 0,016
23-24	41.807	10,643	0,058	10,585	39.542	3.227	859	—2.368	37.174	37.530	— 356	— 0,009
24-25	39.276	10,576	0,059	10,517	36.943	3.085	820	—2.265	34.678	35.681	—1.003	— 0,028
25-26	38.552	10,562	0,059	10,503	36.429	2.862	784	—2.078	34.351	35.089	— 738	— 0,020
26-27	36.606	10,510	0,060	10,450	34.648	2.621	743	—1.878	32.770	33.677	— 907	— 0,026
27 28	35.804	10,488	0,061	10,427	33.763	2.387	705	—1.682	32.081	32.868	— 787	— 0,023
28-29	34.392	10,447	0,063	10,384	32.342	2.132	668	—1.464	30.878	31.665	— 787	— 0,024
29-30	34.644	10,455	0,064	10,391	32.569	1.745	636	—1.109	31.460	32.059	— 599	— 0,019
30-31	32.252	10,383	0,065	10,318	30.276	1.383	608	— 775	29.501	29.830	— 329	— 0,011
31-32	[illegible]	10,355	0,066	10,289	20.411	1.142	576	— 566	28.845	28.942	97	— 0,003
32-33	28.504	10,260	0.068	10.192	26.692	1.142	576	— 566	26.126	26.526	— 400	— 0,016
33-34	31.427	10,357	0,069	10,288	29.381	1.142	576	— 566	28.815	29.149	— 334	— 0,012
34-35	34.064	10,438	0,070	10,368	31.821	1.142	576	— 566	31.255	31.582	— 327	— 0,010
35-36	33.646	10.425	0,071	10,354	31.386	1.142	576	— 566	30.820	31.153	— 333	— 0,010
36-37	34.106	10,439	0,072	10,367	31.796	1.142	576	— 566	31.230	31.621	— 391	— 0,012
37-38	33.443	10,419	0,074	10,345	31.105	1.142	576	— 566	30.539	30.835	— 296	— 0,009
38-39	32.380	10,387	0,075	10,312	30.098	1.142	576	— 566	29.532	29.943	— 411	— 0,014
39-40	30.552	10,329	0 076	10,253	28.371	1.142	576	— 566	27.805	28.142	— 337	— 0,019

CALCUL DE LA POPULATION SUEDOISE

S. F. (*suite*)

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
40-41	32.446	10,389	0,078	10,311	30.065	1.142	576	— 566	29.499	29.837	— 338	— 0,011
41-42	32.559	10,393	0,081	10,312	30.098	1.142	576	— 566	29.532	29.903	— 471	— 0,016
42-43	31.765	10,368	0,083	10,285	29.293	1.043	528	— 515	28.778	28.984	— 106	— 0,003
43-44	29.073	10,279	0,086	10,193	24.913	966	481	— 485	24.428	26.535	— 107	— 0,004
44-45	27.748	10,233	0,090	10,143	25.416	907	426	— 481	24.935	25.225	— 290	— 0,011
45-46	27.397	10,220	0,094	10,126	24.987	815	372	— 443	24.544	24.839	— 295	— 0,012
46-47	29.126	10,281	0,100	10,181	26.400	717	314	— 403	25.997	26.281	— 284	— 0,011
47-48	26.384	10,182	0,106	10,076	23.769	622	265	— 357	23.412	23.655	— 243	— 0,010
48-49	24.674	10,115	0,112	10,003	22.095	519	210	— 309	21.786	21.987	— 201	— 0,009
49-50	25.488	10,148	0,119	10,029	22.677	362	164	— 198	22.479	22.585	— 106	— 0,004
50-51	25.734	10,157	0,127	10,030	22.700	213	123	— 90	22.610	22.549	+ 61	+ 0,002
51-52	26.430	10,184	0,136	10,048	23.112	115	77	— 38	23.074	23.048	+ 26	+ 0,001
52-53	24.547	10,087	0,146	9,941	20.761	115	77	— 38	20.723	21.201	— 478	— 0,022
53-54	22.826	10,036	0,156	9,880	19.533	115	77	— 38	19.495	19.574	— 79	— 0,004
54-55	21.982	10,000	0,168	9,832	18.618	115	77	— 38	18.580	18.617	— 37	— 0,002
55-56	23.350	10,060	0,181	9,879	19.514	115	77	— 38	19.476	19.495	— 19	— 0,001
56-57	24.037	10,089	0,196	9,893	19.788	115	77	— 38	19.750	19.741	+ 9	+ 0,0005
57-58	22.596	10,027	0,212	9,815	18.304	115	77	— 38	18.266	18.276	— 10	— 0,0006
58-59	22.868	10,039	0,232	9,807	18.158	115	77	— 38	18.120	18.199	— 79	— 0,004
59-60	21.260	9,966	0,255	9,711	16.496	115	77	— 38	16.458	16.549	— 91	— 0,005

CALCUL DE LA POPULATION SUEDOISE

S. F. (*suite*)

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
60 61	21.624	9,988	0,280	9,708	16.447	115	77	— 38	16.409	16.580	— 171	— 0,010
61-62	19.893	9,900	0,308	9,592	14.646	115	77	— 38	14.608	14.822	— 214	— 0,015
62-63	18.862	9,847	0,339	9,508	13.465	115	77	— 38	13.427	13.617	— 190	— 0,014
63-64	19.070	9,858	0,374	9,484	13.146	115	77	— 38	13.108	13.325	— 217	— 0,016
64-65	19.615	9,886	0,414	9,472	12.990	115	77	— 38	12.952	13.323	— 371	— 0,027
65-66	19.685	9,889	0,460	9,429	12.443	115	77	— 38	12.405	12.887	— 482	— 0,039
66-67	19.325	9,871	0,512	9,359	11.601	115	77	— 38	11.563	12.074	— 511	— 0,042
67-68	18.562	9,831	0,568	9,263	10.540	115	77	— 38	10.502	10.974	— 472	— 0,043
68-69	16.177	9,693	0,627	9,066	8.655	115	77	— 38	8.617	9.032	— 415	— 0,045
69-70	14.767	9,602	0,692	8,910	7.404	115	77	— 38	7.366	7.787	— 421	— 0,055
70-71	15.263	9,635	0,769	8,866	7.086	115	77	— 38	7.048	7.608	— 560	— 0,080
71-72	15.015	9,618	0,856	8,762	6.386	115	77	— 38	6.348	6.691	— 343	— 0,052
72-73	13.743	9,530	0,957	8,573	5.286	0	0	0	5.286	5.672	— 386	— 0,070
73-74	11.960	9,391	1,064	8,327	4.134	0	0	0	4.134	4.541	— 407	— 0,090
74-75	12.606	9,444	1,177	8,267	3.893	0	0	0	3.893	4.292	— 399	— 0,090
75 76	12.092	9,402	1,299	8,103	3.304	0	0	0	3.304	3.689	— 385	— 0,10
76-77	10.621	9,271	1,439	7,832	2.520	0	0	0	2.520	2.795	— 275	— 0,10
77 78	10.194	9,229	1,572	7,657	2.116	0	0	0	2.116	2.485	— 369	— 0,15
78-79	8.887	9,092	1,722	7,370	1.588	0	0	0	1.588	1.798	— 210	— 0,12
79-80	7.634	8,940	1,880	7,060	1.219	0	0	0	1.219	1.297	— 78	— 0,061

AJUSTEMENT DE LA MORTALITÉ SUÉDOISE

Les graphiques III et IV permettent en outre de dresser les tables qui donnent les sections des surfaces aux mortalités masculine et féminine, par les plans :

$$x = C^{te}.$$

La forme des courbes qui représentent ces tables, nous a suggéré l'idée d'essayer de les représenter par des tangentes hyperboliques généralisées. Ces tables nous ont permis, d'autre part, l'ajustement de la fonction de mortalité.

Dans ces calculs, nous avons posé pour abréger :

A : Le temps t.

B : $10^3\ \mu_x\ (t)$.

C : $10^3 \left[\mu_x\ (t)\ -\ \xi'\ (x)\right] = 10^3$

D : $-\dfrac{\Delta\ \nu}{\nu} \doteq -\ \psi\ [\nu]\ \Delta\ t.$

E : $10^3 \left[\dfrac{\nu_0\ \Sigma\ (\nu-\nu_0)\ (\psi-\psi_0)-n\ \psi_0\ \Sigma\ (\nu-\nu_0)^2}{\Sigma\ (\nu-\nu_0)\ (\psi-\psi_0)} - \nu_x\ (t)\right] = 10^3\left[(\eta'-\xi')-\nu\right]$

F : $\dfrac{1}{\omega}\ \mathrm{L}\ \left[\dfrac{10^3\ \nu\ [\eta'-\xi']}{\omega\ [(\eta'-\xi')-\nu]}\right] = t_0 + h\ (x) + \dfrac{1}{\omega}\ \mathrm{L}\ 10^3 - t.$

G : $t_0 + h\ (x)$.

AJUSTEMENT DE LA MORTALITE SUEDOISE

$r = 0$ S. M.

A	B	C	D	E	F	G
1830	176,4	111,4	0,027	508	197	1859
1835	173,5	108,4	0,031	511	196	1863
1840	170,0	105,0	0,036	514	195	1867
1845	166,2	101,2	0,041	518	194	1871
1850	162,0	97,0	0,041	522	193	1875
1855	158,0	93,0	0,049	526	192	1879
1860	153,4	88,4	0,045	531	190	1882
1865	149,0	84,4	0,068	535	189	1886
1870	143,6	78,6	0,075	540	187	1889
1875	137,7	72,7	0,092	546	185	1892
1880	131,0	66,0	0,106	553	182	1894
1885	124,0	59,0	0,129	560	179	1896
1890	116,4	51,4	0,144	568	175	1897
1895	109,0	44,0	0,182	575	172	1899
1900	101,0	36,0	0,242	583	166	1898
1905	92,3	27,3	0,318	592	159	1896
1910	83,6	18,6	0,408	600	149	1891
1915	76,0	11,0		608	136	1883

$\alpha = 73{,}1$ $\theta = 1884$
$\beta = 0{,}024$
$\gamma = 9{,}644$
$\delta = 236147$

AJUSTEMENT DE LA MORTALITE SUEDOISE

$x = 5$ S. M.

A	B	C	D	E	F	G
1830	11,3	8,3	— 0,036	35,7	134	1796
1835	11,6	8,6	— 0,047	35,4	135	1802
1840	12,0	9,0	— 0,033	35,0	137	1809
1845	12,3	9,3	0,075	34,7	138	1815
1850	13,0	10,0	— 0,030	34,0	137	1819
1855	13,3	10,3	— 0,010	33,7	141	1828
1860	13,4	10,4	0,0	33,6	141	1833
1865	13,4	10,4	0,039	33,6	141	1838
1870	13,0	10,0	0,050	34,0	137	1839
1875	12,5	9,5	0,081	34,5	138	1845
1880 ...	11,7	8,7	0,080	35,3	136	1848
1885	11,0	8,0	0,188	36,0	133	1850
1890	9,5	6,5	0,246	37,5	127	1849
1895	7,9	4,9	0,306	39,1	119	1846
1900	6,4	3,4	0,412	40,6	110	1842
1905	5,0	2,0	0,450	42,0	94	1831
1910	4,1	1,1	0,273	42,9	80	1822
1915	3,8	0,8		43,2	72	1819

$\alpha = 7{,}5$
$\beta = 0{,}024$
$\gamma = 1{,}323$
$\delta = 2205$

$\theta = 1830$

AJUSTEMENT DE LA MORTALITE SUEDOISE

$x = 10$ S. M.

A	B	C	D	E	F	G
1830	5,1	2,6	0,039	13,4	105	1767
1835	5,0	2,5	0,0	13,5	104	1771
1840	5,0	2,5	0,0	13,5	104	1776
1845.....	5,0	2,5	0,040	13,5	104	1781
1850	4,9	2,4	0,0	13,6	103	1785
1855	4,9	2,4	0,0	13,6	103	1790
1860	4,9	2,4	0,0	13,6	103	1795
1865	4,9	2 4	0,041	13,6	103	1800
1870	4,8	2,3	0,0	13,7	102	1804
1875	4,8	2,3	0,0	13,7	102	1809
1880	4,8	2,3	0,044	13,7	102	1814
1885	4,7	2,2	0,137	13,8	100	1817
1890	4.4	1,9	0,316	14,1	97	1819
1895	3,8	1,3	0,230	14,7	86	1813
1900	3,5	1,0	0.300	15,0	79	1811
1905	3,2	0,7	0,286	15,3	70	1807
1910	3,0	0,5	0,600	15,5	60	1802
1915	2,8	0,2		15,8	39	1786

$\alpha = 1,7$ $\theta = 1797$
$\beta = 0,041$
$\gamma = 0,227$
$\delta = 56,8$

AJUSTEMENT DE LA MORTALITE SUEDOISE

$x = 15$ S. M.

