J. CAPOULADE

Sur certaines équations aux dérivées partielles du second ordre et du type elliptique à coefficients singuliers

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1934
<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1934__164__1_0>

Respectueux hommage
Capoulade

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE POITIERS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

M. J. CAPOULADE.

1re THÈSE. — Sur certaines équations aux dérivées partielles du second ordre et du type elliptique à coefficients singuliers.

2e THÈSE. — Propositions données par la faculté.

Soutenues en 1934, devant la Commission d'examen.

MM. R. GARNIER, Professeur à la Sorbonne, *Président.*
G. BOULIGAND, Professeur
Th. GOT, Professeur
H. PONCIN, Maître de conférences
} *Examinateurs.*

CLUJ
INSTITUTUL DE ARTE GRAFICE „ARDEALUL"
STR. MEMORANDULUI 22
1934

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE POITIERS.

PERSONNEL :

	MM.	
Doyen	A. BILLARD . .	Zoologie
Professeurs honoraires . .	LEBESGUE	
	DRACH	
	FRÉCHET	
	GARNIER	
	MAIGE	
	REBOUL	
Professeurs	A. TURPAIN . .	Physique.
	F. BODROUX . .	Chimie.
	F. TABOURY . .	Chimie.
	G. BOULIGAND .	Calcul intégral et différentiel.
	P. BECQUEREL .	Botanique.
	A. GRUMBACH .	Physique.
	E. PATTE . . .	Géologie.
	TH. GOT	Mécanique rationnelle et appliquée.
Secrétaire	S. BESSE.	

A
MONSIEUR
GEORGES BOULIGAND
MAÎTRE DE RECHERCHES
PROFESSEUR À LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE POITIERS

Hommage respectueux et reconnaissant.

A TOUS LES MIEN

PREMIÈRE THÈSE.

SUR CERTAINES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE ET DU TYPE ELLIPTIQUE À COEFFICIENTS SINGULIERS.

Introduction.

1. — Le présent travail est l'exposé de recherches entreprises à l'instigation de M. Bouligand, pour décider si les propriétés fonctionnelles de la fonction de Green du cylindre et notamment son théorème d'addition intégro-différentiel ont leur analogue pour la fonction de Green d'un domaine de révolution. Ce problème a été résolu affirmativement (1) et j'ai constaté que les relations fonctionnelles obtenues ont même forme, que la section semi-méridienne du domaine ait ou non des segments frontières communs avec l'axe de révolution. M. Bouligand a interprêté cette indépendance de forme de la manière suivante : l'axe Oz joue pour l'équation de Laplace à trois dimensions et aussi pour son empreinte sur un demi-plan, à savoir :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=0$$

le rôle *d'ensemble impropre*. Dans ce mémoire, je ne reviendrai plus sur ce point qui a fait l'objet d'un exposé autonome (2) et j'aborderai de plain-pied l'exposé des conséquences auxquelles cette première étude conduit d'une manière toute naturelle.

2. — Dans le chapitre I, ayant rappelé le théorème de M. Wiener, je reviens sur cette notion d'ensemble impropre. Je montre que dans le plan, les ensembles impropres sont, pour l'équation de Laplace, de mesure superficielle nulle ; je légitime et précise cet

(1) Capoulade : C. R Ac. Sc. 2 Fevrier 1931.

(2) Capoulade : Bulletin des Sciences mathématiques, décembre 1931.

énoncé de M. BOULIGAND (1) : il y a identité entre les ensembles impropres relatifs à l'équation de Laplace et les ensembles impropres relatifs à une équation :

$$\Delta u + \vec{\alpha}.\overrightarrow{\text{grad}}\, u + \beta u = 0$$

lorsque le champ vectoriel $\vec{\alpha}$ et le champ scalaire β sont soumis à des conditions de régularité très larges.

Partant du fait que l'impropriété de l'axe Oz pour l'équation $\Delta u = 0$ à trois dimensions, entraine l'impropriété de ce même axe dans le plan pour une équation elliptique à coefficients singuliers, M. BOULIGAND a été amené à étudier les perturbations apportées par les singularités des coefficients sur les propriétés des ensembles frontières. Le Chapitre II expose les résultats qu'il a obtenus en 1931 : un ensemble propre dans les conditions ordinaires peut devenir anormalement impropre (2) au contraire un ensemble habituellement impropre peut devenir anormalement propre (3).

Le Chapitre III étudie la première de ces circonstances. Je m'occupe d'abord du problème de Dirichlet unidimensionnel, c'est-à-dire, ayant trait aux équations différentielles ordinaires E. Après avoir déterminé l'allure des intégrales, je décide pour une classe étendue d'équations E_α sans second membre, du caractère propre ou impropre d'un point. Puis, par une extension de la fonction de Green unidimensionnelle (4), je résous alors la même question pour des équations E_α' avec second membre.

Je traite ensuite le problème de Dirichlet dans le plan pour des équations aux dérivées partielles $\mathcal{E}$ du type elliptique par des méthodes prolongeant des principes de raisonnement établis par M. G. BOULIGAND, sur certains exemples, dans un travail récent (5). J'établis ainsi pour une large classe $\mathcal{E}_{\alpha'}$, la nature impropre d'un segment σ de l'axe $y'y$, puis je montre qu'une portion quelconque d'une courbe analytique peut être impropre pour une équation $\mathcal{E}$ convenablement choisie. Je résous des cas particuliers du problème inverse plus difficile : étant donnés un domaine connexe et une équation $\mathcal{E}$ à coefficients présentant des

(1) BOULIGAND : Voir le 1er alinéa de sa note au Bulletin de l'Ac. Roy. de Belgique, 10 Janv. 1931.

(2) BOULIGAND : C. R. Ac. Roy. de Belgique, 10 Janv. et 7 Mars 1931.

(3) Cf. no 11.

(4) BÖCHER : Leçons sur les méthodes de Sturm dans la théorie des équations différentielles linéaires p. 98 et suivantes.

(5) BOULIGAND : Sur quelques cas singuliers du problème de Dirichlet, Bulletin de l'Ac. Roy. de Belgique Mars 1931.

singularités sur la frontière déterminer les parties de celle-ci qui sont impropres : je suppose ici, comme dans mes recherches antérieures (¹) la frontière formée de courbes satisfaisant aux hypothèses classiques de la théorie de la courbure. J'obtiens finalement une classe $\mathcal{E}_{a''}$ assez étendue pour laquelle malgré les singularités des coefficients, la nature propre du segment σ de l'axe $y'y$ se trouve conservée et je termine en montrant sur un exemple simple les différents cas qui peuvent se produire à partir d'une équation $\mathcal{E}_a$.

Le Chapitre IV étudie le second des phénomènes signalés au Chapitre II ; les conclusions sont obtenues par les mêmes principes de raisonnement qu'au Chapitre précédent. Je présente ainsi quelques types d'équations $\mathcal{E}$ pour lesquels certains ensembles impropres pour les équations à coefficients réguliers se trouvent être anormalement propres. Je suis ensuite amené à étudier un problème voisin : celui du caractère propre d'un point de la frontière, je cite plusieurs types d'équations pour lesquelles ce fait a lieu et je termine en signalant un exemple où l'on se rend compte des questions complexes qui restent encore à résoudre sur les équations aux dérivées partielles à coefficients singuliers.

3. — Je tiens à remercier M. Le Professeur Bouligand des utiles directions qu'il m'a données et qui m'ont permis d'aboutir dans ce travail ; mais je lui suis surtout reconnaissant de l'affectueuse sympathie avec laquelle il a encouragé mes efforts, de son rôle d'animateur toujours bienveillant. Je suis particulièrement fier d'être son Elève et d'avoir eu le plaisir et l'honneur de développer une question dont il avait le premier aperçu toute l'importance. En outre, je prie M.M. René Garnier, Professeur à la Sorbonne et Th. Got Professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers, qui ont bien voulu s'intéresser à mes recherches, de trouver ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

CHAPITRE I.

DES ENSEMBLES IMPROPRES.

4. — Dans un mémoire précédent (²), nous avons donné l'expression de la fonction de Green d'un domaine de révolution et nous avons rappelé que sa forme permanente peut être interprêtée, avec M. Bouligand, par sa notion d'ensemble impropre, concernant à l'ori-

(¹) Capoulade : C. R. Ac. Sc. 1er Fév. 1932 et R. Ac. N. dei Lincei, 15 Mai 1932.

(²) Bulletin des Sciences Mathématiques, Décembre 1931 (voir ch. II).

gine le problème de Dirichlet harmonique au point de vue généralisé de M. WIENER. Dans ce chapitre, nous allons rappeler cette notion pour souligner le contraste entre les ensembles impropres relatifs à l'équation de Laplace et la nouvelle classe d'ensembles impropres concernant les équations à coefficients singuliers qui vont nous occuper.

5. – Le problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace met en oeuvre un domaine ouvert Ω et une fonction continue sur sa frontière Σ, laquelle est un ensemble fermé ; soit $f(Q)$ la fonction continue donnée sur Σ. L'énoncé du problème au sens classique serait le suivant :

„*Étant donnés Ω et $f(Q)$, trouver une fonction harmonique dans Ω, continue sur $\Omega+\Sigma$ et prenant sur Σ les valeurs $f(Q)$*".

Un tel problème n'a pas toujours une solution, comme le montre cet exemple de M. ZAREMBA (1908).

„Prenons pour domaine Ω une sphère moins son centre, la frontière Σ sera constituée par la surface de la sphère plus le centre, et soient les valeurs données : 1 sur la surface, a au centre ; a étant bornée.

Par raison de symétrie la solution cherchée est fonction uniquement de la distance au centre et comme elle doit être harmonique elle est de la forme $\frac{\alpha}{r}+\beta$, r étant la distance au centre du point d'évaluation de la fonction. Supposons le rayon de la sphère égal à 1, nous devrons avoir :

$$\alpha+\beta=1, \qquad \frac{\alpha}{0}+\beta=a$$

ce qui est impossible.

Un autre exemple serait fourni par le domaine obtenu en enlevant d'une sphère les points situés sur un diamètre, ce qui nous ramènerait aux considérations du Chapitre II de mon mémoire cité.

6. — Il est tentant de formuler un problème à énoncé moins restrictif admettant toujours une solution, la continuité sur $\Omega+\Sigma$ n'étant plus forcément assurée ; nous sommes alors conduits au problème de Dirichlet généralisé régi par le théorème fondamental suivant, dû à M. N. WIENER [1] :

„*Soit le domaine ouvert Ω, à distance finie, de frontière Σ. Soit $F(P)$ une fonction continue dans $\Omega+\Sigma$ et se réduisant à $f(Q)$ sur Σ* [2].

(1) The Dirichlet problem — (J. Math. Ph. Massach. Inst. 2e série N° 70. Janv. 1924).

(2) $f(Q)$ étant donnée sur Σ, M. LEBESGUE a montré qu'on pouvait construire $F(Q)$ continue dans tout l'espace et se réduisant à $f(Q)$ sur Σ (Sur le problème de Dirichlet. Rend. Cir. Math. di Palermo, t. 24, 1907, p. 215).

Considérons Ω *comme la limite d'une suite de domaines* Ω_1, $\Omega_2, \ldots$ *se dilatant progressivement et pour chacun desquels le problème de Dirichlet possède une solution au sens classique* (1). *Calculons cette solution en prenant pour valeurs sur la frontière de chaque* Ω_n *celles qui prend* $\mathcal{F}(P)$: *nous obtenons ainsi une suite de fonctions* $F_n(P)$, *tendant uniformément vers une fonction harmonique* $F(P)$, *indépendante du choix des domaines d'approximation et de* $\mathcal{F}(P)$. *Alors* $F(P)$ *est, par définition, la solution du problème de Dirichlet généralisé. Cette solution coïncide avec celle du problème ordinaire lorsque celle-ci existe*".

Dans le cas de l'exemple de M. Zaremba nous sommes amenés à résoudre le problème classique pour le domaine Ω_n compris entre les surfaces de deux sphères concentriques l'une de rayon 1, l'autre de rayon $\varepsilon_n < 1$, les valeurs frontières étant respectivement 1 et a ; nous devons avoir :

$$\alpha + \beta = 1 \quad , \quad \frac{\alpha}{\varepsilon_n} + \beta = a$$

d'où :

$$\alpha = \frac{1-a}{1-\frac{1}{\varepsilon_n}} \quad , \quad \beta = 1 - \alpha ;$$

faisons alors tendre ε_n vers zéro, Ω_n tend vers Ω et la solution obtenue tend vers la fonction définie par $\alpha = 0$, $\beta = 1$ solution du problème généralisé.

7. — L'étude de la solution généralisée a amené M. Bouligand à débarrasser la frontière d'ensembles σ impropres à porter efficacement des données, tels le centre dans le premier exemple, un diamètre dans le second et il les a qualifiés par abrévation *d'ensembles impropres.* Limitons-nous aux ensembles fermés σ prélevés sur le domaine Ω de manière que $\Omega - \sigma$ soit un nouveau domaine, l'ensemble σ étant supposé à une distance positive de la frontière du domaine initial Ω.

Le principe des recherches de M. Bouligand consiste à effectuer sur l'ensemble σ la construction de Cantor-Minkowski et à définir par elle un *ordre de mesure* ou ordre C. M. (égal à 1 pour un arc $y = f(x)$ à tangente continue, à 2 pour une surface $z = \varphi(x, y)$ à plan tangent continu). On conçoit des ensembles dont l'ordre C. M. n'est pas un entier (2). Mais nous n'aurons pas a faire usage de cela pour établir ce résultat utilisé au N° 8, et relatif au cas de l'équation de Laplace :

---

(1) Nous pourrons prendre pour Ω_n le domaine formé par les carrés ou les cubes d'un reseau qui sont intérieurs a Ω.

(2) Bouligand : Introduction à la Géométrie Infinitésimale Directe no 163 — Ch. 17. Paris, Vuibert 1932.

„*Un ensemble impropre borné est de mesure nulle*".

Nous allons nous borner au cas du plan ; il s'agit alors de la mesure superficielle, c'est-à-dire d'ordre 2. Notre méthode de démonstration (extensible à la mesure d'ordre n dans l'espace à n dimensions) sera celle même dont M. Bouligand s'est servi, en vue de résultats plus généraux. Tout revient à démontrer ceci :

„*Un ensemble borné de mesure superficielle positive n'est certainement pas un ensemble impropre*".

