LÉON POMEY

Mémoire sur les équations intégro-différentielles et intégrales linéaires et non linéaires à une ou plusieurs variables

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1924

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1924__44__1_0>

N° D'ORDRE :
1785

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. LÉON POMEY
Ingénieur des Manufactures de l'État,
Ex-répétiteur à l'École Polytechnique

1re THÈSE. — SUR LES ÉQUATIONS INTÉGRO-DIFFÉRENTIELLES.
2e THÈSE. — SUR LE DERNIER THÉORÈME DE FERMAT.

Soutenues le 1924, devant la Commission d'examen.

MM. GOURSAT, *Président.*
MONTEL, CAHEN, } *Examinateurs.*

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, EDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ECOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1924

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

	MM.	
Doyen	MOLLIARD,	Professeur de Physiologie végétale.
Doyen honoraire	P. APPELL.	
Professeurs honoraires.	P. PUISEUX, Ch. VELAIN, BOUSSINESQ et PRUVOT.	
Professeurs	ÉMILE PICARD	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
	KŒNIGS	Mécanique physique et expérimentale.
	GOURSAT	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	HALLER	Chimie organique.
	JOANNIS	Chimie (Enseignement P. C. N.).
	JANET	Électrotechnique générale.
	WALLERANT	Minéralogie.
	ANDOYER	Astronomie.
	PAINLEVE	Mécanique analytique et Mécanique céleste.
	HAUG	Géologie.
	H. LE CHATELIER	Chimie générale.
	GABRIEL BERTRAND	Chimie biologique.
	Mme P. CURIE	Physique générale et radioactivité.
	CAULLERY	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
	C. CHABRIÉ	Chimie appliquée.
	G. URBAIN	Chimie minérale.
	ÉMILE BOREL	Calcul des probabilités et Physique mathém.
	MARCHIS	Aviation.
	JEAN PERRIN	Chimie physique.
	ABRAHAM	Physique.
	CARTAN	Mécanique rationnelle.
	CL. GUICHARD	Géométrie superieure.
	LAPICQUE	Physiologie.
	GENTIL	Géographie physique.
	VESSIOT	Théorie des groupes et Calcul des variations.
	COTTON	Physique générale.
	DRACH	Application de l'Analyse à la Géométrie.
	C. FABRY	Physique.
	CHARLES PÉREZ	Zoologie.
	LÉON BERTRAND	Géologie appliquée et Géologie régionale.
	LESPIEAU	Théories chimiques.
	LEDUC	Physique théorique et Physique céleste.
	RABAUD	Biologie expérimentale.
	PORTIER	Physiologie comparée.
	DANGEARD	Botanique.
	MONTEL	Mathématiques générales.
	MAURAIN	Physique du globe.
	WINTREBERT	Anatomie et Physiologie comparées.
	DUBOSCQ	Biologie maritime.
	HEROUARD	Zoologie.
	REMY PERRIER	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
	SAGNAC	Physique théorique et Physique céleste.
	BLAISE	Chimie organique.
	PECHARD	Chimie (Enseignement P. C. N.).
	AUGER	Chimie analytique.
	M. GUICHARD	Chimie minérale.
	GUILLET	Physique.
	JULIA	Matoématiques générales.
	MAUGUIN	Minéralogie.
	BLARINGHEM	Botanique.
	MICHEL-LEVY	Pétrographie.
Secrétaire	D. TOMBECK.	

72147-24 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS ET Cie, quai des Grands-Augustins, 55.

A MON PÈRE ET MON MAITRE

MONSIEUR ÉTIENNE POMEY

A MA MÈRE

PREMIÈRE THÈSE

MÉMOIRE

SUR LES

ÉQUATIONS INTÉGRO-DIFFÉRENTIELLES

ET

INTÉGRALES LINÉAIRES ET NON LINÉAIRES

A UNE OU PLUSIEURS VARIABLES

Introduction.

Ce Mémoire a pour objet l'étude des équations intégro-différentielles appartenant au type général (I) indiqué plus loin (§ 1), où la fonction inconnue d'un nombre fini quelconque de variables complexes figure linéairement a l'extérieur d'un symbole d'intégration multiple et à des puissances entières ($\geqq 0$), ainsi que certaines de ses dérivées partielles, sous ce symbole.

