GEORGES CALUGARÉANO

Sur les fonctions polygènes d'une variable complexe

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1928
<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1928__91__1_0>

N° D'ORDRE :
2020.
N° DE SÉRIE :
1160.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR M. GEORGES CALUGARÉANO

1re THÈSE. — SUR LES FONCTIONS POLYGÈNES D'UNE VARIABLE COMPLEXE.

2e THÈSE. — ÉQUATIONS INTÉGRALES A LIMITES FIXES.

Soutenues le 1928, devant la Commission d'examen.

MM. EMILE PICARD : *Président.*
GOURSAT, JULIA } *Examinateurs.*

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1928

UNIVERSITÉ DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

MM.

Doyen	C. MAURAIN, Professeur, Physique du globe.	
Doyens honoraires	P. APPELL, M. MOLLIARD.	
Professeurs honoraires	P. PUISEUX, V. BOUSSINESQ, A. JOANNIS, H. LE CHATELIER, H. LEBESGUE, A. FERNBACH, A. LEDUC, G. SAGNAC.	
Professeurs	E. PICARD	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
	KŒNIGS	Mécanique physique et expérimentale.
	GOURSAT	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	JANET	Électrotechnique générale.
	WALLERANT	Minéralogie.
	ANDOYER	Astronomie.
	PAINLEVÉ	Mécanique analytique et Mécanique céleste.
	GABRIEL BERTRAND	Chimie biologique.
	Mme P. CURIE	Physique générale et radioactivite.
	CAULLERY	Zoologie (Evolution des êtres organisés).
	C. CHABRIÉ	Chimie appliquée.
	G. URBAIN	Chimie minérale.
	EMILE BOREL	Calcul de probabilités et Physique mathématique.
	MARCHIS	Aviation.
	RÉMY PERRIER	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
	JEAN PERRIN	Chimie physique.
	ABRAHAM	Physique.
	M. MOLLIARD	Physiologie végétale.
	CARTAN	Géométrie supérieure.
	LAPICQUE	Physiologie générale.
	VESSIOT	Théorie des groupes et calcul des variations.
	COTTON	Physique générale.
	DRACH	Application de l'Analyse à la Géométrie.
	C. FABRY	Physique.
	C. PÉREZ	Zoologie.
	LÉON BERTRAND	Géologie appliquée et Géologie régionale.
	R. LESPIEAU	Théories chimiques.
	E. RABAUD	Biologie expérimentale.
	P. PORTIER	Physiologie comparée.
	E. BLAISE	Chimie organique.
	P.-A. DANGEARD	Botanique.
	P. MONTEL	Mécanique rationnelle.
	P. WINTREBERT	Anatomie et histologie comparées.
	O. DUBOSCQ	Biologie maritime.
	G. JULIA	Mathématiques générales.
	A. JOB	Chimie générale.
	A. MAILHE	Etude des Combustibles.
	L. LUTAUD	Géographie physique.
	EUGÈNE BLOCH	Physique théorique et Physique céleste.
	HENRI VILLAT	Mécanique des fluides et applications.
	CH. JACOB	Géologie.
	P. PASCAL	Chimie appliquée.

E. HÉROUARD	Zoologie.
E. PECHARD	Chimie (Enseignnt P.C.N.)
V. AUGER	Chimie analytique.
M. GUICHARD	Chimie minérale.
A. GUILLET	Physique
C. MAUGUIN	Minéralogie.
L. BLARINGHEM	Botanique.
A. MICHEL-LÉVY	Pétrographie.
A. DEREIMS	Géologie.
R. DONGIER	Physique du globe.
A. DENJOY	Calcul différentiel et intégral.
H. BENARD	Physique (P. C. N.).
E. DARMOIS	Physique.
G. BRUHAT	Physique.
H. MOUTON	Chimie physique.
L. JOLEAUD	Paléontologie
M. JAVILLIER	Chimie biologique.
A. DUFOUR	Physique (P. C. N.).
F. PICARD	Zoologie (Evolution des êtres organisés).
ROBERT-LÉVY	Zoologie.
L. DUNOYER	Optique appliquée.
A. GUILLIERMOND	Botanique (P. C. N.).
A. DEBIERNE	Radioactivité.

Secrétaire .... D. TOMBECK.

84498 IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55

A

MONSIEUR ÉMILE PICARD

DE L'INSTITUT

Témoignage de profonde admiration
et de reconnaissance.

A MES CHERS PARENTS

A MON ONCLE D.-G. MAXIM

Reconnaissance.

PREMIÈRE THÈSE.

SUR LES

FONCTIONS POLYGÈNES

D'UNE VARIABLE COMPLEXE.

INTRODUCTION.

On considère quelquefois les fonctions analytiques d'une variable complexe comme les seules pouvant jouer un rôle en Analyse. Certains auteurs évitent même d'appeler fonctions d'une variable complexe z des expressions telles que

$$P(x, y) + i\,Q(x, y),$$

P et Q étant deux fonctions quelconques des variables réelles x et y. Il est clair, cependant, que ces expressions ne sont pas moins des fonctions d'une variable complexe, d'après le contenu de la notion moderne de fonction. On sait, en outre, que si l'on cherche à dériver une telle fonction, sans soumettre P et Q à aucune condition, on trouve une expression dépendant de la direction-limite de dz, ce qui s'exprime couramment, d'une manière qui n'est pas la plus correcte, en disant que la dérivée n'existe pas. Nous tâcherons de montrer, dans ce qui suit, l'avantage qu'il y a à considérer les dérivées de telles fonctions non monogènes tant au point de vue purement théorique qu'à celui de leurs applications possibles.

Nous montrerons que ces fonctions, moyennant une généralisation convenable de la notion de dérivée, sont susceptibles de satisfaire à des équations différentielles très générales. On verra aussi qu'elles sont très simplement liées aux solutions analytiques des mêmes équations et permettent quelquefois de les déterminer par des transformations faciles.

On verra aussi que, si l'on veut étendre la notion de fonction quasi-analytique dans le champ de la variable complexe, les fonctions non monogènes analytiques dont nous nous occupons principalement doivent être considérées, avec les fonctions monogènes, comme les plus simples fonctions d'une variable complexe appartenant à cette classe quasi-analytique.

Les fonctions non monogènes d'une variable complexe se trouvent implicitement employées dans divers raisonnements concernant des problèmes assez variés de l'Analyse. Nous mentionnons plus loin des questions de représentation conforme remontant à Gauss, ainsi que des recherches modernes comme celles de M. Picard sur certains systèmes d'équations aux dérivées partielles, où la notion de fonction non monogène n'est pas traitée en elle-même. Viennent ensuite des recherches comme celles de M. Pompeiu et de M. Hedrick, qui essayent de constituer une théorie générale de ces fonctions, si longtemps éclipsées d'une façon complète par le caractère esthétique des propriétés que possède la classe — très particulière — des fonctions monogènes. Dans les pages qui suivent, nous nous sommes attachés à mettre en lumière certaines méthodes permettant de toucher aux résultats avec le maximum de simplicité; chose qui, à nos yeux, contribue à l'esthétique des résultats tout en en facilitant la recherche et en augmentant la précision. Enfin, pour en venir aux résultats pratiques, remarquons que l'application — dont nous avons déjà parlé — que nous faisons aux équations différentielles, nous permet de signaler des classes d'équations dont l'intégration se trouve facilitée si l'on fait usage des fonctions non monogènes.

CHAPITRE I.

LES FONCTIONS POLYGÈNES D'UNE VARIABLE COMPLEXE.

1. Considérons donc la fonction

$$f(z) = P(x, y) + i Q(x, y) \tag{1}$$

où P et Q sont des fonctions continues, une fois dérivables, de x et de y.

Si l'on donne un accroissement $dz = dr.e^{i\varphi}$ à la variable z, on obtient pour la dérivée de $f(z)$ l'expression

$$\frac{df}{dz} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + i\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right] + e^{-2i\varphi}\frac{1}{2}\left[\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} + i\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right]. \tag{2}$$

Cette expression, facile à obtenir, figure déjà dans les recherches de Riemann (1). Si l'on se contente d'envisager les fonctions ayant une dérivée indépendante de φ, on obtient la classe très importante des fonctions monogènes, en annulant le coefficient de $e^{-2i\varphi}$ dans l'expression (2). Ceci donne immédiatement les conditions de Cauchy. Nous procéderons autrement, et pour cela nous continuerons à appeler *dérivée de* $f(z)$ l'expression (2), dépendant de l'argument φ. C'est ce qui explique le nom de *fonction polygène* (2) de z que nous attribuons à $f(z)$ définie par (1).

Il est facile de remarquer que les diverses dérivées de $f(z)$ en un point z_0 quelconque ont leurs affixes distribuées sur un cercle ayant

---

(1) Riemann, *Dissertation inaugurale* (*Œuvres complètes*).

(2) Ce terme a eté imprimé pour la première fois par M. Edw. Kasner dans sa Note: *A new theory of polygenic (or non monogenic) functions*, parue dans *Science*, vol. 66 décembre 1927, p. 981. Ces recherches sont d'un caractère plutôt géométrique. *Voir* aussi les Notes du même auteur parues dans *Proceedings of Nat. Acad. of Sciences*, vol. 13, janvier 1928, p. 75, et *Bull. of the American math. Soc.*, vol. 34, 1928, p. 152, 263, etc.

son centre au point d'affixe

$$\delta[f] = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + i\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right], \tag{3}$$

et dont le rayon est le module de

$$\rho[f] = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} + i\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right]. \tag{3'}$$

En désignant par $\frac{df}{dz_\varphi}$ la derivée de $f(z)$ suivant une direction faisant un angle φ avec l'axe des x, on a

$$\delta[f) = \frac{1}{2}\left[\frac{df}{dz_0} + \frac{df}{dz_{\frac{\pi}{2}}}\right]; \qquad \rho[f] = \frac{1}{2}\left[\frac{df}{dz_0} - \frac{df}{dz_{\frac{\pi}{2}}}\right]$$

$$\frac{df}{dz_\varphi} = \delta[f] + e^{-2i\varphi}\rho[f].$$

Il est logique d'appeler $\delta[f]$ *dérivée moyenne* d'après sa forme même. L'expression $\rho[f]$, considérée déjà par M. Pompeiu (1), a alors été appelée *dérivée aréolaire*, locution que nous emploierons aussi.

Nous montrerons plus loin que ces deux opérateurs différentiels sont très utiles pour élargir — en quelque sorte — la notion d'intégrale d'une équation différentielle. Indiquons, pour l'instant, un autre mode de les définir, qui est de nature à simplifier beaucoup cette étude.

Introduisons, en même temps que la variable z, sa conjuguée

$$z = x + iy\ ; \qquad \bar{z} = x - iy.$$

On a alors

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}\ ; \qquad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Il est donc visible que toute fonction

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

devient, si l'on veut faire ce changement de variable, une fonction de z et de $\bar{z}$. L'avantage de cette substitution est, comme l'a remarqué

(1) D. Pompeiu, *Rendiconti del Circolo mat. di Palermo*, t. 33, 1912 (1), p. 112 et t. 35, 1913 (1), p. 277.

M. Al. Proca [1], celui de conduire aux relations

$$\delta[f] = \frac{\partial f}{\partial z}; \qquad \rho[f] = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}. \tag{4}$$

Ainsi, les opérateurs δ et ρ étant ramenés à de simples dérivées partielles de la fonction $f(z)$ regardée comme fonction de z et $\bar{z}$, les propriétés de permutabilité, associativité, etc. de δ et ρ apparaissent immédiatement. On a d'ailleurs très simplement

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} + e^{-2i\varphi}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}.$$

On obtient en général, par itération,

$$\frac{d^n f}{dz^n} = \left(\frac{\partial}{\partial z} + e^{-2i\varphi}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^{(n)} f, \tag{5}$$

valable quand P et Q sont dérivables n fois, formule dont nous ferons grand usage.

Ces résultats conduisent à regarder toute fonction polygène comme une fonction de z par l'intermédiaire de z et $\bar{z}$. Pour obtenir une telle fonction, il suffit de considérer une fonction de deux variables complexes $F(z, u)$ et de remplacer u par $\bar{z}$. Nous restreindrons, à notre tour, la grande généralité des fonctions qu'on peut obtenir ainsi [2], en considérant les fonctions *analytiques* en z et en u et en y remplaçant u par $\bar{z}$. On obtient ainsi une classe de fonctions polygènes que nous appellerons *polygènes analytiques;* nous montrerons que ces fonctions s'introduisent comme solutions de certaines équations différentielles. Remarquons surtout qu'elles sont indéfiniment dérivables.

2. Ainsi, la classe des fonctions monogènes résulte d'une particularisation de f par la condition

$$\rho[f] = 0.$$

---

(1) M. Proca n'a point publié cette remarque dont je le remercie ici. Elle a apporté une grande simplification dans cette étude.

(2) Les fonctions que nous appelons *polygènes* ont été considérées sous le nom de *fonctions monogènes* (α), par M. Pompeiu dans les Mémoires cités.

On peut se demander ce que fournit la condition

$$\delta[f] = 0.$$

Or, on voit facilement que cette condition résulte de la précédente par la substitution de $-y$ à y. Cette classe de fonctions, que nous appellerons *antimonogènes*, en étroite liaison avec celle des fonctions monogènes, s'obtient par une symétrie par rapport à l'axe Ox, en transformant chaque fonction monogène $P(x, y) + iQ(x, y)$ en $P(x, -y) + iQ(x, -y)$. Il suit de là que toute fonction antimonogène est développable en série entière de puissances de $\bar{z}$, dans un domaine facile à préciser (par symétrie) quand on connaît le domaine d'existence de la fonction monogène génératrice.