Considérons les intégrales

$$I = \iint \log \frac{2R}{r} \, d\sigma \quad , \quad I_1 = \iint \log \frac{2R}{r} \, d\sigma,$$

au sens de Lebesgue, étendues la première à l'ensemble considéré, la seconde à un cercle de rayon R englobant l'ensemble ; $r =$ MP, M point courant de l'ensemble, P point fixe du plan. I et I_1 sont positives quelle que soit la position de P pris dans l'aire du cercle, de plus on a évidemment $I < I_1$ et comme I_1 est bornée (potentiel logarithmique d'un cercle de rayon borné), I est aussi bornée. La ligne équipotentielle $I = 0$ est alors une courbe fermée γ extérieure au cercle considéré.

Sur le domaine Ω constitué par les points extérieurs à notre ensemble et intérieurs à la région du plan délimitée par γ nous avons ainsi défini une fonction harmonique I nulle sur γ. Posons alors le problème de Dirichlet pour ce domaine avec les valeurs : zéro sur γ et borne supérieure de I aux points frontières de notre ensemble la solution sera une fonction harmonique dépassant partout I donc différente de zéro ; ce qui prouve que notre ensemble n'est pas impropre.

8. — Suivant une suggestion de M. Bouligand, nous allons recourir à la méthode de M. Picard ramenant la résolution du problème de Dirichlet pour l'équation :

$$(1) \qquad \Delta u + \lambda (\vec{\alpha} . \overrightarrow{\text{grad}}\, u + \beta u) = 0$$

à celle d'une équation de Fredholm (¹) pour établir l'identité qu'il a signalée (²) entre les ensembles impropres pour l'équation de Laplace et l'équation (1).

Soit Ω un domaine borné quelconque du plan dont la frontière $\Sigma = \sigma + \Sigma'$ contient un ensemble fermé σ situé à une distance positive de Σ' ; supposons que σ soit impropre pour l'équation $\Delta u = 0$ et soit

(¹) Picard : Rend. del. Cir. Mat. di Palermo, t. 22, 1906.

(²) Bouligand : C. R. Ac. Roy. de Belgique, 10 Janvier 1931.

$\varphi(Q)$ une répartition continue de valeurs sur Σ. Considérons la fonction $\phi(M)$ continue dans la région $\Omega+\Sigma$ et dont l'empreinte sur Σ est $\varphi(Q)$ et une suite de domaines $\Omega_1 < \Omega_2 < \ldots < \Omega_n \ldots$ tendant vers Ω et pour chacun desquels le problème de Dirichlet harmonique est résoluble au sens classique. Nous allons résoudre le problème de Dirichlet pour l'équation (1), les domaines Ω_n et pour les valeurs que prend $\phi(M)$ sur les frontières Σ_n.

1°. Soit $v_n(P)$ *la fonction harmonique* dans Ω_n prenant sur Σ_n les valeurs qu'y prend $\phi(M)$.

2°. — α) Posons

$$\psi_n^{(1)}(P)=\frac{\lambda}{2\pi}\iint_{\Omega_n}\beta u_n(M)\, G_n(M, P)\, d\omega_M$$

$G_n(M, P)$ étant la fonction de Green de Ω_n, nous avons :

$$\psi_n^{(1)}(P) \text{ nulle sur } \Sigma_n$$

$$\Delta\psi_n^{(1)} P = -\lambda\beta u_n(P)$$

β) Posons :

$$\psi_n^{(2)}(P)=\frac{\lambda}{2\pi}\iint_{\Omega_n}\operatorname{div}[G_n(M, P)\vec{\alpha}]\, u_n(M)\, d\omega_M$$

nous avons d'après la formule de Green :

$$\iint_{\Omega_n}\{\operatorname{div.}[G_n(M, P)\vec{\alpha}]\, u_n(M)+G_n(M, P)\,\vec{\alpha}.\,\overrightarrow{\operatorname{grad.}}\, u_n(M)\}\, d\omega_M =$$

$$\int_{\Sigma_n} G_n(M, P)\, u_n(M)\, \vec{\alpha}.\,\nu\, ds$$

$\vec{\nu}$ étant le vecteur unité de la normale extérieure.

$G_n(M, P)$ étant nulle sur Σ_n, le second membre est nul, d'où :

$$\psi_n^{(2)}(P)=-\frac{\lambda}{2\pi}\iint_{\Omega_n}G_n(M, P)\,\vec{\alpha}.\,\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, u_n(M)\, d\omega_M$$

et par suite :

$$\psi_n^{(2)}(P) \text{ est nulle sur } \Sigma_n$$

$$\Delta\psi_n^{(2)}(P) = \lambda\,\vec{\alpha}.\,\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, u_n(P).$$

Considérons alors l'équation de Fredholm :

$$(2) \quad u_n(P)=v_n(P)+\frac{\lambda}{2\pi}\iint_{\Omega_n}\{\beta G_n(M, P)-\operatorname{div}[G_n(M, P)\vec{\alpha}]\}\, u_n(M)\, d\omega_M$$

sa solution $u_n(P)$ prend sur Σ_n les valeurs que prend $v_n(P)$, donc les valeurs qu'y prend $\phi(M)$ et

$$\Delta u_n(M) = -\lambda(\beta u_n + \vec{\alpha}, \overrightarrow{\text{grad}}\, u_n)$$

donc la solution de l'équation (2) est la solution du problème de Dirichlet pour le domaine Ω_n et l'équation (1), *à condition que* $\vec{\alpha}$ *et* β *soient non seulement continus mais encore satisfaissent aux conditions permettant de faire les transformations précédentes.*

Quand Ω_n tend vers Ω, $v_n(P)$ tend vers $v(P)$ harmonique, indépendant de l'ensemble impropre σ ; $G_n(M, P)$ tend vers $G(M, P)$ indépendant de σ et comme σ est de surface nulle nous obtenons le même résultat en intégrant sur la surface $\Omega - \sigma$ au lieu d'intégrer sur la surface Ω ; donc σ est impropre à déterminer u solution de (1) pour le domaine Ω.

Nous donnerons le nom *d'ensembles impropres normaux* aux ensembles impropres étudiés précédemment, c'est-à-dire *tels pour les fonctions harmoniques ou pour les solutions d'équations* (1) *où* $\vec{\alpha}$ *et* β *remplissent, outre la continuité, les conditions permettant de parvenir à l'équation* (2).

CHAPITRE II.

DES PERTURBATIONS APPORTÉES PAR LES SINGULARITÉS DES COEFFICIENTS DE L'ÉQUATION :

$$\Delta u + \lambda(\vec{\alpha}. \overrightarrow{\text{grad}}\, u + \beta u) = 0$$

SUR LES PROPRIÉTÉS DES ENSEMBLES FRONTIÈRES.

§ 1. — Ensembles impropres anormaux.

9. — Considérons, en vue du problème de Dirichlet, un domaine du plan $x0y$ ayant dans sa frontière le segment AB de l'axe $0y$ et un segment de droite CD quelconque du demi-plan $x > 0$.

Pour l'équation de Laplace, les deux segments AB et CD sont propres. Pour l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{1}$$

d'après le n° 1, nous sommes amenés à dire que CD est *propre* alors que AB *est impropre*.

L'impropriété ainsi rencontrée est d'un genre différent de celle étudiée au Chapitre I ; elle est dûe uniquement à la singularité présentée par le coéfficient de $\frac{\partial u}{\partial x}$, nous la qualifierons d'anormale.

Néanmoins cette impropriété de AB ayant été déduite de l'impropriété de ce segment pour l'équation de LAPLACE à trois dimensions possède exactement les caractères définis par M. BOULIGAND dans son étude du problème de Dirichlet harmonique (¹), à savoir: quel que soit le domaine ouvert Ω ayant dans sa frontière Σ le segment AB, quelle que soit la répartition continue sur Σ, pour l'équation (1) la solution du problème au sens de Wiener est indépendante de la répartition sur AB. En particulier deux solutions limites correspondant à des répartitions ne différant que sur AB sont identiques et par suite la solution limite correspondant à une répartition continue sur Σ : non nulle sur AB, nulle sur Σ—AB est identiquement nulle.

10. — M. BOULIGAND (²), après avoir signalé cette particularité dans une première note, a dans une seconde étudié au même point de vue l'équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\lambda}{x}\frac{\partial u}{\partial x}=0. \tag{2}$$

Nous allons exposer le théorème d'unicité qu'il a obtenu et qui dépasse en généralité l'affirmation d'unicité que comporte le principe de Dirichlet au sens classique, lequel suppose la continuité réalisée sur *toute* la frontière.

Prenons pour domaine un rectangle R dont un côté est $0x_0$ et dont un autre σ porté par $0y$ a pour longueur π et donnons pour valeurs frontières sur ce dernier côté des valeurs *quelconques* mais *bornées* et sur les trois autres côtés la valeur zéro. La solution du problème correspondant à de telles valeurs frontières peut être indéfiniment prolongée entre les parallèles $x=0$ et $x=x_0$, on obtient ainsi

(¹) Annales de la Société Polonaise de Mathématiques, 1925, p. 59 et suiv.

(²) BOULIGAND : Ac. Roy. de Belgique, 10 Janv. et 7 Mars 1931.

une fonction impaire de y, de période 2π représentable par une série:

$$u(x, y) = f_1(x) \sin y + \ . \ . \ . + f_n(x) \sin ny + \dots$$

avec :

$$f_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(x, y) \sin ny \, dy,$$

une double intégration par parties donne alors :

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2}\left[f''_n(x) + \frac{\lambda}{x} f'_n(x)\right]$$

d'où :

(3) $$f''_n(x) + \frac{\lambda}{x} f'_n(x) - n^2 f_n(x) = 0.$$

Les fonctions $f_n(x)$ doivent s'annuler pour $x = x_0$ et en outre, comme on suppose $u(x, y)$ bornée, elles ne peuvent croître indéfiniment pour $x = 0$. Or on peut connaître l'allure des intégrales de (3), autour de l'origine, l'équation déterminante étant

$$\alpha(\alpha - 1) + \lambda\alpha = 0$$

elle admet pour racines

$$\alpha = 0 \quad , \quad \alpha = 1 - \lambda.$$

Les intégrales sont donc :

$$F_n(x) = 1 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \ . \ . \ .$$

$$G_n(x) = x^{1-\lambda}. H_n(x)$$

$H_n(x)$ étant holomorphe et non nulle à l'origine (1) ; d'où :

$$f_n(x) = C_1 F_n(x) + C_2 G_n(x)$$

par suite, *si* $\lambda > 1$:

$f_n(x)$ devant être bornée à l'origine : $C_2 = 0$.

$f_n(x)$ devant être nulle pour $x = x_0$ est identiquement nulle.

La solution $u(x, y)$ supposée nulle sur les trois côtés du rectangle non portés par Oy tout en demeurant bornée sur le quatrième côté est donc identiquement nulle ; d'où :

Pour *$\lambda \geqq 1$, une solution de (2) régulière à l'intérieur du rectangle,* ***R,*** ***bornée*** *dans ce rectangle, continue en chaque point de ses 3 côtés* ***non portés***

(1) Cette démonstration suppose essentiellement λ différent d'un nombre entier. On montrerait facilement que les conclusions sont les mêmes pour λ entier, cas où l'on peut passer par l'intermédiare d'une fonction harmonique dans l'espace à $\lambda + 2$ dimensions.

par Oy, se trouve uniquement déterminée par les valeurs qu'elle prend sur ces trois côtés.

M. Bouligand a signalé *l'équivalence de ce théorème d'unicité à l'impropriété anormale du segment σ de l'axe y'y.* Nous aurons l'occasion au nº 30 d'exposer sa démonstration à propos d'équations d'un type plus général.

Enfin M. Bouligand a également noté les points suivants :

Reprenons le problème de Dirichlet pour le rectangle ci-dessus et l'équation (2) dans laquelle on suppose $\lambda < 1$, avec une répartition qui ne prend de valeurs non nulles que sur le coté σ, où elle s'exprime comme suit :

$$\varphi_m(y) = a_1 \sin y + a_2 \sin 2y + \ldots + a_m \sin my.$$

L'équation (3) possède une solution et une seule prenant la valeur a_n pour $x = 0$ et s'annulant pour $x = x_0$. En la désignant par $f_n(x)$, le problème de Dirichlet aura pour solution au sens classique :

$$u_m(x, y) = f_1(x) \sin y + \ldots + f_m(x) \sin my.$$

Or toute fonction continue et périodique de période 2π le long de l'axe des y, lorsqu'elle est impaire peut se représenter avec une approximation arbitraire par une somme finie de la forme précédente $\varphi(y)$ (1). Il s'ensuit que toute répartition continue sur le périmètre du rectangle et nulle sur les trois cotés autres que σ donne un problème résoluble au sens classique : en effet la convergence uniforme sur σ de fonctions du type $\varphi_m(y)$ vers une fonction continue, implique en vertu de la monotonie des solutions de (2) la convergence des fonctions u_m correspondantes, laquelle est uniforme dans le domaine et sur sa frontière.

§ 2. — Ensembles anormalement propres.

11. — *Il se peut que des ensembles qui dans les conditions habituelles sont impropres se trouvent, par le jeu des singularités, jouer le rôle de frontières réduites.*

M. Bouligand m'a signalé l'exemple suivant : considérons le domaine formé par un cercle moins son centre ayant pour frontière la circonférence de rayon 1 plus le centre ; nous savons que pour l'équation de Laplace le centre est impropre. Prenons maintenant l'équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y}}{x^2 + y^2} + u f(\sqrt{x^2+y^2}) = 0$$

(1) Picard. Traité d'analyse t. I. 3ème édition, p. 375.

où f est continue et proposons-nous de chercher une solution de cette équation fonction seulement de la distance $r = \sqrt{x^2+y^2}$ au centre origine et prenant la valeur α en O et la valeur β sur la circonférence.

Soit alors $u = \mathrm{U}(r)$ cette solution, elle satisfera à l'équation différentielle :

$$\frac{d^2\mathrm{U}}{dr^2} + \mathrm{U}f(r) = 0$$

dans laquelle nous supposerons $f(r) \leq 0$ pour être assurés de l'unicité. En particulier si $f(r) = 0$, on a :

$$\mathrm{U} = ar + b$$

d'où :

$$b = \alpha \qquad , \qquad a + b = \beta$$

et l'origine est *anormalement propre.*

Dans l'espace le même fait se présenterait pour la sphère avec l'équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 2\frac{x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + z\dfrac{\partial u}{\partial z}}{x^2+y^2+z^2} + uf\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) = 0.$$

CHAPITRE III.