Pour exprimer la solution d'une telle équation, nous considérons *a priori* un développement en série pour lequel la dénomination de « Développement synthétique à termes récurrents » paraît justifiée par ce double fait : ses termes se déduisent très simplement les uns des autres grâce au mode de multiplication des séries par la règle de

Cauchy-Mertens et sa structure montre dès l'abord, d'une façon intuitive, qu'il constitue une *solution* tout au moins *formelle*. Il suffit ensuite de prouver sa convergence pour établir le *théorème d'existence* des solutions et obtenir du même coup leur *représentation explicite*.

Nous démontrons cette convergence d'abord brièvement pour les *équations intégrales non linéaires à une variable*, puis d'une manière approfondie pour les *équations intégrales linéaires aux dérivées partielles*, où l'ordre ω de l'intégrale est supérieur à l'ordre maximum θ des dérivées (nous bornant, faute de place, pour les autres équations, où $\omega = \theta$, à énoncer le résultat).

Pour ces équations linéaires (caractérisées par $\omega > \theta$), le développement synthétique représente la solution dans tout son domaine d'existence, qui est celui des coefficients; il nous révèle de la façon la plus naturelle ses propriétés fondamentales : son holomorphie dans ce domaine, la fixité de ses singularités, son allure au voisinage de celles-ci (généralisations du théorème de Fuchs). Il met ainsi en lumière la complète analogie de pareilles équations avec les équations différentielles linéaires, dont nous retraçons à grands traits la théorie directement par cette « méthode synthétique ».

Comme résultats secondaires, signalons la forme condensée à noyau résolvant qu'on peut donner au développement synthétique grâce à une proposition générale très simple sur l'interversion des intégrations, enfin les théorèmes auxquels conduit la théorie précédente dans le cas particulier des équations aux dérivées partielles.

Dans les cas linéaires, on constate que cette « méthode synthétique » vient au fond coïncider avec celle des approximations successives. Qu'il nous soit permis de faire observer que nous en avons trouvé le principe et en avons fait l'application développée aux équations différentielles linéaires dès notre sortie de l'École, à une époque où nous n'avions pas encore connaissance des travaux de M. E. Picard.

En terminant je tiens à exprimer à M. Goursat mes respectueux remercîments de l'honneur qu'il m'a fait en examinant ce travail et en

en présentant les principaux résultats aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (26 novembre 1923, p. 1094).

I. — Principes généraux.

1. *Notations*. — Les diverses équations intégrales ou intégro-différentielles que nous envisageons rentrent dans le type général suivant, où, pour simplifier l'écriture, nous avons limité à deux le nombre des variables indépendantes x, y (désormais supposées complexes, sauf avis contraire)

$$\text{(I)} \qquad \varphi(x,y)=f(x,y)+\int_{aa_1\ldots a_{m-1}}^{m} dt^m \int_{bb_1\ldots b_{p-1}}^{p} \times \mathrm{P}[x, y, t, v, \varphi(t, v), \varphi_{r_1q_1}(t, v), \varphi_{r_2q_2}(t, v), \ldots]\, dv^p,$$

en désignant [1] par $\varphi(x\, y)$ la fonction inconnue; par $\varphi_{r_1q_1}(x\, y)$ sa dérivée $\dfrac{\partial^{r_1+q_1}\varphi\,(x\, y)}{\partial x^{r_1}\, dy^{q_1}}$; par $f(x\, y)$ une fonction analytique donnée; par t, v deux variables d'intégration qui se déplacent, l'une dans le plan de x et l'autre dans le plan de y; par $\mathrm{P}(x, y, t, v, \ldots)$ un polynome entier [2] par rapport à φ et à plusieurs de ses dérivées $\varphi_{r_1q_1}$, $\varphi_{r_2q_2}$, ..., c'est-à-dire un polynome de la forme

$$\Sigma \mathrm{K}_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2\ldots}(x\, y\, t\, v)\, \varphi^{\alpha_0}(t\, v)\, \varphi_{r_1q_1}^{\alpha_1}(t\, v)\, \varphi_{r_2q_2}^{\alpha_2}(t\, v)\ldots,$$

où la somme Σ s'étend à divers systèmes de valeurs des exposants α_0, α_1, ... (dont certains peuvent être zéro) et où les coefficients $\mathrm{K}_{\alpha_0\alpha_1\ldots}(x\, y\, t\, v)$ sont des fonctions supposées analytiques sauf(avis centraire) des variables indépendantes x, y et des variables d'intégration t, v.