Pour signaler une autre classe très intéressante, de fonctions polygènes analytiques, remarquons que l'on a

$$(6) \qquad \Delta(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = \delta\big[\rho[f]\big] = \rho\big[\delta[f]\big],$$

identité que l'on peut vérifier à l'aide des formules de définition (3) et (3'). Il résulte immédiatement que, si l'on appelle *fonction harmonique de z*, toute fonction $P + iQ$ telle que

$$\Delta P = \Delta Q = 0,$$

on a

$$f = P + iQ = \Phi_1(z) + \Phi_2(\bar{z}),$$

les fonctions Φ_1 et Φ_2 étant monogènes par rapport à la variable sur laquelle elles portent respectivement. C'est là une des faces du rapport qu'il y a entre les fonctions harmoniques réelles ou non et les fonctions monogènes [1]. Le cas des fonctions harmoniques réelles est un cas particulier du précédent, celui où $Q = 0$. On a donc, pour toute fonction harmonique $h(z)$,

$$\rho\big[\delta[h]\big] = 0; \qquad \delta[h] = \Phi(z); \qquad h(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(\bar{z}),$$

[1] Signalons, à ce propos, la Note de M. Hayashi [*Rendiconti Palermo*, t. 34, 1912 (2), p. 220], et remarquons que la simplicité de nos notations nous évite certaines erreurs que cette Note doit à la longueur des calculs. La rectification des résultats de M. Hayashi est facile en se servant des formules (4).

en désignant par Φ une fonction monogène quelconque (nous continuerons dorénavant à utiliser cette notation). On a fait, depuis longtemps, la remarque que si $P + iQ$ est monogène, P et Q sont harmoniques, mais la réciproque n'est pas vraie. Notre relation explique ce fait : à la fonction monogène $\Phi_1(z)$ vient s'ajouter — en général — le terme anti monogène $\Phi_2(\bar{z})$. Mais on voit également que l'on a toujours

$$\delta[h(z)] = \Phi(z).$$

Donc, P et Q étant harmoniques, $P + iQ$ n'est pas toujours monogène, mais on possède une opération différentielle δ permettant toujours d'en déduire une fonction nécessairement monogène.

3. Outre ces classes très particulières parmi les fonctions polygènes analytiques, il est facile d'en introduire d'autres plus générales par des conditions très variées.

Signalons, par exemple, les classes de fonctions polygènes que M. Picard a définies en passant [1], dans un Mémoire où il s'agit de généraliser les équations de Cauchy, servant de base à la théorie des fonctions monogènes. Par une méthode élégante, qui fait appel à la théorie des groupes linéaires de transformations, M. Picard détermine tous les systèmes d'équations aux dérivées partielles (du premier ordre et même d'ordre supérieur), jouissant de la propriété connue des conditions de Cauchy : si P et Q, P_1 et Q_1 sont deux systèmes de fonctions de x et y satisfaisant aux conditions de Cauchy, P et Q regardées comme fonctions de P_1 et Q_1, satisfont encore à ces conditions. Cela revient à dire que si $f(z) = P + iQ$ et $f_1(z) = P_1 + iQ_1$ sont monogènes en z, il en est de même de $f(t)$, c'est-à-dire de la fonction résultant de l'élimination de z entre

$$f(z) \qquad \text{et} \qquad t = f_1(z).$$

---

[1] E. Picard, *Sur certains systèmes d'équations aux dérivées partielles généralisant les équations de la théorie des fonctions d'une variable complexe* (*Journ. de Jordan*, 4e série, t. 8, 1892, p. 217).

Or, soit

$$(7)\qquad \begin{cases} F\left(\dfrac{\partial P}{\partial x}, \dfrac{\partial Q}{\partial x}, \dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial Q}{\partial y}; \dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2}, \dots; \dfrac{\partial^n P}{\partial x^n}, \dots, \right); = 0, \\ G\left(\dfrac{\partial P}{\partial x}, \dfrac{\partial Q}{\partial x}, \dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial Q}{\partial y}; \dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2}, \dots; \dfrac{\partial^n P}{\partial x^n}, \dots, \right); = 0, \end{cases}$$

un système d'ordre n jouissant de cette propriété. M. Picard démontre l'existence de tels systèmes, quel que soit n, en indiquant la méthode qui permet de les former tous à l'aide des groupes linéaires de substitutions correspondants. On voit donc que l'on obtient ainsi une infinité de classes de fonctions polygènes jouissant d'une propriété assez remarquable se rattachant à la notion de corps. On peut dire que la classe des fonctions monogènes forme *un corps de fonctions* par rapport à *la composition*, en ce sens que si $f(z)$ et $f_1(z)$ appartiennent à ce corps, il en est de même de $f[f_1(z)]$. Cette propriété appartient aux classes de M. Picard, correspondant à tous les entiers n.

Cette classification des fonctions polygènes, en corps de différents ordres, paraît être l'une des plus naturelles. Il reste à voir si *toute* fonction polygène rentre effectivement dans l'un de ces corps.

Une autre classification des fonctions polygènes a été donnée par M. Hedrick (¹), qui range dans une même classe toutes les fonctions qu'on obtient à partir d'une fonction polygène $f(z, \bar{z})$ par la composition $\Phi[f(z, \bar{z})]$ où Φ parcourt tout le corps des fonctions analytiques (²).

Enfin, on peut se poser des questions de représentation conforme

(¹) Hedrick, Ingold et Westfall, *Theory of non-analytic functions of a complex variable* (*Journ. de Math.*, 9ᵉ série, t. 2, 1923, p. 327). Observons, à propos de ce Mémoire, que bien des résultats relatifs aux *caractéristiques* d'une fonction polygène peuvent être obtenus facilement en adoptant notre langage. Ainsi, on vérifie immédiatement sur l'expression (3″) l'existence de deux directions principales φ_1 et φ_2 attachées à chaque point z, rendant $\dfrac{df}{dz_\varphi}$ maximum ou minimum. On trouve dans ce Mémoire relativement récent, des considérations géométriques intéressantes sur cette théorie.

(²) La Thèse de M. Miron Nicolesco, parue récemment, contient une condition très simple nécessaire et suffisante pour que deux fonctions f et g appartiennent à une même classe selon M. Hedrick. On doit avoir $\dfrac{D(f, g)}{D(x, y)} = 0$. (Thèse soutenue à Paris, le 5 mai 1928.)

d'une nature spéciale. On obtiendra ainsi telle ou telles classes particulières de fonctions polygènes. Mentionnons ici les fonctions qui résultent de la représentation conforme conservant l'aire et qui forment, elles aussi, un corps caracterisé par cette propriété géométrique. On trouve déjà dans les œuvres de Gauss les formules

$$\mathrm{Q} = \frac{\partial \Omega}{\partial \mathrm{P}}, \qquad y = -\frac{\partial \Omega}{\partial x},$$

qui définissent cette classe. En effet, la résolution de ce système, par rapport à P et Q, définit une classe de fonctions $\mathrm{P} + i\mathrm{Q}$ de la variable complexe $x + iy$, à la seule condition que $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \, \partial \mathrm{P}}$ ne soit pas nulle.

4. Observons que les fonctions polygènes analytiques admettent, d'après leur définition, un développement en série suivant les puissances de z et $\bar{z}$. Un élément de cette forme étant donné, on pourra inversement lui appliquer les méthodes du prolongement qui permettent de définir, du moins théoriquement, son domaine d'existence. Ce mode de définition conduira, comme pour les fonctions analytiques ordinaires, à la notion de fonction polygène multiforme.

Il y a lieu de remarquer, à ce propos, que le prolongement d'une telle fonction peut se trouver arrêté d'une façon assez artificielle par la présence d'une courbe singulière, alors que l'*expression analytique* $f(z, \bar{z})$ de la fonction polygène permet de traverser cette courbe. Prenons l'exemple très simple

$$f(z, \bar{z}) = \frac{1}{1 - z\bar{z}}.$$

L'élément de fonction, correspondant au voisinage de l'origine, divergera certainement sur le cercle-unité tout entier, car

$$1 - z\bar{z} = 1 - r^2$$

est nulle sur ce cercle. Si l'on se contente donc de faire le prolon gement *à la Weierstrass*, la fonction n'existe qu'à l'intérieur du cercle-unité. Mais l'expression

$$\frac{1}{1 - z\bar{z}}$$

garde un sens dans tout le plan. La définition complète de cette fonction revient donc à une question de *préférence* entre séries entières, d'une part, et expressions analytiques, d'autre part, question qui s'est déjà posée pour les fonctions analytiques présentant des coupures [1].

Les fonctions polygènes analytiques que nous venons de définir appartiennent à la classe plus générale des fonctions quasi analytiques d'une variable complexe. On sait qu'on appelle ainsi toute fonction qui est complètement déterminée dans tout son domaine d'existence lorsqu'elle est connue dans un domaine (D) d'aire non nulle. Cette propriété appartient aux fonctions analytiques de z et sa démonstration se réduit à prouver que si un élément de fonction est nul dans un cercle aussi petit qu'il soit, la fonction est nulle identiquement dans tout son domaine d'existence. Or, cette propriété appartient aussi aux fonctions polygènes analytiques. Soit

$$f(z) = a_0 + (a_{10}z + a_{01}\bar{z}) + (a_{02}z^2 + a_{11}z\bar{z} + a_{20}\bar{z}^2) + \ldots \tag{7}$$

un élément de fonction polygène convergeant dans l'aire (D) et s'annulant à son intérieur. On a, en posant $z = re^{i\theta}$,

$$\begin{aligned} f(z) = a_0 + r(a_{10}e^{i\theta} + a_{01}e^{-i\theta}) + r^2(a_{02}e^{2i\theta} + a_{11} + a_{20}e^{-2i\theta}) + \ldots \\ + r^n(a_{n0}e^{ni\theta} + a_{n-1,1}e^{\overline{n-2}\,i\theta} + \ldots + a_{0n}e^{-ni\theta}) + \ldots . \end{aligned}$$

Il suit que l'on a, quels que soient θ et n,

$$a_{n0}e^{ni\theta} + a_{n-1,1}e^{\overline{n-2}\,i\theta} + \ldots + a_{1,n-1}e^{-\overline{n-2}\,i\theta} + a_{0n}e^{-ni\theta} = 0$$

ou

$$a_{n0}(e^{2i\theta})^n + a_{n-1,1}(e^{2i\theta})^{n-1} + \ldots + a_{1,n-1}(e^{2i\theta}) + a_{0n} = 0;$$

donc tous les a_{ij} sont nuls et $f(z)$ est nulle identiquement. Le prolongement permettra de voir qu'il en est ainsi dans tout le domaine d'existence de $f(z)$; ce qui prouve que c'est une fonction quasi analytique de z.

On se demande d'abord quel peut être le domaine de convergence d'un élément donné. On aura l'équation polaire de la courbe de convergence en déterminant la plus grande des limites de la suite

$$\lambda_n = \left| \sqrt[n]{A_{n0}\mu^n + a_{n-1,1}\mu^{n-1} + \ldots + a_{1,n-1}\mu + a_{0n}} \right| \qquad (\mu = e^{2i\theta}).$$

---

(1) E. Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, 2e édit., 1914, p. 81.

Désignons par $\lambda(\theta)$ cette limite, fonction de θ.
On aura pour courbe de convergence

$$\rho = \frac{1}{\lambda(\theta)}.$$

On pourra considérer les fonctions polygènes entières et leurs zéros. Ici il y a lieu de signaler une différence capitale qui sépare ces fonctions des fonctions entières monogènes. Une fonction polygène peut être nulle tout le long d'une ligne non singulière, sans être nulle dans tout le plan. Il suffit de prendre l'exemple $f = 1 - z\bar{z}$, nulle tout le long du cercle-unité, existant dans tout le plan.

CHAPITRE II.

REPRESENTATION DES FONCTIONS POLYGÈNES PAR DES INTEGRALES DOUBLES.

1. Nous reviendrons, dans ce Chapitre, sur les fonctions polygènes uniformes les plus générales, continues ainsi que leurs dérivées premières, quittant pour un instant les classes analytiques. Nous démontrerons ici certaines propriétés générales de ces fonctions, permettant de les rendre plus familières au lecteur, quoique ces propriétés ne soient pas toutes nécessaires aux applications que nous ferons aux équations différentielles.

Observons d'abord que, en se reportant à (3′), on peut écrire la formule de Cauchy-Riemann d'une manière plus condensée

$$(6) \qquad \int_C f(z)\,dz = 2i\int_{(C)} \rho[f]\,dC$$

en désignant par (C) le domaine superficiel limité par un contour fermé C, et par dC un élément d'aire pris dans ce domaine. De même on a

$$(6') \qquad \int_{C} f(z)\,d\bar{z} = 2i \int_{(C)} \delta[f]\,dC.$$

Ces deux formules permettent d'abord de donner une définition de $\delta[f]$ et $\rho[f]$ qui rappelle un mode de définition du vecteur tourbillon d'un champ vectoriel. On a, en faisant tendre le contour σ vers un point [1],

$$(7) \qquad \begin{cases} 2i\,\delta[f] = \lim \dfrac{1}{(\sigma)} \displaystyle\int_{\sigma} f(z)\,d\bar{z}, \\ 2i\,\rho[f] = \lim \dfrac{1}{(\sigma)} \displaystyle\int_{\sigma} f(z)\,dz, \end{cases}$$

en désignant par (σ) l'aire limitée par le contour σ. Une application plus intéressante de (6) peut être faite en reprenant le raisonnement fait par Cauchy sur les fonctions monogènes et en l'adaptant aux fonctions polygènes. Calculons l'intégrale

$$\int_{C} \frac{f(z)}{z-x}\,dz$$

le long d'un contour C, le point x étant intérieur et $f(z)$ étant une fonction polygène (continue et uniforme) quelconque. Traçons un petit cercle γ entourant x et joignons C à γ par un chemin linéaire α. Appliquons la formule (6) au domaine $(C-\gamma)$ limité par C, γ et les deux bords de α

On désignera par dC_z un élément d'aire entourant le point z. L'intégrale se transforme comme on l'a fait pour les fonctions monogènes On a, en vertu de la continuité,

$$f(z)_{\text{sur }\gamma} = f(x) + \varepsilon \qquad (\text{avec } |\varepsilon| < \eta),$$

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-x}\,dz = f(x)\int_{\gamma} \frac{dz}{z-x} + \int_{\gamma} \frac{\varepsilon\,dz}{z-x}.$$

Il est clair que la dernière intégrale disparaît lorsque le rayon de γ

---

(1) La seconde formule (7) fournit la définition de la dérivée aréolaire de M. Pompeiu, égale à $\rho[f]$ au facteur $\frac{1}{2i}$ près.

diminue indéfiniment et il reste

$$\lim \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-x}\, dz = 2\pi i\, f(x).$$

On aura donc

$$2\pi i f(x) = \int_{C} \frac{f(z)}{z-x}\, dz - 2i \lim \int_{(C-\gamma)} \rho\left[\frac{f(z)}{z-x}\right] dC_z.$$

Il nous reste à transformer la seconde intégrale. On a immédiatement, en vertu de (4),

$$\delta[f_1 . f_2] = f_1\, \delta[f_2] + f_2\, \delta[f_1],$$
$$\rho[f_1 . f_2] = f_1\, \rho[f_2] + f_2\, \rho[f_1],$$

et aussi

$$\rho\left[\frac{f_1}{f_2}\right] = \frac{f_2\, \rho[f_1] - f_1\, \rho[f_2]}{(f_2)^2},$$

d'où

$$\rho\left[\frac{f(z)}{z-x}\right] = \frac{(z-x)\, \rho[f] - f(z)\, \rho[z-x]}{(z-x)^2} = \frac{\rho[f]}{z-x},$$

car z est monogène. La formule devient donc

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C} \frac{f(z)}{z-x}\, dz - \frac{1}{\pi} \lim \int_{(C-\gamma)} \frac{\rho[f]}{z-x}\, dC_z.$$

Montrons que la dernière intégrale a un sens, malgré la présence d'un élément singulier provenant du pôle $z = x$. Soit Γ un cercle de centre x et de rayon R, compris dans (C). On a

$$\left| \int_{(\Gamma)} \frac{\rho[f]}{z-x}\, dC_z \right| < \int_{(\Gamma)} \frac{|\rho[f]|}{|z-x|}\, dC_z.$$

Supposons $\rho\, [f]$ borné dans (C)

$$\rho[f] < \text{M}.$$

On a

$$\left| \int_{(\Gamma)} \frac{\rho\, dC_z}{z-x} \right| < \text{M} \int_{(\Gamma)} \frac{dC_z}{|z-x|}.$$

Posons $z = x + re^{i\theta}$, $|z-x| = r$.