DES ENSEMBLES IMPROPRES ANORMAUX.

12. — Dans ce chapitre nous nous proposons l'étude systèmatique du premier fait rencontré précédemment. Nous considérons le problème de DIRICHLET *au sens de Wiener* pour des équations différentielles ou pour des équations aux dérivées partielles du type elliptique dont les coefficients, continus sur le domaine, présentent des singularités sur sa frontière. Pour simplifier nous prendrons des frontieres formées d'arcs représentables sous la forme $y = f(x)$.

Nous commencerons notre étude par le problème de Dirichlet relatif aux équations différentielles ordinaires, l'exemple du nº 10 montrant les importantes conséquences qu'on peut tirer d'un problème à une dimension relativement à la solution d'un problème plan.

§ 1. — Problème unidimensionnel.

13. — Considérons l'équation :

(1) $$y'' + \mathrm{A}(x)\, y' + \mathrm{B}(x)\, y = 0$$

dont les coefficients, continus en général, deviennent infinis au point d'abscisse a.

Posons le problème de DIRICHLET pour cette équation et le segment dont les extrémités ont pour abscisses a et b, avec les valeurs α et β attachées à ces extrémités. Sans diminuer la généralité nous pouvons supposer $a = 0$, $b = 1$.

Supposons de plus :

1°. que pour tout segment $(\varepsilon_n, 1)$, $0 < \varepsilon_n < 1$, le problème de DIRICHLET admette une solution unique [1],

2°. que l'équation (1) admette pour $x=0$ une solution unique, à un facteur constant près, restant continue à l'origine et non nulle pour $x=1$; toute solution linéairement distincte de celle-ci devenant infinie à l'origine.

Le problème de DIRICHLET *pour le segment (0, 1) admet une solution et l'origine joue le rôle de point impropre.*

En effet, soient $y_0(x)$ et $y_1(x)$ deux solutions linéairement distinctes de (1), la première continue pour $x=0$; posons le problème pour le segment $(\varepsilon_n, 1)$, nous devons déterminer les constantes k_0 et k_1 telles que

$$k_0\, y_0(\varepsilon_n) + k_1\, y_1(\varepsilon_n) = \alpha, \qquad k_0\, y_0(1) + k_1\, y_1(1) = \beta.$$

Faisons, suivant le processus de Wiener, tendre ε vers zéro, alors en vertu de nos hypothèses, $y_1(\varepsilon_n)$ tend vers l'infini, donc k_1 tend vers zéro et k_0 vers $\dfrac{\beta}{y_0(1)}$ et la solution pour le segment (0, 1) est $y = \dfrac{\beta}{y_0(1)}\, y_0(x)$ indépendante de α.

14. — Partant de la remarque précédente, nous pouvons construire des équations du type (1) pour lesquelles l'origine est impropre. Il suffit de prendre deux intégrales particulières, l'une continue pour $x=0$ et non nulle pour $x=1$, l'autre infinie à l'origine ; de déterminer les coefficients A et B correspondants et d'examiner si ceux-ci satisfont aux conditions classiques d'unicité du problème pour le segment $(\varepsilon_n, 1)$.

1^er^ Exemple : Soient $y_0(x) = x$, $y_1(x) = \log x$; nous avons :

$$0 + A + Bx = 0 \quad , \qquad -\frac{1}{x^2} + \frac{A}{x} + B \log x = 0$$

d'où

$$A = -\frac{1}{x(\log x - 1)} \quad , \qquad B = \frac{1}{x^2(\log x - 1)}$$

---

[1] Les coefficients de l'équation (1) sont continus dans l'intervalle considéré ; les conditions d'unicité sont alors celles indiquées par M. E. PICARD dans : „Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles“; pages 1 à 8.

et comme B < 0 pour $0 \leq x < 1$ nous sommes assurés de l'unicité.

2ième Exemple : Soient $y_0(x) = e^x$, $y_1(x) = \frac{1}{x}$; nous trouverons :

$$A = \frac{2-x^2}{x(x+1)} \quad , \quad B = -\frac{2+x}{x(x+1)}$$

et nous sommes encore assurés de l'unicité.

15. — Il est moins facile, étant donnée une équation (1), de déterminer la nature propre ou impropre de l'origine pour le problème de Dirichlet correspondant. C'est ce qui va nous occuper maintenant. Nous raisonnerons sur une classe particulière d'équations dont l'importance sera justifiée par les développements ultérieurs : nous considérerons des équations de la forme :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{a_0+\lambda(x)}{x}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{b_0+\mu(x)}{x^2}y = 0 \tag{2}$$

dans lesquelles

1°. $\lambda(x)$ et $\mu(x)$ sont continus pour $0 \leq x \leq 1$ et tendent vers zéro avec x.

2°. $b_0+\mu(x) \leq 0$ dans ce même intervalle fermé.

Remarquons que cette derniere propriété assure l'unicité de la solution pour le segment $(\varepsilon_n, 1)$; nous allons établir, *quelle que soit l'allure des intégrales pour $x=0$,* l'unicité pour le segment (0, 1) d'une solution de (2) continue sur ce segment fermé et prenant deux valeurs données à ses extrémités.

1°. $b_0+\mu(x) < 0$. Il nous suffit pour cela de montrer *l'atonie* (1) de toute solution ; etablissons, par exemple, l'absence de maximum positif en un point *intérieur* : supposons un tel maximum en x_0, on aurait :

$$y(x_0) > 0, \quad y'(x_0) = 0, \quad y''(x_0) \leq 0$$

en contradiction avec notre équation. Cette atonie entraîne que la solution nulle aux extrémités du segment (0, 1) est identiquement nulle, de là l'unicité.

2°. $b_0+\mu(x) \leq 0$. Etablissons directement que la solution nulle aux extrémités est identiquement nulle : soit $y=zv$ une solution de

(1) C'est-à-dire l'impossibilité pour toute solution d'avoir un maximum positif ou un minimum négatif pour $0 < x < 1$. — Cf. Bouligand, Ann. Soc. Pol. de Math. t. IV, 1925, note en bas de la page 63.

l'équation, v est solution de :

$$\frac{d^2v}{\partial x^2}+\frac{2z'+Az}{z}\frac{dv}{dx}+\frac{z''+Az'+Bz}{z}v=0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A=\dfrac{a_0+\lambda(x)}{x} \\ B=\dfrac{b_0+\mu(x)}{x^2} \end{cases}$$

et si z continue sur le segment fermé (0, 1) est prise telle que, pour $0 \leq x \leq 1$, nous ayons au sens strict

$$(3) \qquad z>0 \quad , \quad z''+Az'<0$$

v sera atone.

D'où : si y est nulle aux extrémités du segment (0, 1), il en sera de même de v qui sera par suite identiquement nulle, donc y possèdera elle-même cette dernière propriété. Tout revient à prouver l'existence de z satisfaisant aux conditions (3). Soit a_1 le minimum de $a_0+\lambda(x)$ sur le segment fermé (0, 1) ; appelons M une constante $< a_1$; nous avons, pour chaque x positif pris sur notre segment.

$$\frac{a_0+\lambda(x)}{x} > \frac{a_1}{1} > M$$

α. pour $a_1>0$, on peut prendre $M>0$; posons $z=e^{-Mx}$ les conditions (3) sont vérifiées ;

β. pour $a_1 \leq 0$, on a $M<0$; posons $z=N-e^{-Mx}$, on peut prendre N suffisamment grand pour que les conditions (3) soient encore vérifiées.

16. — Cherchons maintenant l'allure des intégrales de (2) au voisinage de l'origine.

Nous dirons que : *pour $x=0$, l'intégrale $y(x)$ est d'ordre n, si le rapport : $|y(x)| : x^n$ tend vers une limite bornée non nulle quand x tend vers zéro* (1).

(1) D'après cette définition $y(x)=x^k \log x$ n'a pas d'ordre déterminé pour $x=0$.

Soit $y(x)$ d'ordre n pour $x=0$; nous voyons que pour x tendant vers zéro et pour $\varepsilon>0$:

$|y(x)| : x^{n+\varepsilon}$ tend vers l'infini et $|y(x)| : x^{n-\varepsilon}$ tend vers zéro.

Or dans les mêmes conditions : $|x^k \log x| : x^k$ tend vers l'infini, et $|x^k \log x| : x^{k-\varepsilon}$ tend vers zéro, par analogie nous dirons que pour $x=0$, $x^k \log x$ est d'ordre inférieur à k et d'ordre supérieur à $k-\varepsilon$, ε arbitrairement petit.

Cette intégrale sera bornée pour $n \geqslant 0$, infinie pour $n < 0$.

Supposons tout d'abord :

$$\lambda(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots, \qquad \mu(x) = b_1 x + b_2 x^2 + \ldots$$

les seconds membres étant des sommes finies ou des séries convergentes dans le domaine $0 \leq x \leq 1$.

Les coefficients de y' et y remplissent les conditions du théorème de Fuchs ; nous sommes donc amenés à en chercher des solutions de la forme :

$$y = x^n [1 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots]$$

où n est solution de l'équation déterminante :

$$n^2 - (1 - a_0)\, n + b_0 = 0. \tag{4}$$

Puisque $b_0 \leq 0$ cette équation a deux racines α et β et l'on peut en général déterminer deux intégrales de la forme indiquée ; dans le cas où l'on ne peut en déterminer qu'une y, nous obtiendrons l'intégrale générale z en posant $z = yv$ et en ramenant le calcul de v à une quadrature. Nous aboutirons aux résultats suivants : les intégrales sont respectivement d'ordre α et β, sauf si $b_0 = 0$ et $a_0 = 1$ les unes étant d'ordre $\alpha = 0$ les autres d'un ordre inférieur à zéro et supérieur à $-\varepsilon$.

D'où, il existe :

1°. *si $b_0 < 0$ une intégrale (définie a un facteur constant près)* (1) *nulle à l'origine, les autres y étant infinies.*

2°. *si $b_0 = 0$ une intégrale * tendant vers 1 à l'origine, les autres y étant :*

si $a_0 \geq 1$, infinies : si $a_0 < 1$ continues.

17. Examinons maintenant le cas général avec la seule hypothèse complémentaire $\lambda'(x)$ continue pour $0 \leq x \leq 1$. Faisons $x = e^{-t}$, (2) devient :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + [1 - a_0 - \lambda(e^{-t})] \frac{dy}{dt} + [b_0 + \mu(e^{-t})]\, y = 0 \tag{5}$$

et chercher l'allure des intégrales de (2) pour $x = 0$ revient à chercher l'allure des intégrales de (5) à l'infini. Posons :

$$\left.\begin{array}{lll} p = 1 - a_0 - \lambda(e^{-t}) & \text{avec} & p_0 = 1 - a_0 \\ q = b_0 + \mu(e^{-t}) & \text{avec} & q_0 = b_0 \end{array}\right\} \text{pour } t \to +\infty$$

(1) Nous sous-entendrons par la suite l'expression : „définie à un facteur constant près" et la remplacerons par le signe :

(5) s'écrit :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = 0 \qquad q \leq 0$$

dans laquelle ; $p'_t = \lambda' \, . x$; or λ'_x étant continue pour $x = 0$, il en est de même de p'_t pour $t \to +\infty$ et p'_t tend vers zéro. Ecrivons alors :

$$y = \mathrm{Y}\, e^{-\frac{1}{2}\int p\, dt} \qquad (^1)$$

il vient :

$$\mathrm{Y}'' = \mathrm{Y}\left(\frac{p^2+2p'}{4} - q\right)$$

et par suite pour t suffisamment grand, nous avons :

(6) $$\mathrm{Y}'' = \mathrm{Y}\,[m^2 + f(t)]$$

avec $m^2 = \dfrac{p_0{}^2}{4} - q_0$ et $f(t)$ fonction continue tendant vers zéro pour $t \to +\infty$; d'où :

m^2 étant supposée différent de zéro, Y'' et Y sont de même signe, à partir d'une valeur positive suffisamment grande de t.

La solution $\mathrm{Y} = \varphi(t)$ de (6) peut être considérée comme l'équation d'un mouvement sur l'axe des Y, le mobile étant repoussé par l'origine avec une force asymptotiquement proportionnelle à l'élongation Y ; suivant les conditions initiales le mobile pour $t \to +\infty$ tendra vers l'infini (cas général) ou vers l'origine. Cette interprétation dynamique guide les raisonnements suivants :

Pour $\varepsilon > 0$ aussi petit que l'on veut, on peut trouver t_0 tel que pour $t \geq t_0$ on ait $|\, f(t)\, | < \varepsilon$.

1°. Prenons pour conditions initiales : $\mathrm{Y}_{t_0} = 0$, $\mathrm{Y}'_{t_0} = v$, $(v > 0)$; pour $t > t_0$ nous aurons $\mathrm{Y}'_t > 0$, d'où :

$$\mathrm{Y}_t(m^2 - \varepsilon) < \mathrm{Y}''_t < \mathrm{Y}_t(m^2 + \varepsilon)$$

$$m^2 - \varepsilon < \frac{\mathrm{Y}_t'^2 - v^2}{\mathrm{Y}_t{}^2} < m^2 + \varepsilon$$

et

$$\lim. \left[\frac{\mathrm{Y}'_t}{\mathrm{Y}_t}\right]_{t \to +\infty} = +\, m$$

2°. Prenons pour conditions initiales : $\mathrm{Y}_{t_0} = e$, $(e > 0)$, $\mathrm{Y}'_{t_0} = v$ $(v < 0)$ et cherchons quelles relations doivent exister entre e et v pour que Y'_t et Y_t tendent vers zéro pour t tendant vers l'infini. Pour $t > t_0$,

(1) Cf. Bieberbach : „Differential Gleichungen" J. Springer Berlin 1926, p. 146.

nous aurons $Y'_t < 0$, d'où :

$$m^2 - \varepsilon < \frac{Y_t'^2 - v^2}{Y_t^2 - e^2} < m^2 + \varepsilon$$

et faisant tendre t vers $+\infty$, il vient :

$$m^2 - \varepsilon < \frac{v^2}{e^2} < m^2 + \varepsilon.$$

Supposons donc cette condition réalisée, elle entraîne pendant tout le mouvement :

$$m^2 - \varepsilon < \frac{Y_t'^2}{Y_t^2} < m^2 + \varepsilon$$

et

$$\lim. \left[\frac{Y_t'}{Y_t}\right]_{t \to +\infty} = - m.$$

Posons :

$$\frac{Y_t'}{Y_t} = k + g(t)$$

avac $k = \pm m$, $g(t)$ fonction continue tendant vers zéro pour $t \to +\infty$; $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit étant donné, on peut trouver t_0 tel que $t \geq t_0$, entraîne $| g(t) | < \varepsilon$, d'où :

$$k - \varepsilon < \frac{Y'_t}{Y_t} < k + \varepsilon$$

$$e^{(k-\epsilon)(t-t_0)} < Y_t - Y_{t_0} < e^{(k+\epsilon)(t-t_0)}$$

et pour $t \to +\infty$, Y a une loi de variation asymptotique intermédiaire entre celles de $e^{(k-\epsilon)t}$ et $e^{(k+\epsilon)t}$ par suite $y(t)$ a une loi de variation asymptotique intermédiaire entre celles de $e^{(\alpha_1-\epsilon)t}$ et $e^{(\alpha_1+\epsilon)t}$ ou $e^{(\beta_1-\epsilon)t}$ et $e^{(\beta_1+\epsilon)t}$; α_1 et β_1 étant les racines du trinôme $n^2+p_0n+q_0$; d'où pnur $x=0$ les intégrales de (2) sont respectivement d'ordre α et β, α et β étant les racines du trinôme (4) ; conclusions analogues à celles du N° 16. Toutefois cette méthode ne donne pas de résultats pour une racine nulle sauf au cas où avec $b_0=0$ nous avons $\mu(x) \equiv 0$, à cette racine correspond alors une intégrale constante.