A	B	C	D	E	F	G
1830	4,8	1,8	0,055	7,2	97	1759
1835	4,7	1,7	0,059	7,3	96	1763
1840	4,6	1,6	0,062	7,4	94	1766
1845	4,5	1,5	0,0	7,5	92	1769
1850	4,5	1,5	0,133	7,5	92	1774
1855	4,3	1,3	0,154	7,7	88	1775
1860	4,1	1,1	0,090	7,9	83	1775
1865	4,0	1,0	0,200	8,0	81	1778
1870	3,8	0,8	0,250	8,2	75	1777
1875	3,6	0,6	0,0	8,4	67	1774
1880	3,6	0,6	0,166	8,4	67	1779
1885	3,5	0,5	0,0	8,5	62	1779
1890	3,5	0,5	0,200	8,5	62	1784
1895	3,4	0,4	0,0	8,6	56	1783
1900	3,4	0,4	0,250	8,6	56	1788
1905	3,3	0,3	0,0	8,7	47	1784
1910	3,3	0,3	0,330	8,7	47	1789
1915	3,2	0,2		8,8	39	1786

$\alpha = 1,0$
$\beta = 0,032$
$\gamma = 0,087$
$\delta = 34,5$

$\theta = 1749$

AJUSTEMENT DE LA MORTALITE SUEDOISE

$x = 20$ S. M.

A	B	C	D	E	F	G
1830	6,7	0,6	0,0	9,4	67	1729
1835	6,7	0,6	0,0	9,4	67	1734
1840	6,7	0,6	0,166	9,4	67	1739
1845	6,6	0,5	0,0	9,5	62	1739
1850	6,6	0,5	0,0	9,5	62	1744
1855	6,6	0,5	0,200	9,5	62	1749
1860	6,5	0,4	0,0	9,6	56	1748
1865	6,5	0,4	0,0	9,6	56	1753
1870	6,5	0,4	0,250	9,6	56	1758
1875	6,4	0,3	0,0	9,7	50	1757
1880	6,4	0,3	0,0	9,7	50	1762
1885	6,4	0,3	0,333	9,7	50	1767
1890	6,3	0,2	0,0	9,8	39	1761
1895	6,3	0,2	0,0	9,8	39	1766
1900	6,3	0,2	0,500	9,8	39	1771
1905	6,2	0,1	0,0	9,9	17	1754
1910	6,2	0,1	0,0	9,9	17	1759
1915	6,2	0,1		9,9	17	1764

$\alpha = 0{,}4$
$\beta = 0{,}058$
$\gamma = 0{,}016$
$\delta = 0{,}40$

$\theta = 1753$

AJUSTEMENT DE LA MORTALITE SUEDOISE

$x = 25$ S. M.

A	B	C	D	E	F	G
1830	8,6	2,2	0,272	22,8	99	1761
1835	8,0	1,6	0,190	23,4	90	1757
1840	7,7	1,3	0,077	23,7	86	1758
1845	7,6	1,2	0,083	23,8	83	1760
1850	7,5	1,1	0,182	23,9	81	1763
1855	7,3	0,9	0,0	24,1	76	1763
1860	7,3	0,9	0,111	24,1	76	1768
1865	7,2	0,8	0,125	24,2	73	1770
1870	7,1	0,7	0,286	24,3	70	1772
1875	6,9	0,5	0,400	24,5	60	1767
1880	6,7	0,3	0,0	24,7	47	1759
1885	6,7	0,3	0,0	24,7	47	1764
1890	6,7	0,3	0,0	24,7	47	1769
1895	6,7	0,3	0,333	24,7	47	1774
1900	6,6	0,2	0,0	24,8	39	1771
1905	6,6	0,2	0,0	24,8	39	1776
1910	6,6	0,2	0,0	24,8	39	1781
1915	6,6	0,2		24,8	39	1786

$\alpha = 1,1$ $\theta = 1740$
$\beta = 0,041$
$\gamma = 0,036$
$\delta = 25,2$

AJUSTEMENT DE LA MORTALITE SUEDOISE

$x = 30$ S. M.

A	B	C	D	E	F	G
1830	10,7	4,2	0,119	43,3	115	1777
1835	10,2	3,7	0,190	43,8	111	1778
1840	9,5	3,0	0,200	44,5	106	1778
1845	8,9	2,4	0,125	45,1	100	1777
1850	8,6	2,1	0,143	45,4	96	1778
1855	8,3	1,8	0,222	45,7	93	1780
1860	7,9	1,4	0,143	46,1	90	1782
1865	7,7	1,2	0,166	46,3	83	1780
1870	7,5	1,0	0,200	46,5	79	1781
1875	7,3	0,8	0,125	46,7	73	1780
1880	7,2	0,7	0,286	46,8	69	1781
1885	7,0	0,5	0,200	47,0	62	1779
1890	6,9	0,4	0,250	47,1	56	1778
1895	6,8	0,3	0,0	47,2	47	1774
1900	6,8	0,3	0,333	47,2	47	1779
1905	6,7	0,2	0,0	47,3	39	1776
1910	6,7	0,2	0,0	47,3	39	1781
1915	6,7	0,2		47,3	39	1786

$\alpha = 1,7$ $\theta = 1779$
$\beta = 0,039$
$\gamma = 0,106$ = [illegible]
$\delta = 284,6$

AJUSTEMENT DE LA MORTALITE SUEDOISE

$x = 35$ S. M.

A	B	C	D	E	F	G
1830	12,7	6,1	0,033	63,3	124	1786
1835	12,5	5,9	0,085	63,5	122	1789
1840	12,0	5,4	0,091	64,0	121	1793
1845	11,5	4,9	0,143	64,5	118	1795
1850	10,8	4,2	0,190	65,2	114	1796
1855	10,0	3,4	0,176	66,0	109	1796
1860	9,4	2,8	0,180	66,6	104	1796
1865	8,9	2,3	0,174	67,1	99	1796
1870	8,5	1,9	0,263	67,5	94	1796
1875	8,0	1,4	0,214	68,0	87	1794
1880	7,7	1,1	0,182	68,3	80	1792
1885	7,5	0,9	0,222	68,5	75	1792
1890	7,3	0,7	0,429	68,7	69	1791
1895	7,0	0,4	0,250	69,0	56	1783
1900	6,9	0,3	0,0	69,1	47	1779
1905	6,9	0,3	0,333	69,1	47	1784
1910	6,8	0,2	0,0	69,2	39	1781
1915	6,8	0,2		69,2	39	1786

$\alpha = 2,8$ $\theta = 1790$
$\beta = 0,040$
$\gamma = 0,474$
$\delta = 839$

AJUSTEMENT DE LA MORTALITE SUEDOISE

$x = 40$ S. M.

A	B	C	D	E	F	G
1830	15,0	8,2	0,024	78,5	131	1793
1835	14,8	8,0	0,025	78,7	130	1797
1840	14,6	7,8	0,038	78,9	129	1801
1845	14,3	7,5	0,080	79,2	128	1805
1850	13,7	6,9	0,101	79,8	126	1808
1855	13,0	6,2	0,130	80,5	124	1811
1860	11,8	5,0	0,180	81,7	118	1810
1865	10,9	4,1	0,195	82,6	113	1810
1870	10,1	3.3	0,151	83,4	108	1810
1875	9,6	2,8	0,143	83,9	103	1811
1880	9,2	2,4	0,168	84,3	99	1811
1885	8,8	2,0	0,250	84,7	94	1811
1890	8,3	1,5	0,330	85,2	88	1810
1895	7,8	1,0	0,300	85,7	78	1805
1900	7,6	0,8	0,375	85,9	72	1804
1905	7,3	0,5	0,400	86,2	62	1799
1910	7,1	0,3	0,333	86,4	51	1793
1915	7,0	0,2		86,5	34	1781

$\alpha = 4,0$
$\beta = 0,038$
$\gamma = 1,049$
$\delta = 2287$

$\theta = 1804$

AJUSTEMENT DE LA MORTALITE SUEDOISE

$x = 45$ S. M.

A	B	C	D	E	F	G
1830	19,0	10,8	0,055	94,2	138	1800
1835	18,4	10,2	0,039	94,8	137	1804
1840	18,0	9,8	0,020	95,2	136	1808
1845	17,8	9,6	0,052	95,4	135	1812
1850	17,3	9,1	0,088	95,9	134	1816
1855	16,5	8,3	0,120	96,7	131	1818
1860	15,5	7,3	0,205	97,7	128	1820
1865	14,0	5,8	0,172	99,2	120	1817
1870	13,0	4,8	0,208	100,2	117	1819
1875	12,0	3,8	0,210	101,2	111	1818
1880	11,2	3,0	0,166	102,0	105	1817
1885	10,7	2,5	0,120	102,5	100	1817
1890	10,4	2,2	0,276	102,8	97	1819
1895	9,8	1,6	0,0	103,4	88	1815
1900	9,8	1,6	0,562	103,4	88	1820
1905	8,9	0,7	0,286	104,3	70	1807
1910	8,7	0,5	0,600	104,5	62	1804
1915	8,4	0,2		104,8	39	1786

$\alpha = 5{,}6$ $\theta = 1812$
$\beta = 0{,}040$
$\gamma = 1{,}460$
$\delta = 3234$

AJUSTEMENT DE LA MORTALITE SUEDOISE

$x = 50$ S. M.

A	B	C	D	E	F	G
1830 ...	24,5	14,1	0,036	119,9	145	1807
1835	24,0	13,6	0,073	120,4	143	1810
1840	23,0	12,6	0,040	121,4	142	1814
1845	22,5	12,1	0,083	121,9	141	1818
1850	21,5	11,1	0,045	122,9	138	1820
1855	21,0	10,6	0,208	123,4	137	1824
1860	19,2	8,1	0,095	125,6	131	1823
1865	18,0	7,6	0,132	126,4	128	1825
1870	17,0	6,6	0,303	127,4	125	1827
1875	15,0	4,6	0,217	129,4	116	1823
1880	14,0	3,6	0,166	130,4	109	1821
1885	13,4	3,0	0,200	131,0	105	1822
1890	12,8	2,4	0,250	131 6	103	1825
1895	12,2	1,8	0,222	132,2	91	1818
1900	11,8	1,4	0,286	132,6	85	1817
1905	11,4	1,0	0,400	133,0	79	1816
1910	11,0	0,6	0,500	133,4	62	1804
1915	10,7	0,3		133,7	47	1794

$\alpha = 6{,}8$
$\beta = 0{,}038$
$\gamma = 1{,}651$
$\delta = 4633$

$\theta = 1817$

AJUSTEMENT DE LA MORTALITE SUEDOISE

$x = 55$ S. M.

A	B	C	D	E	F	G
1830	31,0	17,2	0,087	154,8	149	1811
1835	29,5	15,7	0,032	156,3	147	1814
1840	29,0	15,2	0,066	156,8	146	1818
1845	28,0	14,2	0,035	157,8	144	1821
1850	27,5	13,7	0,072	158,3	143	1825
1855	26,5	12,7	0,080	159,3	141	1828
1860	25,5	11,7	0,171	160,3	139	1831
1865	23,5	9,7	0,258	162,3	134	1831
1870	21,0	7,2	0,208	164,8	127	1829
1875	19,5	5,7	0,176	166,3	121	1828
1880	18,5	4,7	0,192	167,3	114	1826
1885	17,6	3,8	0,211	168,2	111	1828
1890	16,8	3,0	0,200	169,0	105	1827
1895	16,2	2,4	0,291	169,6	99	1826
1900	15,5	1,7	0,353	170,3	91	1823
1905	14,9	1,1	0,282	170,9	78	1815
1910	14,6	0,8	0,250	171,2	74	1816
1915	14,4	0,6		171,4	69	1816

$\alpha = 8{,}3$ $\theta = 1823$
$\beta = 0{,}035$
$\gamma = 1{,}590$
$\delta = 9081$

AJUSTEMENT DE LA MORTALITE SUEDOISE

$x = 60$ S. M.

A	B	C	D	E	F	G
1830	41,1	21,3	0,028	198,7	155	1817
1835	40,5	20,7	0,024	199,3	154	1821
1840	40,0	20,2	0,025	199,8	153	1825
1845	39,5	19,7	0,026	200,3	152	1829
1850	39,0	19,2	0,104	200,8	151	1833
1855	37,0	17,2	0,117	202,8	149	1836
1860	35,0	15,2	0,264	204,8	146	1838
1865	31,0	11,2	0,134	208,8	138	1835
1870	29,5	9,7	0,206	210,3	134	1836
1875	27,5	7,7	0,195	212,3	128	1835
1880	26,0	6,2	0,242	213,8	123	1835
1885	24,5	4,7	0,149	215,3	116	1833
1890	23,8	4,0	0,150	216,0	112	1834
1895	23,2	3,4	0,353	216,6	108	1933
1900	22,0	2,2	0,455	217,8	97	1829
1905	21,0	1,2	0,170	218,8	84	1821
1910	20,8	1,0	0,600	219,0	80	1822
1915	20,2	0,4		219,4	67	1814

$\alpha = 10,9$ $\theta = 1829$
$\beta = 0,038.$
$\gamma = 2,863$
$\delta = 15952.$

AJUSTEMENT DE LA MORTALITE SUEDOISE

$x = 65$ S. M.