Il vient

$$\int_{(\Gamma)} \frac{dC_z}{|z-x|} = \int_{0}^{\text{R}} \frac{2\pi r\, dr}{r} = 2\pi \text{R}.$$

On voit donc que l'intégrale

$$\int_{(\Gamma)} \frac{\rho[f]}{z-x}\, dC_z$$

a une valeur finie, de module inférieur à $2\pi RM$. Ceci montre qu'il en est de même de

$$\int_{(C)} \frac{\rho[f]}{z-x}\, dC_z$$

lorsque $\rho[f]$ est borné dans (C), car le domaine compris entre Γ et C ne fournit pas d'élément singulier. Or

$$\int_{(C-\gamma)} \frac{\rho[f]}{z-x}\, dC_z = \int_{(C)} - \int_{\gamma}$$

et le module de $\int_{(\gamma)}$ est inférieur à $2\pi r M$, r étant le rayon du cercle γ. Cette intégrale tend donc vers zéro avec r, et il reste

$$\lim \int_{(C-\gamma)} \frac{\rho[f]}{z-x}\, dC_z = \int_{(C)} \frac{\rho[f]}{z-x}\, dC_z,$$

intégrale qui a un sens bien défini. La formule devient ainsi

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C} \frac{f(s)}{s-z}\, ds + \frac{1}{\pi}\int_{(C)} \frac{\rho[f(s)]}{z-s}\, dC_s. \tag{8}$$

Cette formule, généralisant celle de Cauchy, a été trouvée pour la première fois par M. Pompeiu qui l'a signalée (¹) en 1912; elle montre que pour connaître une fonction polygène $f(z)$ dans un domaine (C), il faut connaître les valeurs de $f(s)$ sur le contour C, *et les valeurs de sa dérivée aréolaire dans* (C). Le cas des fonctions monogènes ne diffère point, au fond, de ce cas général; on se donne alors implicitement les valeurs — nulles — de $\rho[f]$ dans (C). Cette même formule est utilisée par M. Borel (²) (les notations différant un peu) pour définir des fonctions monogènes dans un domaine (C), non analytiques dans ce domaine. Il suffit, pour cela, de supposer $\rho[f] = 0$ dans un domaine

(¹) D. Pompeiu, *Rendiconti Palermo*, t. 35, 1913 (2), p. 278.
(²) E. Borel, *Leçons sur les fonctions monogènes*.

de Cauchy (que M. Borel définit), et $\rho[f] \neq 0$ dans le domaine complémentaire.

Observons que la première intégrale qui figure dans (8) représente dans (C) une fonction monogène. C'est donc la deuxième, l'intégrale double, qui représente la partie essentiellement polygène de $f(z)$. On voit donc que cette partie polygène est déterminée par $\rho[f]$ *à une fonction monogène près*. Ce résultat apparaît aussi directement. Supposons que l'on donne

$$\rho[f] = A(z).$$

Si f_1 est une fonction particulière satisfaisant à cette équation, on a

$$\rho(f - f_1) = 0$$

donc

$$f - f_1 = \Phi(z) = \text{fonction monogène}.$$

On verrait de même que deux fonctions ayant la même $\delta[f]$ dans un domaine donné, diffèrent nécessairement par une fonction antimonogène dans ce domaine. Si

$$\delta[f] = \delta[f_1] = B(z),$$
$$\delta[f - f_1] = 0,$$

donc

$$f - f_1 = \Phi(\bar{z}) = \text{fonction antimonogène}.$$

2. On peut se demander si les valeurs de $\rho[f]$ peuvent être données arbitrairement dans (C), tout en conservant la continuité. Il suffit de démontrer que si l'on définit $f(z)$ par

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{(C)} \frac{A(s)}{z - s} \, dC_s, \tag{9'}$$

on a

$$\rho[f] = A(z) \qquad [\text{dans } (C)].$$

A chaque fonction $A(z)$ correspondra alors une fonction admettant $A(z)$ pour dérivée aréolaire. Il sera démontré du même coup que toute fonction polygène peut être représentée par

$$f(z) = \Phi(z) + \frac{1}{\pi} \int_{C} \frac{\rho[f(s)]}{z - s} \, dC_s. \tag{9}$$

En effet, une fonction polygène $f(z)$ étant donnée, telle qu'elle possède des dérivées premières continues, il est facile de former $\rho[f]$ par des dérivations. On formera alors l'intégrale (9') qui, admettant $\rho[f]$ pour dérivée aréolaire, ne pourra différer de $f(z)$ que par une fonction monogène. Toute fonction $f(z)$ rentrera donc dans (9).

Pour établir que la dérivée aréolaire de la fonction définie par (9') est $A(z)$, nous utiliserons la formule

$$2i\rho[f] = \lim \frac{1}{(\sigma)} \int_\sigma f(z)\, dz \qquad [(\sigma) \sim 0].$$

On a, le long d'un contour σ entourant z,

$$\int_\sigma f(x)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_\sigma dx \int_{(C)} \frac{A(s)}{x-s}\, dC_s$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{(C)} A(s)\left\{\int_\sigma \frac{dx}{x-s}\right\} dC_s.$$

Nous démontrerons plus loin la légitimité de cette permutation d'intégrales. On a donc

$$\rho[f] = \frac{1}{2i} \lim \frac{1}{(\sigma)}\,\frac{1}{\pi}\int_{(\sigma)} A(s)\left\{\int_\sigma \frac{dx}{x-s}\right\} d\sigma$$

en limitant le domaine (C) à (σ), car $\int_\sigma \frac{dx}{x-s}$ est nulle pour s extérieur à (σ). On aura dans (σ), en vertu de la continuité,

$$A(s)_{\text{dans }(\sigma)} = A(z) + \varepsilon(s) \qquad [\text{avec } |\varepsilon(s)| < \eta].$$

L'intégrale $\int_\sigma \frac{dx}{x-s}$ est égale à $2\pi i$, donc

$$\rho[f] = \frac{1}{2i} \lim \frac{1}{(\sigma)}\,\frac{1}{\pi}\left\{\int_{(\sigma)} A(z)\, 2\pi i\, d\sigma + \int_{(\sigma)} \varepsilon(s)\, 2\pi i\, d\sigma\right\}.$$

Or,

$$\left|\int_{(\sigma)} \varepsilon(s)\, d\sigma\right| < \eta \int_{(\sigma)} d\sigma = (\sigma)\eta$$

et l'on a finalement

$$\rho[f] = A(z) + k \qquad (\text{avec } |k| < \eta).$$

η tendant vers zéro avec (σ). Il reste donc

$$\rho[f] = A(z).$$

On voit que la fonction $\rho[f]$ peut être donnée arbitrairement dans (C), du moins lorsque la continuité est respectée dans (C).

Pour achever cette démonstration, il reste à légitimer la permutation des intégrales, effectuée précédemment.

3. Soit (C) un domaine fini simplement connexe et σ une courbe fermée entièrement située dans (C). Si $A(z)$ est une fonction continue, on a

$$\begin{aligned} J &= \int_\sigma dz \int_{(C)} \frac{A(s)}{z-s}\, dC_s = \int_{(C)} dC_s \int_\sigma \frac{A(s)}{z-s}\, dz \\ &= \int_{(C)} A(s)\, dC_s \int_\sigma \frac{dz}{z-s} = 2\pi i \int_{(\sigma)} A(s)\, dC_s. \end{aligned}$$

Pour démontrer cela, décomposons le domaine (C) en trois parties, de la manière suivante. Traçons une série de cercles sécants de rayon r, ayant leurs centres sur σ et chaque cercle passant par les centres des cercles voisins. On entourera ainsi σ d'un espace annulaire. Pour fermer cet espace annulaire, le dernier cercle tracé pourra passer par le centre du premier, ou le contenir à son intérieur. Soit N le nombre de cercles de rayon r nécessaires à la formation de cette région annulaire et soit β sa frontière située entre σ et C, α sa frontière située dans (σ); désignons par $(\alpha\beta)$ l'espace annulaire et par (α) l'espace intérieur à α. On aura

$$(N-1)r < L = \text{longueur du contour } \sigma;$$

donc

$$N < \frac{L+r}{r}.$$

Or

$$\int_{(C)} \frac{A(s)}{z-s}\, dC_s = \int_{\beta C} + \int_{\alpha\beta} + \int_\alpha.$$

Il est clair que l'on a

$$\int_\sigma dz \int_{\beta C} \frac{A(s)}{z-s}\, dC_s = \int_{(\beta C)} A(s)\, dC_s \int_\sigma \frac{dz}{z-s} = 0.$$

car, pendant cette intégration, l'élément différentiel reste toujours fini. On a de même

$$\int_{\sigma} dz \int_{\alpha} \frac{A(s)}{z-s} dC_s = \int_{\alpha} A(s)\, dC_s \int_{\sigma} \frac{dz}{z-s} = 2\pi i \int_{\alpha} A(s)\, dC_s,$$

en vertu de la même propriété. Il reste

$$\int_{\sigma} dz \int_{\alpha\beta} \frac{A(s)}{z-s} dC_s = \int_{\sigma} F(z)\, dz.$$

Montrons maintenant que la fonction

$$F(z) = \int_{\alpha\beta} \frac{A(s)}{z-s} dC_s$$

tend vers zéro lorsque l'aire du domaine $(\alpha\beta)$ tend vers zéro en même temps que r. On a

$$\int_{\alpha\beta} \frac{A(s)}{z-s} dC_s + \int_{\lambda} \frac{A(s)}{z-s} dC_s = \sum_{i=1}^{\lambda} \int_{(\Gamma_i)} \frac{A(s)}{z-s} dC_s.$$

(λ) étant le domaine formé par les régions communes aux cercles Γ_i successifs. Donc

$$\left|\int_{\alpha\beta} \frac{A(s)}{z-s} dC_s\right| - \left|\int_{(\lambda)} \frac{A(s)}{z-s} dC_s\right| < \sum_{i=1}^{\lambda} \left|\int_{(\Gamma_i)} \frac{A(s)}{z-s} dC_s\right|.$$

On a dans chaque cercle (Γ_i)

$$A(s) = A(s_i) + \varepsilon_i \qquad (|\varepsilon_i| < \varepsilon),$$

en désignant par s_i le centre du cercle Γ_i.

$$\left|\int_{(\Gamma_i)} \frac{A(s)}{z-s} dC_s\right| \leqq \left|A(s_i) \int_{(\Gamma_i)} \frac{dC_s}{z-s}\right| + \varepsilon \int_{(\Gamma_i)} \frac{dC_s}{|z-s|}.$$

On aura également

$$\int_{\lambda} \frac{A(s)}{z-s} dC_s = \sum_{i=1}^{\lambda} \int_{\lambda_i} \frac{A(s)}{z-s} dC_s,$$

$$\left|\int_{\lambda} \frac{A(s)}{z-s} dC_s\right| \leqq \sum_{i=1}^{\lambda} \left|\int_{\lambda_i} \frac{A(s)}{z-s} dC_s\right|$$

avec

$$\int_{\gamma_i} \frac{A(s)}{z-s}\, dC_s \leqq A(s_i) \int_{\gamma_i} \frac{dC_s}{z-s} + \varepsilon \int_{\gamma_i} \frac{dC_s}{|z-s|}.$$

Or

$$\left| \int_{(\Gamma_i)} \frac{dC_s}{z-s} \right| \leqq \int_{(\Gamma_i)} \frac{dC_s}{|z-s|},$$

$$\left| \int_{\gamma_i} \frac{dC_s}{z-s} \right| \leqq \int_{\gamma_i} \frac{dC_s}{|z-s|} < \int_{(\Gamma_i)} \frac{dC_s}{|z-s|}$$

et

$$\left| \int_{(\Gamma_i)} \frac{A(s)}{z-s}\, dC_s \right| \leqq [\,|A(s_i)| + \varepsilon\,] \int_{(\Gamma_i)} \frac{dC_s}{|z-s|},$$

$$\left| \int_{\gamma_i} \frac{A(s)}{z-s}\, dC_s \right| \leqq [\,|A(s_i)| + \varepsilon\,] \int_{(\Gamma_i)} \frac{dC_s}{|z-s|}.$$