Donc, il existe :

1°. *Si $b_0 < 0$, une intégrale * nulle à l'origine, les autres y étant infinies.*

2°. *Si $b_0 = 0$, $\mu(x) \equiv 0$, $a_0 > 1$ une intégrale * continue à l'origine, les autres y étant infinies.*

3°. *Si $b_0=0$, $\mu(x)\equiv 0$, $a_0 < 1$, toutes les intégrales sont continues à l'origine* (1).

18. — *Nous dirons qu'une équation est de la classe α, lorsqu'elle sera de la forme :*

$$(E_\alpha) \qquad \frac{d^2y}{dx^2}+\frac{a_0+\lambda(x)}{x}\frac{dy}{dx}+\frac{b_0+\mu(x)}{x^2}y=0.$$

dans laquelle, pour $0\leq x\leq 1$: 1°. $b_0+\mu(x)\leq 0$: 2°. $\lambda(x)$, $\mu(x)$, $\lambda'(x)$ sont continues, les deux premières tendant vers zéro avec x. Dans les cas un peu spéciaux : 1°. $b_0=0$, $\mu(x)\not\equiv 0$, 2°. $b_0=0$, $\mu(x)\equiv 0$, $a_0=1$ ces trois fonctions sont en outre supposées développables en séries de puissances de x.

Pour cette classe α, les Nos qui précédent permettent de déterminer l'allure des intégrales pour $x=0$ et d'établir deux sous-classes α' et α'' :

1° Une $E_{\alpha'}$, n'a que des solutions continues à l'origine ; alors $b_0=0$ et $a_0<1$;

2°. Une $E_{\alpha''}$ a une solution * continue à l'origine, les autres étant infinies en ce même point ; ce dernier cas est le plus général, puisqu'il suffit, pour l'obtenir, de l'hypothèse suplémentaire $b_0<0$.

19. — Une équation $E_{\alpha''}$ possède les propriétés suivantes :

Propriété I. *La solution $y_0(x)$ bornée à l'origine *, n'est pas nulle pour $x=1$.*

1°. $b_0<0$, étant déjà nulle pour $x=0$, elle serait identiquement nulle.

2°. $b_0=0$, *1er Cas :* $\mu(x)\equiv 0$, elle est constante

2ème Cas : $\mu(x)\not\equiv 0$ alors $\lambda(x)$ et $\mu(x)$ sont développables et nous avons :

$y_0(x)=1+c_1x+c_2x^2+\ldots$ avec $c_1=-\dfrac{b_1}{a_0}$ (notations du N° 16) et comme $a_0\geq 1$, $b_1\leq 0$ nous avons $c_1\geq 0$.

Posons $y_0(x)=zv$ (notations du N° 15) ; en partant de $x=0$ $y_0(x)$ croît et comme $z>0$ décroît constamment, v initialement positif va en partant de $x=0$ croître et comme v est atone, v va être constamment positif, donc aussi $y_0(x)$.

(1) Si $a_0=1$ les integrales sont à l'origine ou toutes continues, ou l'une * continue les autres étant infinies ; voici un exemple de chacun de ces cas :

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1+\dfrac{2}{\log x}}{x}\frac{dy}{dx}=0\,;\qquad \frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1+\dfrac{1}{\log x}}{x}\frac{dy}{dx}=0\,.$$

Propriété II: *La solution * nulle pour $x=1$ est infinie à l'origine.*

Car ce n'est pas la solution bornée.

Propriété III: *La solution * nulle pour $x=\varepsilon_n$ tend vers la solution * bornée à l'origine lorsque ε_n s'évanouit.*

Soit $y_0(x)$ *une* solution bornée à l'origine et $y_1(x)$ *une* solution qui lui est linéairement indépendante; *une* solution nulle pour $x=\varepsilon_n$, peut être prise telle que:

$$y(x)=y_0(x)-\frac{y_0(\varepsilon_n)}{y_1(\varepsilon_n)}y_1(x)$$

et quand

$$\varepsilon_n \to 0, \qquad y(x) \to y_0(x).$$

On peut, en corollaire de cette propriété, donner une nouvelle démonstration de la propriété I:

Une solution nulle pour $x=\varepsilon_n$ n'est certainement pas nulle pour $x=1$; or si l'on maintient *fixe* sa valeur pour $x=1$ quand ε_n s'évanouit cette solution tend vers *une* solution bornée à l'origine; celle-ci n'est donc pas nulle pour $x=1$. *La convergence est uniforme dans tout intervalle* (ε, *1*), *si petit que soit* ε, *mais elle n'est pas forcément uniforme à l'origine* (*lorsque* $b_0=0$)

20. — En posant le problème de Dirichlet généralisé à la Wiener pour le segment (0, 1) et en utilisant le mode de raisonnement du N° 13, nous aboutissons a l'importante conclusion:

L'origine est propre pour une équation de la classe α', impropre pour une équation de la classe α''.

Etant donnée une équation E_α nous sommes maintenant à même d'indiquer la nature de l'origine pour le problème qui lui correspond; voici quelques exemples:

1°. $$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{2x}\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y=0$$

nous avons: $a_0=\dfrac{1}{2}$, $b_0=0$ *l'origine est propre.*

2°. $$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{\lambda}{\sin x}\frac{dy}{dx}-2xy=0$$

nous avons: $a_0=\lambda$, $b_0=0$, d'où $\begin{cases}\text{si } \lambda < 1 & \textit{l'origine est propre}\\ \text{si } \lambda \geq 1 & \textit{l'origine est impropre.}\end{cases}$

3°. $$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{e^x-1}\frac{dy}{dx}-\frac{1}{1-\cos x}y=0$$

nous avons: $b_0=-2$ *l'origine est impropre.*

21. *Étant donnée l'équation :*

$$y''+A(x)y'+B(x)y=0 \tag{7}$$

dont les coefficients A et B sont continus pour $a \leq x \leq b$ et remplissent les conditions permettant d'affirmer l'unicité de la solution du problème de Dirichlet *pour le segment (a, b) ; il existe une fonction et une seule $G(x, \xi)$ continue, vérifiant en tant que fonction de x l'équation, nulle aux extrémités du segment et dont la dérivée présente en $\xi (a \leq \xi \leq b)$ une discontinuité telle que :*

$$\left[\frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x}\right]_{x=\xi-0} - \left[\frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x}\right]_{x=\xi+0} = 1.$$

Une intégrale s'annulant pour $x=\alpha$ $(a \leq \alpha \leq b)$ est déterminée à un facteur constant près.

Soient $y_0(x)$ et $y_1(x)$ deux intégrales s'annulant respectivement pour $x=a$ et $x=b$; elles sont linéairement distinctes. Alors la fonction G est de la forme :

$$c_0 y_0(x) \text{ pour } a \leq x \leq \xi ; \quad c_1 y_1(x) \text{ pour } \xi \leq x \leq b$$

avec :

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} c_0\, y_0(\xi) - c_1\, y_1(\xi) = 0 \\ c_0\, y_0'(\xi) - c_1\, y_1'(\xi) = 1 \end{cases}$$

ce systéme a une solution et une seule, car son déterminant est le wronskien. La fonction G ainsi trouvée est indépendante des facteurs constants affectant $y_0(x)$ et $y_1(x)$ utilisées, elle est donc unique : nous l'appellerons *fonction de Green unidimensionnelle* (1).

Soit $f(x)$ une fonction continue pour $a \leq x \leq b$; la solution du problème de Dirichlet pour le segment (a, b), nulle aux extrémités et l'équation :

$$y''+A(x)y'+B(x)y=f(x)$$

est donnée par

$$y = -\int_a^b f(\xi)\, G(x, \xi)\, d\xi.$$

22. — 1°. Pour une équation E_α' et le segment (0, 1) les raisonnements précédents sont encore valables quel que soit ξ puisque $y_0(x)$ et $y_1(x)$ sont continues : *G existe donc.*

2°. Pour une équation E_α'' et le segment (0, 1) on ne peut rien affirmer à priori. Soit alors G_n la fonction de Green correspondant à une telle équation et au segment $(\varepsilon_n, 1)$; quand ε_n s'évanouit, d'après

(1) Bôcher : „Leçons sur les méthodes de Sturm" p. 98 et suiv.

la propriété III du N° 19 la solution * nulle en ε_n tend vers la solution bornée * pour $x=0$, par suite G_n tend vers une fonction limite G définie encore par le système (1) mais dans lequel la fonction $y_0(x)$ est la fonction bornée à l'origine. La convergence de G_n vers G est uniforme dans tout intervalle $(\varepsilon, 1)$ si petit que soit ε mais ne l'est pas à l'origine (conséquence du N° 19) : la fonction G nulle en général pour $x=0$ ne l'est plus lorsque $b_0=0$ (1).

Ce raisonnement est valable pour $\xi \neq 0$; montrons que pour $\xi = 0$, c_1 a encore un sens :

$$c_1 = \frac{\frac{1}{y_1}}{\frac{y'_0}{y_0} - \frac{y'_1}{y_1}}$$

1. Cas général : $b_0 < 0$ ou $b_0 = 0$, $a_0 > 1$; pour $\xi = 0$ y_0 et y_1 sont respectivement d'ordre $\alpha \geq 0$ et $\beta < 0$; d'où c_1 est d'ordre $1-\beta$ donc nul.

2. Cas particulier : $b_0=0$, $a_0=1$; y_0 est d'ordre $\alpha=0$ y_1 est d'ordre inférieur à zéro et supérieur à $-\varepsilon$; d'où c_1 est d'ordre inférieur à $1+\varepsilon$ et supérieur à 1, donc nul.

$G = c_1 y_1(x)$ est alors identiquement nulle en x pour $\xi = 0$. De là, le théorème suivant :

Étant donnée une équation de la classe α, il existe une fonction et une seule $G(x, \varepsilon)$ continue, vérifiant en tant que fonction de x l'équation, nulle à l'extrémité $x = 1$, attachée à la valeur zéro à l'extrémité $x=0$ du segment $(0, 1)$ et dont la dérivée présente en ξ $(0 \leq \xi \leq 1)$ une discontinuité telle que :

$$\left[\frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x}\right]_{x=\xi-0} - \left[\frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x}\right]_{x=\xi+0} = 1.$$

23. — *Soit une équation E_α avec second membre $f(x)=x^p f_1(x)$ où $f_1(x)$ est continue pour $0 \leq x \leq 1$, la solution unique :*

$$y_n(x) = -\int_{\varepsilon_n}^{1} f(\xi)\, G_n(x, \xi)\, d\xi \tag{8}$$

nulle aux extrémités du segment $(\varepsilon_n, 1)$ tend quand ε_n s'évanouit, vers

---

(1) Pour rappeler que G est limite de fonctions G_n nulle à l'extrémité $x=\varepsilon_i$ du segment $(\varepsilon_n, 1)$ nous dirons que G est attachée à la valour zéro à l'extrémite $x = 0$ du segment $(0, 1)$.

une fonction limite:

(9) $$y(x) = -\int_0^1 f(\xi)\, G(x, \xi)\, d\xi$$

1°. *bornée pour* $\begin{cases} p > -2\,, & \text{si } b_0 = 0 \\ p \geq -2\,, & \text{si } b_0 < 0 \end{cases}$

2°. *finie pour chaque* x *de l'intervalle* $0 < x \leq 1$ *et infinie à l'origine pour*

$$\begin{cases} -2 \geq p > -(1 + a_0)\,, & \text{si } b_0 = 0 \\ -2 > p > \beta - 2\,, & \text{si } b_0 < 0 \end{cases}$$

[où β désigne, comme ci-dessus, la racine négative du trinôme (4)].

Quand ε_n s'évanouit (8) tend vers (9), tout revient donc à chercher pour quelles valeurs de p cette expression a un sens.

Or on a :

$$y(x) = -y_1(x)\int_0^x f(\xi)\, c_1(\xi)\, d\xi - y_0(x)\int_x^1 f(\xi)\, c_0(\xi)\, d\xi$$

Posons :

$$\int_0^x f(\xi)\, c_1(\xi)\, d\xi = \int_0^x M(\xi)\, d\xi = M_1(x) \qquad \text{et} \qquad y_1(x)\, M_1(x) = M_2(x)$$

$$\int_x^1 f(\xi)\, c_0(\xi)\, d\xi = \int_x^1 L(\xi)\, d\xi = L_1(x) \qquad \text{et} \qquad y_0(x)\, L_1(x) = L_2(x).$$

Pour que $y(x)$ soit bornée :

1°. pour $x \neq 0$, il suffit que $M_1(x)$ soit finie,

2°. pour $x = 0$, il suffit que $[M_2(x)]_{x=0}$ et $[L_2(x)]_{x=0}$ soient nulles (origine propre) ou finies (origine impropre).

Or abstraction faite du cas $b_0 = 0$, $a_0 = 1$ que nous étudierons à la fin, nous avons :

pour $x = 0$, $y_0(x)$ et $y_1(x)$ qui sont respectivement d'ordre α et β
pour $\xi = 0$, c_0 et c_1 qui sont respectivement d'ordre $1-\alpha$ et $1-\beta$
M et L qui sont respectivement d'ordre $p+1-\beta$ et $p+1-\alpha$

1ère hypothèse : l'origine est propre :

1°. pour $\xi = 0$, M est d'ordre $p+1$; d'où $M_1(x)$ est finie pour $p > -2$.