Domaines d'holomorphie D_x, D_y. — Nous nous placerons dorénavant

---

(1) Nous supprimerons, à l'occasion, les virgules entre les arguments contenus sous une même parenthèse.

(2) Nous laisserons de côté le cas limite où ce polynome deviendrait une série.

(sauf avis contraire) dans l'hypothèse générale où il existe deux domaines D_x et D_y bornés, complets (c'est-à-dire comprenant leurs frontières), d'un seul tenant et sans trous (simplement connexes) tels que toutes les fonctions données $f(x, y)$, $K(x\, y\, t\, v)$ soient holomorphes quand x et t ne sortent pas de D_x, ni y ou v de D_y.

Intégrations. — Cela étant, le symbole

$$\int_{aa_1\ldots a_{m-1}}^{m} dt^m \int_{bb_1\ldots b_{p-1}}^{p} Z(t, v)\, dv^p,$$

appliqué à une fonction quelconque $Z(t, v)$ supposée holomorphe dans D_x, D_y, représentera l'intégrale $(m+p)$-uple

$$\int_a^x dt_1 \int_{a_1}^{t_1} dt_2 \ldots \int_{a_{m-1}}^{t_{m-1}} dt_m \int_b^y dv_1 \int_{b_1}^{v_1} dv_2 \ldots \int_{b_{p-1}}^{v_{p-1}} Z(t_m\, v_p)\, dv_p;$$

celle-ci résulte de la superposition d'une part de m intégrations, relatives à la variable t, effectuées dans le domaine D_x le long d'un chemin d'intégration L_x qui est constitué par une ligne rectifiable de longueur finie passant par les m origines fixes [1] $a, a_1, \ldots, a_{m-1}$ et aboutissant au point variable x (ou dans certains cas que nous spécifierons à un point également fixe A) ; d'autre part de p intégrations analogues relatives à v et effectuées dans D_y le long d'un chemin rectifiable L_y, passant par les p points fixes $b_{p-1}, \ldots, b_1, b$ pour aboutir à y (ou à un point fixe B).

Suivant que les extrémités de L_x et L_y sont toutes variables ou toutes fixes, ou l'une variable et l'autre fixe, l'équation (1) appartiendra au type de Volterra, au type de Fredholm ou au type mixte. Quand nous supposerons les m origines $a, a_1, \ldots$ confondues en un seul et même point x_0 de L_x et les p origines $b, b_1, \ldots$ confondues en un point y_0

---

(1) On pourrait aussi supposer que ces limites inférieures sont des fonctions données des variables.

de L_y, on se contentera d'indiquer une telle intégrale par le symbole

$$\int_{L_y}^{m} dt^m \int_{L} Z(t\,v)\, dv^p.$$

Série-produit. — Enfin, étant données plusieurs séries absolument convergentes

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} u_n, \qquad V = \sum_{0}^{\infty} v_n, \qquad W = \sum_{0}^{\infty} w_n, \qquad \dots$$

qu'on élève respectivement aux puissances α, β, γ, ..., on sait que le produit $U^\alpha V^\beta W^\gamma \dots$ peut être représenté par une série absolument convergente dont le terme général est formé suivant la règle de Cauchy-Mertens étendue à un nombre quelconque de séries. Nous désignerons ce terme par $\varpi_n(U^\alpha, V^\beta, W^\gamma, \dots)$ ou à l'occasion simplement par ϖ_n; ϖ_n est donc la somme de tous les produits de facteurs, en nombre $(\alpha + \beta + \gamma + \dots)$, obtenus en prenant de toutes les façons possibles α facteurs (distincts ou non) parmi les termes u_0, u_1, ..., u_n, puis β facteurs (distincts ou non) parmi les éléments V_0, V_1, ..., V_n, etc., sous la seule condition que la somme des indices de tous les facteurs (distincts ou non) d'un produit quelconque soit égale à n.