Mais

$$|z-s| \geqq |z-s_i'|,$$

s_i' étant un certain point situé sur Γ_i. On aura

$$\int_{(\Gamma_i)} \frac{dC_s}{|z-s|} < \frac{1}{|z-s_i'|} \int_{(\Gamma_i)} dC_s = \frac{\pi r^2}{|z-s_i'|}.$$

Il en résulte

$$\left| \int_{(\Gamma_i)} \frac{A(s)}{z-s}\, dC_s \right| < [\,\varepsilon + |A(s_i)|\,] \frac{\pi r^2}{|z-s_i'|} = B_i.$$

$$\left| \int_{\gamma_i} \frac{A(s)}{z-s}\, dC_s \right| < B_i.$$

d'où

$$\left| \int_{(\alpha\beta)} \frac{A(s)}{z-s}\, dC_s \right| < \sum_{i=1}^{N} 2[\,\varepsilon + |A(s_i)|\,] \frac{\pi r^2}{|z-s_i'|}.$$

On augmentera le second membre en remplaçant $|A(s_i)|$ par son module maximum A sur la courbe σ contenant les s_i, et $|z-s_i'|$ par sa valeur minima $|z-s''|$; on aura

$$\left| \int_{(\alpha\beta)} \frac{A(s)}{z-s}\, dC_s \right| < 2 \left[\frac{1}{|z-s''|} \sum_{i=1}^{N} \pi r^2 \varepsilon + \frac{A}{|z-s''|} \sum_{i=1}^{N} \pi r^2 \right]$$

$$= \frac{2\pi}{|z-s''|} [\,N r^2 \varepsilon + A N r^2\,].$$

Mais $N < \frac{L+r}{r}$ donc

$$\left| \int_{\alpha\beta} \frac{\Lambda(s)}{z-s} dC_s \right| < \frac{2\pi}{|z-s''|} (L+r) r (\varepsilon + A),$$

qui montre que notre intégrale tend vers zéro avec r. On a supposé z extérieur au domaine $(\alpha\beta)$. Il résulte de la continuité de cette intégrale dans le plan entier [1], et du fait qu'elle ne peut jamais représenter qu'une fonction bornée, que la limite est zéro, quelle que soit la position de z.

CHAPITRE III.

LES FONCTIONS POLYGÈNES COMME SOLUTIONS D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET FONCTIONNELLES.

1. Considérons une équation différentielle d'ordre n

$$F[y^{(n)}, y^{(n-1)}, \ldots, y', y, z] = 0. \tag{1}$$

On peut chercher à satisfaire à cette équation par une fonction $y = f(z)$, polygène en z, les dérivées de y étant remplacées par les expressions (5) calculées précédemment (Chap. I). Après cette substitution, le premier membre de l'équation (1) dépendra visiblement de l'angle φ. Nous dirons que la fonction polygène $f(z)$ satisfait à l'équation différentielle (1) lorsque le premier membre de celle-ci est nul pour toute valeur de φ [2]. Nous verrons, par les divers exemples géné-

(1) Le lecteur pourra vérifier, par un calcul facile, qu'une fonction de z telle que $f(z)$ définie par (9'), est continue dans tout le plan et nulle à l'infini.

(2) On peut aussi envisager le problème d'une autre manière, par exemple en se donnant φ le long d'une courbe et en cherchant la solution $f(z)$ qui lui correspond sur cette courbe. Nous nous bornerons à la première manière de poser le problème.

raux qui suivent, que de telles solutions polygènes peuvent bien exister.

Avant de passer aux exemples, signalons un théorème général reliant ces solutions polygènes à certaines solutions monogènes d'une même équation.

Démontrons donc le théorème suivant :

A. *Si* $y = G(z, \bar{z})$ *est une solution polygène analytique de* (1), *dans un domaine* (C), *la fonction* $y_1 = G(z, z - 2id)$ *en est une solution monogène* [1].

En effet, soit AB une parallèle à l'axe des x, contenue dans le domaine (C), et soit d sa distance à cet axe. La fonction $G(x + id, x - id)$ satisfait à (1) le long de AB. Or, c'est une série entière en x convergeant au moins sur un segment de AB. Cette série représente la fonction $G(z, z - 2id)$ monogène dans un cercle et satisfaisant à (1) sur AB. Il en résulte, par la possibilité du prolongement, que cette fonction satisfait à (1) dans tout son domaine d'existence. La valeur de d peut être prise arbitrairement, pourvu que le segment AB ne sorte pas du domaine d'existence de $G(z, \bar{z})$. Lorsque ce domaine comprend un segment de l'axe des x, on peut prendre $d = 0$. Des solutions monogènes s'obtiennent donc à partir des solutions polygènes par le simple changement de $\bar{z}$ en z. Le simple changement de $\bar{z}$ en z ne conviendra pas lorsque des singularités s'opposent à ce que l'on puisse prendre $d = 0$.

Cette remarque permet de signaler certaines classes d'équations différentielles dont l'intégration peut être simplifiée, quelquefois complètement achevée, une fois qu'on en a calculé les solutions polygènes.

On peut généraliser le théorème précédent.

Considérons une équation monogène par rapport à y et à ses dérivées, mais polygène en z

$$\Phi[z, \bar{z}, y, y', y'', \quad \ldots, y^n] = 0$$

(1) Nous avons énoncé ce théorème dans une Note insérée aux *Comptes rendus*, t. 186, 1928, p. 930.

Soit $y = G(z, \bar{z})$ une solution polygène de cette équation. Un raisonnement pareil à celui qui précède permet d'établir que la fonction monogène $y_1 = G(z, z - 2id)$ satisfait à l'équation monogène

$$\Phi[z, z - 2id, y, y', \ldots, y^{(n)}] = 0.$$

2. On peut étendre tout ceci aux équations fonctionnelles. Appelons ainsi des relations entre $\varphi(z)$ et $\varphi[a(z)]$, $\varphi[b(z)]$, $\ldots$, $\varphi[l(z)]$, où φ est une fonction inconnue et $a, b, \ldots, l$, des fonctions données ([1]).

Soit par exemple

$$F\big(z, \bar{z}, \varphi(z), \varphi[a(z)], \varphi[b(z)]\big) = 0.$$

Les données F, a, b, étant analytiques par rapport aux variables qu'elles contiennent, cette relation est susceptible d'être vérifiée par une fonction polygène $\varphi = G(z, \bar{z})$. Le raisonnement fait plus haut nous permettra d'établir que la fonction monogène $\varphi_1 = G(z, z - 2id)$ satisfera à l'équation monogène

$$F\big(z, z - 2id, \varphi(z), \varphi[a(z)], \varphi[b(z)]\big) = 0.$$

LES ÉQUATIONS LINÉAIRES.

1. Pour prendre l'exemple le plus simple, commençons par l'équation linéaire du second ordre. Soit donc

$$\text{(1)} \qquad Ay'' + By' + Cy + D = 0$$

une équation à coefficients A, B, C, D monogènes en z. On a

$$y' = \frac{\partial y}{\partial z} + e^{-2i\varphi} \frac{\partial y}{\partial \bar{z}},$$

$$y'' = \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + 2e^{-2i\varphi} \frac{\partial^2 y}{\partial z\, \partial \bar{z}} + e^{-4i\varphi} \frac{\partial^2 y}{\partial \bar{z}^2}.$$

---

(1) C'est la définition adoptée par M. Leau dans son Mémoire de 1897 (*Ann. de la Fac. des Sc. Toulouse*, t. XI).

En substituant dans (1) et en annulant les coefficients des puissances de $e^{-2i\varphi}$, on trouve trois conditions équivalant à (1) :

$$
(2)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&A\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + B\frac{\partial y}{\partial z} + Cy + D = 0,\\
&2A\frac{\partial^2 y}{\partial z\,\partial \bar{z}} + B\frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = 0,\\
&A\frac{\partial^2 y}{\partial \bar{z}^2} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Pour avoir les solutions polygènes analytiques de (1), il suffit de calculer les solutions analytiques en z et $\bar{z}$ de (2). La dernière équation montre que l'on a

$$y = \Phi_1 + \bar{z}\Phi_2,$$

Φ_1 et Φ_2 étant monogènes en z. Il suffit de cette intégration pour se rendre compte de la forme analytique de la solution. Il s'ensuit

$$\frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \Phi_2, \qquad \frac{\partial y}{\partial z} = \Phi'_1 + \bar{z}\Phi'_2, \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \Phi''_1 + \bar{z}\Phi''_2.$$

La deuxième équation de (2) donne

$$(2')\qquad 2A\Phi'_2 + B\Phi_2 = 0,$$

et la première

$$A\Phi''_1 + B\Phi'_1 + C\Phi_1 + D + \bar{z}(A\Phi''_2 + B\Phi'_2 + C\Phi_2) = 0.$$

Pour que cette dernière équation, dans laquelle A, B, C, D, Φ_1, Φ_2 sont monogènes en z, puisse être satisfaite, il faudra avoir

$$(2'')\qquad A\Phi''_2 + B\Phi'_2 + C\Phi_2 = 0.$$

Elle devient alors

$$(2''')\qquad A\Phi''_1 + B\Phi'_1 + C\Phi_1 + D = 0.$$

On voit donc que Φ_2 doit être choisi de façon à satisfaire aux deux équations (2′) et (2″). Ceci impose une relation entre les coefficients A, B, C, nécessaire pour l'existence des solutions polygènes. On aura

$$
\begin{aligned}
A\Phi''_2 + {}& B\,\Phi'_2 + C\,\Phi_2 = 0,\\
& 2A\,\Phi'_2 + B\,\Phi_2 = 0,\\
2A\Phi''_2 + {}& (2A' + B)\Phi'_2 + B'\Phi_2 = 0.
\end{aligned}
$$

d'où, nécessairement

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ 0 & 2A & B \\ 2A & 2A' + B & B' \end{vmatrix} = 0$$

ou encore

$$(3) \qquad B^2 - 4AC = -2 \begin{vmatrix} A' & B' \\ A & B \end{vmatrix}.$$

On a, par (2'),

$$\Phi_2 = \gamma e^{-\int \frac{B}{2A}}$$

et

$$y = \Phi_1 + \gamma \bar{z} e^{-\int \frac{B}{2A} dz},$$

γ étant une constante arbitraire et Φ_1 étant une solution monogène de (1).

En somme,

$$y_1 = \gamma \bar{z} e^{-\int \frac{B}{2A} dz}$$

est une solution polygène de

$$(1') \qquad Ay'' + By' + Cy = 0.$$

pourvu que la condition (3) soit satisfaite. On vérifie facilement que l'on a

$$Ay_1'' + By_1' + Cy_1 = \gamma e^{\int \frac{B}{2A} dz} \frac{\bar{z}}{4A} \left[2 \begin{vmatrix} A' & B' \\ A & B \end{vmatrix} - (B^2 - 4AC) \right].$$

En vertu du théorème démontré précédemment, la fonction monogène

$$y_2 = \gamma z e^{-\int \frac{B}{2A} dz}$$

satisfera à (1'). On vérifie que l'on a aussi

$$Ay_2'' + By_2' + Cy_2 = \gamma e^{\int \frac{B}{2A} dz} \frac{z}{4A} \left[2 \begin{vmatrix} A' & B' \\ A & B \end{vmatrix} - (B^2 - 4AC) \right],$$

d'où la vérification immédiate. Conduits par l'analogie avec ce qui se passerait si A, B, C étaient constants [l'équation (3) devient alors $b^2 - 4ac = 0$], essayons voir si

$$y_3 = \beta\, e^{-\int \frac{B}{2A} dz}$$

n'est pas solution de (1'). On a

$$Ay_3'' + By_3' + Cy_3 = \beta\, e^{-\int \frac{B}{2A} dz} \frac{1}{4A}\left[2\begin{vmatrix} A' & B' \\ A & B \end{vmatrix} - (B^2 - 4AC)\right],$$

qui montre qu'il en est bien ainsi.

On a donc, en général,

$$y = (\alpha + \beta \bar{z})\, e^{-\int \frac{B}{2A} dz}$$

comme solution générale polygène ([1]), et

$$Y = (\alpha + \beta z)\, e^{-\int \frac{B}{2A} dz}$$

comme solution générale monogène.

Ainsi, cet exemple nous a permis de déterminer complètement les solutions polygènes et monogènes, si intimement reliées les unes aux autres. L'exemple en question forme une classe assez large parmi les équations linéaires du second ordre puisque $A(z)$ et $B(z)$ restent complètement arbitraires, $C(z)$ étant déterminé en fonction de ces coefficients par la relation (3).

2. Passons à l'équation d'ordre III :

(4) $$Ay''' + By'' + Cy' + Dy + E = 0.$$

On a, avec les équations déjà écrites,

(5) $$y''' = \frac{\partial^3 y}{\partial z^3} + 3e^{-2i\varphi} \frac{\partial^3 y}{\partial z^2 \partial \bar{z}} + 3e^{-4i\varphi} \frac{\partial^3 y}{\partial z \partial \bar{z}^2} + e^{-6i\varphi} \frac{\partial^3 y}{\partial \bar{z}^3}.$$

---

[1] Nous appelons *solution générale polygène* une solution contenant un nombre de constantes arbitraires égal à l'ordre de l'équation.