2°. *a*) Nous devons avoir $[M_2(x)]_{x=0}$ d'ordre > 0, d'où $[M_1(x)]_{x=0}$ d'ordre > 0 et par suite pour $\xi = 0$: ordre de $M(\xi) > 1$, d'où $p+1 > -1$ et $p > -2$.

b) Nous devons avoir $[L_2(x)]_{x=0}$ d'ordre > 0, d'où $[L_1(x)]_{x=0}$ d'ordre $> a_0 - 1$ et par suite pour $\xi = 0$: ordre de $L(\xi) > a_0 - 2$, d'où $p + a_0 > a_0 - 2$ et $p > -2$.

2ième hypothèse : l'origine est impropre :

1er Cas : $b_0 < 0$; $\alpha > 0$, $\beta < 0$

1°. pour $\xi = 0$, M est d'ordre $p + 1 - \beta$, d'où $M_1(x)$ est finie pour $p > \beta - 2$.

2°. *a)* Nous devons avoir $[M_2(x)]_{x=0}$ d'ordre ≥ 0, d'où $[M_1(x)]_{x=0}$ d'ordre $\geq -\beta$ et par suite pour $\xi = 0$: ordre de $M(\xi) \geq -1-\beta$, d'où $p+1-\beta \geq -1-\beta$ et $p \geq -2$.

b) Même raisonnement en partant de $L_2(x)$ en vertu de la symétrie.

2ième Cas : $b_0 = 0$, $a_0 > 1$; $\alpha = 0$, $\beta = 1 - a_0$.

1°. 2°. *a)* les raisonnements faits au 1e Cas s'adaptent, nous trouvons $p > -(1 + a_0)$, $p \geq -2$.

b) Nous devons avoir $[L_2(x)]_{x=0}$ d'ordre ≥ 0, d'où $[L_1(x)]_{x=0}$ d'ordre ≥ 0 et par suite pour $\xi = 0$: ordre de $L(\xi) > -1$, d'où $p + 1 > -1$ et $p > -2$.

3ième Cas : $b_0 = 0$, $a_0 = 1$; $\alpha = 0$, $\beta = 0$

pour $x = 0$, $y_0(x)$ est d'ordre 0 et $y_1(x)$ d'ordre compris entre 0 et $-\varepsilon$
pour $\xi = 0$, c_0 et c_1 sont resp. d'ordre compris entre 1 et $1-\varepsilon$, $1+\varepsilon$ et 1
M et L sont resp. d'ordre compris entre
$p+1+\varepsilon$ et $p+1$, $p+1$ et $p+1-\varepsilon$

1°. pour $x \neq 0$, $M_1(x)$ est finie pour $p > -2$.

2°. *a)* Nous devons avoir $[M_2(x)]_{x=0}$ d'ordre ≥ 0, d'où $[M_1(x)]_{x=0}$ d'ordre >0 et par suite pour $\xi=0$: ordre de $M(\xi) > -1$, d'où $p > -2$.

b) Nous devons avoir $[L_2(x)]_{x=0}$ d'ordre ≥ 0, d'où $[L_1(x)]_{x=0}$ d'ordre >0 et par suite pour $\xi=0$: ordre de $L(\xi) > -1$ d'où $p > -2$.

Notre théorème est démontré.

24. — *Dans la résolution du problème de* Dirichlet ***pour le segment (0, 1), la nature de l'origine est la même pour les équations :***

$$(10) \quad E_\alpha = 0, \qquad (11) \quad E_\alpha = f(x) \text{ avec } \begin{cases} p > -2 \text{ si } b_0 = 0 \\ p \geq -2 \text{ si } b_0 < 0 \end{cases} \text{(1)}.$$

On peut donner de cette propriété différentes démonstrations; nous en donnerons une utilisant la fonction de Green. Soit à résoudre le problème pour le segment (0, 1) et les valeurs k_0 et k_1 attachées aux

---

(1) Résultat plus complet que celui énoncé dans notre note du 1e Fév. 1932 à l'Ac. des Sc. (t. 194, p. 426) où $f(x)$ restait continue aux extrémités de l'intervalle.

extrémités, pour l'équation (11) nous aurons :

$$y = v - \int_0^1 f(\xi)\, \mathrm{G}(x, \xi)\, d\xi$$

avec v solution de (10) prenant les valeurs k_0 et k_1 pour $x=0$ et $x=1$. Suivant que l'origine sera propre ou impropre pour (10) la valeur k_0 interviendra ou n'interviendra pas pour déterminer v et par suite pour déterminer y, ce qui démontre notre théorème.

Remarquons de plus que dans le cas de l'impropriété la valeur que prendra y a l'origine dépendra d'une part de la valeur k_1 attachée à $x=1$ et d'autre part de la valeur de l'intégrale pour $x=0$. Nous allons approfondir sur un exemple cette particularité.

25. — Considérons l'équation :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{a_0}{x} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{b_0}{x^2}\, y = c_0\, x^p \qquad b_0 \leq 0$$

pour laquelle l'origine est impropre.

Étude de $v(x)$:

$$b_0 < 0 \qquad v(0) = 0$$

$$b_0 = 0 \qquad v(0) = k_1.$$

Étude de $I(x) = \int_0^1 f(\xi)\, \mathrm{G}(x, \xi)\, d\xi$

				Cas
$b_0 < 0$		$p > -2$	$\mathrm{I}(0) = 0$	**1**
		$p = 2$	$\mathrm{I}(0) = \frac{c_0}{b_0}$	**2**
		$-2 > p > \beta - 2$	$\mathrm{I}(0)$ infinie	**3**
$b_0 = 0$	$a_0 > 1$	$p > -2$	$\mathrm{I}(0) = \frac{c_0}{1-a_0}\left[\frac{1}{2+p} - \frac{1}{a_0+1+p}\right]$	**4**
		$-2 \geq p > -(1+a_0)$	$\mathrm{I}(0)$ infinie	**5**
	$a_0 = 1$	$p > -2$	$\mathrm{I}(0) = -\frac{c_0}{(p+2)^2}$	**6**

Nous trouvons pour le problème unidimensionnel les différents cas rencontrés par M. Bouligand pour le problème plan dans son étude

„sur certaines équations du type elliptique à coefficients singuliers [1]" lorsque le problème de Dirichlet au sens de Wiener se résoud normalement. En particulier l'origine est dans le cas n° 1 un *ensemble impropre d'annulation* et dans les cas 3 et 5 *un ensemble impropre d'infinitude.*

§. 2 — Problème plan.

26. — Nous considérons d'abord un domaine plan ouvert simplement connexe Ω, limité par un contour simple de Jordan Σ contenant un *segment de droite* AB qui, pour certaines équations elliptiques, pourra jouer le rôle d'ensemble impropre.

Un changement de système d'axes et une transformation de la forme $x_1 = px$, $y_1 = qy$ ramène la recherche de la nature de AB à celle d'une portion σ de l'axe $y'y$ pour le nouveau domaine inclus dans un rectangle R: $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq \pi$.

Nous supposerons dans la suite être toujours dans ce cas.

Nous allons tout d'abord étendre le théorème d'unicité, rencontré au n° 10, pour des équations de plus en plus compliquées.

27. — *Soit l'équation:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{a_0 + \lambda(x)}{x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b_0 + \mu(x)}{x^2} u = 0 \tag{1}$$

à laquelle correspond l'équation différentielle ordinaire:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{a_0 + \lambda(x)}{x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b_0 + \mu(x)}{x^2} u = 0 \tag{1'}$$

de la classe α'' [origine impropre].

„La solution de (1) bornée dans $\Omega + \Sigma$, continue dans $\Omega + \Sigma - \sigma$, nulle sur $\Sigma - \sigma$ est identiquement nulle".

Le procédé de démonstration sera celui qu'a utilisé M. Bouligand pour des équations plus simples: [2]

Soit $\varphi(x, y)$ une fonction bornée dans $\Omega + \Sigma$, continue dans $\Omega + \Sigma - \sigma$ (pas nécessairement par suite sur σ) et nulle sur $\Sigma - \sigma$. Appelons Ω_n la partie de Ω, R_n la partie de R, interceptées par le demi plan $x > \varepsilon_n$ et résolvons le problème de Dirichlet pour le domaine Ω_n, l'équation (1) et les valeurs que prend $\varphi(x, y)$ sur la frontière Σ_n.

---

[1] Ac. Roy. de Belgique. Bulletin de la classe des Sciences T. XVIII, N° 10, 1932.

[2] Bouligand: Sur quelques cas singuliers du problème de Dirichlet. Ac. Roy. de Belgique, 4 Mars 1933.

D'après la théorie classique, (les coefficients de (1) ne présentant pas de singularités) il existe une solution unique u_n et en vertu de la monotonie si nous posons :

M = borne supérieure $|\varphi(x, y)|$ dans $\Omega+\Sigma$, nous aurons :

$$|u_n| < M.$$

Soit maintenant v_n la solution de (1) pour R_n correspondant à la valeur M sur le coté $x=\varepsilon_n$ et à la valeur zéro sur le coté $x = 1$; cette solution uniquement fonction de x vérifie l'équation différentielle ordinaire (1'), donc est *positive sur les cotés $y=0$ et $y=\pi$*, elle est donc essentiellement positive à l'intérieur de R_n en particulier sur $\Sigma_n - \sigma_n$ [σ_n partie de la frontière de Ω_n parallèle à σ], elle *majore* donc u_n dans Ω_n.

En raisonnant de même avec $-v_n$, nous trouvons que l'on a dans Ω_n

$$-v_n < u_n < v_n.$$

Or quand ε_n tend vers zéro, d'après l'étude du problème unidimensionnel, v_n tend vers zéro du fait que (1') est de la classe α'', donc aussi u_n.

28. — Nous allons établir ce même théorème d'unicité *pour l'équation :*

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{a_0+\lambda(x, y)}{x}\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{b_0+\mu(x, y)}{x^2}u=0$$

dans laquelle pour : $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq \pi$:

1°. $\lambda(x, y)$ et $\mu(x, y)$ *continues sont telles que l'équation différentielle ordinaire :*

$$(2') \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{a_0+\lambda(x, y_0)}{x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{b_0+\mu(x, y_0)}{x^2}u=0$$

est de la classe α'' [origine impropre].

2° $\alpha(x, y)$ *continue, sauf peut être pour $x=0$.*

Remarquons tout d'abord que l'on peut toujours trouver $\lambda_1(x)$ et $\mu_1(x)$ continues tendant vers zéro avec x et telles que l'on ait dans la région considérée :

$$\lambda_1(x) \leq \lambda(x, y), \qquad -b_0 \geq \mu_1(x) \geq \mu(x, y).$$

Conservant les notations du n° précédent, considérons le rectangle R_n avec une répartition continue quelconque sur sa frontière et soient pour ces données : v_n la solution de (2) et r_n la solution de :

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{a^0+\lambda_1(x)}{x}\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{b_0+\mu_1(x)}{x^2}u=0.$$

La différence : $v_n = r_n - \nu_n$ nulle sur la frontière est solution de :

$$\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2} + \frac{a_0 + \lambda(x, y)}{x} \frac{\partial v_n}{\partial x} + \alpha(x, y) \frac{\partial v_n}{\partial y} +$$

$$+ \frac{b_0 + \mu(x, y)}{x^2} v_n = - \frac{\lambda_1(x) - \lambda(x, y)}{x} \frac{\partial r_n}{\partial x} - \frac{\mu_1(x) - \mu(x, y)}{x^2} r$$

par suite, si $\frac{\partial r_n}{\partial x} \leq 0$ et $r_n \geq 0$, v_n ne peut avoir de minimum négatif d'ou $r_n \geq \nu_n$.

Ces remarques étant faites, soit u_n la solution de (2) pour Ω_n dans les conditions du n° précédent, nous avons toujours :

$$| u_n | < \text{M}.$$

Soit alors ν_n la solutin de (2) pour R_n correspondant a la valeur M sur le coté $x = \varepsilon_n$ et à la valeur zéro sur le coté $x = 1$ et solution de :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{a_0 + \lambda_1(x)}{x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b_0 + \mu_1(x)}{x^2} u = 0 \tag{4}$$

sur les cotés $y = 0$ et $y = \pi$; elle est *positive* sur ces deux derniers cotés, donc essentiellement positive à l'intérieur de R_n, en particulier sur $\Sigma_n - \sigma_n$, ele majore donc u_n dans Ω_n.

Or considérons pour cette même répartition de valeurs frontières sur R_n la solution de (3), elle est uniquement fonction de x, donc solution de (4), donc $\frac{\partial r_n}{\partial x} \leq 0$ et $r_n \geq 0$, par suite r_n majore ν_n dans R_n.

Nous pourrions évidemment faire un raisonnement analogue sur $-\nu_n$ et $-r_n$; d'ou finalement nous avons dans Ω_n

$$- r_n < u_n < r_n .$$

Or d'après l'étude du problème unidimensionnel, quand ε_n tend vers zéro, r tend vers zéro donc aussi u_n.

29. — *Soit maintenant l'équation :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \text{A}(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + \text{B}(x, y)\, u + C(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{5}$$

dans laquelle pour $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq \pi$:

1°. *A et B continues, sont telles que l'équation différentielle ordinaire :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \text{A}(x, y_0) \frac{\partial u}{\partial x} + \text{B}(x, y_0)\, u = 0 \tag{5'}$$

est toujours de la classe α'' [*origine impropre*], *avec* $B < 0$, 2°. *C continue, sauf peut être pour $x=0$.*

Nous allons montrer que le théorème d'unicité s'applique encore à ce cas général.

Du fait que (5′) est une équation E_a'', nous avons :

$$A(x, y_0) = \frac{a(y_0) + \lambda(x, y_0)}{x} \quad , \quad B(x, y_0) = \frac{b(y_0) + \mu(x, y_0)}{x^2}$$

avec $\lambda(x, y_0)$ et $\mu(x, y_0)$ tendant vers zéro avec x.