A	B	C	D	E	F	G
1830	60,0	31	0,097	240	164	1826
1835	57,0	28	0,071	243	160	1827
1840	55,0	26	0,077	245	159	1831
1845	53,0	24	0,083	247	157	1834
1850	51,0	22	0,045	249	155	1837
1855	50,0	21	0,071	250	153	1840
1860	48,5	19,5	0,077	251	152	1844
1865	47,0	18	0,277	253	149	1846
1870	42,0	13	0,154	258	141	1843
1875	40,0	11	0,273	260	137	1844
1880	37,0	8	0,150	263	129	1841
1885	35,8	6,8	0,265	264	126	1843
1890	34,0	5	0,200	266	118	1840
1895	33,0	4	0,250	267	112	1839
1900	32,0	3	0,333	268	104	1836
1905	31,0	2	0,500	269	93	1830
1910	30,0	1	0,0	270	79	1821
1915	30,0	1		270	79	1826

$\alpha = 15,1$ $\theta = 1836$
$\beta = 0,036$
$\gamma = 2,863$
$\delta = 22608$

AJUSTEMENT DE LA MORTALITE SUEDOISE

$x = 70$ S. M.

A	B	C	D	E	F	G
1830	83	38	0,026	286	169	1831
1835	82	37	0,054	287	168	1835
1840	80	35	0,028	289	167	1839
1845	79	34	0,029	290	166	1843
1850	78	33	0,030	291	165	1847
1855	77	32	0,062	292	164	1851
1860	75	30	0,066	294	163	1855
1865	73	28	0,143	296	162	1859
1870	69	24	0,250	300	157	1859
1875	63	18	0,444	306	149	1856
1880	55	10	0,200	314	135	1847
1885	53	8	0,250	316	127	1844
1890	51	6	0,333	318	122	1844
1895	49	4	0,500	320	113	1840
1900	47	2	0,0	322	94	1826
1905	47	2	0,500	322	94	1831
1910	46	1	0,0	323	77	1819
1915	46	1		323	77	1824

$\alpha = 23$
$\beta = 0{,}039$
$\gamma = 5{,}796$
$\delta = 36780$

$\theta = 1842$

AJUSTEMENT DE LA MORTALITE SUEDOISE

$x = 75$ S. M.

A	B	C	D	E	F	G
1830	124	47	0,043	326	175	1837
1835	122	45	0,044	328	173	1840
1840	120	43	0,069	330	172	1844
1845	117	40	0,050	333	170	1847
1850	115	38	0,079	335	169	1851
1855	112	35	0,086	338	166	1853
1860	109	32	0,125	341	164	1856
1865	105	28	0,250	345	161	1858
1870	98	21	0,190	352	153	1855
1875	94	17	0,235	356	148	1855
1880	90	13	0,461	360	141	1853
1885	84	7	0,286	366	125	1842
1890	82	5	0,200	368	116	1838
1895	81	4	0,250	369	112	1839
1900	80	3	0,333	370	104	1836
1905	79	2	0,0	371	93	1830
1910	79	2	0,0	371	93	1835
1915	79	2		371	93	1840

$\alpha = 25$
$\beta = 0,036$
$\gamma = 4,021$
$\delta = 54495$

$\theta = 1845$

AJUSTEMENT DE LA MORTALITE SUEDOISE

$x = 80$ S. M.

A	B	C	D	E	F	G
1830	185	62	0,032	360	182	1844
1835	183	60	0,033	362	181	1848
1840	181	58	0,052	364	180	1852
1845	178	55	0,054	367	179	1856
1850	175	52	0,077	370	177	1859
1855	171	48	0,083	374	175	1862
1860	167	44	0,114	378	172	1864
1865	162	39	0.102	383	169	1866
1870	158	35	0,114	387	166	1868
1875	154	31	0,129	391	163	1870
1880	150	27	0,370	395	159	1871
1885	140	17	0,136	405	148	1865
1890	138	15	0,400	407	142	1864
1895	132	9	0,333	413	132	1859
1900	129	6	0,666	416	121	1853
1905	125	2	0,0	420	96	1833
1910	125	2	0,0	420	96	1838
1915	125	2		420	96	1843

$\alpha = 37$ $\theta = 1856$
$\beta = 0{,}036$
$\gamma = 7{,}95$
$\delta = 76275$

AJUSTEMENT DE LA MORTALITE SUEDOISE

$x = 85$ S. M.

A	B	C	D	E	F	G
1830	280	87	0,057	390	191	1853
1835	275	82	0,060	395	189	1856
1840	270	77	0,078	400	188	1860
1845	264	71	0,070	406	185	1862
1850	259	66	0,136	411	183	1865
1855	250	57	0,140	420	179	1866
1860	242	49	0,163	428	175	1867
1865	234	41	0,171	436	170	1867
1870	227	34	0,206	443	165	1867
1875	220	27	0,111	450	159	1866
1880	217	24	0,208	453	157	1869
1885	212	19	0,370	458	150	1867
1890	205	12	0,417	465	139	1861
1895	200	7	0,429	470	126	1853
1900	197	4	0,250	473	113	1845
1905	196	3	0,333	474	103	1840
1910	195	2	0,0	475	93	1835
1915	195	2		475	93	1840

$\alpha = 41$ $\theta = 1858$
$\beta = 0,040$
$\gamma = 9,384$
$\delta = 191490$

AJUSTEMENT DE LA MORTALITE SUEDOISE

$x = 90$ S. M.

A	B	C	D	E	F	G
1830	332	47	0,021	458	174	1836
1835	331	46	0,022	459	173	1840
1840	330	45	0,044	460	172	1844
1845	328	43	0,046	462	171	1848
1850	326	41	0,049	464	170	1852
1855	324	39	0,077	466	169	1856
1860	321	36	0,083	469	167	1859
1865	318	33	0,091	472	164	1861
1870	315	30	0,100	475	162	1864
1875	312	27	0,148	478	159	1866
1880	308	23	0,130	482	155	1867
1885	305	20	0,150	485	151	1868
1890	302	17	0,177	488	148	1870
1895	299	14	0,286	491	142	1859
1900	295	10	0,200	495	132	1864
1905	293	8	0,250	497	128	1865
1910	291	6	0,333	499	121	1863
1915	290	4		501	112	1859

$\alpha = 29$ $\theta = 1858$
$\beta = 0{,}026$
$\gamma = 3{,}946$
$\delta = 54196$

AJUSTEMENT DE LA MORTALITE SUEDOISE

$x = 0$ S. F.

A	B	C	D	E	F	G
1830	150,5	101.0	0,026	561	277	1876
1835	147,9	98,4	0,025	564	276	1880
1840	145,4	95,9	0,030	566	275	1884
1845	142,5	93,0	0,030	569	274	1888
1850	139,7	90,2	0,035	572	273	1892
1855	136,5	87,0	0,040	575	271	1895
1860	133,0	83,5	0,054	578	270	1899
1865	128,5	79,0	0,052	583	268	1902
1870	124,4	74,9	0,073	587	266	1905
1875	118,9	69,4	0,092	593	263	1907
1880	112,5	63,0	0,108	599	259	1908
1885	105,7	56,2	0,137	606	255	1909
1890	98,0	48,5	0,171	613	250	1909
1895	89,7	40,2	0,155	622	243	1907
1900	83,5	34,0	0,256	628	237	1906
1905	74,8	25,3	0,288	637	227	1901
1910	67,5	18,0	0,206	644	214	1893
1915	63,8	14,3		618	207	1891

$\alpha = 68$ $\theta = 1897$
$\beta = 0{,}021$
$\gamma = 6{,}895$
$\delta = 195109$

AJUSTEMENT DE LA MORTALITE SUEDOISE

$x = 5$ S. F.

A	B	C	D	E	F	G
1830	10,3	6,8	0,0	33,2	188	1787
1835	10,3	6,8	0,015	33,2	188	1792
1840	10,2	6,7	0,0	33,3	186	1795
1845	10,2	6,7	0,015	33,3	186	1800
1850	10,1	6,6	0,0	33,4	186	1805
1855	10,1	6,6	0,015	33,4	186	1810
1860	10,0	6,5	0,0	33,5	186	1815
1865	10,0	6,5	0,015	33,5	186	1820
1870	9,9	6,4	0,016	33,6	185	1824
1875	9,8	6,3	0,016	33,7	184	1828
1880	9,7	6,2	0,016	33,8	184	1833
1885	9,6	6,1	0,033	33,9	183	1837
1890	9,4	5,9	0,220	34,1	182	1841
1895	8,1	4,6	0,348	35,4	172	1836
1900	6,5	3,0	0,433	37,0	157	1826
1905	5,2	1,7	0,530	38,3	136	1810
1910	4,3	0,8	0,375	39,2	110	1789
1915	4,0	0,5		39,5	95	1779

$\alpha = 5,2$ $\theta = 1813$
$\beta = 0,031$
$\gamma = 0,864$
$\delta = 662,86$

AJUSTEMENT DE LA MORTALITE SUEDOISE

$x = 10$ S. F.

A	B	C	D	E	F	G
1830	5,1	2,6	0,038	11,9	154	1753
1835	5,0	2,5	0,0	12,0	154	1758
1840	5,0	2,5	0,040	12,0	154	1763
1845	4,9	2,4	0,0	12,1	153	1767
1850	4,9	2,4	0,042	12,1	153	1772
1855	4,8	2,3	0,044	12,2	151	1775
1860	4,7	2,2	0,0	12,3	149	1778
1865	4,7	2,2	0,046	12,3	149	1783
1870	4,6	2,1	0,0	12,4	147	1786
1875	4,6	2,1	0,048	12,4	147	1791
1880	4,5	2,0	0,0	12,5	145	1794
1885	4,5	2,0	0,050	12,5	145	1799
1890	4,4	1,9	0,210	12,6	143	1802
1895	4,0	1,5	0,333	13,0	135	1799
1900	3,5	1,0	0,200	13,5	120	1789
1905	3,3	0,8	0,125	13,7	111	1785
1910	3,2	0,7	0,286	13,8	106	1785
1915	3,0	0,5		14,0	95	1779

$\alpha = 1{,}8$ $\theta = 1781$
$\beta = 0{,}024$
$\gamma = 0{,}115$
$\delta = 59{,}76$

AJUSTEMENT DE LA MORTALITE SUEDOISE

$x = 15$ S. F.

A	B	C	D	E	F	G
1830	5,0	1,0	0,100	8,0	122	1721
1835	4,9	0,9	0,111	8,1	117	1721
1840	4,8	0,8	0,125	8,2	113	1722
1845	4,7	0,7	0,0	8,3	108	1722
1850	4,7	0,7	0,143	8,3	108	1727
1855	4,6	0,6	0,0	8,4	102	1726
1860	4,6	0,6	0,166	8,4	102	1731
1865	4,5	0,5	0,0	8,5	97	1731
1870	4,5	0,5	0,200	8,5	97	1736
1875	4,4	0,4	0,0	8,6	88	1732
1880	4,4	0,4	0,0	8,6	88	1737
1885	4,4	0,4	0,250	8,6	88	1742
1890	4,3	0,3	0,333	8,7	77	1736
1895	4,2	0,2	0,0	8,8	65	1729
1900	4,2	0,2	0,0	8,8	65	1734
1905	4,2	0,2	0,0	8,8	65	1739
1910	4,2	0,2	0,500	8,8	65	1744
1915	4,1	0,1		8,9	37	1721

$\alpha = 0{,}6$ $\theta = 1730$
$\beta = 0{,}043$
$\gamma = 0{,}052$
$\delta = 4{,}8$

AJUSTEMENT DE LA MORTALITE SUEDOISE

$x = 20$ S. F.