La substitution et l'identification conduisent aux quatre conditions

$$
(6)\qquad \begin{cases}
A\dfrac{\partial^3 y}{\partial z^3} + B\dfrac{\partial^2 y}{\partial z^2} + C\dfrac{\partial y}{\partial z} + Dy + E = 0, \\[2ex]
\qquad 3A\dfrac{\partial^3 y}{\partial z^2\,\partial \bar{z}} + 2B\dfrac{\partial^2 y}{\partial z\,\partial \bar{z}} + C\dfrac{\partial y}{\partial \bar{z}} = 0, \\[2ex]
\qquad\qquad 3A\dfrac{\partial^3 y}{\partial z\,\partial \bar{z}^2} + B\dfrac{\partial^2 y}{\partial \bar{z}^2} = 0, \\[2ex]
\qquad\qquad\qquad A\dfrac{\partial^3 y}{\partial \bar{z}^3} = 0.
\end{cases}
$$

La dernière condition revient à

$$y = \Phi_1 + \bar{z}.\Phi_2 + \bar{z}^2.\Phi_3$$

et la substitution de cette expression, dans les trois premières équations, donne

$$(6')\qquad A\Phi_1''' + B\Phi_1'' + C\Phi_1' + D\Phi_1 + E = 0,$$

$$(6'')\qquad \begin{cases} A\Phi_2''' + B\Phi_2'' + C\Phi_2' + D\Phi_2 = 0. \\ 3A\Phi_2'' + 2B\Phi_2' + C\Phi_2 = 0, \end{cases}$$

$$(6''')\qquad \begin{cases} A\Phi_3''' + B\Phi_3'' + C\Phi_3' + D\Phi_3 = 0. \\ 3A\Phi_3'' + 2B\Phi_3' + C\Phi_3 = 0. \\ 3A\Phi_3' + B\Phi_3 = 0. \end{cases}$$

Ici, les deux possibilités suivantes pourront se présenter. Observons que les deux équations du système $(6'')$ coïncident avec les deux premières de $(6''')$. Si donc, on exprime que les trois équations $(6''')$ ont des solutions communes, le système $(6'')$ n'introduira plus de condition supplémentaire. Or, on sait former une équation du premier ordre à laquelle satisfont toutes les solutions communes des deux premières équations de $(6''')$. On fait ce calcul par un procédé qui rappelle la recherche du plus grand commun diviseur de deux polynomes. L'équation ainsi trouvée devra avoir des solutions communes avec la troisième équation de $(6''')$ qui est, elle aussi, du premier ordre. Il s'ensuit que ces solutions communes sont données par la troisième équation de $(6''')$. Or, celle-ci s'intègre facilement :

$$\Phi_3 = \gamma\, e^{-\int \frac{B}{3A} dz}.$$

On trouvera donc les conditions en question en substituant cette expression dans les deux premières équations de $(6''')$. On trouve ainsi

$$C = \frac{1}{3A}[B^2 - 3(A'B + AB')],$$

$$D = \frac{B^3}{27A^2} - \frac{1}{3A}(A''B - AB'') - \frac{B}{A^2}(A'B - AB')\left(\frac{B}{A^2} + \frac{2}{9}A'\right).$$

Ainsi, les deux coefficients A et B restent arbitraires et la solution est du second degré en $\bar{z}$.

Mais on peut aussi se contenter d'une solution moins générale, du premier degré en $\bar{z}$, en prenant $\Phi_3 = 0$. Il suffit alors que les deux équations $(6'')$ aient des solutions en commun, et ceci introduira une seule condition. Ainsi, trois coefficients resteront arbitraires, et les équations admettant des solutions polygènes du premier degré en $\bar{z}$ seront moins particulières. Pour déterminer Φ_2, on aura à intégrer

$$3A\Phi_2'' + 2B\Phi_2' + C\Phi_2 = 0.$$

La substitution de Φ_2, dans la première équation de $(6'')$, donne D en fonction de A, B, C.

3. L'étude de l'équation linéaire d'ordre n n'introduit pas de difficulté nouvelle. Soit

$$(7) \qquad A_0 y^n + A_1 y^{n-1} + \ldots + A_p y^{n-p} + \ldots + A_n y + A_{n+1} = 0.$$

les $A_p(z)$ étant monogènes. On aura, en posant $e^{-2i\varphi} = \mu$,

$$y^{(p)} = \frac{\partial^p y}{\partial z^p} + C_p^1 \mu \frac{\partial^p y}{\partial z^{p-1}\partial \bar{z}} + \ldots + C_p^q \mu^q \frac{\partial^p y}{\partial z^{p-q}\partial \bar{z}^q} + \ldots + \frac{\partial^p y}{\partial \bar{z}^p}.$$

En substituant dans (7), on aura immédiatement, en exprimant que celle-ci est vérifiée pour toute valeur de μ,

$$
(8)\quad\left\{
\begin{aligned}
&\mathrm{A}_0\frac{\partial^n y}{\partial z^n}+\mathrm{A}_1\frac{\partial^{n-1}y}{\partial z^{n-1}}+\ldots+\mathrm{A}_p\frac{\partial^{n-p}y}{\partial z^{n-p}}+\ldots+\mathrm{A}_{n-1}\frac{\partial y}{\partial z}+\mathrm{A}_n y+\mathrm{A}_{n+1}=0,\\
&\mathrm{C}_n^1\mathrm{A}_0\frac{\partial^n y}{\partial z^{n-1}\,\partial\bar z}+\mathrm{C}_{n-1}^1\mathrm{A}_1\frac{\partial^{n-1}y}{\partial z^{n-2}\,\partial\bar z}+\ldots+\mathrm{C}_{n-p}^1\mathrm{A}_p\frac{\partial^{n-p}y}{\partial z^{n-p-1}\,\partial\bar z}+\ldots+\mathrm{C}_1^1\mathrm{A}_{n-1}\frac{\partial y}{\partial\bar z}=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\mathrm{C}_n^k\mathrm{A}_0\frac{\partial^n y}{\partial z^{n-k}\,\partial\bar z^k}+\mathrm{C}_{n-1}^k\mathrm{A}_1\frac{\partial^{n-1}y}{\partial z^{n-k-1}\,\partial\bar z^k}+\ldots+\mathrm{C}_k^k\mathrm{A}_{n-k}\frac{\partial^k y}{\partial\bar z^k}=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\mathrm{C}_n^{n-1}\mathrm{A}_0\frac{\partial^n y}{\partial z\,\partial\bar z^{n-1}}+\mathrm{C}_{n-1}^{n-1}\mathrm{A}_1\frac{\partial^{n-1}y}{\partial\bar z^{n-1}}=0,\\
&\mathrm{C}_n^n\mathrm{A}_0\frac{\partial^n y}{\partial\bar z^n}=0.
\end{aligned}
\right.
$$

On a ainsi $(n+1)$ conditions auxquelles devront satisfaire les solutions polygènes y. La dernière donne immédiatement

$$y=\Phi_1+\Phi_2 z+\Phi_3\bar z^2+\ldots+\Phi_n\bar z^{n-1}.$$

On en déduit

$$\frac{\partial^i y}{\partial z^i}=\Phi_1^{(i)}+\Phi_2^{(i)}\bar z+\Phi_3^{(i)}\bar z^2+\ldots+\Phi_n^{(i)}\bar z^{n-1},$$

$$\frac{\partial^j y}{\partial\bar z^j}=\mathrm{C}_j^0\Phi_{j+1}+\mathrm{C}_{j+1}^1\Phi_{j+2}\bar z+\ldots+\mathrm{C}_{j+p}^p\Phi_{j+p+1}\bar z^p+\ldots+\mathrm{C}_{n-1}^{n-j-1}\Phi_n\bar z^{n-j-1},$$

en désignant $j!$ par C_j^0. Ceci permet d'écrire le système (8) sous la forme

$$
\begin{aligned}
&\ [\mathrm{A}_0\Phi_1^{(n)}+\mathrm{A}_1\Phi_1^{(n-1)}+\ldots+\mathrm{A}_p\Phi_1^{(n-p)}+\ldots+\mathrm{A}_{n-1}\Phi_1'+\mathrm{A}_n\Phi_1+\mathrm{A}_{n+1}]\\
&+\bar z[\mathrm{A}_0\Phi_2^{(n)}+\mathrm{A}_1\Phi_2^{(n-1)}+\ldots+\mathrm{A}_p\Phi_2^{(n-p)}+\ldots+\mathrm{A}_{n-1}\Phi_2+\mathrm{A}_n\Phi_2]\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\bar z^q[\mathrm{A}_0\Phi_{q+1}^{(n)}+\mathrm{A}_1\Phi_{q+1}^{(n-1)}+\ldots+\mathrm{A}_p\Phi_{q+1}^{(n-p)}+\ldots+\mathrm{A}_{n-1}\Phi_{q+1}'+\mathrm{A}_n\Phi_{q+1}]\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\bar z^{n-1}[\mathrm{A}_0\Phi_n^{(n)}+\mathrm{A}_1\Phi_n^{(n-1)}+\ldots+\mathrm{A}_p\Phi_n^{(n-p)}+\ldots+\mathrm{A}_{n-1}\Phi_n'+\mathrm{A}_n\Phi_n]=0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\ \mathrm{C}_1^0[\mathrm{C}_n^1\mathrm{A}_0\Phi_2^{(n-1)}+\mathrm{C}_{n-1}^1\mathrm{A}_1\Phi_2^{(n-2)}+\ldots+\mathrm{C}_{n-p}^1\mathrm{A}_p\Phi_2^{(n-p-1)}+\ldots+\mathrm{C}_1^1\mathrm{A}_{n-1}\Phi_2]\\
&+\bar z\,\mathrm{C}_2^1[\mathrm{C}_n^1\mathrm{A}_0\Phi_3^{(n-1)}+\mathrm{C}_{n-1}^1\mathrm{A}_1\Phi_3^{(n-2)}+\ldots+\mathrm{C}_{n-p}^1\mathrm{A}_p\Phi_3^{(n-p-1)}+\ldots+\mathrm{C}_1^1\mathrm{A}_{n-1}\Phi_3]\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\bar z^q\,\mathrm{C}_{q+1}^q[\mathrm{C}_n^1\mathrm{A}_0\Phi_{q+2}^{(n-1)}+\mathrm{C}_{n-1}^1\mathrm{A}_1\Phi_{q+1}^{(n-2)}+\ldots+\mathrm{C}_{n-p}^1\mathrm{A}_p\Phi_{q+2}^{(n-p-1)}+\ldots+\mathrm{C}_1^1\mathrm{A}_{n-1}\Phi_{q+2}]\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\bar z^{n-2}\mathrm{C}_{(n-1)}^{(n-2)}[\mathrm{C}_n^1\mathrm{A}_0\Phi_n^{(n-1)}+\mathrm{C}_{n-1}^1\mathrm{A}_1\Phi_n^{(n-2)}+\ldots+\mathrm{C}_{n-p}^1\mathrm{A}_p\Phi_n^{(n-p-1)}+\ldots+\mathrm{C}_1^1\mathrm{A}_{n-1}\Phi_n]=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&C_k^0\,[C_n^k A_0 \Phi_{k+1}^{(n-k)} + C_{n+1}^k A_1 \Phi_{k+1}^{(n-k-1)} + \ldots + C_{n-p}^k A_p \Phi_{k+1}^{(n-k-p)} + \ldots + C_k^k A_{n-k} \Phi_{k+1}\ ] \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ C_{k+1}^1\ z\,[C_n^k A_0 \Phi_{k+2}^{(n-k)} + C_{n+1}^k A_1 \Phi_{k+2}^{(n-k-1)} + \ldots + C_{n-p}^k A_p \Phi_{k+2}^{(n-k-p)} + \ldots + C_k^k A_{n-k} \Phi_{k+2}\ ] \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ C_{k+q}^q\ z^q\,[C_n^k A_0 \Phi_{k+q+1}^{(n-k)} + C_{n+1}^k A_1 \Phi_{k+q+1}^{(n-k-1)} + \ldots + C_{n-p}^k A_p \Phi_{k+q+1}^{(n-k-p)} + \ldots + C_k^k A_{n-k} \Phi_{k+q+1}] \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \\
&+ C_{n-1}^{n-k-1} z^{n-k-1}\,[C_{n2}^k A \Phi_n^{(n-k)} + C_{n+2}^k A_1 \Phi_n^{(n-k-1)} + \ldots + C_{n-p}^k A_p \Phi_n^{(n-k-p)} + \ldots + C_k^k A_{n-k} \Phi_n\ ] = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\qquad\qquad C_n^0\,[C_n^{n-1} A_0 \Phi'_n + C_n^n A_1 \Phi_n] = 0.
\end{aligned}
$$

En égalant à zéro les coefficients monogènes de chaque puissance de $\bar{z}$, on trouvera les systèmes auxquels devront satisfaire les Φ_i :

$$
(9') \qquad A_0 \Phi_1^{(n)} + A_1 \Phi_1^{(n-1)} + \ldots + A_p \Phi_1^{(n-p)} + \ldots + A_{n-1} \Phi'_1 + A_n \Phi_1 + A_{n+1} = 0;
$$

$$
(9'') \quad \left\{ \begin{aligned}
A_0 \Phi_2^{(n)} + A_1 \Phi_2^{(n-1)} + \ldots + A_p \Phi_2^{(n-p)} + \ldots + A_{n-1} \Phi'_2 + A_n \Phi_2 &= 0, \\
C_n^1 A_0 \Phi_2^{(n-1)} + \ldots + C_{n-p}^1 A_p \Phi_2^{(n-p-1)} + \ldots + C_2^1 A_{n-2} \Phi'_2 + C_1^1 A_{n-1} \Phi_1 &= 0;
\end{aligned} \right.
$$

$$
(9''') \quad \left\{ \begin{aligned}
A_0 \Phi_3^{(n)} + A_1 \Phi_3^{(n-1)} + \ldots + A_p \Phi_3^{(n-p)} + \ldots + A_{n-1} \Phi'_3 + A_n \Phi_3 &= 0, \\
C_n^1 A_0 \Phi_3^{(n-1)} + \ldots + C_{n-p}^1 A_p \Phi_3^{(n-p-1)} + \ldots + C_2^1 A_{n-2} \Phi'_3 + C_1^1 A_{n-1} \Phi_3 &= 0, \\
C_n^2 A_0 \Phi_3^{(n-2)} + \ldots + C_{n-p}^2 A_p \Phi_3^{(n-p-2)} + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_2^2 A_{n-2} \Phi_3 &= 0;
\end{aligned} \right.
$$

$$
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;
$$

$$
(9^q) \quad \left\{ \begin{aligned}
A_0 \Phi_q^{(n)} + A_1 \Phi_q^{(n-1)} + \ldots + A_p \Phi_q^{(n-p)} + \ldots + A_{n+1} \Phi'_q + A_n \Phi_q &= 0, \\
C_n^1 A_0 \Phi_q^{(n-1)} + \ldots + C_{n+p}^1 A_p \Phi_q^{(n-p=1)} + \ldots + C_2^1 A_{n-2} \Phi'_q + C_1^1 A_{n-1} \Phi_q &= 0, \\
C_n^2 A_0 \Phi_q^{(n-2)} + \ldots + C_{n-p}^2 A_p \Phi_q^{(n-p+2)} + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_2^2 A_{n-2} \Phi_q &= 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &, \\
C_n^{q-1} A_0 \Phi_q^{(n-q+1)} + \ldots + C_{n-p}^{q-1} A_p \Phi_q^{(n-p-q+1)} + \ldots + C_{q-1}^{q-1} A_{n-q+1} \Phi_q &= 0;
\end{aligned} \right.
$$

$$
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;
$$

$$
(9^n) \quad \left\{ \begin{aligned}
A_0 \Phi_n^{(n)} + A_1 \Phi_n^{(n-1)} + \ldots + A_p \Phi_n^{(n-p)} + \ldots + A_{n-1} \Phi'_n + A_n \Phi_n &= 0, \\
C_n^1 A_0 \Phi_n^{(n-1)} + \ldots + C_{n-p}^1 A_p \Phi_n^{(n-p-1)} + \ldots + C_2^1 A_{n-2} \Phi'_n + C_1^1 A_{n-1} \Phi_n &= 0, \\
C_n^2 A_0 \Phi_n^{(n-2)} + \ldots + C_{n-p}^2 A_p \Phi_n^{(n-p-2)} + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_2^2 A_{n-2} \Phi_n &= 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
C_n^{n-1} A_0 \Phi'_n + C_n^n A_1 \Phi_n &= 0.
\end{aligned} \right.
$$

Ainsi, le problème de la détermination des solutions polygènes revient à la discussion de ces n systèmes, contenant chacun une seule des n fonctions Φ_i.