Soient alors :

a_0 le minimum de $a(y_0)$, $b_0 < 0$ le maximum de $b(y_0)$

et $\lambda_1(x)$ et $\mu_1(x)$ deux fonctions continues tendant vers zéro avec x et telles que :

$$\frac{a_0 + \lambda_1(x)}{x} \leq A(x, y) \quad ; \quad 0 > \frac{b_0 + \mu_1(x)}{x^2} \geq B(x, y).$$

A l'équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{a_0 + \lambda_1(x)}{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b_0 + \mu_1(x)}{x^2} u + C(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{6}$$

correspond l'équation différentielle :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{a_0 + \lambda_1(x)}{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b_0 + \mu_1(x)}{x^2} u = 0 \tag{6'}$$

qui admet l'origine comme impropre.

Il est alors possible de répéter pour l'équation (5) les raisonnements faits au n° précédent pour l'équation (2) : (6) jouant le rôle (3).

Remarque : Ce raisonnement valable dans le cas général $B < 0$ ne s'applique pas lorsque B est susceptible de s'annuler ; en effet, lorsque $b(y_0) = 0$, puisque (5′) admet l'origine comme impropre : $a(y_0) \geq 1$, or pour construire (6′) nous serions amenés à prendre $b_0 = 0$ et une valeur a_0 qui ne serait pas forcément supérieure ou égale à 1 de sorte que nous ne pourrions rien affirmer quant à la nature correspondante de l'origine.

30. — Convenons de représenter par $\mathcal{E}_a''$ une équation du genre (1), (2) ou (5) :

Pour une telle équation une solution régulière dans Ω, bornée dans $\Omega + \Sigma$, continue en chaque point de $\Sigma - \sigma$ se trouve exclusivement déterminée par les valeurs qu'elle prend sur $\Sigma - \sigma$.

Ce théorème d'unicité entraîne l'impropriété anormale du segment σ.

Pour démontrer ce fait important nous allons utiliser, en l'adaptant, le procédé de raisonnement de M. Bouligand :

Soit $\varphi(x, y)$ une fonction continue prenant sur $\Sigma - \sigma$ les valeurt qui s'y trouvent réparties ; conservons les notations des N^{os} précédenss avec en plus $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, n entier ; la solution u_n du problème de Dirichlet pour Ω_n est telle que :

$$| u_n | < M$$

d'où si r désigne un entier positif quelconque indépendant de n nous aurons dans Ω_n

$$| u_{n+r} - u_n | < 2M.$$

Or il est possible de définir dans Ω_n en passant s'il le faut par l'intermédiaire des équations (3) ou (6), des fonctions v_n, r_n qui majorent $u_{n+r} - u_n$, de sorte que nous pouvons finalement écrire

$$- r_n < u_{n+r} - u_n < r_n$$

et comme r_n tend vers zéro avec ε_n, ilen est de même de $u_{n+r} - u_n$, ce qui entraine la convergence des fonctions u_n vers une fonction limite qui est évidemment, d'aprés le théorème d'unicité, indépendante de la répartition donnée sur σ.

Citons quelques exemples d'équations $\mathcal{E}_{\alpha''}$:

1er Exemple :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{3 + 5x^2}{x} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{5 + 4x^4}{x^2} u = 0$$

'axe $y'y$ tout entier est impropre.

2ième Exemple :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{y \sin x - 1}{x^2} u = 0$$

σ de $y'y$ défini par $0 \leq y \leq 1$ est impropre.

3ième Exemple :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{3}{x} + y\right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{4}{x} + 5y\right) \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{y}{x^2 e^x} - \frac{2}{x^2}\right) u = 0$$

σ de $y'y$ déterminé par $0 \leq y \leq 2$ est impropre.

30. — Soit $\mathcal{E}$ une équation elliptique admettant soit en entier soit en partie l'axe $y'y$ comme impropre, un changement de système d'axes transforme $\mathcal{E}$ en $\mathcal{E}_1$ admettant soit en entier, soit en partie, une droite quelconque comme impropre.

Soit donc $\mathcal{E}$ admettant la droite $y=ax$ comme impropre et soit δ un domaine de l'angle $x0y$ ayant précisément pour une partie de sa frontière une portion de l'axe impropre.

La transformation *biunivoque* :

$$Y=y \quad , \quad X=+\sqrt{x}$$

transforme $\mathcal{E}$ en $\mathcal{E}_1$ (elliptique) et δ en δ_1 tel que la partie de la frontière de ce dernier domaine située sur la parabole $Y=aX^2$ est impropre :

Toute transformation biunivoque transformant $\mathcal{E}$ en $\mathcal{E}_1$ (elliptique), transforme un segment de droite impropre pour $\mathcal{E}$ en une portion de courbe impropre pour $\mathcal{E}_1$.

Soient dans le plan $x0y$: $\mathcal{E}$ une équation elliptique admettant comme impropre une partie AB de la droite $y=ax+b$, δ un domaine simplement connexe admettant précisément AB dans sa frontière.

Soit dans le plan $x_1 0_1 y_1$; un domaine δ_1 quelconque simplement connexe sur la frontière duquel nous fixerons arbitrairement deux points A_1 et B_1.

Nous savons, d'après les travaux de M. M. Osgood, Caratheodory et Montel qu'on peut effectuer la représentation conforme du domaine δ sur le domaine δ_1 de manière que la partie AB de la frontière de δ corresponde à la partie $A_1 B_1$ de la frontière de δ_1. Cette représentation conforme fait correspondre à $\mathcal{E}$ une équation $\mathcal{E}_1$ elliptique pour laquelle $A_1 B_1$ est impropre, d'où :

Une portion de courbe quelconque est impropre pour une équation elliptique convenablement choisie.

31. — Nous pouvons maintenant étant donné un domaine δ simplement connexe construire une équation elliptique $\mathcal{E}$ admettant comme impropre une partie de la frontiere ; cette équation d'après les résultats obtenus aura nécessairement ses coefficients présentant des singularités sur la partie impropre.

On peut se proposer un problème inverse :

Étant donnée une équation elliptique $\mathcal{E}$ présentant sur la frontière d'un domaine δ des singularités, déterminer les parties de cette frontière qui sont impropres.

Nous nous bornerons au cas suivant : la frontiere étant formée de courbes pour lesquelles sont satisfaites les hypothèses classiques de la théorie de la courbure, soit $d(x, y)$ la plus courte distance d'un point voisin de la courbe à cette courbe, nous considérons l'équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\alpha(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+\beta(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}}{d(x,y)}+\frac{\gamma(x,y)}{[d(x,y)]^2}u=0 \tag{7}$$

dans laquelle : 1. $\gamma \leq 0$ est continue dans le domaine et sur sa frontière,

2. α et β continues partout, ainsi que leurs dérivées premières sont les composantes d'un vecteur $\vec{v}$.

L'équation proposée peut s'écrire encore :

$$\Delta u + \frac{1}{d}\left(\vec{v}.\,\overrightarrow{\text{grad}}\,u\right) + \frac{\gamma}{d^2}u = 0$$

un déplacement du système d'axes ne modifie donc pas la forme initialement donnée.

Considérons l'arc $\overset{\smile}{AD}$ avec lequel se confond la frontière au voisinage d'un point M. Supposons pour fixer les idées que pour cet arc le domaine soit dans la concavité, nous y substituerons le domaine ABCD limité par deux normales et l'arc $\overset{\smile}{CD}$ parallèle à l'arc $\overset{\smile}{AB}$ et nous transporterons les axes de coordonnées en M, l'axe $0x$ prenant la direction de la normale intérieure Soit $u(x, y)$ la solution du problème de Dirichlet pour l'équation (7), le domaine ABCD et des valeurs données sur la frontière. Un point P quelconque du domaine est complètement déterminé par $X = \overline{Mp}$ et $Y = \overset{\smile}{pP}$, l'arc $\overset{\smile}{pP}$ étant parallèle à l'arc frontière et p étant sont intersection avec l'axe Mx. La solution $u(x, y)$ exprimée à l'aide de X et Y devient U (X, Y) ; nous allons chercher à quelle équation satisfait U. Soit

$$x \cos\theta + y \sin\theta = f(\theta)$$

l'équation de la tangente à l'arc $\overset{\smile}{AD}$, la courbe sera déterminée par :

$$x \cos\theta + y\sin\theta = f(\theta) \quad , \quad -x\sin\theta + y\cos\theta = f'(0)$$

d'où les relations suivantes entre x, y, X, Y et θ correspondants au point P.

$$\begin{aligned} x\cos\theta + y\sin\theta &= f(\theta) - X \\ -x\sin\theta + y\cos\theta &= f'(\theta) \\ Y &= -\int_0^\theta (f + f'' - X)\,d\theta \end{aligned}$$

par suite si l'on pose : 1°. A (X, Y), B (X, Y) expressions des composantes de $\vec{v}$ suivant la normale et la tangente à l'arc $\overset{\smile}{pP}$ en P. 2°. $f + f'' - X = \rho$ (ρ distance de P au centre de courbure) ; nous avons

$$(8) \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \frac{A - \frac{X}{\rho}}{X}\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{B}{X}\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\Gamma}{X^2}U = 0.$$

Dans le plan de deux axes rectangulaires OX et OY on peut faire correspondre au domaine précédent un domaine rectangulaire : une normale correspondant à une parallèle à l'axe OX, la correspondace étant biunivoque et telle qu'en deux points correspondants u et U prennent la même valeur. Rechercher la manière dont se comporte l'arc $\overset{\smile}{AD}$ pour u solution de (7) revient à résoudre la même question pour la frontière du rectangle située sur OY à l'égard de U solution de (8). D'après le N° 28 si l'on appelle a_0 la valeur de la composante de $\vec{v}$ en un point de l'arc sur la normale en ce point (orientée vers la concavité) et b_0 la valeur de $\gamma(x, y)$ en ce même point, nous avons les conclusions suivantes :

1er Cas : $\gamma(x, y) \neq 0$; $b_0 < 0$ *sur* $\overset{\smile}{AD}$, *l'arc est impropre.*

2ème Cas : $\gamma(x, y) = 0$; $a_0 > 1$ *sur* $\overset{\smile}{AD}$, *l'arc est impropre.*

32. — M. Bouligand considérant des équations de la forme :

$$F(u) = P\Delta u + Q\frac{\partial u}{\partial x} + R\frac{\partial u}{\partial y} + Su = 0 \tag{9}$$

dans lesquelles P, Q, R, S sont polynômes qui pour $x > 0$ satisfont aux conditions suivantes :

1°. $S \leq 0$, 2°. $P > 0$ avec x s'annule pour $x=0$ et un domaine Ω, prélevé sur le demi-plan $x > 0$ et du genre indiqué au n° 26, s'est occupé dans un récent mémoire [2] du problème de Dirichlet généralisé.

Pour établir la convergence des u_n, il procède comme dans son étude sur le problème de Dirichlet harmonique [3] en utilisant une généralisation du theorème de Harnack par Mr. Lichtenstein ; ses raisonnements reposent sur l'existence de polynômes subsolutions de (9), or pour établir cette existence l'auteur introduit pour le cas où S peut s'annuler, des hypothèses restrictives sur les coefficients P, Q, R : il suppose qu'on puisse trouver deux constantes m et n telles que $mQ + nR$ reste le long de σ supérieur à un minimum positif. Moyennant quoi, le problème généalisé a une solution et Mr. Bouligand établit alors que pour certaines équations, en particulier pour

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\lambda}{x}\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \textit{avec } \lambda < 1$$

---

[1] Dans notre note du 1er Fév. 1932 à l'Ac. des Sc. (C. R. t. 194, p. 426) publiée au cours de nos travaux nous avions énoncé des résultats moins complets : $\vec{v}$ était supposé normal à la frontière.

[2] Ac. Roy. de Belgique, 4 Mars 1933.

[3] Annales Soc. Pol. de Math. 1925, p. 59 et suiv.

cette solution prend effectivement sur σ les valeurs indiquées par la répartiton frontière : *le problème de Dirichlet se résoud normalement.*

Nous allons maintenant généraliser ce résultat.

33. — Montrons tout d'abord qu'il est possible quels que soient P, Q et R répondant aux conditions initiales du n° précédent de trouver des polynômes subsolutions de (9) (1) ; nous ferons ainsi disparaître les hypothèses restrictives imposées à ces coefficients et élargirons ainsi le théorème de convergence de M. Bouligand.

Dans la région $\Omega + \Sigma$, on peut toujours trouver un polynôme qui soit arbitrairement voisin de la fonction $\tilde{\omega} = Ce^{-Ax} + B$ (A, B et C étant des constantes) et dont les dérivées premières et secondes soient arbitrairement voisines de celles correspondant à cette fonction. Prouver l'existence d'un polynôme subsolution de (9) revient alors montrer qu'il est possible de choisir A, B et C de manière que $\tilde{\omega}$ soit subsolution de (9), c'est-à-dire que l'on ait :

$$F(\tilde{\omega}) > 0$$

ce qui pourra évidemment avoir lieu si $\tilde{\omega}_1 = Ce^{-Ax}$ vérifie :

$$\overline{F}(\tilde{\omega}_1) = P\frac{\partial^2 \tilde{\omega}_1}{\partial x^2} + Q\frac{\partial \tilde{\omega}_1}{\partial x} > 0.$$

Posons : Q_m minimum de Q, P_M maximum de P. Si A est une constante telle que :

$$A < \frac{Q_m}{P_M}$$

et si: 1°. $Q_m > 0$; nous pouvons prendre $A > 0$ et $C = -1$, alors $\tilde{\omega} = -e^{-Ax}$ et $\overline{F}(\tilde{\omega}) > 0$.

2°. $Q_m \leq 0$; nous pouvons prendre $A < 0$ et $C = 1$, alors $\tilde{\omega} = e^{-Ax}$ et $\overline{F}(\tilde{\omega}) > 0$.

34. — *Soit maintenant l'équation :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{a_0 + \lambda(x)}{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b_0 + \mu(x)}{x^2} u = 0 \tag{10}$$

dans laquelle pour : $0 \leq x \leq 1$, $\lambda(x)$ *et* $\mu(x)$ *sont des polynômes tels que l'équation différentielle ordinaire :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{a_0 + \lambda(x)}{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b_0 + \mu(x)}{x^2} u = 0 \tag{10'}$$

est de la classe α' [*origine propre :* $b_0 = 0$, $a_0 < 1$].

(1) Capoulade : Bulletin Soc. Roy. des Sciences de Liège ;

Conservons les notations du n° 27 en supposant la répartition $\varphi(x, y)$ continue sur Σ essentiellement positive (ce qui ne diminue pas la généralité). Pour étudier l'allure de la solution limite u sur σ nous nous inspirerons du travail de M. Bouligand et étudierons uniquement l'allure en un point quelconque Q_0 de σ : soit alors s une position de σ ayant Q_0 pour milieu et r un rectangle ayant pour côté s et dont les points d'abscisse positive sont complètement intérieurs à Ω.