2. *Forme de la solution.* — Cela posé, il est évident qu'une solution *formelle* $\varphi(x\,y)$ de l'équation intégro-différentielle (1) est représentée par la série

$$\sum_{n=0} u_n(x\,y),$$

dont les termes u_0, u_1, ..., u_n sont définis respectivement par les expressions récurrentes

$$f(x\,y), \quad \int_{a_0 a_1 \quad a_{m-1}}^{m} dt^m \int_{b b_1 \quad b_{p-1}}^{p} \Sigma K_{\alpha_0\alpha_1}\,.(x\;y\;t\;v)\, \varpi_0(\varphi^{\alpha_0}, \varphi_{i,q_1}^{\alpha_1}, \dots)\, dv^p, \quad \dots,$$

enfin

$$\int_{a_0 a_1 \dots a_{m-1}}^{m} dt^m \int_{b b_1 \dots b_{p-1}}^{p} \Sigma K_{\alpha_0\alpha_1\dots}(x\;y\;t\;v)\, \varpi_{n-1}(\varphi^{\alpha_0}, \varphi^{\alpha_1}, \dots)\, dv^p,$$

et qui sera appelée « développement synthétique à termes récurrents » ou abréviativement *développement synthétique*. Ceci s'étendrait immédiatement à un *système* d'équations à plusieurs fonctions inconnues.

Pour s'assurer que cette série représente bien *effectivement* une solution de (1), il reste à étudier sa convergence. C'est ce que nous allons faire dans les deux cas principaux annoncés. Nous nous bornerons par la suite à prendre des limites inférieures d'intégration confondues en un seul point.

Cas particuliers. — Si dans (1) on suppose que les coefficients K renferment seulement les variables d'intégration t, v et que la fonction $f(x\,y)$ est un polynome entier

$$\sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i(y) \frac{(x-a)^{m-i}}{\underline{|m-i}} + \sum_{h=1}^{h=p} \mu_h(x) \frac{(y-b)^{p-h}}{\underline{|p-h}}$$

contenant $(m+p)$ fonctions arbitraires λ_i et μ_h; ce polynome, après m intégrations par rapport à x et p par rapport à y, disparaîtra et l'on obtiendra *une équation aux dérivées partielles*.

Plus particulièrement encore, s'il n'y a qu'une seule variable indépendante x [les fonctions $\lambda_i(y)$ devenant des constantes arbitraires], on retombe sur *une équation différentielle ordinaire*.

II. — Équations intégrales non linéaires à une variable.

3. Les équations de cette espèce, que l'on envisage ici, sont celles dans lesquelles le polynome P de la forme générale (I) se réduit à une somme

$$\sum_{i=1}^{i=m} \mathrm{K}_i(x\,t)\,\varphi^i(t),$$

et qui peuvent s'écrire (en se bornant à une intégrale simple)

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a \left[\sum_{i=1}^{i=m} \mathrm{K}_i\,(x\,t)\,\varphi^i(t)\right] dt, \tag{1}$$

une telle équation étant du type Volterra ou Fredholm suivant qu'on prend la variable x ou un nombre fixe b comme limite supérieure (non écrite à dessein) de l'intégrale.

Quand il n'y a ainsi qu'une seule variable x, on peut aisément déterminer de la manière suivante un domaine D_x, où les fonctions données (f, K_i) soient holomorphes.

4. *Construction du domaine d'holomorphie* D_x. — Considérons ceux des points singuliers de ces fonctions données qui sont intérieurs à un contour simple Γ tracé arbitrairement à distance finie; entourons chacun de ces points θ_i d'un contour simple γ_i, aussi petit qu'on veut, que nous joignons au contour Γ par une coupure formée de deux lignes simples parallèles K_i, aussi rapprochées l'une de l'autre qu'on voudra et ne rencontrant aucune autre ligne K_i à l'intérieur de Γ. La région, qui est à la fois intérieure à Γ et extérieure aux divers contours γ_i et aux coupures K_i, répond bien, en lui adjoignant sa frontière, à la définition du domaine D_x.

5. *Cas particulier.* — Commençons par l'équation très simple suivante (qui comprend l'équation de Riccati) :

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t)\,\varphi^2(t)\,dt. \tag{2}$$

Le développement synthétique $\sum_0^\infty u_n(x)$ de la solution $\varphi(x)$ a pour premier terme $f(x)$, et pour terme général $u_n(x)$

$$u_n(x) = \int_a^x K(x, t)\,\varpi_{n-1}[\varphi^2(t)]\,dt \tag{3}$$

avec

$$\varpi_{n-1}[\varphi^2(t)] = u_0(t)\,u_{n-1}(t) + u_1(t)\,u_{n-2}(t) + \ldots + u_{n-1}(t)\,u_0(t). \tag{4}$$

L'étude de la convergence de ce développement conduit à cette proposition :