A	B	C	D	E	F	G
1830	5,8	1,1	0,091	12,2	123	1722
1835	5,7	1,0	0,100	12,3	120	1724
1840	5,6	0,9	0,111	12,4	116	1725
1845	5,5	0,8	0,0	12,5	111	1725
1850	5,5	0,8	0,0	12,5	111	1730
1855	5,5	0,8	0,125	12,5	111	1735
1860	5,4	0,7	0,143	12,6	108	1737
1865	5,3	0,6	0,166	12,7	103	1737
1870	5,2	0,5	0,0	12,8	97	1736
1875	5,2	0,5	0,200	12,8	97	1741
1880	5,1	0,4	0,0	12,9	88	1737
1885	5,1	0,4	0,250	12,9	88	1742
1890	5,0	0,3	0,0	13,0	77	1736
1895	5,0	0,3	0,333	13,0	77	1741
1900	4,9	0,2	0,0	13,1	65	1734
1905	4,9	0,2	0,500	13,1	65	1739
1910	4,8	0,1	0,0	13,2	46	1725
1915	4,8	0,1		13,2	46	1730

$\alpha = 0,6$
$\beta = 0,004$
$\gamma = 0,061$
$\delta = 7,65$

$\theta = 1733$

AJUSTEMENT DE LA MORTALITE SUEDOISE

$x = 25$ S. F.

A	B	C	D	E	F	G
1830	7,1	2,2	0,137	23,4	147	1746
1835	6,8	1,9	0,158	23,7	141	1745
1840	6,5	1,6	0,125	24,0	135	1744
1845	6,3	1,4	0,143	24,2	130	1744
1850	6,1	1,2	0,083	24,4	125	1744
1855	6,0	1,1	0,091	24,5	122	1746
1860	5,9	1,0	0,100	24,6	119	1748
1865	5,8	0,9	0,0	24,7	115	1749
1870	5.8	0,9	0,111	24,7	115	1754
1875	5,7	0.8	0,0	24,8	110	1754
1880	5,7	0,8	0,0	24,8	110	1759
1885	5,7	0,8	0,125	24,8	110	1764
1890	5,6	0,7	0,143	24,9	106	1765
1895	5,5	0,6	0.166	25,0	100	1764
1900	5,4	0,5	0,200	25,1	95	1764
1905	5,3	0,4	0,250	25,2	88	1762
1910	5,2	0,3	0,333	25,3	77	1756
1915	5,1	0,2		25,4	65	1749

$\alpha = 1{,}0$ $\theta = 1753$
$\beta = 0{,}031$
$\gamma = 0{,}051$
$\delta = 54{,}9$

AJUSTEMENT DE LA MORTALITE SUEDOISE

$x = 30$ S. F.

A	B	C	D	E	F	G
1830	8,6	3,3	0,121	40,4	160	1759
1835	8,2	2,9	0,103	40,8	155	1759
1840	7,9	2,6	0,115	41,1	151	1760
1845	7,6	2,3	0,087	41,4	147	1761
1850	7,4	2,1	0,095	41,6	143	1762
1855	7 2	1,9	0,105	41,8	140	1764
1860	7,0	1,7	0,059	42,0	136	1765
1865	6,9	1,6	0,062	42,1	134	1768
1870	6,8	1,5	0,133	42,2	132	1771
1875	6,6	1,3	0,154	42,4	127	1771
1880	6,4	1,1	0,091	42,6	122	1771
1885	6,3	1,0	0,100	42,7	118	1772
1890	6,2	0,9	0,111	42,8	115	1774
1895	6,1	0,8	0,125	42,9	111	1775
1900	6,0	0,7	0,143	43,0	105	1774
1905	5,9	0,6	0,166	43,1	100	1774
1910	5,8	0,5	0,0	43,2	93	1772
1915	5,8	0,5		43,2	93	1777

$\alpha = 1,5$ $\theta = 1768$
$\beta = 0,022$
$\gamma = 0,023$
$\delta = 155,6$

AJUSTEMENT DE LA MORTALITE SUEDOISE

$x = 35$ S. F.

A	B	C	D	E	F	G
1830	10,1	4,7	0,085	59,4	172	1771
1835	9,7	4,3	0,139	59,8	168	1772
1840	9,1	3,7	0,109	60,4	163	1772
1845	8,7	3,3	0,091	60,8	159	1773
1850	8,4	3,0	0,066	61,1	156	1775
1855	8,2	2,8	0,071	61,3	153	1777
1860	8,0	2,6	0,077	61,5	150	1779
1865	7,8	2,4	0,041	61,7	148	1782
1870	7,7	2,3	0,087	61,8	146	1785
1875	7,5	2,1	0,095	62,0	143	1787
1880	7,3	1,9	0,052	62,2	140	1789
1885	7,2	1,8	0,111	62,3	138	1792
1890	7,0	1,6	0,062	62,5	135	1794
1895	6,9	1,5	0,133	62,6	132	1796
1900	6,7	1,3	0,154	62,8	127	1796
1905	6,5	1,1	0,273	63,0	120	1794
1910	6,2	0,8	0,250	63,3	111	1790
1915	6,0	0,6		63,5	88	1772

$\alpha = 2{,}4$
$\beta = 0{,}022$
$\gamma = 0{,}101$
$\delta = 313{,}3$

$\theta = 1783$

AJUSTEMENT DE LA MORTALITE SUEDOISE

$x = 40$ S. F.

A	B	C	D	E	F	G
1830.....	11,7	5,9	0,085	71,3	179	1778
1835.....	11,2	5,4	0,074	71,8	176	1780
1840.....	10,8	5,0	0,080	72,2	173	1782
1845.....	10,4	4,6	0,065	72,6	170	1784
1850.....	10,1	4,3	0,093	72,9	168	1787
1855....	9,7	3,9	0,102	73,3	164	1788
1860.....	9,3	3,5	0,086	73,7	160	1789
1865.....	9,0	3,2	0,091	74,0	157	1791
1870.....	8,7	2,9	0,103	74,3	154	1793
1875.....	8,4	2,6	0,039	74,6	150	1794
1880.....	8,3	2,5	0,080	74,7	149	1798
1885.....	8,1	2,3	0,130	74,9	147	1801
1890...	7,8	2,0	0,100	75,2	142	1801
1895.....	7,6	1,8	0,120	75,4	138	1802
1900.....	7,3	1,5	0,133	75,7	132	1801
1905....	7,1	1,3	0,231	75,9	127	1801
1910.....	6,8	1,0	0,400	76,2	117	1796
1915.....	6,4	0,6		76,6	102	1786

$\alpha = 3{,}2$
$\beta = 0{,}024$
$\gamma = 0{,}230$
$\delta = 569{,}8$

$\theta = 1792$

AJUSTEMENT DE LA MORTALITÉ SUÉDOISE

$x = 45$ S. F.

A	B	C	D	E	F	G
1830......	13,8	7,4	0,081	90,2	187	1786
1835......	13,2	6,8	0,088	90,8	184	1788
1840......	12,6	6,2	0,097	91,4	180	1789
1845......	12,0	5,6	0,089	92,0	177	1791
1850......	11,5	5,1	0,098	92,5	173	1792
1855......	11,0	4,6	0,087	93,0	170	1794
1860......	10,6	4,2	0,095	93,4	167	1796
1865......	10,2	3,8	0,105	93,8	164	1798
1870......	9,8	3,4	0,118	94,2	159	1798
1875......	9,4	3,0	0,133	94,6	155	1799
1880......	9,0	2,6	0,038	95,0	151	1800
1885......	8,9	2,5	0,040	95.1	149	1803
1890......	8,8	2,4	0,125	95,2	147	1806
1895......	8,5	2,1	0,190	95,5	143	1807
1900......	8,1	1,7	0,235	95,9	136	1805
1905......	7,7	1,3	0,231	96,3	128	1802
1910......	7,4	1,0	0,300	96,6	117	1796
1915......	7,1	0,7		96,9	105	1789

$\alpha = 3{,}7$ $\theta = 1797$
$\beta = 0{,}025$
$\gamma = 0{,}268$
$\delta = 1032$

AJUSTEMENT DE LA MORTALITE SUEDOISE

$x = 50$ S. F.

A	B	C	D	E	F	G
1830.....	17,4	10,4	0,106	113,6	198	1797
1835.....	16,3	9,3	0,086	114,7	194	1798
1840.....	15,5	8,5	0,094	115,5	191	1800
1845.....	14,7	7,7	0,065	116,3	188	1802
1850.....	14,2	7,2	0,069	116,8	185	1804
1855.....	13,7	6,7	0,060	117,3	183	1807
1860.....	13,3	6,3	0,111	117,7	181	1810
1865.....	12,6	5,6	0,107	118,4	176	1810
1870.....	12,0	5,0	0,120	119,0	173	1812
1875.....	11,4	4,4	0,114	119,6	168	1812
1880.....	10,9	3,9	0,103	120,1	163	1812
1885....	10,5	3,5	0,086	120.5	160	1814
1890.....	10,2	3,2	0,125	120,8	156	1815
1895.....	9,8	2,8	0,143	121,2	152	1816
1900.....	9,4	2,4	0,166	121,6	146	1815
1905.....	9,0	2,0	0,300	122,0	140	1814
1910.....	8,4	1,4	0,500	122,6	127	1806
1915.....	7,7	0,7		123,3	108	1792

$\alpha = 5{,}3$
$\beta = 0{,}028$
$\gamma = 0{,}558$
$\delta = 1971$

$\theta = 1808$

AJUSTEMENT DE LA MORTALITE SUEDOISE

$x = 55$ S. F.

A	B	C	D	E	F	G
1830......	23,0	14,2	0,070	143,0	209	1808
1835......	22,0	13,2	0,076	144,0	207	1811
1840......	21,0	12,2	0,082	145,0	204	1813
1845......	20,0	11,2	0,090	146,0	201	1815
1850......	19,0	10,2	0,069	147,0	198	1817
1855......	18,3	9,5	0,052	147,7	194	1818
1860......	17,8	9,0	0,088	148,2	193	1822
1865......	17,0	8,2	0,122	149,0	189	1823
1870......	16,0	7,2	0,139	150,0	185	1824
1875......	15,0	6,2	0,161	151,0	180	1824
1880......	14,0	5,2	0,058	152,0	173	1822
1885......	13,7	4,9	0,102	152,3	171	1825
1890......	13,2	4,4	0,045	152,8	168	1827
1895......	13,0	4,2	0,120	153,0	165	1829
1900......	12,5	3,7	0,081	153,5	162	1831
1905......	12,2	3,4	0,296	153,8	159	1833
1910......	11,2	2,4	0,208	154,8	148	1827
1915......	9,7	0,9		156,3	115	1799

$\alpha = 7{,}6$ $\theta = 1820$
$\beta = 0.022$
$\gamma = 0.367$
$\delta = 2716$

AJUSTEMENT DE LA MORTALITÉ SUEDOISE

$x = 60$ S. F.

A	B	C	D	E	F	G
1830......	32,0	17,0	0,118	180,0	215	1814
1835......	30,0	15,0	0,066	182,0	210	1814
1840......	29,0	14,0	0,079	183,0	208	1817
1845......	27,9	12,9	0,085	184,1	205	1819
1850......	26,8	11,8	0,093	185,2	202	1821
1855......	25,7	10,7	0,103	186,3	198	1822
1860......	24,6	9,6	0,125	187,4	194	1823
1865......	23,4	8,4	0,131	188,6	189	1823
1870......	22,3	7,3	0,164	189,7	185	1824
1875......	21,1	6,1	0,180	190,9	179	1823
1880......	20,0	5,0	0,180	192,0	172	1821
1885......	19,1	4,1	0,220	192,9	165	1819
1890......	18,2	3,2	0,156	193,8	158	1817
1895......	17,7	2,7	0,185	194,3	151	1815
1900......	17,2	2,2	0,182	194,8	143	1812
1905......	16,8	1,8	0,168	195,2	136	1810
1910......	16,5	1,5	0,333	195,5	133	1812
1915......	16,0	1,0		196,0	117	1801

$\alpha = 7,8$
$\beta = 0,030$
$\gamma = 0,828$
$\delta = 6916$

$\theta = 1817$

AJUSTEMENT DE LA MORTALITE SUEDOISE

$x = 65$ S. F.

A	B	C	D	E	F	G
1830.....	48	24	0,0	222	227	1826
1835.....	48	24	0,042	222	227	1831
1840.....	47	23	0,043	223	225	1834
1845.....	46	22	0,090	224	224	1838
1850.....	44	20	0,100	226	221	1840
1855.....	42	18	0,222	228	217	1841
1860	38	14	0,143	232	207	1836
1865	36	12	0,166	234	202	1836
1870	34	10	0,200	236	195	1834
1875	32	8	0,125	238	188	1832
1880	31	7	0,286	239	183	1832
1885	29	5	0,200	241	172	1826
1890	28	4	0,250	242	165	1824
1895	27	3	0,333	243	153	1817
1900	26	2	0,500	244	140	1809
1905	25	1	0,0	245	117	1791
1910	25	1	0,0	245	117	1796
1915	25	1		245	117	1801

$\alpha = 12$ $\theta = 1825$
$\beta = 0,038$
$\gamma = 2,035$
$\delta = 10504$

AJUSTEMENT DE LA MORTALITE SUEDOISE

$x = 70$ S. F.