Considérons sur la frontière de r une répartition ainsi définie : zéro sur les trois cotés autres que s et

$$\varphi(Q_0) \sin \pi \left(\frac{y-y_1}{h}\right)$$

sur ce dernier côté, y_1 étant l'ordonnée minimum de s et h la longueur de ce segment. Nous pouvons disposer de h de manière qu'en chaque point de s sauf en Q_0 la nouvelle répartition soit inférieure à celle primitivement donnée. Or pour une telle répartition le problème de Dirichlet est résoluble au sens classique ; en effet, l'équation :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{a_0+\lambda(x)}{x}\frac{\partial v}{\partial x} + \left[\frac{b_0+\mu(x)}{x^2} - \frac{\pi^2}{h^2}\right] v = 0$$

admet du fait des hypothèses, l'origine comme propre, on en peut donc trouver une solution $v(x)$ prenant la valeur 1 pour $x=0$ et s'annulant pour l'abscisse maximum de r ; alors :

$$w^{(r)}(x, y) = v(x)\left[\varphi(Q_0) \sin \pi \left(\frac{y-y_1}{h}\right)\right]$$

est la solution annoncée.

Soit maintenant $\psi(x, y)$ une fonction continue dans $\Omega + \Sigma$ prenant sur Σ les valeurs $\varphi(x, y)$, nous pouvons en modifiant au besoin des valeurs internes de ψ faire en sorte que cette fonction ne soit pas inférieure à $w^{(r)}$ pour $x > 0$; alors dans r_n, u_n dépasse $w^{(r)}$, par suite la solution limite u en Q_0 n'est pas inférieure à $\varphi(Q_0)$.

Considérons ensuite le domaine R (notations du n° 26) et la solution $w^{(R)}$ de (10) prenant sur le côté $x=0$ la valeur α et sur le côté $x=1$ la valeur $\beta (\alpha > \beta > 0)$: $w^{(R)}$ uniquement fonction de x existe du fait que (10′) admet l'origine comme propre et est certainement supérieure à β dans R ; nous pouvons donc trouver un nombre C positif tel que $Cw^{(R)} - \psi$ soit positif dans $\Omega + \Sigma$.

Si alors nous répétons le raisonnement fait précédemment pour la répartition $Cw^{(R)} - \psi$ sur Σ nous sommes amenés a dire que la solution correspondante en Q_0 n'est certainement pas inférieure à $C\alpha - \varphi(Q_0)$;

or comme la somme de cette solution et de la solution u doit donner $Cw^{(R)}$ nous en concluons que u prend effectivement en ρ_0 la valeur imposée par la répartition : σ *est propre.*

Remarque : Considérons l'équation (10), le domaine R et la répartition : zéro sur les cotés autres que celui porté par $y'y$ et α *constant* sur ce dernier ; nous allons montrer que malgré la présence de discontinuité dans la répartition il existe une solution classique du problème.

Cette solution, du fait que les coefficients de l'équation ne dépendent que de x est évidemment prolongeable dans la bande $0 \leq x \leq 1$ sous forme d'une fonction périodique de période 2π impaire.

Or il est possible de trouver une série de Fourrier égalant α entre 0 et π et $-\alpha$ entre π et 2π et nulle pour y égalant 0, π ou 2π :

$$\frac{4\alpha}{\pi}\sin y + \frac{4\alpha}{3\pi}\sin 3y + \ldots + \frac{4\alpha}{(2k+1)\pi}\sin(2k+1)\,y + \ldots$$

Par suite la soiution cherchée est

$$u(x,\,y) = f_1(x)\sin y + f_3(x)\sin 3y + \ldots f_{2k+1}(x)\sin(2k+1)\,y + \ldots$$

avec $f_{2k+1}(x)$ solution de :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{a_0 + \lambda(x)}{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \left[\frac{b_0 + \mu(x)}{x^2} - (2k+1)^2\right]u = 0$$

prenant la valeur zéro pour $x = 1$ et la valeur $\dfrac{4\alpha}{(2k+1)\pi}$ pour $x = 0$.

Nous utiliserons cette remarque au Ch. IV (N° 40).

35. — Considérons maintenant *l'équation :*

$$\text{(11)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{a_0 + \lambda(x,\,y)}{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b_0 + \mu(x,\,y)}{x^2}u = 0$$

dans laquelle pour. $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \pi$:

$\lambda(x,\,y)$, $\mu(x,\,y)$ *polynômes sont tels que l'équation différentielle ordinaire*

$$\text{(11')} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{a_0 + \lambda(x, y_0)}{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b_0 + \mu(x, y_0)}{x^2}u = 0$$

est de la classe α' *[origine propre].*

Il est toujours possible de trouver $\lambda_2(x)$ et $\mu_2(x)$ polynômes tendant vers zéro avec x et telles que dans la région considérée :

$$\lambda_2(x) \geq \lambda(x,\,y) \quad , \quad \mu_2(x) \leq \mu(x,\,y).$$

Considérons alors le rectangle r_n avec une répartition continue sur son contour et soient pour ces données: ν_n la solution de (11) et v_n la solution de:

$$(12) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{a_0 + \lambda_2(x)}{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b_0 + \mu_2(x)}{x^2} u = 0$$

si $\frac{\partial v_n}{\partial x} \leq 0$ et $v_n \geq 0$, nous aurons $\nu_n \geq v_n$.

De plus il existe une solution classique $w^{(r)}$ du problème de Dirichlet pour le rectangle r, la répartition spéciale envisagée dans le n° précédent et l'équation (12); solution qui n'est pas négative dans r et dont la dérivée par rapport à x n'est pas positive; solution qui peut de plus être toujours non supérieure à $\psi(x, y)$ convenablement modifiée.

Ces remarques étant faites nous pouvons affirmer que u_n n'est pas inférieure à la solution de (11) prenant sur les cotés de r_n les valeurs que prend $w^{(r)}$, cette solution étant elle-même non inférieure à $w^{(r)}$; nous avons donc $u_n \geq w^{(r)}$ et par suite la solution limite u en Q_0 n'est pas inférieure à $\varphi(Q_0)$.

Soit maintenant le domaine R_n, il existe une solution de (12) prenant sur le côté $x = \varepsilon_n$ la valeur α et sur le côté $x = 1$ la valeur β, $(\alpha > \beta > 0)$, cette solution uniquement fonction de x n'est pas négative dans R_n et sa dérivée par rapport à x n'est pas positive, elle n'est donc pas supérieure à la solution de (11) correspondant à la même répartition frontière: il en est encore de même a la limite, donc il existe une solution de (11) $w^{(R)}$ qui est certainement supérieure à β dans R. Partant de là, il est possible d'achever la démonstration comme au n° 34 et de prouver qu'alors σ *est propre.*

36. — Considérons en dernier lieu *l'équation*:

$$(13) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x, y)u = 0$$

dans laquelle pour $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq \pi$:

$A(x, y)$, $B(x, y)$ *sont des polynômes tels que l'équation différentielle ordinaire :*

$$(13') \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A(x, y_0)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x, y_0)u = 0$$

est de la classe α' *[origine propre].*

Du fait de cette dernière hypothèse, nous avons:

$$A(x, y_0) = \frac{a(y_0) + \lambda(x, y_0)}{x} \quad , \quad B(x, y_0) = \frac{b(y_0) + \mu(x, y_0)}{x^2}$$

avec 1°. $\lambda(x, y_0)$ et $\mu(x, y_0)$ polynômes tendant vers zéro avec x,

2°. $b(y_0) = 0$ et $a(y_0) < 1$.

Soient alors a_0 le maximum de $a(y_0)$ et $\lambda_2(x)$ et $\mu_2(x)$ deux polynômes tendant vers zéro avec x et tels que :

$$\frac{a_0+\lambda_2(x)}{x} \geq A(x, y) ; \quad \frac{\mu_2(x)}{x^2} \leq B(x, y) ;$$

l'équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{a_0+\lambda_2(x)}{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mu_2(x)}{x^2} u = 0 \tag{14}$$

admet l'axe $y'y$ comme propre.

Il est alors possible de répéter sur les équations **(13)** et **(14)**, les raisonnements faits sur les équations (11) et (12) : on aboutit à la même conclusion.

Nous conviendrons de représenter par $\mathcal{E}_a'$ une équation du genre (10), (11) ou (13) qui admet le segment σ comme propre.

37. — Nous allons terminer ce chapitre en montrant qu'on peut obtenir très simplement des résultats illustrant d'une manière intéressante tous les développements qui précédent.

Soit $\mathcal{E}$ une équation elliptique ; remplaçons dans cette équation x par ρ, y par θ, nous obtenons une équation $\mathcal{E}_1'$ qui en cartésiennes correspond à une équation elliptique $\mathcal{E}_1$ (la transformation est $x_1 = x \sin y$, $y_1 = x \cos y$,) la *correspondance est biunivoque sauf pour les points de l'axe des y.*

1er Exemple : Soient le domaine δ rectangulaire ABCD (AD sur Oy) avec une répartition continue sur la frontière, constante sur AD et l'équation

$$\mathcal{E} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\lambda}{x}\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

nous allons avoir

$$\mathcal{E}_1' \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\lambda}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} = 0$$

avec le secteur O_1(A, D) B_1 C_1 comme domaine δ_1 :

si $\lambda \geq 1$ *le centre* O_1 *est impropre* } *pour* $\mathcal{E}_1$
si $\lambda < 1$ „ „ O_1 „ *propre* }

2ème Exemple : Soit :

$$\mathcal{E} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\lambda}{x-a}\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad a > 0$$

à laquelle correspondra :

$$\mathcal{E}_1' \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\lambda}{\rho - a} \frac{\partial u}{\partial \rho} = 0.$$

α) Prenons pour domaine δ rectangulaire 0ABC (0C sur $0y$, 0A sur 0x et A d'abscisse a) avec une répartition continue sur la frontière, constante sur 0C ; le domaine correspondant δ_1 sera le secteur $O_1A_1B_1$ et :

$$\left.\begin{array}{l} si \ \lambda \geq 1 \ \ l'arc \ \ \overset{\frown}{A_1B_1} \ \ est \ impropre \\ si \ \lambda < 1 \ \ l'arc \ \ \overset{\frown}{A_1B_1} \ \ est \ propre \end{array}\right\} \ pour \ \mathcal{E}_1 .$$

En particulier si le domaine δ a pour hauteur 2π, la solution pour l'équation $\mathcal{E}_1$ et le cercle δ_1 quand $\lambda \geq 1$ ne dépend uniquement *que des valeurs attribuées continuement de part et d'autre du rayon* $O_1 A_1$.

De même si δ à une hauteur supérieure à 2π, δ_1 se compose d'une série de feuillets circulaires empilés les uns sur les autres (genre feuillets de Riemann) ayant pour frontière : le rayon O_1A_1, une série de circonférences superposées, un arc A_1B_1 et le rayon O_1B_1 et pour $\lambda \geq 1$ la solution ne dépend *que des valeurs attribuées continuement sur* O_1A_1 et O_1B_1.

β) Prenons pour domaine δ rectangulaire ABCD (AD sur $0x$, A d'abcisse a, D d'abcisse supérieure ou inférieure à a) avec une répartition continue sur la frontière ; le domaine δ_1 sera une portion de couronne $A_1B_1C_1D_1$ pour lequel l'arc $\overset{\frown}{A_1B_1}$ sera propre ou impropre suivant les valeurs de λ. En particulier δ_1 pourra être une couronne moins le segment de droite A_1D_1 et la solution pourra admettre soit la circonférence intérieure, soit la circonférence extérieure comme impropre.

CHAPITRE IV.

DES ENSEMBLES ANORMALEMENT PROPRES.

38. — Il est possible grâce aux résultats obtenus dans le chapitre précédent, de construire maintenant des équations pour lesquelles des ensembles qui sont normalement impropres, se trouvent être anormalement propres.

Nous allons tout d'abord généraliser l'exemple signalé au N° **11** ; nous considérons le domaine formé par un cercle moins son centre, ayant pour frontière la circonférence plus le centre ; nous savons que normalement le centre est impropre. Considérons alors l'équation :

$$(1)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\lambda_1\,\frac{x\dfrac{\partial u}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial u}{\partial y}}{x^2+y^2}+\frac{\lambda_2}{x^2+y^2}\,u\,f(\sqrt{x^2+y^2})=0\quad \lambda_2 f\leq 0$$

dans laquelle f est continue. λ_1 et λ_2 étant des coefficients numériques ; et proposons-nous d'en chercher la solution prenant la valeur α au centre et la valeur β sur la circouférence. Par raison de symétrie, cette solution est fonction seulement de la distance au centre $r=\sqrt{x^2+y^2}$; soit alors $u(x, y)=\mathrm{U}(r)$, elle satisfera à l'équation :

$$\frac{d^2\mathrm{U}}{dr^2}+\frac{\lambda_1+1}{r}\frac{d\mathrm{U}}{dr}+\frac{\lambda_2}{r^2}f(r)\mathrm{U}=0$$

d'où les conclusions suivantes, conséquences des N[os] 18 et 20.

1er Cas : $\lambda_2=0$, si $\lambda_1<0$ le centre est propre à porter des données, il est impropre pour $\lambda_1\geq 0$.

2ème Cas : $\lambda_2\neq 0$, si $f(r)$ développable en série tend vers zéro avec r et si $\lambda_1<0$ le centre est propre.

La même méthode s'applique aux équations

$$(2)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{c(\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2}u=0$$

dans lesquelles $ax+by=f(r)$. $\mathrm{U}(r)$ satisfait à l'équation :

$$\frac{d^2\mathrm{U}}{dr^2}+\frac{1+f(r)}{r}\frac{d\mathrm{U}}{dr}+\frac{c(r)}{r^2}\mathrm{U}=0.$$

Si $f(r)$ et $c(r)$ développables en série, tendent pour r tendant vers zéro, respectivement vers $f_0<0$ et $c_0=0$, le centre est propre.