Théorème I. — *L'équation intégrale* (2) *du type Volterra, dont le noyau* $K(x, t)$ *a pour borne supérieure de son module, dans* D, *la constante* M, *admet une solution* $\varphi(x)$ *représentable par le développement synthétique précédent* $\sum_0^\infty u_n(x)$ *absolument et uniformément convergent dans le champ formé par la partie commune à* D_x *et à un cercle de centre a ayant pour rayon soit* $\frac{1}{MF}$ *dans le premier cas où l'on suppose* $|f(x)|$ *au plus égal à la constante* F, *soit* $\sqrt{\frac{2}{Mh}}$ *dans le deuxième cas où l'on suppose* $|f(x)|$ *au plus égal à* $h(x-a)$ (*h étant une constante*). *Cette solution est holomorphe dans ce champ.*

Théorème II. — *Ces conclusions* (*sauf la dernière d'holomorphie*) *subsistent encore dans le domaine réel, sans supposer les coefficients analytiques, pourvu que* $|K(x\,t)|$ *et* $|f(x)|$ *admettent les limites supérieures susdites sur un segment* D_x *de l'axe réel comprenant l'origine a.*

En effet, dans le premier cas (où $|f(x)| \leqq F$), ces théorèmes peuvent se démontrer de deux manières, soit par une évaluation *directe* fournissant comme limite supérieure de $|u_n|$ la quantité $M^n F^{n+1} |x-a|^n$ et par suite la condition de convergence annoncée, soit par la *méthode des limites* après introduction, devant l'intégrale de l'équation, d'un paramètre auxiliaire λ, qu'on prend ensuite égal à 1.

Dans le second cas (où $|f(x)|$ est $\leqq h|x-a|$) on peut se servir pour la démonstration de nombres auxiliaires $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2p}, \alpha_{2p+1}, \ldots,$ égaux respectivement à

$$1, \quad \frac{\alpha_0^2}{3}, \quad \frac{2\alpha_0\alpha_1}{5}, \quad \ldots,$$

$$\frac{2}{4p+1}(\alpha_0\alpha_{2p-1} + \alpha_1\alpha_{2p-2} + \ldots + \alpha_{p-1}\alpha_p),$$

$$\frac{1}{4p+3}[2(\alpha_0\alpha_{2p} + \alpha_1\alpha_{2p-1} + \ldots + \alpha_{p-1}\alpha_{p+1}) + \alpha_1^2]. \quad \ldots$$

et montrer qu'une limite supérieure de $|u_n(x)|$ est $\alpha_n \mathrm{M}^n h^{n+1} |x-a| 2^{n+1}$, avec $\alpha_n < \frac{1}{2^n}$, d'où découlent les conditions de convergence annoncées.

Pour *l'équation de Fredholm* déduite de (1) en prenant un nombre fixe b pour limite supérieure de l'intégrale, on obtient de même *un développement synthétique de la solution* certainement convergent si $|b-a|$ est inférieur à $\frac{1}{4\mathrm{MF}}$, comme le montre, par exemple, la méthode des limites.

6. Dans le *cas général* le développement synthétique de la solution a pour premier terme $f(x)$, et pour terme général, $u_n(x)$, l'expression

$$\int_a \sum_{i=1}^{i=m} \mathrm{K}_i(x\ t)\, \varpi_{n-1}[\varphi^i(t)]\, dt.$$

La méthode des limites conduit de même à la proposition suivante :

THÉOREME III. — *Ce développement synthétique est absolument et uniformément convergent, si $|x-a|$ ou $|b-a|$ (suivant le type de l'équation) est suffisamment petit, et il représente la solution de l'équation dans la partie du cercle correspondant intérieure à D_x; cette solution est holomorphe dans le domaine complexe.*

D'une manière plus précise on est assuré de la convergence en question si $|x-a|$ ou $|b-a|$ rendent convergents, pour $\lambda = 1$, le développement (suivant les puissances entières du paramètre λ) de Φ, Φ étant solution soit de l'équation différentielle, soit de l'équation algébrique entière ci-après, suivant que (1) est du type Volterra ou Fredholm, savoir

$$\Phi = \mathrm{F} + \lambda \mathrm{M} \int_a^x (\Phi + \Phi^2 + \ldots + \Phi^m)\, dt,$$
$$\Phi = \mathrm{F} + \lambda \mathrm{M}(b-a)(\Phi + \Phi^2 + \ldots + \Phi^m).$$

Nota. — Il pourra arriver qu'une équation *intégro-différentielle* puisse se ramener à une des équations *intégrales* précédentes, si des intégrations par parties répétées permettent d'en faire disparaître toutes les dérivées.