A	B	C	D	E	F	G
1830	75	35	0,029	271	240	1839
1835	74	34	0,059	272	239	1843
1840	72	32	0,068	274	237	1846
1845	70	30	0,033	276	235	1849
1850	69	29	0,103	277	233	1852
1855	66	26	0,115	280	229	1853
1860	63	23	0,174	283	225	1854
1865	59	19	0,211	287	218	1852
1870	55	15	0,266	291	210	1849
1875	51	11	0,273	295	198	1842
1880	48	8	0,250	298	188	1837
1885	46	6	0,166	300	178	1832
1890	45	5	0,200	301	172	1831
1895	44	4	0,250	302	164	1828
1900	43	3	0,333	303	154	1823
1905	42	2	0,0	304	143	1817
1910	42	2	0,0	304	143	1822
1915	42	2		304	143	1827

$\alpha = 19$ $\theta = 1839$
$\beta = 0{,}034$
$\gamma = 2{,}811$
$\delta = 27762$

AJUSTEMENT DE LA MORTALITE SUEDOISE

$x = 75$ S. F.

A	B	C	D	E	F	G
1830	107	38	0,026	333	243	1842
1835	106	37	0,054	334	242	1846
1840	104	35	0,057	336	239	1848
1845	102	33	0,060	338	237	1851
1850	100	31	0,161	340	235	1854
1855	95	26	0,192	345	229	1853
1860	90	21	0,143	350	221	1850
1865	87	18	0,111	353	216	1850
1870	85	16	0,190	355	211	1850
1875	82	13	0,154	358	204	1848
1880	80	11	0,091	360	199	1818
1885	79	10	0,200	361	196	1850
1890	77	8	0,250	363	189	1848
1895	75	6	0,333	365	177	1841
1900	73	4	0,500	367	164	1833
1905	71	2	0,0	369	138	1812
1910	71	2	0,0	369	138	1817
1915	71	2		369	138	1822

$\alpha = 20$ $\theta = 1842$
$\beta = 0{,}034$
$\gamma = 3{,}126$
$\delta = 30165$

AJUSTEMENT DE LA MORTALITE SUEDOISE

$x = 80$ S. F.

A	B	C	D	E	F	G
1830	165	56	0,036	425	256	1855
1835	163	54	0,037	427	254	1856
1840	161	52	0,038	429	253	1862
1845	159	50	0,060	431	252	1866
1850	156	47	0,064	434	249	1868
1855	153	44	0,070	437	247	1871
1860	150	41	0,122	440	244	1873
1865	145	36	0,277	445	240	1874
1870	135	26	0,192	455	228	1867
1875	130	21	0,0	460	221	1865
1880	130	21	0,143	460	221	1870
1885	127	18	0,166	463	215	1869
1890	124	15	0,200	466	209	1868
1895	121	12	0,250	469	201	1865
1900	118	9	0,222	472	191	1860
1905	116	7	0,286	474	183	1857
1910	114	5	0,400	476	173	1852
1915	112	3		478	158	1842

$\alpha = 31$ $\theta = 1863$
$\beta = 0{,}032$
$\gamma = 5{,}188$
$\delta = 82448$

AJUSTEMENT DE LA MORTALITE SUEDOISE

$x = 85$ S. F.

A	B	C	D	E	F	G
1830	235	50	0,060	495	251	1850
1835	232	47	0,064	498	249	1853
1840	229	44	0,068	501	247	1856
1845	226	41	0,073	504	244	1858
1850	223	38	0,079	507	241	1860
1855	220	35	0,114	510	239	1863
1860	216	31	0,129	514	234	1863
1865	212	27	0,149	518	229	1863
1870	208	23	0,174	522	224	1863
1875.	204	19	0,211	526	217	1861
1880	200	15	0,133	530	208	1857
1885	198	13	0,154	532	203	1857
1890	196	11	0,273	534	199	1858
1895	194	9	0,222	536	192	1856
1900	192	7	0,286	538	183	1852
1905	190	5	0,200	540	171	1845
1910	189	4	0,250	541	162	1841
1915	188	3		542	157	1841

$\alpha = 25$ $\theta = 1855$
$\beta = 0{,}031$
$\gamma = 3{,}405$
$\delta = 66912$

AJUSTEMENT DE LA MORTALITE SUEDOISE

$x = 90$ S F

A	P	C	D	E	F	G
1830	302	52	0,019	548	252	1851
1835	301	51	0,039	549	252	1856
1840	299	49	0,020	551	250	1859
1845	298	48	0,042	552	249	1863
1850	296	46	0,065	554	248	1867
1855	294	43	0,070	557	245	1869
1860	291	40	0,050	560	243	1872
1865	288	38	0,080	562	241	1875
1870	284	35	0,143	565	238	1877
1875	280	30	0,133	570	233	1877
1880	277	26	0,115	574	227	1876
1885	273	23	0,174	577	224	1878
1890	269	19	0,160	581	216	1875
1895	266	16	0,190	584	210	1871
1900	263	13	0,231	587	206	1875
1905	261	10	0,100	590	195	1869
1910	259	9	0,111	591	191	1870
1915	258	8		592	186	1870

$\alpha = 32$ $\theta = 1870$
$\beta = 0,020$
$\gamma = 2,487$
$\delta = 62084$

Dans les tables suivantes qui complètent l'ajustement de la mortalité suédoise, nous avons posé pour abréger :

A : L'âge x.

B : $\dfrac{\nu_0 \Sigma (\nu - \nu_0)(\psi - \psi_0) - n \psi_0 \Sigma (\nu - \nu_0)^2}{n \Sigma (\nu - \nu_0)^2} = \omega.$

C : $10^3 \left[\dfrac{\nu_0 \Sigma (\nu - \nu_0)(\psi - \psi_0) - n \psi_0 \Sigma (\nu - \nu_0)^2}{\Sigma (\nu - \nu_0)(\psi - \psi_0)} \right] = 10^3 [\eta' (x) - \xi (x)]$

D : $10^3 \xi' (x)$.

E : $10^3 \eta' (x)$ (Valeur calculée).

F : $10^3 \eta' (x)$ (Valeur adoptée).

G : $10^3 [\eta' (x) - \xi' (x)] = 10^3 [\Gamma + \zeta (x)]$.

H : $10^3 \zeta (x)$.

I : $h (x) + t_0$ (Valeur adoptée).

J : $- h (x)$.

K : $k (x)$.

L : $10^3 k (x) [\eta' (x) - \xi' (x)] = 10^3 [\Lambda + \varpi (x)]$

M : $10^3 \varpi (x)$.

N : $e^{- \xi (x)}$.

COMPLEMENT DE L'AJUSTEMENT DE LA MORTALITE SUEDOISE — S. M..

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
0	0,025	619	65	684	684	619	+ 412	1884	— 69	0,05903	37	— 98	0,8500
5	0,029	47,5	3,0	50,5	47,0	44,0	— 163	1837	— 22	0,40567	18	— 117	0,8437
10	0,047	11,9	2,5	14,4	18,5	16,0	— 191	1794	+ 21	1,8793	30	— 105	0,8321
15	0,055	21,9	3,0	24,9	12,0	9,0	— 198	1752	+ 63	14,522	131	— 4	0,8208
20	0,075	2,0	6,1	8,1	16,0	10,0	— 197	1739	+ 76	22,572	226	+ 91	0,8023
25	0,043	29,8	6,4	36,2	31,5	25,0	— 182	1746	+ 69	16,940	424	+ 289	0,7776
30	0,039	106,4	6,5	112,9	54,0	47,5	— 159	1772	+ 43	5,8322	280	+ 145	0,7530
35	0,041	73,6	6,6	80,2	76,0	69,4	— 138	1790	+ 25	2,7876	192	+ 57	0,7287
40	0,040	88,2	6,8	95,0	93,5	86,7	— 120	1801	+ 14	1,7756	155	+ 20	0,7047
45	0,042	94,2	8,2	102,4	113	105	— 102	1810	+ 5	1,2276	129	— 6	0,6788
50	0,040	113,4	10,4	123,8	144	134	— 73	1818	— 3	0,88424	118	— 17	0,6479
55	0,037	208	13,8	222	186	172	— 35	1824	— 9	0,69136	119	— 16	0,6099
60	0,040	222	19,8	242	240	220	+ 13	1831	— 16	0,53094	117	— 18	0,5607
65	0,038	300	29	329	300	271	+ 64	1837	— 22	0,40567	110	— 25	0,4963
70	0,042	270	45	315	369	324	+ 117	1842	— 27	0,33047	107	— 28	0,4125
75	0,038	449	77	526	450	373	+ 166	1847	— 32	0,26920	100	— 35	0,3041
80	0,040	382	123	505	545	422	+ 215	1851	— 36	0,22847	96	— 39	0,1844
85	0,042	857	193	1050	670	477	+ 270	1856	— 41	0,18612	89	— 46	0,0833
90	0,028	386	285	671	790	505	+ 298	1859	— 44	0,16457	81	— 54	0,0248

$\omega = 0{,}041$
$\sigma_\omega = 0{,}010275$ $\qquad 10^3\,\Gamma = 207 \qquad t_0 = 1815 \qquad 10^3\,\Lambda = 135$

COMPLEMENT DE L'AJUSTEMENT DE LA MORTALITE SUEDOISE — S. F.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
0	0,024	662	50	712	712	662	+ 448	1897	— 86	0,07575	50	— 67	0,8800
5	0,038	29,0	3,5	32,5	43,5	40,0	— 174	1831	— 20	0,54879	22	— 95	0,8748
10	0,021	15,0	2,5	17,5	17,0	14,5	— 199	1761	+ 50	0,23310	35	— 82	0,8618
15	0,041	45,0	4,0	49,0	13,0	9,0	— 205	1730	+ 81	11,361	102	— 15	0,8479
20	0,044	55,0	4,7	59,7	18,0	13,3	— 201	1733	+ 78	10,383	135	+ 18	0,8297
25	0,032	34,4	4,9	39,3	30,5	25,6	— 188	1752	+ 59	5,8691	153	+ 36	0,8100
30	0,029	150	5,3	155,3	49,0	43,7	— 170	1768	+ 43	3,6332	160	+ 43	0,7896
35	0,023	70,6	5,4	76,0	69,5	64,1	— 150	1781	+ 30	2,4598	157	+ 40	0,7688
40	0,025	62,7	5,8	68,5	83,0	77,2	— 137	1791	+ 20	1,8222	138	+ 21	0,7475
45	0,026	100	6,4	106,4	104	97,6	— 116	1800	+ 11	1,3910	136	+ 19	0,7266
50	0,029	104	7,0	111	131	124	— 90	1809	+ 2	1,0610	132	+ 15	0,7026
55	0,023	170	8,8	179	166	157	— 57	1817	— 6	0,83526	131	+ 14	0,6754
60	0,031	258	15	273	212	197	— 17	1825	— 14	0,65702	129	+ 12	0,6364
65	0,040	208	24	232	270	246	+ 32	1832	— 21	0,53256	131	+ 14	0,5773
70	0,035	354	40	394	346	306	+ 92	1840	— 29	0,41892	128	+ 11	0,4919
75	0,031	348	69	417	440	371	+ 157	1847	— 36	0,33956	126	+ 9	0,3746
80	0,034	539	109	648	590	481	+ 267	1855	— 44	0,26710	128	+ 11	0,2401
85	0,032	634	185	819	730	545	+ 331	1862	— 51	0,21650	118	+ 1	0,1151
90	0,021	531	250	781	850	600	+ 386	1869	— 58	0,1755	105	— 12	0,0388

$\omega = 0{,}030$ $10^3\,\Gamma = 214$ $t_0 = 1811$ $10^3\,\Lambda = 117$

$\sigma_\omega = 0{,}006777$

NATALITE SUEDOISE RECENSEE

t	$\mathcal{N}_g(t)$	$\mathcal{N}_f(t)$
1833-1837 ..	250.615	239.542
1838-1842 ..	243.365	233.433
1843-1847 ..	258.962	247.427
1848-1852 ..	278.825	265.772
1853-1857 ..	297.371	283.646
1858-1862 ..	333.335	318.689
1863-1867 ..	343.367	327.018
1868-1872 ..	311.242	295.544
1873-1877 ..	346.358	328.858
187[illegible]-1882 ..	346.123	328.750
1883-1887 ..	353.796	335.183
1888-1892 ..	341.760	325.495
1893-1897 ..	341.879	323.165
1898-1902 ..	352.024	333.254
1903-1907 ..	348.446	329.224
1908-1912 ..	350.071	329.778