$(9')$ détermine la partie monogène Φ_1 de la solution. C'est l'équation (7) elle-même. On voit qu'à cette solution s'ajoutent $n-1$ termes représentant des solutions polygènes de l'équation sans second membre.

On observe que chaque système contient son précédent. Donc, si l'on a trouvé les conditions nécessaires et suffisantes pour que le système ($9''$) admette des solutions non identiquement nulles, tous les systèmes ($9'$) admettront de telles solutions. La solution polygène de (7) sera donc effectivement de degré $n-1$ en $\bar{z}$. Ces conditions s'obtiennent comme précédemment, en intégrant la dernière equation de (9), ce qui est immédiat,

$$\Phi_n = \gamma\, e^{-\int \frac{A_1}{n A_0} dz}$$

et en substituant dans les autres équations de ce système. Elles seront donc au nombre de $n-1$ et fourniront tous les coefficients A_p en fonction de A_0 et A_1 (qui restent arbitraires) et de leurs dérivées. On peut également se contenter d'une solution polygène de degré q en $\bar{z}$ $(q < n)$, ce qui laissera les $(n-q+1)$ premiers coefficients arbitraires et réduira le problème à l'intégration de l'equation d'ordre $(n-q)$

$$C_n^q A_0 \Phi_{q+1}^{(n-q)} + \ldots + C_{n-p}^q A_p \Phi_{q+1}^{(n-p-q)} + \ldots + C_q^q A_{n-q} \Phi_{q+1} = 0$$

qui remplace la dernière équation de (9).

On aura q conditions qui fourniront les coefficients autres que $A_0, A_1, \ldots, A_{n-q}$. On voit donc que l'équation est d'autant plus générale que le degré des solutions en $\bar{z}$, — le degré dont on se contente — est plus petit. Comme précédemment, on obtiendra des solutions monogènes de la même équation en changeant $\bar{z}$ en z. On obtiendra même la solution générale pour l'équation dans laquelle A_0 et A_1 restent seuls arbitraires.

Ainsi la considération des solutions polygènes possibles nous a permis de trouver des classes d'équations lineaires d'ordre n complètement intégrables, dans lesquelles *deux* coefficients restent arbitraires et des classes plus générales pour lesquelles l'ordre peut être rabaissé; mais les solutions qu'on obtient pour celles-ci ne sont pas les solutions générales.

En somme, les équations linéaires qui admettent des solutions polygènes sont des équations *réductibles*.

CHAPITRE IV.

SUR LES ÉQUATIONS NON LINÉAIRES ALGÉBRIQUES.

1. Les applications qui précèdent fournissent des fonctions polygènes assez banales puisque ce sont des polynomes en $\bar{z}$, à coefficients monogènes en z. Ce sont là les seules fonctions polygènes (analytiques ou non) pouvant satisfaire à des équations linéaires d'ordre fini.

Par contre, les équations non linéaires introduisent des fonctions de $\bar{z}$ qui n'ont pas ce caractère élémentaire. Montrons-le d'abord sur un exemple simple. Prenons l'équation, quadratique en y',

$$\mathrm{A}y'' + \mathrm{B}y'^2 + \mathrm{C}y' + \mathrm{D}y + \mathrm{E} = 0. \tag{1}$$

On en déduit, par le procédé déjà employé, les conditions équivalant à (1)

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{A}\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \mathrm{B}\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \mathrm{C}\frac{\partial y}{\partial z} + \mathrm{D}y + \mathrm{E} = 0,\\ &2\mathrm{A}\frac{\partial^2 y}{\partial z\,\partial \bar{z}} + 2\mathrm{B}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}} + \mathrm{C}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = 0,\\ &\mathrm{A}\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \mathrm{B}\left(\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}\right)^2 = 0. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

La dernière condition, que l'on peut appeler une équation aux dérivées aréolaires puisqu'elle ne contient pas $\frac{\partial y}{\partial z}$, montre que les solutions polygènes ne seront plus, ici, des polynomes en $\bar{z}$. Cette équation peut être complètement intégrée, de la même manière que l'équation à coefficients constants

$$au'' + bu'^2 = 0, \tag{3}$$

les fonctions monogènes jouant dans

$$\mathrm{A}\frac{\partial^2 y}{\partial \bar{z}^2} + \mathrm{B}\left(\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}\right)^2 = 0 \tag{2'}$$

le rôle des constantes a et b de (3).

On a, pour (3),

$$u = \frac{a}{b} \mathrm{L}(bx + c) + d.$$

c et d étant des constantes arbitraires.

De même on aura, pour (2′),

$$(4) \qquad y = \frac{\mathrm{A}(z)}{\mathrm{B}(z)} \mathrm{L}[\mathrm{B}(z)z + \Phi_0(z)] + \Phi_1(z).$$

Φ_0 et Φ_1 étant des fonctions arbitraires monogènes en z.

Il reste à satisfaire aux deux autres conditions (2), ce qui déterminera Φ_0 et Φ_1, tout en imposant des conditions pour les coefficients A, B, C, D, E. On a

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\mathrm{A}(z)}{z\,\mathrm{B}(z) + \Phi_0(z)},$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \Phi_1' + \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} \frac{z\mathrm{B}' + \Phi_0'}{z\mathrm{B} + \Phi_0} + \mathrm{L}(z\mathrm{B} + \Phi_0) \frac{d}{dz}\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\right),$$

. . . .

En substituant dans la seconde équation (2), on a, après calcul,

$$[2(\mathrm{A}' + \mathrm{B}\Phi_1') + \mathrm{C}] + 2\mathrm{B}\mathrm{L}(z\mathrm{B} + \Phi_0) \frac{d}{dz}\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\right) = 0.$$

Il s'ensuit nécessairement

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = k = \text{const.}$$

$$\mathrm{A}' + \mathrm{B}\Phi_1' + \frac{\mathrm{C}}{2} = 0,$$

donc

$$\Phi_1 = -\int \frac{\mathrm{C} + 2k\mathrm{B}'}{2\mathrm{B}} dz.$$

La première équation (2) donne

$$\begin{aligned} &k\mathrm{B}\Phi_1'' + \mathrm{B}\Phi_1'^2 + \mathrm{C}\Phi_1' + \mathrm{D}\Phi_1 \\ &\qquad + k^2\mathrm{B}\frac{z\mathrm{B}'' + \Phi_0''}{z\mathrm{B} + \Phi_0} - 2k\mathrm{B}\frac{z\mathrm{B}' + \Phi_0'}{z\mathrm{B} + \Phi_0} + \mathrm{D}k\mathrm{L}(\mathrm{B}z + \Phi_0) + \mathrm{E} = 0. \end{aligned}$$

Il faudra supposer soit $k = 0$, soit $\mathrm{D} = 0$.

En choisissant cette dernière hypothèse, qui ne diminue pas l'ordre de l'équation, on trouve les conditions

$$2k(B'C - BC') - C^2 + 4BE = 0,$$
$$(BB'' - 2B'^2)\Phi_0 + 2BB'\Phi'_0 - B^2\Phi''_0 = 0.$$

La première équation détermine E en fonction de B, C et la constante k, qui restent arbitraires. Rappelons qu'on a

$$A = kB. \qquad D = 0.$$

La seconde équation, déterminant Φ_0, est linéaire et du second ordre. La solution polygène sera donc

$$y = kL[\bar{z}B(z) + \Phi_0(z)] - \int \frac{C + 2kB'}{2B} dz.$$

La solution monogène correspondante sera

$$Y = kL[zB(z) + \Phi_0(z)] - \int \frac{C + 2kB'}{2B} dz.$$

2. La classe générale des équations différentielles algébriques en y et ses dérivées, jouit de la propriété de conduire à un *nombre fini* de conditions en δ et ρ. Soit

$$(5) \qquad A(z) + P_0^{\alpha_0}(y) + P_1^{\alpha_1}(y') + \ldots + P_n^{\alpha_n}[y^{(n)}] = 0$$

une équation d'ordre n, les polynomes $P_i^{\alpha_i}$ étant respectivement de degré α_i par rapport aux dérivées $y^{(i)}$, et à coefficients monogènes en z. Soit α le plus grand des nombres α_i. Il est clair que, après avoir remplacé les $y^{(i)}$ par

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + e^{-2i\varphi}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^{(i)} y,$$

on aura une équation algébrique en $e^{-2i\varphi} = \mu$, de degré $n\alpha$ au plus. Le nombre des conditions équivalent à (5) sera donc égal à $n\alpha$, ou plus petit.

Il est possible que l'une de ces conditions ne contienne que des dérivées par rapport à $\bar{z}$ seulement; ce sera une équation aux dérivées aréolaires. Dans ce cas, on intégrera cette équation comme une équation à coefficients constants, en remplaçant les constantes d'intégration par des fonctions arbitraires, monogènes en z. Ayant ainsi précisé la forme de la solution comme fonction de $\bar{z}$, la substitution dans les autres équations de condition fournira les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence des solutions polygènes, et déterminera les fonctions monogènes restées arbitraires. Enfin, la substitution de z à $\bar{z}$ fournira des solutions monogènes de la même équation (5).

Il est facile de trouver la forme générale des équations différentielles algébriques conduisant à des équations aux dérivées aréolaires. Soit

$$P_q^{\alpha_q}[y^{(q)}] = \sum_{j=1}^{\alpha_q} A_j^{\alpha_q}(z)\,[y^{(q)}]^j.$$

La seule dérivée aréolaire $\left(\text{non mixte, en appelant dérivée mixte une dérivée telle que } \frac{\partial^{p+q} y}{\partial z^p\,\partial \bar{z}^q}\right)$, figurant dans $y^{(q)}$ est $\frac{\partial^q y}{\partial \bar{z}^q}$, ayant pour coefficient μ^q. Le groupe $P_q^{\alpha_q}$ fournira donc, comme termes contenant seulement des dérivées aréolaires,

$$\sum_{j=1}^{\alpha_q} A_j^{\alpha_q}(z)\left[\frac{\partial^q y}{\partial \bar{z}^q}\right]^j \mu^{jq}$$

On obtient les conditions en δ et ρ en annulant les puissances successives de μ. Pour obtenir une équation aux dérivées aréolaires, il faudra donc grouper ensemble les termes

$$A_j^{\alpha_q}(z)\left[\frac{\partial^q y}{\partial \bar{z}^q}\right]^j$$

tels que

$$qj = k = \text{const.}$$

De plus, pour que des dérivées mixtes, comme $\frac{\partial^{p+q} y}{\partial z^p\,\partial \bar{z}^q}$, *ne s'ajoutent pas aux autres, il faudra que, si k est divisible par un nombre $q_1 < n$, des termes de degré $j = \frac{k}{q_1}$ ne figurent ni dans $P_q^{\alpha_q}$, ni dans $P_i^{\alpha_i}$ pour $i > q_1$.*

En effet, à partir de $i = q + 1$, toutes les dérivées $y^{(i)}$ contiennent μ^{q_1} comme coefficient d'une dérivée mixte; donc, si tous les termes de degré $j = \frac{k}{q_1}$ ne sont pas nuls dans les $P_i^{\alpha_i}$, $i > q_1$, des dérivées mixtes s'introduiront avec les dérivées aréolaires.

3. Nous avons envisagé, plus haut, des équations algébriques en y et ses dérivées, en montrant que ces équations conduisent à un nombre fini de conditions en δ et ρ. Or, on voit facilement que cette hypothèse peut être levée quant à y. On peut considérer des équations algébriques en y', y'', ..., $y^{(n)}$, dont les coefficients soient analytiques en z et y, mais non nécessairement algébriques. Ces équations conduisent également à un nombre fini de conditions en δ et ρ. Pour montrer la possibilité de ce cas, et pour faire l'étude complète des équations du second ordre admettant des solutions polygènes — qui rentrent toutes dans le type suivant, comme nous le verrons plus tard — nous prendrons un exemple qui n'est que la généralisation du cas traité au n° 1. Soit [1]

$$y'' + A(z, y)y'^2 + B(z, y)y' + C(z, y) = 0 \tag{6}$$

une équation non linéaire quadratique en y', et dont les coefficients sont analytiques en z et y. Elle équivaut au système

$$(6')\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + A\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + B\frac{\partial y}{\partial z} + C = 0,\\ &2\frac{\partial^2 y}{\partial z\, \partial \bar{z}} + 2A\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}} + B\frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = 0,\\ &\frac{\partial^2 y}{\partial \bar{z}^2} + A\left(\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}\right)^2 = 0.\end{aligned}\right.$$

La dernière équation peut encore être intégrée facilement, en considérant z et $\bar{z}$ comme des variables indépendantes

$$\frac{\dfrac{\partial^2 y}{\partial \bar{z}^2}}{\dfrac{\partial y}{\partial \bar{z}}} = -A(z, y)\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}$$

---

[1] Nous avons esquissé la marche des calculs qui suivent, dans une Note insérée aux *Comptes rendus*, t. 186, 1928, p. 1406.

ou

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\mathrm{L}\,\frac{\partial y}{\partial z}\right) = -\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\int_0^y \mathrm{A}(z,\, s)\,ds,$$

$$\frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \Phi_1(z)\,e^{-\int_0^y \mathrm{A}(z,\,s)\,ds},$$

$$\bar{z}\,\Phi_1(z) + \Phi_2(z) = \int_0^y e^{\int_0^t \mathrm{A}(z,\,s)\,dz}\,dt = \mu(z,\, y). \tag{7}$$

Ainsi, les solutions polygènes de (6) s'obtiennent en déterminant d'abord $\mu(z, y)$ à l'aide de deux quadratures à partir de $\mathrm{A}(z, y)$, et en résolvant (7) par rapport à y. Deux fonctions arbitraires monogènes en z, Φ_1 et Φ_2, s'introduiront ainsi.