Bien entendu, ce qui précède s'applique *aux équations différentielles ordinaires* qui sont des cas particuliers des précédentes.

III. — Équations différentielles linéaires.

7. Nous allons reprendre très rapidement, sous le point de vue systématiquement adopté dans ce travail, la théorie de ces équations linéaires, de façon à faire ressortir plus nettement leur parallélisme avec les équations intégro-différentielles linéaires à plusieurs variables étudiées plus loin en détail. Cet aperçu nous tracera notamment une voie commode pour les généralisations ultérieures du théorème de Fuchs.

A cette occasion commençons par indiquer en quelques mots de quelle manière, à l'origine, le cas particulier du deuxième ordre nous a naturellement amené à envisager de pareils développements.

Cas du deuxième ordre. — Cherchons une solution $y(t)$ (qui, au point t_0, ait la valeur $u_0 = 1$ et une dérivée nulle) de l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d^2y}{dt^2} = p(t)y. \tag{6}$$

Intégrons les deux membres le long du chemin L_x, allant de t_0 à t, *puis calculons le second membre au moyen d'intégrations par parties répétées indéfiniment.* Si donc on appelle v_n et u_n les intégrales $\int_{t_0}^{t} pu_{n-1}\,dt$ et $\int_{t_0} v_n dt$ avec $u_0 = 1$, on aura, après deux intégrations par parties $\left(y' \text{ désignant } \frac{dy}{dt}\right)$,

$$y' = yv_1 - y'u_1 + \int_{t_0}^{t} y''u_1\,dt \tag{7}$$

ou

$$y'(1+u_1) = yv_1 + \int_{t_0}^{t} y'' u_1\, dt.$$

Remplaçons alors y'' par sa valeur (6) et recommençons les mêmes opérations. En continuant ainsi, on arrivera finalement $\Big[$en appelant σ_n la somme des $(n+1)$ premiers u_n, et remarquant que la somme des premiers v_n est égale à $\dfrac{d\sigma_n}{dt}\Big)$ à la relation

$$y'\sigma_n = y\sigma'_n + \int_{t_0}^{t} pu_n y\, dt. \tag{8}$$

Alors si la solution y existe dans le domaine D_x borné, elle y est continue et par suite bornée en module, ainsi que $p(t)$. D'autre part si σ_n est uniformément convergente dans D_x, u_n tend uniformément vers zéro, et de même le dernier terme de (8). Donc d'après (8), y est dans ces conditions la limite de σ_n.

C'est ainsi que nous sommes amené à considérer *a priori* la série $\sigma = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ et à étudier sa convergence.

Or en appelant M la borne supérieure du module de $p(t)$ et l une limite supérieure de la longueur du chemin d'intégration, on voit que $|u_n|$ est $\leqq \dfrac{M^n l^{2n}}{(2n)!}$ et que par suite la série σ admet pour majorante $\operatorname{ch}\left(M^{\frac{1}{2}} l\right)$. Elle est donc *absolument et uniformément convergente dans* D_x. Comme ses termes sont des fonctions holomorphes dans D_x, elle représente elle-même dans D_x d'après un théorème connu (Goursat, *Cours d'Analyse*, t. II, Chap. XVII, p. 266) que nous appellerons *théorème* α, *une fonction holomorphe* $\sigma(t)$, *dérivable terme à terme indéfiniment qui est donc l'intégrale cherchée.*

Remarque. — Cette conclusion est encore vraie dans le domaine réel, car la série Σv_n, obtenue en dérivant σ terme à terme, est aussi *unifor-*

mément convergente et même absolument $\left[\text{ayant pour majorante de la série de ses modules la dérivée de ch}\left(M^{\frac{1}{2}}l\right)\right]$ de même que la série $\Sigma v'_n$ (égale à $p \times \sigma$), et par conséquent d'après un autre théorème connu (GOURSAT, t. I, Chap. III, p. 409) que nous appellerons *théorème* β, les sommes de ces deux séries dérivées sont bien les dérivées première et seconde de la fonction $\sigma(t)$.