$\mathcal{N}_{gi} = 273.000$

$\mathcal{N}_{fi} = 258.500$

$t_{gi} = t_{fi} = 1848$

NATALITE SUEDOISE RECTIFIEE

t	$\mathcal{N}_g(t)\text{-}\mathcal{N}_{gi}$	$\mathcal{N}_f(t) - \mathcal{N}_{fi}$
1846-1850..	00.000	00.000
1851-1855..	25.000	24.000
1856-1860..	45.000	42.000
1861-1865..	59.000	55.500
1866-1870..	68.000	63.500
1871-1875..	72.500	68.000
1876-1880..	75.000	70.500
1881-1885..	77.000	72.000
1886-1890..	77.500	72.500
1891-1895.	77.800	72.800
1896-1900..	78.200	73.200
1901-1905..	78.400	73.400
1906-1910..	78.600	73.600
1911-1915..	78.700	73.700

$$N_{gi} = \frac{\mathcal{N}_{gi}}{5} = 54.600$$

$$t_i = 1848$$

$$N_{fi} = \frac{\mathcal{N}_{fi}}{5} = 51.700$$

NATALITE SUEDOISE RECTIFIEE

t	$N_g(t)-N_{gi}$	$N_f(t)-N_{fi}$
1848	0.000	0.000
1853	5.000	4.800
1858	9.000	8.400
1863	11.800	11.100
1868	13.600	12.700
1873	14.500	13.600
1878	15.000	14.100
1883	15.400	14.400
1888	15.500	14.500
1893	15.600	14.600
1898	15.600	14.600
1903	15.700	14.700
1908	15.700	14.700
1913	15.700	14.700

NATALITE SUEDOISE RECTIFIEE

$t - t_i$	$N_g - N_{g0}$	$N_f - N_{f0}$
0	15.700	14.700
5	20.700	19.500
10	24.700	23.100
15	27.500	25.800
20	29.300	27.400
25	30.200	28.300
30	30.700	28.800
35	31.100	29.100
40	31.200	29.200
45	31.300	29,300
50	31.300	29.300
55	31.400	29.400
60	31.400	29.400
65	31.400	29.400

$$\begin{cases} N_g\infty - N_{gi} = 15.700 \\ N_f\infty - N_{fi} = 14.700 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_g\infty = N_{gi} + 15.700 = 70.300 \\ N_f\infty = N_{fi} + 14.700 = 66.400 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_{g0} = N_{gi} - 15.700 = 38.900 \\ N_{f0} = N_{fi} - 14.700 = 37.000 \end{cases}$$

AJUSTEMENT DE LA NATALITE SUEDOISE

La méthode employée est celle que nous avons indiquée dans le chapitre VII. L'indice i est relatif au point d'inflexion, et l'indice zéro à la position qu'aurait l'asymptote inférieure de notre courbe logistique, si celle-ci comprenait un cycle complet.

Dans ce calcul nous avons posé pour simplifier :

A : θ,

B : $10^{-2} N_0$,

C : $10^{-2} N_1$,

D : $10^{-2} N_2$,

E : $\dfrac{N_1^2 (N_0 + N_2) - 2 N_0 N_1 N_2}{N_1^2 - N^0 N_2} = 10^{-2} N\infty$,

F : $\dfrac{1}{5} \; L \left(\dfrac{N_0 (N\infty - N_1)}{N_1 (N\infty - N_0)}\right) = -\rho$,

G : $L \dfrac{N\infty - N_0}{N_0} - \dfrac{\theta}{5} L \left(\dfrac{N_0 (N\infty - N_1)}{N_1 (N\infty - N_0)}\right) = \rho_0$.

La même méthode nous a permis l'ajustement de la natalité anglaise dans la période (1840-1910); et nous avons obtenu les relations :

$$N_g = 178.000 + \frac{292.000}{1 + e^{-0{,}086\,(t - 1854)}},$$

$$N_f = 166.000 + \frac{284.000}{1 + e^{-0{,}086\,(t - 1854)}}.$$

Nous omettons les détails de ce calcul.

AJUSTEMENT DE LA NATALITE SUEDOISE

S. M.

A	B	C	D	E	F	G
0	157	293	312	314	0,132	0,000
5	207	302	313	314	0,130	— 0,010
10	247	307	313	314	0,124	— 0,006
15	275	311	314	314	0,135	— 0,002
20	293	312	314	314	0,121	— 0,032
25	302	313	314	314	0,126	— 0,041

$N_{g\infty} = 31.400$ $\rho_0 = -0{,}015 \# 0$

$\rho = -0{,}13$

$$N_g(t) = N_{g0} + \frac{N_{g\infty}}{1 + e^{\rho(t - t_i)}} = 38.900 + \frac{31.400}{1 + e^{-0{,}13\,(t - 1848)}}$$

AJUSTEMENT DE LA NATALITE SUEDOISE

S. F.

A	B	C	D	E	F	G
0	147	274	292	293	0,131	0,000
5	195	283	293	294	0,130	— 0,042
10	231	288	293	293	0,130	+ 0,002
15	258	291	294	294	0,130	— 0,016
20	274	292	294	295	0,120	— 0,018
25	283	293	294	295	0,122	— 0,041

$N_{f\infty} = 29.400$ $\rho_0 = -0{,}019 \# 0$

$\rho = -0{,}13$

$$N_f(t) = N_{f0} + \frac{N_{f\infty}}{1 + e^{\rho\,(t - t_i)}} = 37.000 + \frac{29.400}{1 + e^{-0{,}13\,(t - 1848)}}$$

CALCUL DE LA NATALITE SUEDOISE

Nous y avons posé pour abréger :

A : Le temps t

B : $t - t_i$,

C : $10^{-2}\left[N_{g0} + \frac{N_{g\infty}}{1 + e^{\rho(t - t_i)}}\right] = 10^{-2} N_g(t)$ (Valeur calculée).

D : $10^{-2} N_g(t)$ (Valeur recensée),

E : Erreur absolue,

F : Erreur relative,

G : $10^{-2}\left[N_{f0} + \frac{N_{f\infty}}{1 + e^{\rho(t - t_i)}}\right] = 10^{-2} N_f(t)$ (Valeur calculée).

H : $10^{-2} N_f(t)$ (Valeur recensée),

I : Erreur absolue,

J : Erreur relative,

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1836 ..	— 12	443	496	— 53	— 0,11	421	473	— 52	— 0,11
1837 ..	— 11	450	482	— 32	— 0,07	427	464	— 37	— 0,08
1838 ..	— 10	456	461	— 5	— 0,01	433	444	— 11	— 0,03
1839 ..	— 9	463	467	— 4	— 0,01	440	447	— 7	— 0,02
1840 ..	— 8	471	503	— 32	— 0,06	447	479	— 32	— 0,07
1841 ..	— 7	479	488	— 9	— 0,02	454	469	— 15	— 0,03
1842 ..	— 6	488	515	— 27	— 0,05	462	495	— 33	— 0,07
1843 ..	— 5	497	508	— 11	— 0,02	471	484	— 13	— 0,03
1844 ..	— 4	506	534	— 28	— 0,05	480	513	— 33	— 0,06
1845 ..	— 3	516	526	— 10	— 0,02	489	511	— 22	— 0,04
1846 ..	— 2	526	513	+ 13	+ 0,02	498	485	+ 13	+ 0,03
1847 ..	— 1	536	509	+ 27	+ 0,05	507	483	+ 24	+ 0,05
1848 ..	0	546	524	+ 22	+ 0,04	517	501	+ 16	+ 0,03
1849 ..	1	556	572	— 16	— 0,03	527	551	— 24	— 0,04
1850 ..	2	566	566	0	0,00	536	538	— 2	0,00
1851 ..	3	577	569	+ 8	+ 0,01	545	542	+ 3	+ 0,01
1852 ..	4	587	556	+ 31	+ 0,06	554	527	+ 27	+ 0,05
1853 ..	5	595	569	+ 26	+ 0,05	563	545	+ 18	+ 0,03
1854 ..	6	604	613	— 9	— 0,01	572	588	— 16	— 0,03
1855 ..	7	613	592	+ 21	+ 0,04	579	559	+ 20	+ 0,04

CALCUL DE LA NATALITÉ SUÉDOISE (*suite*)

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1856 ..	8	621	589	+ 32	+ 0,05	587	561	+ 26	+ 0,05
1857 ..	9	628	611	+ 17	+ 0,03	594	583	+ 11	+ 0,02
1858 ..	10	636	658	— 22	— 0,03	601	633	— 32	— 0,05
1859 ..	11	642	675	— 33	— 0,05	607	641	— 34	— 0,05
1860 ..	12	648	680	— 32	— 0,05	613	651	— 38	— 0,06
1861 ..	13	654	646	+ 8	+ 0,01	618	620	— 2	0,00
1862 ..	14	659	674	— 15	— 0,02	623	642	— 19	— 0,03
1863 ..	15	664	688	— 24	— 0,03	627	654	— 27	— 0,04
1864 ..	16	668	696	— 28	— 0,04	631	664	— 33	— 0,05
1865 ..	17	672	686	— 14	— 0,02	635	657	— 22	— 0,03
1866 ..	18	675	702	— 27	— 0,04	638	668	— 30	— 0,04
1867 ..	19	678	661	+ 17	+ 0,03	641	627	+ 14	+ 0,02
1868 ..	20	681	589	+ 92	+ 0,16	644	560	+ 84	+ 0,15
1869 ..	21	684	602	+ 82	+ 0,14	646	575	+ 71	+ 0,12
1870 ..	22	686	616	+ 70	+ 0,11	648	583	+ 65	+ 0,11
1871 ..	23	688	652	+ 36	+ 0,06	650	621	+ 29	+ 0,05
1872 ..	24	689	654	+ 35	+ 0,05	652	616	+ 36	+ 0,06
1873 ..	25	691	674	+ 17	+ 0,02	653	642	+ 11	+ 0,02
1874 ..	26	693	683	+ 10	+ 0,01	654	649	+ 5	+ 0,01
1875 ..	27	694	697	— 3	0,00	655	663	— 8	— 0,01

CALCUL DE LA NATALITE SUEDOISE (*suite*)

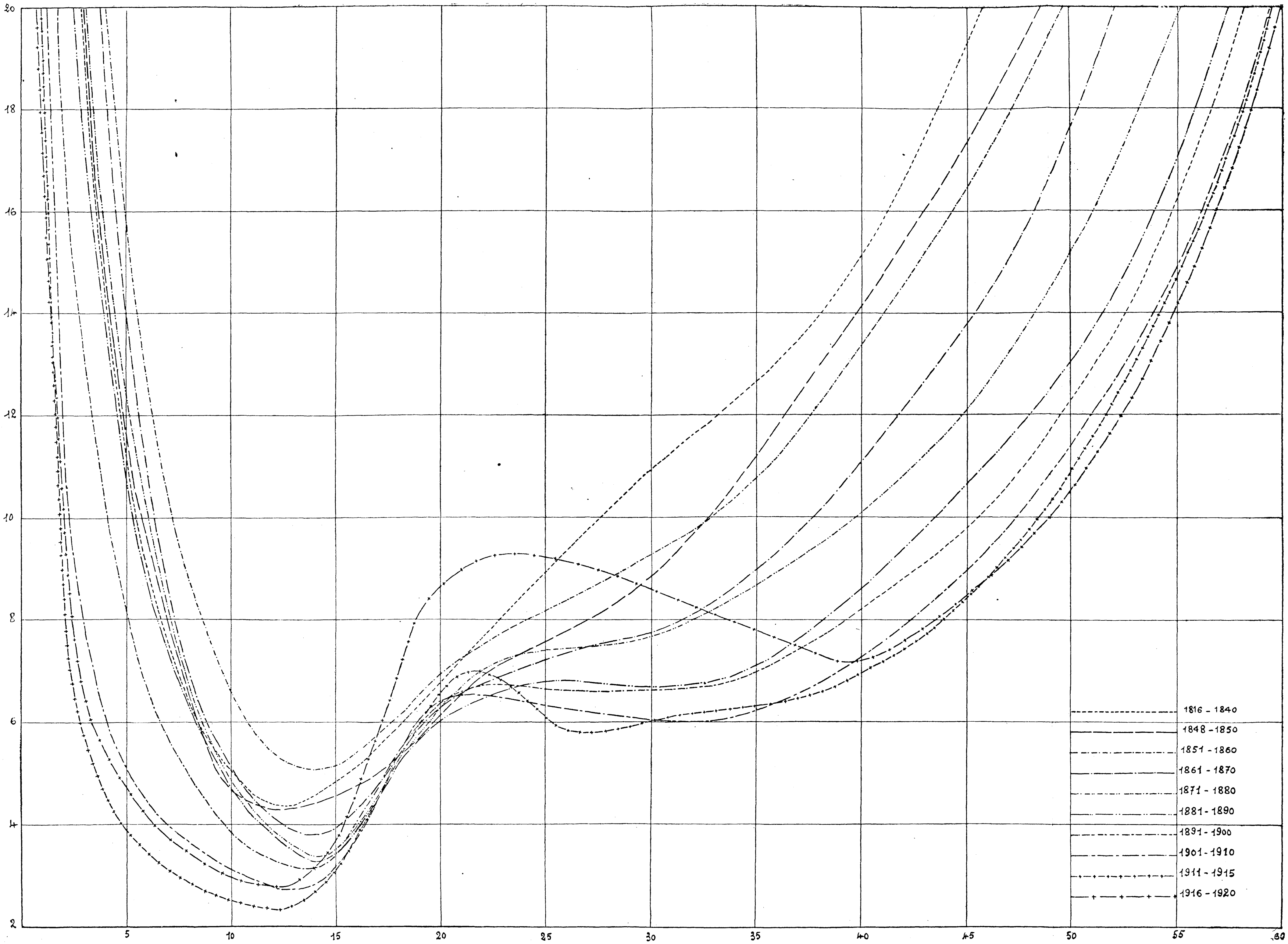
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1876 ..	28	695	698	— 3	0,00	656	661	— 5	— 0,01
1877 ..	29	696	711	— 15	— 0,02	657	673	— 16	— 0,02
1878 ..	30	697	690	+ 7	+ 0,01	658	654	+ 4	+ 0,01
1879 ..	31	698	712	— 14	— 0,02	659	678	— 19	— 0,03
1880 ..	32	698	685	+ 13	+ 0,02	660	657	+ 3	0,00
1881 ..	33	699	684	+ 15	+ 0,02	660	644	+ 16	+ 0,02
1882 ..	34	699	689	+ 10	+ 0,01	661	654	+ 7	+ 0,01
1883 ..	35	700	684	+ 16	+ 0,02	661	645	+ 16	+ 0,02
1884 ..	36	700	713	— 13	— 0,02	661	674	— 13	— 0,02
1885 ..	37	700	705	— 5	— 0,01	662	668	— 6	— 0,01
1886 ..	38	700	717	— 17	— 0,02	662	682	— 20	— 0,03
1887 ..	39	701	719	— 18	— 0,02	662	683	— 21	— 0,03
1888 ..	40	701	698	+ 3	0 00	662	667	— 5	— 0,01
1889 ..	41	701	675	+ 26	+ 0,02	663	646	+ 17	+ 0,02
1890 ..	42	702	683	+ 19	+ 0,03	663	653	+ 10	+ 0,02
1891 ..	43	702	697	+ 5	+ 0,01	663	659	+ 4	+ 0,01
1892 ..	44	702	665	+ 37	+ 0,06	663	631	+ 32	+ 0,05
1893 ..	45	702	679	+ 23	+ 0,03	663	638	+ 25	+ 0,04
1894 ..	46	702	674	+ 28	+ 0,04	663	640	+ 23	+ 0,04
1895 ..	47	702	692	+ 10	+ 0,01	663	654	+ 9	+ 0,01