Pour préciser la forme de la solution, et pour trouver les conditions auxquelles les coefficients A, B, C doivent satisfaire, on peut procéder par substitution, comme précédemment; mais nous suivrons une autre voie, susceptible de s'appliquer à un cas plus général, et demandant des calculs moins laborieux.

Observons que le système (6′) contient 3 équations reliant les 3 dérivées partielles du second ordre de y à ses dérivées d'ordre inférieur, et à y. En résolvant par rapport à ces 3 dérivées du second ordre et en formant, de deux manières, les dérivées du troisième ordre $\delta\rho^2$ et $\delta^2\rho$, on pourra écrire deux relations nouvelles qui devront être vérifiées pour que les solutions polygènes existent.

On a ici, à partir des deux dernières équations (6′),

$$\delta^2\rho + 2\,\mathrm{A}.\delta.\delta\rho + (\delta)^2\,\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y}\,\rho + \mathrm{B}.\delta\rho + \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial y}\,\delta.\rho + \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial y}\,\rho = 0,$$

$$2\,\delta^2\rho + 2\,\mathrm{A}.\delta.\delta\rho + 2\,\mathrm{A}.\delta^2.\rho + 2\left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial z} + \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y}\,\delta\right)\delta.\rho + \mathrm{B}.\delta\rho + \left(\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial z} + \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial y}\,\delta\right)\rho = 0,$$

d'où en éliminant $\delta^2\rho$ et en remplaçant les dérivées du second ordre $\delta\rho$ et ρ^2 par leurs valeurs données par (6′),

$$\mathrm{B}^2 - 4\,\mathrm{AC} = 4\,\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial y} - 2\,\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial z}.$$

De même, en partant des deux premières équations (6′),

$$\delta\rho^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial A}{\partial y}\delta\right)(\rho)^2 + 2A.\rho.\delta\rho = 0,$$

$$2\,\delta\rho^2 + 2\frac{\partial A}{\partial y}\delta(\rho)^2 + 2A.\delta.\rho^2 + 2A.\rho.\delta\rho + B.\rho^2 + \frac{\partial B}{\partial y}(\rho)^2 = 0,$$

d'où

$$2\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial B}{\partial y}.$$

Ces relations sont nécessaires et suffisantes pour que les solutions polygènes existent, à moins que, les relations n'étant pas vérifiées identiquement, une fonction polygène définie implicitement par ces deux relations satisfasse à l'équation donnée ; mais c'est là un cas singulier que nous laisserons de côté.

On voit donc que les coefficients gardent beaucoup d'arbitraire. On doit avoir

$$\frac{\partial B}{\partial y} = 2\frac{\partial A}{\partial z}$$

et, dans ces conditions, C est donnée par deux quadratures par rapport à y, car cette fonction satisfait à l'équation linéaire du premier ordre

$$\frac{\partial C}{\partial y} + A.C - \frac{1}{4}\left(B^2 + 2\frac{\partial B}{\partial z}\right) = 0.$$

La constante arbitraire qui s'introduira ici pourra être remplacée par une fonction monogène de z quelconque. On aura

$$C = e^{-\int A\,dy}\left[\Phi(z) + \frac{1}{4}\int\left(B^2 + 2\frac{\partial B}{\partial z}\right)e^{\int A\,dy}\,dy\right].$$

Observons que l'on a

$$A = \frac{\partial\omega}{\partial y}, \qquad B = 2\frac{\partial\omega}{\partial z}$$

en vertu de

$$\frac{\partial B}{\partial y} = 2\frac{\partial A}{\partial z}.$$

Il s'ensuit

$$C = e^{-\omega}\left\{\Phi + \int\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2 + \frac{\partial^2\omega}{\partial z^2}\right]e^{\omega}\,dy\right\}.$$

$\omega(z, y)$ étant ici une fonction arbitraire analytique en z et y, et $\Phi(z)$ étant une fonction analytique arbitraire. L'équation (6) s'écrit donc

$$y'' + \frac{\partial\omega}{\partial y} y'^2 + 2\frac{\partial\omega}{\partial z} y' + e^{-\omega}\left\{\Phi + \int\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2 + \frac{\partial^2\omega}{\partial z^2}\right] e^{\omega}\, dy\right\} = 0,$$

les solutions polygènes étant données par

$$\bar{z}\Phi_1 + \Phi_2 = \int e^{\omega(z, y)}\, dy = \mu(z, y).$$

On a, en dérivant par rapport à z,

$$\bar{z}\Phi'_1 + \Phi'_2 = \frac{\partial\mu}{\partial z} + e^{\omega}\frac{\partial y}{\partial z},$$

$$\bar{z}\Phi''_1 + \Phi''_2 = \frac{\partial^2\mu}{\partial z^2} + 2e^{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial z}\frac{\partial y}{\partial z} + e^{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + e^{\omega}\frac{\partial^2 y}{\partial z^2},$$

donc

$$\frac{\partial y}{\partial z} = e^{-\omega}\left[\bar{z}\Phi'_1 + \Phi'_2 - \frac{\partial\mu}{\partial z}\right],$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = e^{-\omega}\left[\bar{z}\Phi''_1 + \Phi''_2 - \frac{\partial^2\mu}{\partial z^2} - \mathrm{B}\left(\bar{z}\Phi'_1 + \Phi'_2 - \frac{\partial\mu}{\partial z}\right) - \mathrm{A}\left(\bar{z}\Phi'_1 + \Phi'_2 - \frac{\partial\mu}{\partial z}\right)^2\right]$$

De même, en dérivant par rapport à $\bar{z}$,

$$\Phi_1 = e^{\omega}\frac{\partial y}{\partial\bar{z}}$$

et

$$\Phi'_1 = e^{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial z}\frac{\partial y}{\partial\bar{z}} + e^{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial y}{\partial z} + e^{\omega}\frac{\partial^2 y}{\partial z\,\partial\bar{z}},$$

donc

$$\frac{\partial y}{\partial\bar{z}} = e^{-\omega}\Phi_1, \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial z\,\partial\bar{z}} = e^{-\omega}\Phi'_1 - \frac{\mathrm{B}}{2}e^{-\omega}\Phi_1 - \mathrm{A}\,e^{-2\omega}\Phi_1\left(\bar{z}\Phi'_1 + \Phi'_2 - \frac{\partial\mu}{\partial z}\right).$$

En remplaçant dans les deux premières équations de (6′), on a

$$\Phi'_1 = 0, \qquad \Phi''_2 + \Phi = 0;$$

donc

$$\Phi_1 = \alpha, \qquad \Phi_2 = \beta z + \gamma - \int_0^z (z - s)\,\Phi(s)\,ds.$$

En définitive, les solutions polygènes seront obtenues en résolvant

$$\alpha\bar{z} + \beta z + \gamma = \mu(z, y) = \int_0^y e^{\omega(z, s)}\, ds$$

par rapport à y. Elles contiendront donc *trois* constantes arbitraires α, β, γ. La substitution de $z - C$ à $\bar{z}$ nous offre les solutions monogènes de (6) qui, elles, ne contiendront que deux constantes arbitraires distinctes, comme l'exige l'ordre de l'équation, égal à deux. Les solutions monogènes que l'on obtient ainsi sont donc les solutions générales.

Pour prendre un cas particulier, soit

$$A = \frac{cz + d}{y}, \qquad B = 2c\,\mathrm{L}y.$$

On trouve, en prenant $\Phi = 0$,

$$C = \frac{c^2 y}{(cz + d + 1)^3}\left\{1 + [1 - (cz + d + 1)\mathrm{L}y]^2\right\}.$$

la solution polygène étant donnée par

$$\frac{y^{cz+d+1}}{cz + d + 1} = \frac{\bar{z}}{cz + d} + k.$$

On a fait ici $\Phi_2 = k = \text{const}$.

Le cas particulier $c = 0$, $d = 1$, qui donne

$$yy'' + y'^2 = 0$$

avec les solutions

$$\begin{array}{ll} y = \sqrt{2\bar{z} + k} & \text{polygène,} \\ Y = \sqrt{2z + k} & \text{monogène,} \end{array}$$

est facile à vérifier. Un autre exemple est

$$y'' = y'^2\left(\frac{6y^2 - \frac{g_2}{2}}{4y^3 - g_2 y - g_3} - \frac{1}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g^3}}\right)$$

dont l'intégrale générale monogène est ([1])

$$Y = \wp^2[\mathrm{Log}(Az + B);\, g_2,\, g_3]$$

([1]) *Voir* E. Goursat. *Cours d'Analyse*, vol. II, 3e édition, p. 537.

et qui rentre dans le cas examiné plus haut. L'intégrale polygène est ici la fonction antimonogène qu'on obtient en remplaçant z par $\bar{z}$.

4. La facilité relative des calculs, dans l'exemple qui précède, est due surtout à la présence d'une équation aux dérivées aréolaires. On peut se demander si les solutions polygènes ont le même degré de généralité que les solutions monogènes, dont l'existence est assurée par le théorème de Cauchy. Après les exemples que nous avons donnés, il est clair que la réponse à cette question est négative.

En effet, la solution monogène sera en général la seule fonction de la variable complexe z (au sens général) pouvant satisfaire à l'équation différentielle. La solution polygène existera lorsque certaines relations existeront entre les coefficients; ces relations, plus ou moins restrictives, rendront compatible le système en δ et ρ.

On pourra affirmer que les solutions polygènes n'existent pas, toutes les fois que l'équation

$$\rho[y] = 0$$

est une conséquence de ce système, et toutes les fois que ce système est incompatible.

Observons, par exemple, que toutes les équations du premier ordre excluent les solutions polygènes.

On a en effet

$$0 = \mathrm{F}(z, y, y') = \mathrm{F}\left(z, y, \frac{\partial y}{\partial z} + \mu \frac{\partial y}{\partial \bar{z}}\right).$$

Il faut, μ étant arbitraire, que son coefficient soit nul

$$\frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = 0, \qquad y = \Phi(z).$$

On peut, cependant, trouver des solutions monogènes de telles équations par le procédé suivant : on substitue $u^{(p)}$ à y dans une équation du premier ordre, ce qui donne une équation d'ordre $(p+1)$. Cette équation peut admettre des solutions polygènes que l'on détermine. On change $\bar{z}$ en z et l'on dérive p fois la solution obtenue. On trouve ainsi une solution monogène de l'équation du premier ordre.

Ce procédé permet de rattacher certaines équations de Riccati à l'équation non linéaire étudiée au début de ce Chapitre. Soit

$$y' = A_0 + A_1 y + A_2 y^2.$$

Cette équation, étant du premier ordre, ne saurait admettre des solutions non monogènes. Posons $y = u'$. Elle devient

$$u'' = A_0 + A_1 u' + A_2 u'^2$$

qui rentre dans le type déjà étudié

$$A y'' + B y'^2 + C y' + D y + E = 0$$

avec

$$A = 1, \qquad B = -A_2, \qquad C = -A_1, \qquad D = 0, \qquad E = -A_0.$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence des solutions polygènes deviennent

$$-1 = k A_2 \qquad (\text{avec } k = \text{const.}),$$
$$2k(A_2' A_1 - A_2 A_1') - A_1^2 + 4 A_2 A_0 = 0,$$
$$(A_2 A_2'' - 2 A_2'^2)\Phi_0 + 2 A_2 A_2' \Phi_0' - A_2^2 \Phi_0'' = 0$$

ou

$$A_2 = -\frac{1}{k},$$

$$2A_1' - A_1^2 - 4\frac{A_0}{k} = 0, \qquad \Phi_0'' = 0$$

ou encore

$$A_2 = -\frac{1}{k}, \qquad A_0 = \frac{1}{2} k A_1' - \frac{1}{4} k A_1^2, \qquad \Phi_0 = \alpha z + \beta.$$

et la solution polygène est

$$\begin{aligned} y &= k\mathrm{L}\left[\alpha z + \beta + \frac{\bar{z}}{k}\right] + \int \frac{A_1 k}{2}\, dz \\ &= k\mathrm{L}\left[\alpha z + \frac{\bar{z}}{k} + \beta\right] + \frac{k}{2}\int A_1\, dz, \end{aligned}$$

la solution monogène étant

$$Y = k\mathrm{L}(\alpha' z + \beta') + \frac{k}{2}\int A_1\, dz;$$

donc

$$Y_1 = \frac{dY}{dz} = \frac{k\alpha'}{\alpha' z + \beta'} + \frac{k}{2} A_1$$

satisfera à l'équation de Riccatti

$$y' = \left(\frac{1}{2}kA'_1 - \frac{1}{4}kA_1^2\right) + A_1 y - \frac{1}{k}y^2,$$

ce que l'on vérifie facilement.

CHAPITRE V.

SUR L'ORDRE DE GÉNÉRALITÉ DES ÉQUATIONS A INTÉGRALES POLYGÈNES.

---

1. Nous nous posons, au Chapitre précédent, une question sur l'ordre de généralité des équations qui admettent des solutions polygènes. Cette question est intéressante parce qu'elle précise l'importance des fonctions polygènes dans l'étude des équations différentielles. Il convient donc, pour arriver à une conclusion, d'examiner le cas général des équations non linéaires.