39. — Nous savons que pour l'équation de LAPLACE et le domaine ayant pour frontière une sphère et le diamètre AA′ situé sur l'axe $z'z$, le diamètre A′A est impropre à porter d'une manière efficace des données. Considérons ce domaine et l'équation :

$$(3)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\lambda_1\,\frac{x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}}{x^2+y^2}+\frac{\lambda^2}{x^2+y^2}\,uf(\sqrt{x^2+y^2})=0$$
$$\lambda_2 f\leq 0$$

avec les valeurs 1 sur A′A et α sur la sphère. Par raison de symétrie la solution est fonction de $r=\sqrt{x^2+y^2}$ et de z ; soit alors $u(x, y, z)=\mathrm{U}(r, z)$, elle satisfera à l'équation :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+\frac{\lambda_1+1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{\lambda_2}{r^2}f(r)\,U=0\,,$$

d'où les conclusions suivantes, conséquences du N° 27 :

1er Cas : $\lambda_2=0$, si $\lambda_1<0$ le diamètre ect propre, il est impropre pour $\lambda_1\geq 0$.

2ème Cas : $\lambda_2\neq 0$, si $f(r)$ continue et développable en série autour de $r=0$ tend vers zéro avec r et si $\lambda_1<0$ le diamètre est propre.

40. — Pour une équation à coéfficients réguliers et un domaine Ω simplement connexe, un point M quelconque pris sur la frontière Σ est impropre, étant entendu par là que la solution bornée dans $\Omega+\Sigma$, nulle sur Σ—M est identiquement nulle.

Nous allons montrer que, dans des sens qui seront ultérieurement spécifiés, *ce même point M est anormalement propre* pour certaines équations dont les coéfficients présentent des singularités en M ; nous généraliserons ainsi un des résultats obtenus au 1er exemple du n° 37 ($\lambda<1$).

Soient dans un premier plan où r, θ désignent les coordonnées cartésiennes, un domaine Ω défini par $0\leq r\leq 1$, $-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$ et une équation elliptique $\mathcal{E}_\alpha$ pour laquelle le côté du rectangle situé sur l'axe $\theta'\theta$ est propre.

Dans le plan x, y, où r. θ reprennent leur signification de coordonnées polaires, il correspond à Ω le demi-cercle Ω' et à $\mathcal{E}_\alpha$ une équation elliptique $\mathcal{E}'_\alpha$ pour laquelle l'origine 0 est propre. Ce qui signifie qu'il existe une solution *au sens de* Wiener, de cette équation régulière dans Ω', continue dans $\Omega'+\Sigma'$— 0 (Σ' contour de Ω'), nulle sur Σ'—0 et tendant le long de chaque rayon vecteur issu de 0 vers une valeur limite, fonction continue de l'angle polaire correspondant.

Pour certaines équations elliptiques, d'apres la remarque du n° 34, la fonction peut se réduire à une constante : on obtient alors la même valeur limite de la solution toutes les fois que l'on tend vers l'origine par un chemin dont le contingent en 0 n'enferme ni $0y$ ni $0y'$. Nous considérerons spécialement cette hypothèse, car comme l'a remarqué M. Bouligand, elle a l'avantage de s'adapter d'elle-même à des cas plus étendus : on a la posibilite en partant de l'exemple précédent d'utiliser la représentation conforme pour en déduire de nouveaux : nous nous limiterons au cas où la demi-circonférence a pour image un contour sans point multiple lequel a partout deux demi-tangentes ; de tels contours seront désignés par la suite génériquement par Σ (1).

Nous retrouvons dans ce qui précède l'artifice de l'interprêtation cartésienne des coordonnées polaires utilisé au no 37 ; ce qui unifie ces deux problème du plan : *Rechercher si un point (ou un segment) est un ensemble propre ou impropre pour une équation à coefficients singuliers.*

Citons quelques exemples simples :

1°. Dans le plan r, θ ; prenons un domaine Ω défini par $0 \leq r \leq 1$, $m \leq \theta \leq n$.

Dans le plan x, y, lui correspondra le secteur de centre 0 et d'angle $n - m = 2k\pi + p$.

Si $k \neq 0$ nous serons en présence d'un domaine Ω' composé d'une série de feuillets circulaires empilés les uns sur les autres, ayant pour contour Σ' : le rayon 0A, une série de circonférences superposées, un arc $\overset{\frown}{AB}$ et le rayon 0B, ; le point anormalement propre sera le point 0 : une solution nulle sur $\Sigma' - 0$ de l'équation $\mathcal{E}'_\alpha$ considérée sera uniquement déterminée par sa valeur en 0.

2°. Dans le plan r, θ, prenons pour domaine Ω défini par $0 \leq r \leq \cos\theta$; $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq +\frac{\pi}{2}$.

Dans le plan x, y, lui correspondra le domaine circulaire $x^2 + y^2 - x < 0$ et le point anormalement propre sera l'origine 0 : la solution de $\mathcal{E}'_\alpha$ considérée, continue sur $\Omega' + \Sigma' - 0$, nulle sur $\Sigma' - 0$ sera déterminée par sa valeur en 0, vers laquelle elle tendra lorsqu'on tendra vers 0 suivant un arc tel que les demi-droites $0y$ et $0y'$ soient exclues de son contingent (2).

Voici maintenant quelques choix d'équations $\mathcal{E}'_\alpha$ correspondant aux domaines que nous venons d'indiquer et pour lesquelles s'applique la remarque du no 34.

1°. Partant de :

$$(\mathcal{E}_\alpha) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

nous trouvons :

$$(\mathcal{E}'_\alpha) \quad [x^2 + y^2(x^2 + y^2)] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + [y^2 + x^2(x^2 + y^2)] \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} +$$
$$2xy[1 - (x^2 + y^2)] \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - [x(x^2 + y^2)] \frac{\partial u}{\partial x} - [y(x^2 + y^2)] \frac{\partial u}{\partial y} = 0 .$$

---

(1) M. Bouligand a noté qu'on pourrait se poser aussi d'autres types de problemes : par exemple étant donné un domaine plan Ω simplement connexe limité par un contour de la catégorie (Σ) rechercher si pour une équation elliptique $\mathcal{E}$ il existe une ou plusieurs solutions de $\mathcal{E}$ régulières et bornées dans Ω continues dans $\Omega + \Sigma - 0$, nulle sur $\Sigma - 0$.

(2) Voir Bouligand : „Introduction à la Géométrie Infinitèsimale directe" Ch. X — Paris — Vuibert — 1932.

2°. Partant de ;

$$(\mathcal{E}_a) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0$$

nous trouvons :

$$(\mathcal{E}'_a) \quad [x^2+y^2\sqrt{x^2+y^2}]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+[y^2+x^2\sqrt{x^2+y^2}]\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2xy[1-\sqrt{x^2+y^2}]\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0.$$

D'après le mode de raisonnement utilisé nous sommes assurés de l'unicité.

41. — M. Bouligand, sans utiliser le processus de Wiener, est parvenu à construire des équations $\mathcal{E}_a$ pour lesquelles des phénomènes du même genre ont lieu. Les équations obtenues sont plus simples que les précédentes car elles ne contiennent pas de termes en $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ et l'ensemble des termes contenant des dérivées secondes est proportionnel à Δu.

Soit Ω un domaine limité par un seul contour Σ à courbure continue tangent à l'axe $y'y$ en O ; la fonction de Picard de Ω correspondant à O est une fonction harmonique et positive dans Ω, continue dans $\Omega+\Sigma-0$, nulle sur $\Sigma-0$; cette fonction determinée à un facteur constant près tend vers $+\infty$ sur tout chemin tendant vers O et dont le contingent ne contient pas les demi-tangentes en O ; en particulier si Ω est le domaine circulaire $x^2+y^2-\frac{x}{\lambda}<0$, l'expression de cette fonction est $k\left(\frac{x}{x^2+y^2}-\lambda\right)=k\left(\frac{\cos\theta}{r}-\lambda\right)=\mathrm{V}$.

Considérons les deux domaines circulaires :

Ω' de contour Σ' : $x^2+y^2-\frac{x}{\lambda}<0$; Ω de contour Σ : $x^2+y^2-x<0$,

avec $0\leq\lambda<1$, alors Ω' contient Ω à son intérieur (abstraction faite du point O).

La solution de :

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\frac{\partial \mathrm{V}'}{\partial x}}{\mathrm{V}'}\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\frac{\partial \mathrm{V}'}{\partial y}}{\mathrm{V}'}\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

continue sur $\Omega+\Sigma-0$, *bornée dans* $\Omega+\Sigma$ *est déterminée à un facteur constant près.*

En effet, soit u une solution remplissant ces conditions, elle est solution de : $\Delta(u\mathrm{V}')=0$.

Posons $u\mathrm{V}'=v$, v est harmonique dans Ω continue dans $\Omega+\Sigma-0$, nulle sur $\Sigma - 0$ et telle que lorsqu'on tend vers 0 suivant un arc dont le contingent ne contient pas les demi-droites $0y$ et $0y'$ on ait :

$$|v| < \frac{h}{r}$$

h constante positive, r distance du point d'évaluation de v à l'origine.

Or pour étudier la fonction v nous pouvons procéder ainsi: soit A le point de Ω diamétralement opposé à 0, prenons A comme centre et $\overline{0A}^2 = 1$ comme puissance d'inversion, v se transforme en une fonction harmonique w régulière à l'infini, nulle sur l'axe des y moins l'origine, par le processus de symétrie l'extension de w au plan entier est immédiate. Nous obtenons une fonction n'ayant que 0 pour singularité, le point à l'infini étant lui-même régulier. Prenons pour axe polaire l'axe $0y$, w est représentée par la série suivante, partie réelle d'un développement de Laurent :

$$w(r, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r^n} \sin n\omega$$

mais comme le type de limitation indiqué pour v implique une inégalité du même genre pour w et comme :

$$\frac{a_n}{r^n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} w(r, \omega) \sin n\omega \, d\omega$$

les a_n sont tous nuls pour $n > 1$, notre série se réduit donc à son premier terme, donc w et par suite v sont déterminées chacune à un facteur constant près [1], donc aussi u.

Soient V et V' les fonctions de Picard *des domaines Ω et Ω' la fonction*

$$u = \frac{V}{V'} = \frac{k_1\left(\dfrac{x}{x^2+y^2} - 1\right)}{k_2\left(\dfrac{x}{x^2+y^2} - \lambda\right)} \tag{5}$$

est la solution de (4), continue sur $\Omega + \Sigma - 0$, nulle sur $\Sigma - 0$, bornée dans $\Omega + \Sigma$.

---

(1) Ce genre de raisonnement est celui dont M. Bouligand fait usage dans son Mémoire des Annales de l'Ecole Normale (Avril-Mai 1931) pour établir notamment ce qu'il appelle le principe de séparation des croissances.

En effet :

1°. nous avons $uV'=V$, donc $\Delta(uV')=\Delta V=0$;

2°. V et V' sont continues sur $\Omega+\Sigma-0$, donc aussi u ;

3°. V est nulle sur $\Sigma-0$ tandis que $V'y$ est positif, donc u est nulle sur $\Sigma-0$;

4°. Pour prouver que u est bornée dans $\Omega+\Sigma$, il suffit de prouver que la fraction

$$\frac{\dfrac{x}{x^2+y^2}-1}{\dfrac{x}{x^2+y^2}-\lambda}$$

l'est, or étant le quotient de deux fonctions de Picard, elle est essentiellement positive, de plus comme $0 \leq \lambda < 1$ son dénominateur est supérieur à son numérateur donc elle est comprise entre 0 et 1.

La solution de (4) continue dans $\Omega+\Sigma-0$, nulle sur $\Sigma-0$ et tendant vers une valeur k donnée lorsqu'on tend vers 0 suivant un chemin dont le contingent ne contient pas les demi-tangentes Oy et Oy' est unique.

D'après les propositions qui précédent cette solution est donnée par la formule (5) dans laquelle le rapport $\frac{k_1}{k_2}$ se trouve déterminé d'une manière unique par la valeur k donnée.

Remarquons que les raisonnements qui précédent sont encore valables pour $\lambda < 0$, dans ce cas l'expression $V' = k_2\left(\frac{x}{x^2+y^2}-\lambda\right)$ est la fonction de Picard du domaine extérieur au cercle $x^2+y^2+ax=0$ avec $\lambda = -\frac{1}{a}$, $a > 0$.

42. — Nous allons pour terminer citer un exemple d'un genre bien différent du fait que les coefficients de l'équation sont singuliers non seulement sur la frontière du domaine mais encore dans ce domaine lui-même.

Considérons l'équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\lambda}{x}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\lambda}{y}\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

dont les coefficients sont singuliers sur les deux axes de coordonnées et prenons pour domaine le cercle $x^2+y^2-x < 0$ de frontière Σ. Nous allons montrer que pour certaines valeurs de λ il est posible d'affirmer l'existence d'une solution régulière a l'intérieur du cercle.

nulle sur $\Sigma - 0$, continue sur le bord sauf à l'origine 0 et tendant vers telle valeur que l'on voudra k, lorsqu'on tendra vers 0 suivant un arc tel que les demi-droites $0y$ et $0y'$ soient exclues de son contingent.

Soit $u(x, y)$ une telle solution admettant pour courbes de niveau des circonférences homothétiques de Σ, le centre étant l'origine; elle peut s'exprimer en fonction de $\nu = \frac{x^2+y^2}{x}$ abscisse du second point où chaque circonférence coupe l'axe $0x$. Posons $u(x, y) = U(\nu)$, nous avons

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dU}{d\nu} \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{dU}{d\nu} \cdot \frac{2y}{x} \\ &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2U}{d\nu^2} \cdot \left(\frac{x^2-y^2}{x^2}\right) + \frac{dU}{d\nu} \cdot \frac{2y^2}{x^3} \; ; \; \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{d^2U}{d\nu^2} \cdot \frac{4y^2}{x^2} + \frac{dU}{d\nu} \cdot \frac{2}{x} \end{aligned}\right.$$

d'où $U(\nu)$ est solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$\frac{d^2U}{d\nu^2} + \frac{2-\lambda}{\nu}\frac{dU}{d\nu} = 0$$

continue sur le diamètre OP, prenant la valeur zéro en P et la valeur k en 0.

D'après le N° 20 une telle solution existe pour $2-\lambda < 1$ ou $\lambda > 1$.

En particulier si $\lambda = 2$ et $k = 1$, nous avons $U = 1 - \nu$ et $u = 1 - \frac{x^2+y^2}{x}$

Ce problème prète a réflexion. Remarquons d'abord que l'existence de singularités à l'intérieur du domaine rend difficille à trancher la question d'unicité; d'autre part on peut noter avec M. Bouligand qu'on rencontre ici la question des singularités des coefficients compatibles avec l'existence d'intégrales régulierement analytiques au voisinage de ces singularités. Et cela montre bien la complexité des problèmes qui restent à résoudre sur les équations aux dérivées partielles à coefficients singuliers.