CACLUL DE LA NATALITE SUEDOISE (*suite*)

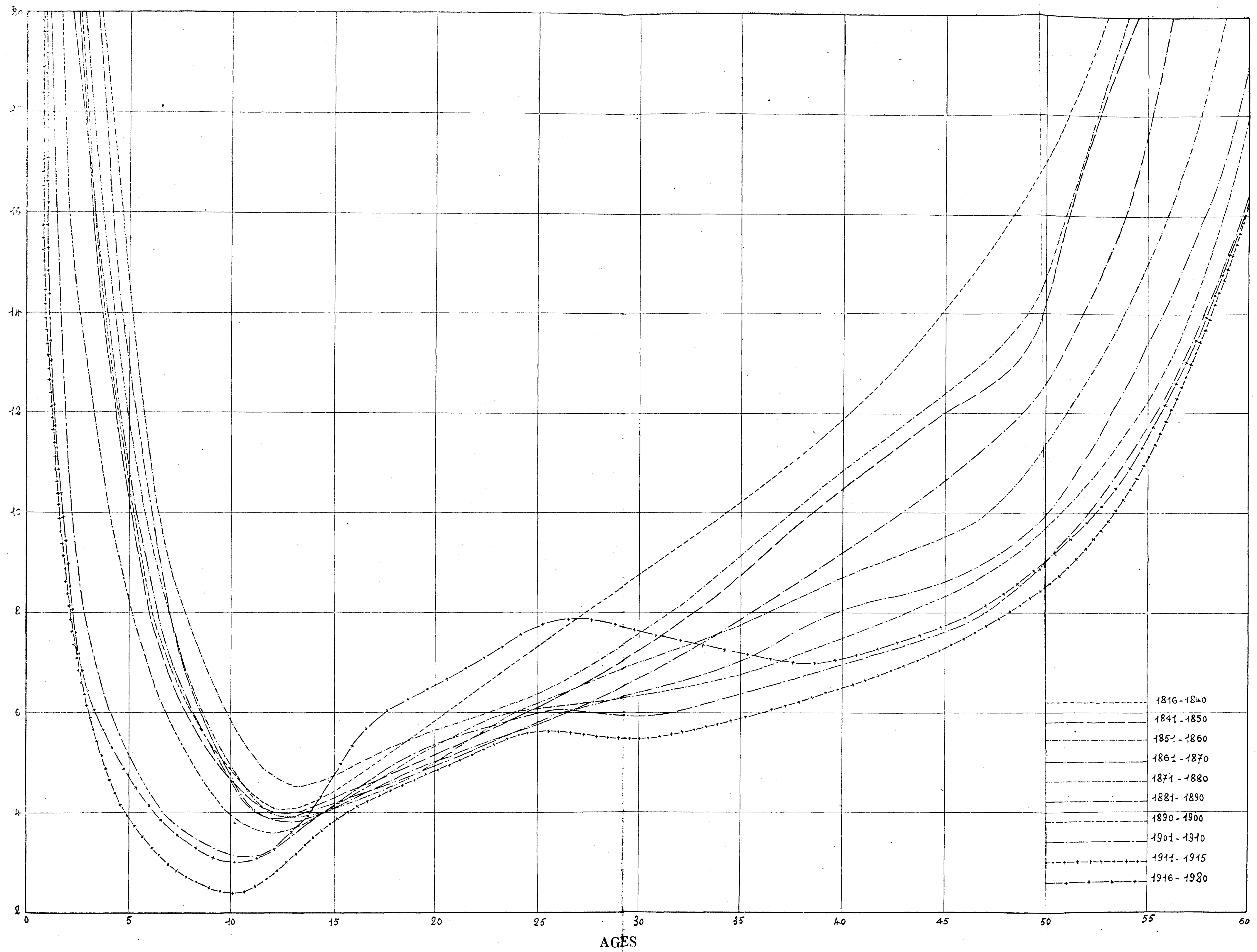
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1896 ..	48	702	689	+ 13	+ 0,02	663	654	+ 9	+ 0,01
1897 ..	49	702	685	+ 17	+ 0,02	663	645	+ 18	+ 0,03
1898 ..	50	702	704	— 2	0,00	663	661	+ 2	0,00
1899 ..	51	702	685	+ 15	+ 0,02	664	652	+ 12	+ 0,02
1900 ..	52	703	708	— 5	— 0,01	664	673	— 9	— 0,01
1901 ..	53	703	718	— 15	— 0,02	664	676	— 12	— 0,02
1902 ..	54	703	703	0	0,00	664	671	— 7	— 0,01
1903 ..	55	703	686	+ 17	+ 0,02	664	653	+ 11	+ 0,02
1904 ..	56	703	697	+ 6	+ 0,01	664	653	+ 11	+ 0,02
1905 ..	57	703	693	+ 10	+ 0,01	664	661	+ 3	0,00
1906 ..	58	703	704	— 1	0,00	664	662	+ 2	0,00
1907 ..	59	703	705	— 2	0,00	664	663	+ 1	0,00
1908 ..	60	703	714	— 11	— 0,02	664	675	— 11	— 0,02
1909 ..	61	703	719	— 16	— 0,02	664	676	— 12	— 0,02
1910 ..	62	703	701	+ 2	0,00	664	655	+ 9	+ 0,01
1911 ..	63	703	684	+ 19	+ 0,03	664	645	+ 19	+ 0,03
1912 ..	64	703	682	+ 21	+ 0,03	664	647	+ 17	+ 0,02
1913 ..	65	703	670	+ 33	+ 0,05	664	632	+ 32	+ 0,05
1914 ..	66	703	665	+ 38	+ 0,06	664	630	+ 34	+ 0,05
1915 ..	67	703	631	+ 72	+ 0,11	664	599	+ 65	+ 0,11

Qu'il nous soit permis d'exprimer ici tout le plaisir que nous éprouvons à présenter à notre éminent maître, M. le professeur G. Darmois — dont nous avons suivi les cours avec le plus grand profit, tant à la Faculté des Sciences de l'Université de Nancy, qu'à la Sorbonne — l'expression de notre plus haute reconnaissance et de notre plus sincère gratitude, pour l'honneur qu'il nous a fait d'accepter la direction de nos travaux, avec une maîtrise et une bienveillance, dont nous ne pourrons jamais être suffisamment reconnaissants.

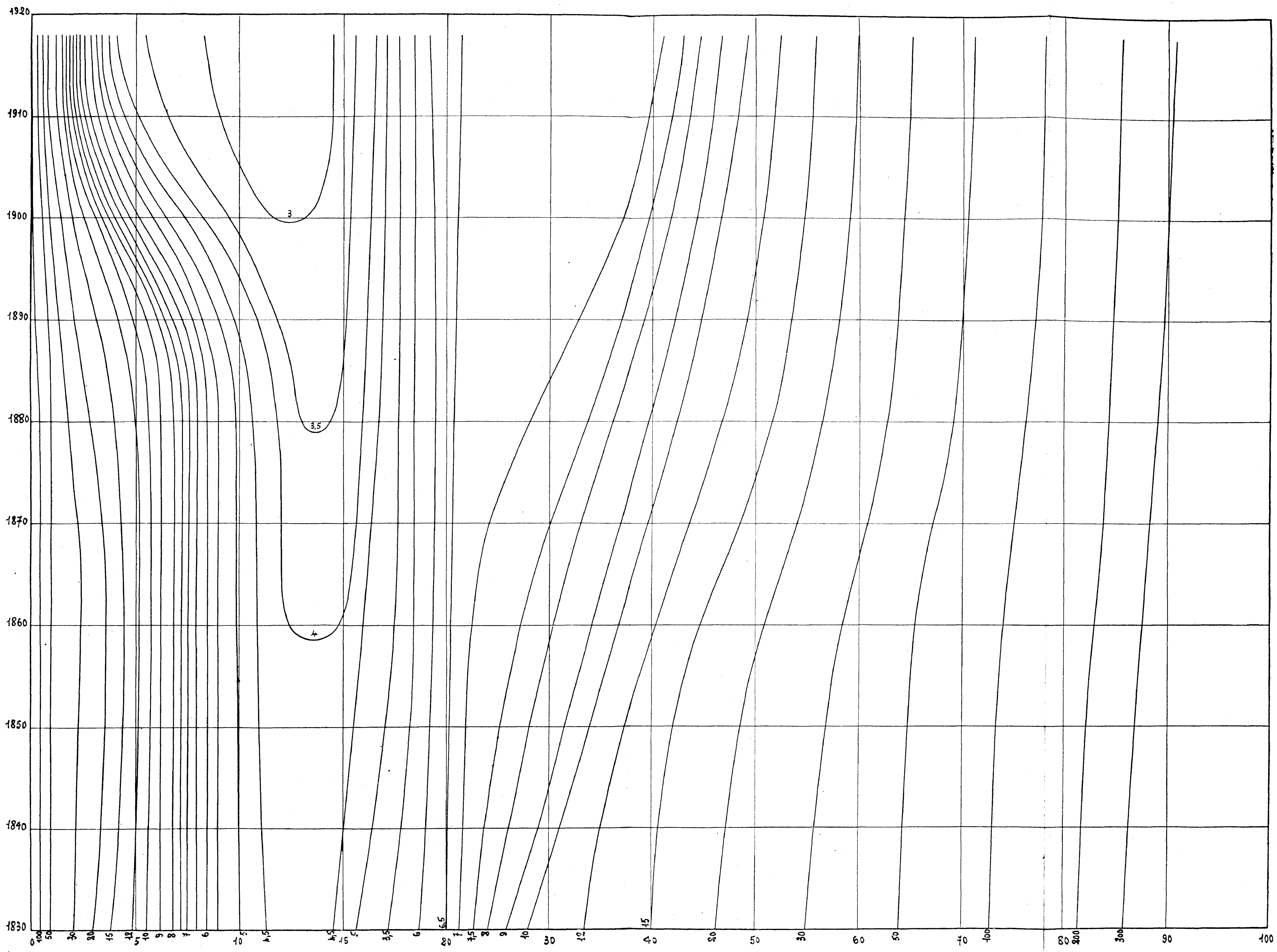
Nous remercions aussi très sincèrement M. M. Huber, directeur de la S. G. F., et M. H. Bunle, de la S. G. F., dont les conseils nous ont été des plus précieux, et qui ont bien voulu nous fournir toute la documentation et tous les renseignements statistiques dont nous avions besoin pour nos applications numériques.