Remarquons d'abord que *toute* fonction polygène analytique, dépendant de plusieurs paramètres arbitraires, peut être regardée comme une solution polygène d'une certaine équation différentielle. Il suffit, pour établir cela, de refaire le raisonnement concernant les fonctions de z et de plusieurs paramètres. Considérons d'abord une fonction ne contenant aucun paramètre

$$y = \Phi(z, \bar{z}).$$

On aura

$$(1) \qquad y' = \Phi'_z + \mu\Phi'_{\bar{z}}, \qquad y'' = \Phi''_{z^2} + 2\mu\Phi''_{z\bar{z}} + \mu^2\Phi''_{\bar{z}^2}.$$

En éliminant μ et $\bar{z}$ entre ces trois équations, on obtiendra une équation monogène en z, y, y', y''

$$\Phi_1(z, y, y', y'') = 0,$$

dont y est une solution polygène.

Il est facile de voir, par les calculs qui effectuent cette élimination, que l'équation ainsi obtenue est linéaire en y'' et quadratique en y'. Le même résultat sera obtenu en partant de $\Phi(z, \alpha\bar{z} + \beta)$ où α et β sont des constantes arbitraires. Remarquons, pour l'instant, que toute équation admettant une ou plusieurs solutions polygènes est au moins du second ordre. D'ailleurs, nous avons établi, au Chapitre précédent, que les équations du premier ordre n'admettent jamais des solutions polygènes. Insistons sur ce fait que l'équation $\Phi_1 = 0$ obtenue est monogène en z, y, y', y'' ; nous entendons par cela que la fonction Φ_1 est monogène par rapport à chacune de ces variables. On pourrait former également une équation polygène en z et monogène en y, y', en éliminant μ entre les deux équations (1) et en laissant subsister $\bar{z}$.

Considérons

$$y = \Phi(z, \bar{z}, C)$$

et formons

$$(2) \qquad \begin{cases} y' = \Phi'_z + \mu\Phi'_{\bar{z}}, \qquad y'' = \Phi''_{z^2} + 2\mu\Phi''_{z\bar{z}} + \mu^2\Phi''_{\bar{z}^2}, \\ \qquad y''' = \Phi'''_{z^3} + 3\mu\Phi'''_{z^2\bar{z}} + 3\mu^2\Phi'''_{z\bar{z}^2} + \mu^3.\Phi'''_{\bar{z}^3}. \end{cases}$$

L'élimination de μ, $\bar{z}$, C entre les quatre équations [1] nous fournira une équation du troisième ordre admettant y comme solution polygène, quelle que soit la valeur de C. Le résultat est le même si l'on part de $\Phi(z, \alpha\bar{z} + \beta, C)$.

Le raisonnement est général et permet d'établir que *toute fonction polygène analytique, contenant k paramètres arbitraires, est intégrale polygène d'une équation monogène du $(k + 2)^{\text{ième}}$ ordre au moins.*

On voit donc que, de ce point de vue, les fonctions polygènes analytiques égalent en importance les fontions monogènes analytiques [2].

Toute fonction de notre classe, comme toute fonction monogène, est attachée à une ou plusieurs équations différentielles.

2. On peut se poser la question de la façon inverse, et ce point de

---

(1) On considère, pendant cette élimination, $\bar{z}$ comme indépendant de z, ce qui n'empêche pas d'obtenir une fonction y convenable, qui peut, d'ailleurs, ne pas être la seule convenable.

(2) Il est correct d'employer cette nomination qui n'implique aucun pléonasme, comme M. Borel l'a montré.

vue ne conduit pas au même résultat. Cauchy a démontré, en effet, que toute équation monogène, mise sous la forme canonique, admet une famille de solutions monogènes. Or, nous savons déjà que toute équation monogène n'accorde pas la même hospitalité, si l'on peut dire, aux fonctions polygènes. Les équations monogènes (et même les équations polygènes en z) qui admettent des solutions polygènes sont des équations d'une classe particulière. On a vu, en effet, que les solutions polygènes imposent toujours certaines conditions concernant la forme de l'équation différentielle. Il est intéressant, dès lors, de savoir reconnaître si une équation donnée admet ou non des solutions polygènes; mais c'est là un problème dont la complication, en général, empêche d'aboutir à un critère pratique.

SUR L'INTEGRATION DE CERTAINES CLASSES D'EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

Nous ferons ici quelques remarques sur un type particulier d'équations différentielles. Considérons les équations d'ordre n qui, résolues par rapport à $y^{(n)}$, se présentent sous la forme

$$(\mathrm{B}) \qquad y^{(n)} = \mathrm{P}[z, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}],$$

où P est un polynome par rapport à $y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$, dont les coefficients sont monogènes en z et y, sans être nécessairement algébriques. De plus, soit

$$\mathrm{A}(z, y)[y']^{q_1}[y'']^{q_2}\ldots[y^{(n-1)}]^{q_{n-1}}$$

un terme homogène de ce polynome. Nous appellerons *poids* de ce terme la quantité

$$\mathrm{P} = q_1 + 2q_2 + 3q_3 + \ldots + (n-1)q_{n-1}.$$

Le *poids d'un polynome* tel que P sera le plus grand poids réalisé par ses termes. Cela étant dit, nous considérerons les équations (B) telles que le poids du second membre soit $\leqq n$. Nous dirons alors que l'équation est du type (B). Observons que toute équation du type (B) conduit à une équation aux dérivées aréolaires au moins. Car les termes de degré maximum en μ étant, dans chaque dérivée $y^{(m)}$, de la forme $\mu^m \frac{\partial^m y}{\partial \bar{z}^m}$, il est clair que l'équation obtenue en annulant le coefficient de μ^n dans (B), ne peut contenir aucune dérivée mixte, ni aucune dérivée par rapport à z. Donc, c'est une équation aux dérivées aréolaires. Ainsi, la circonstance simplificatrice sur laquelle nous avons insisté au n° 2 du Chapitre IV, se présente toujours pour les équations du type (B).

Toutes les fois que le poids du second membre est $< n$, on voit facilement que cette équation aux dérivées aréolaires se réduit à

$$\frac{\partial^n y}{\partial \bar{z}^n} = 0,$$

ce qui montre que la solution est un polynome de degré $(n-1)$ en $\bar{z}$, comme pour les équations linéaires.

Pour se convaincre de l'existence effective des solutions polygènes pour une équation donnée, il faudra vérifier que certaines relations nécessaires existent bien entre les coefficients de l'équation. Nous ne tâcherons pas de préciser ces relations dans le cas général, ces conditions étant assez compliquées. Mais nous avons une méthode générale nous permettant d'écrire toutes les relations nécessaires et suffisantes qui doivent être imposées aux coefficients d'une équation du type (B) pour que cette équation possède effectivement des solutions polygènes.

Il est clair que l'équation générale d'ordre n et de poids $\leqq n$ est équivalente à un système (S_1) d'équations aux dérivées partielles (par rapport à z et $\bar{z}$ qui devront être regardées comme des variables indépendantes). Ce système s'obtient en annulant toutes les puissances de μ dans (B), donc il contient $(n+1)$ équations qui se trouvent déjà resolues par rapport aux dérivées partielles d'ordre n de y. Chaque couple d'équations consécutives permettra d'écrire une relation nouvelle, en calculant de deux manières différentes certaines dérivées d'ordre $(n+1)$ de y. On obtient ainsi n relations dans lesquelles on peut remplacer les dérivées d'ordre n par leurs valeurs données par le système (S_1). On a donc n relations contenant les dérivées d'ordre $(n-1)$ de y, ainsi que ses dérivées d'ordre inférieur et qui forment un système (S_2). En supposant que la résolution de ce nouveau système soit possible, les mêmes calculs se continueront en permettant d'obtenir un système (S_1), et ainsi de suite. Si le processus ne se trouve pas arrêté, on arrivera à deux équations donnant les dérivées partielles de y en fonction de z et de y; ce sera donc un système (S_n) du premier ordre qui nous permettra de former une dernière condition d'intégrabilité. Elle devra être une identité. Sinon, la fonction implicite qu'elle définit devra vérifier toutes les relations précédentes et fournir une solution polygène de l'équation (B); mais ce cas est tout à fait exceptionnel, sans être impossible *a priori*. On a ainsi une première condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une fonction y satisfaisant à (S_n). En remplaçant les valeurs des dérivées $\frac{\partial y}{\partial z}$ et $\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}$, fournies par (S_n) dans (S_{n-1}), on aura $\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial z\, \partial \bar{z}}$ et $\frac{\partial^2 y}{\partial \bar{z}^2}$ en fonction de z et y. Deux nouvelles conditions nécessaires et suffisantes s'introduiront pour que y puisse être déterminé. En continuant ainsi, on remontera au système (S_1), qui sera compatible après la formation de $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ conditions nécessaires et suffisantes. Il n'est pas sûr que toutes ces conditions sont distinctes, et en fait, il n'en est pas ainsi pour les exemples que nous avons traités. Car, pour ces exemples, le procédé indiqué plus haut ne peut pas se continuer au delà des dérivées premières, ce qui fait que le nombre de conditions nécessaires et suffisantes est moindre. Ainsi, pour l'équation linéaire du second ordre, qui devrait nécessiter — théoriquement — trois conditions, il suffit d'écrire une seule relation entre les coefficients pour que les solutions polygènes apparaissent.

Ce procédé nous permettra de trouver, d'une façon symétrique, les conditions précises qui nous sont nécessaires pour décider si une équation donnée admet ou non des solutions polygènes.

2. Le théorème (A) (Chap. III), qui domine notre étude, est susceptible de nous offrir certaines facilités pour l'intégration — au sens ordinaire — des équations envisagées. En effet, de l'analyse qui précède, résulte l'existence d'une classe assez large d'équations différentielles pour lesquelles — même si l'on se refuse à accorder aux solutions polygènes un intérêt philosophique — on a une méthode de

déduire des intégrales monogènes ou de réduire ce problème à l'intégration d'équations plus simples.

Pour jeter un coup d'œil critique, remarquons que les solutions polygènes d'une équation différentielle ont ceci d'artificiel que, dans toutes les dérivées

$$y^{(m)} = \left(\frac{\partial}{\partial z} + \mu \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^{(m)} y,$$

que l'on introduit dans cette équation, on donne à μ une même valeur, ce qui n'est pas nécessaire *a priori*. D'autre part, si chaque dérivée introduisait une quantité μ indépendante des autres, il est clair que les solutions polygènes deviendraient tout à fait exceptionnelles. Mais on peut varier les relations que l'on introduit entre les μ successifs et généraliser ainsi la notion de solution polygène. On voit facilement (par exemple, sur l'équation linéaire du second ordre), que l'on obtient ainsi de nouvelles classes d'équations à solutions polygènes. Le théorème (A), permettant d'en déduire des solutions monogènes des mêmes équations, s'appliquera sans modification.

Bornons-nous au sens primitif des solutions polygènes et à la classe (B) précédemment définie.

Du point de vue pratique, celui des intégrales de l'équation considérées le long de l'axe réel, il est clair que les solutions polygènes ne peuvent nous offrir rien de plus que les solutions monogènes. En effet, ces solutions sont analytiques en z et en $\bar{z}$; donc, les fonctions qu'elles nous définissent sur Ox sont également des fonctions analytiques de x.

Par contre, l'intérêt pratique que les solutions polygènes pourront présenter sera celui de nous faciliter la recherche des solutions monogènes. Or, on a vu que les solutions polygènes nous fournissent immédiatement des solutions monogènes par une substitution linéaire.

La recherche des solutions polygènes présente-t-elle des facilités particulières, au moins dans des cas spéciaux?

Cette recherche sera sensiblement facilitée, pour la classe (B), par le fait que l'on est toujours conduit à intégrer une équation aux dérivées aréolaires. Si l'équation donnée admet effectivement des solutions polygènes, il suffira, pour avoir leur forme générale en $\bar{z}$, d'intégrer une équation aux dérivées aréolaires.

3. Or, ce problème est toujours plus facile que celui d'intégrer l'équation donnée. En effet, soit

$$(8) \qquad \frac{\partial^n y}{\partial \bar{z}^n} = \sum A_{p_1, q_1; p_2, q_2; \ldots; p_s, q_s}(z, y) \left[\frac{\partial^{p_1} y}{\partial \bar{z}^{p_1}}\right]^{q_1} \left[\frac{\partial^{p_2} y}{\partial \bar{z}^{p_2}}\right]^{q_2} \cdots \left[\frac{\partial^{p_s} y}{\partial \bar{z}^{p_s}}\right]^{q_s}$$

une équation aux dérivées aréolaires.

Pour intégrer cette équation, on considérera z comme un paramètre et l'on remarquera que $\bar{z}$, la véritable variable indépendante, ne figure pas dans cette équation. On prendra donc $\bar{z}$ comme fonction et y comme variable, et l'ordre de l'équation sera ainsi rabaissé d'une unité. Si la nouvelle équation peut être intégrée complètement, on aura

$$\bar{z} = F(y, z)$$

qui, résolue par rapport à y, donnera la solution de (8).

Ceci n'est que la généralisation de ce que nous avons fait pour le cas du second ordre, n° 3 (Chap. IV). Donc, la méthode offre *toujours* cette facilité, pour la classe (B) et, généralement, pour les équations satisfaisant aux conditions du n° 2 (Chap. IV).

Remarquons que les n constantes arbitraires que y contiendra après l'intégration de (8), devront être considérées comme fonctions monogènes de z. Elles seront déterminées ensuite, par substitution directe dans le système (S_1) correspondant à l'équation envisagée.

Ces applications font voir que les fonctions polygènes jouent un rôle dans le problème de l'intégration de certaines classes d'équations différentielles et que leur étude permet parfois d'apporter une simplification réelle à ce problème, ainsi qu'à des problèmes de natures très variées concernant les transformations ponctuelles.

Vu et approuvé :
Paris, le 8 juin 1928.
LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
C. MAURAIN.

Vu et permis d'imprimer :
Paris, le 8 juin 1928.
LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
S. CHARLETY.

INDEX.