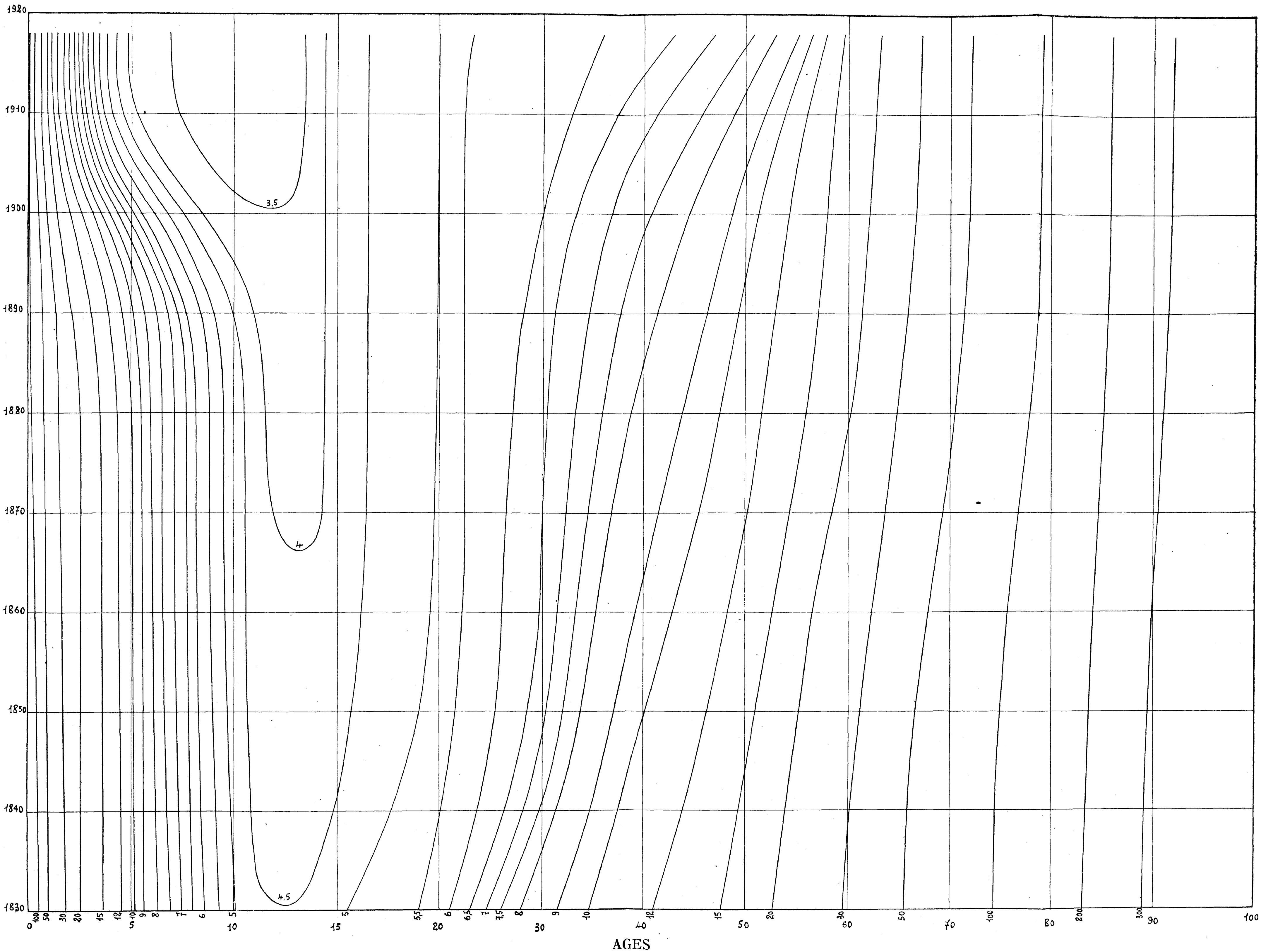
GRAPHIQUE I. — Sections de la surface aux mortalités de la population masculine suédoise par les plans t = C^{te}



GRAPHIQUE II. — Sections de la surface aux mortalités de la population féminine suédoise par les plans $t = C^{te}$.



GRAPHIQUE III. — Sections de la surface aux mortalités de la population masculine suédoise par les plans $\mu(x, t) = C^{te}$.



GRAPHIQUE IV. — Sections de la surface aux mortalités de la population féminine suédoise par les plans $\mu(x, t) = C^{te}$.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

AUBERTIN (F.). — *La Natalité*, Paris, 1921.

BERTILLON (J.). — 1. *Place de la Démographie dans les Sciences anthropologiques*, Paris, 1877.

— 2. *Eléments de la Démographie*, Paris, 1896.

— 3. *Rapport sur les relations entre la Natalité et la Mortalité dans les différents pays de l'Europe*, Montevrain, 1903.

— 4. *La Dépopulation de la France*, Paris, 1911.

BLACKER (C. P.). — *Birth control and the state*, New-York, 1926.

BOUTHOUL (G.). — *La Population dans le monde*, Paris, 1935.

BOUVRON (J.). — *L'Europe malthusienne*, Paris, 1923.

BOWEN (E.). — *An Hypothesis of population growth*, New-York, 1931.

BOWLEY (A. L.). — 1. *Births and Population in Great Bretain* (*Economics Journal*, juin 1924).

— 2. *Elements of Statistics*, Londres.

BRUNNER (C. T.). — *Local variations in birth rate* (*Economics Journal*, mars 1925).

BUNLE (H.). — *Mortalité comparée en France et à l'étranger avant et après la guerre* (*Bulletin de la S. G. F.*, janvier-mars 1929).

CAUDERLIER (G.). — *Les Lois de la population française*, Paris, 1902.

DARMOIS (G.). — 1. *Statistique mathématique*, Paris, 1928.

— 2. *Statistique et applications*, Paris, 1934.

DRYSALE (C.). — *The population question*, Londres, 1892.

DUBLIN (L. I.) et LOTKA (A. J.). — *On the rate of natural increase* (*Journal of the American Statistical Association*, 1925).

FISHER (R. A.). — 1. *The genetical theory of natural selection*, Oxford, 1930.

— 2. *Statistical Methods for Reasearch Workers*, 1932.

FRISCH (R.). — *Sur les semi-invariants et moments employés dans l'étude des distributions statistiques,* Oslo, 1926.

GOUNARD (R.). — *Histoire des doctrines de la Population,* Paris, 1924.

HUBER (M.). — 1. *Tables de Mortalité pour la Population de la France,* 1920-23 (*Bulletin de la S. G. F.*, juillet-septembre 1928).

— 2. *Démographie et Statistiques sanitaires.* (Cours professé à l'Institut de Statistique, non publié).

HUSSON (R.). — *Natalité et Accroissement de la Population en France et à l'étranger avant et après la guerre.* (*Bulletin de la S. G. F.*, janvier-mars 1931).

JULIN (A.). — *Principes de Statistiques théoriques et appliquées,* Paris et Bruxelles.

KRUMMREISH (E.). — *Contribution à l'étude du Mouvement de la Population,* Paris, 1926 (non publié).

KUCZYNSKI (R.). — 1. *The balance of births and deaths,* New-York, 1928.

— 2. *Fertility and Reproduction,* New-York, 1932.

LANDRY (A.). — 1. *Taux rectifiés de mortalité et de natalité.* (*Journal de la Société de Statistique de Paris,* janvier 1931).

— 2. *La Révolution démographique,* Paris, 1933.

LEVASSEUR (E.). — *La Population française,* Paris, 1889.

LEWIS (M. M.). — *Natality and Fecundity,* Edimbourg, 1906.

LOTKA (A. J.). — 1. *American Journal of Science,* 1907, p. 199.

— 2. *Journal of the Washington Academy of Science,* 1912, p. 2; 1913, p. 241; 1915, p. 360.

— 3. *Proceedings of the National Academy of Science,* 1922, p. 339; 1929, p. 793.

— 4. *Journal of the American Statistical Association,* 1918, p. 121; 1921, p. 998. 1925, p. 305.

— 5. *Human Biology,* 1913, p. 459.

— 6. *Elements of Physical Biology,* Baltimore, 1925.

— 7. *The American Journal of Hygiene,* 1928, p. 875.

— 8. *Metrone,* 1930, p. 107.

— 9. *Journal de la Société de Statistique de Paris,* 1933, p. 336.

— 10. *Théorie analytique des associations biologiques,* Paris, 1934.

MALTHUS (T. R.). — *Essai sur le Principe de la Population,* Paris, 1845.

MARCH (L.). — 1. *Les représentations graphiques et la Statistique comparative.* (*Journal de la Société de Statistique de Paris,* novembre 1904 et janvier 1905).

— 2. *Démographie.* (Extrait du *Traité de l'Hygiène,* t. XXII, Paris, 1922).

— 3. *Les Principes de la Méthode statistique,* Paris, 1920.

MUKHERJI (A. C.). — *Etude statistique de la fécondité matrimoniale,* Paris 1935 (non publié).

NEWSHOLME (A.). — *Vital Statistics,* Londres, 1899.

PEARL (R.). — 1. *Studies in Human Biology.*

— 2. *Medical Biometry and Statistics,* 1927.

PEARL (R.) et REED (H. S.). — *On the rate of gromth of Population,* 1920.

PEARSON (K.). — 1. *On skew Variation.* (*Philosophical Transactions,* A, vol. CLXXXVI).

— 2. *The Chances of Death and other Studies in Evolution,* 1897.

— 3. *On the general theory of skew correlation and non linear regression,* 1905.

— 4. *The fundamental problem of practical Statistics.* (*Biometrika,* t. XIII).

QUETELET (J.). — *Physique Sociale,* 1869.

REED (H. S.). — *Grouth of the variability of Helianthus.* (*American Journal of Botanic,* 1919, p. 252).

RISSER (R.). — *Applications de la Statistique à la Démographie et à la Biologie* (Tr. calc. prob. Borel, Paris, 1932).

RISSER (R.) et TRAYNARD (C. E.). — *Les Principes de la Statistique mathématique* (Tr. calc. prob. Borel, Paris, 1933).

ROBERTSON (T. B.). — *On the normal rate of growth of an individual* (*Arch. f. Entwickelungsmechanich,* 1908, p. 108).

SAUVY (A.). — 1. *Calcul démographique sur la Population française jusqu'en* 1980 (*Revue de l'Alliance Nationale pour l'Accroissement de la Population française,* juillet-septembre 1932, p. 164).

— 2. *Sur les taux de stabilisation d'une population* (*Journal de la Société de Statistique de Paris,* février 1934, p. 51).

SCHULTZ (H.). — *The standard error of a forecast from a curve* (*Journal of the American Statistical Association,* juin 1930).

SHARPE (F. R.) et LOTKA (A. J.). — *Un problème sur la distribution par âge* (*Philosophical Magazine,* avril 1911, p. 435).

THIELE. — *Theory of Observation*, Londres, 1903.

THOMPSON (W. S.). — *A Study in Malthusian Population*, New-York, 1915.

VERHULST. — 1. *Recherches mathématiques sur la loi de l'accroissement de la Population* (*Mémoire de l'Académie royale de Bruxelles*, t. XVIII, 1844, p. 1).

— 2. *Deuxième Mémoire sur la loi de l'accroissement de la Population* (*Mémoire de l'Académie royale de Bruxelles*, t. XX, 1846, p. 1).

WEESTERGAARD (H.). — *Contributives to the History of Statistics*, Londres, 1932.

WICKSELL (S. D.). — *Nuptiality, Fertility and Reproductivity*. (*Skandinavisk Aktuarietidskrift*, 1931.)

YULE (G. U.). — 1. *On the association of attributes in Statistics*. (*Philosophical Transactions*, A vol. CXCIV, 1900, p. 257).

— 2. *An Introduction to the Theory of Statistics*, Londres, 1922.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE PREMIER

Pages

FONCTIONS DEMOGRAPHIQUES INDEPENDANTES

CHAPITRE II

NOMBRE TOTAL DES NAISSANCES

CHAPITRE III

EQUATION AUX NATALITES

CHAPITRE IV

ETUDE SYSTEMATIQUE DE LA MORTALITE

CHAPITRE V

POPULATIONS MALTHUSIENNES GENERALISEES

CHAPITRE VI

STABILISATION SPONTANEE DE LA STRUCTURE D'UNE POPULATION

CHAPITRE VII

POPULATIONS LOGISTIQUES