8. *Cas du premier ordre.* — Étant données l'équation $\varphi' = p(t)\varphi$, et sa solution φ représentée par $c\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, où c est une constante arbitraire, et où u_0, u_n sont respectivement 1 et $\int_{t_0}^{t} pu_{n-1}\,dt$, il est intéressant de noter en passant que ce développement synthétique redonne bien l'intégrale φ sous la forme connue $ce^{\int_{t_0}^{t} p\,dt}$, c'est-à-dire ce^{u_1}. Il suffit pour cela de vérifier que u_n est égal à $\frac{u_1^n}{n!}$. En effet admettons qu'on ait (en désignant par $\lfloor n-2$ la factorielle $\overline{n-2!}$)

$$u_{n-2} = \frac{u_1^{n-2}}{\lfloor n-2} \quad \text{et} \quad u_{n-1} = \frac{u_1^{n-1}}{\lfloor n-1};$$

montrons alors que cette loi qui se vérifie immédiatement pour u_2 est vraie aussi pour le rang n.

Or

$$u_n \quad \text{ou} \quad \int pu_{n-1}\,dt$$

est égal à

$$u_{n-1}\int_p dt - \int u'_{n-1} \times u_1\,dt \quad \text{ou à} \quad u_{n-1}u_1 - \int pu_{n-2} \times u_1\,dt,$$

c'est-à-dire à

$$u_1^n - \int p\frac{u_1^{n-1}}{\lfloor n-2}\,dt \quad \text{ou encore à} \quad \frac{u_1^n}{\lfloor n-1} - (n-1)\int p \times u_{n-1}\,dt.$$

Donc u_n est égal à $\frac{u_1^n}{\lfloor n-1} - (n-1)u_n$, c'est-à-dire à $\frac{u_1^n}{n!}$.

C. Q. F. D.

9. *Cas général.* — Soit l'équation linéaire d'ordre m

$$\frac{d^m \varphi}{dt^m} = \sum_{i=1}^{i=m} p_i(x) \frac{d^{m-i} \varphi}{dx^i} \tag{9}$$

qui admet manifestement pour solution formelle φ le développement synthétique $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$, dont le premier terme est un polynone arbitraire de degré $(m-1)$ en t contenant m constantes arbitraires c_ν et dont le terme général u_n est égal à

$$\int_{L_x}^{m} \sum_{i=1}^{i=m} p_i(t)\, D^{m-i} u_{n-1}(t)\, dt^m.$$

Or ce développement y est absolument et uniformément convergent (et dérivable terme à terme) dans D_x; en effet M étant la borne supérieure des modules des coefficients $p_i(t)$ dans le domaine D_x (construit suivant le procédé du n° 4), P celle des modules du polynome u_0 et de ses $(m-1)$ dérivées, l uue limite supérieure de la longueur $s(x)$ du chemin d'intégration L_x; une évaluation *directe* montre immédiatement que $|u_1|$ est inférieur à $\mathrm{MP}\frac{l^m}{m!}$ et que d'une manière générale $|u_n|$ est inférieur à

$$\mathrm{P}(m\mathrm{M})^n \frac{l^{\mu_{n-1}}}{(m+n-1)!},$$

l'exposant μ_{n-1} étant $m+(n-1)$ si $L<1$ et $m\times n$ si $L>1$. Or la série majorante S ainsi obtenue est convergente (le rapport d'un terme au précédent tend vers zéro pour $n=\infty$).

Donc la série Σu_n est absolument et uniformément convergente dans D_x; en vertu du théorème α, elle représente bien dans ces conditions une fonction holomorphe dans tout le *domaine* D_x *des coefficients* p_i *et est la solution générale de l'équation* [les m constantes arbitraires c_ν étant les valeurs de la solution φ et de ses $(m-1)$ premières dérivées quand t est à l'origine a de l'arc L_x].

Remarque. — Dans le domaine *réel*, la solution est encore représentée par la série Σu_n, car les séries qu'on en déduit par dérivation terme à terme sont aussi uniformément (et absolument) convergentes (ayant pour majorantes les dérivées respectivement de même ordre de la majorante S), et par suite le théorème β s'applique.

Conclusion. — On a ainsi démontré d'un coup *l'existence des intégrales et la fixité de leurs points singuliers*, en même temps qu'on a une *représentation explicite de ces intégrales*.

En outre les constantes ς_ν entrant *au premier degré* dans le développement synthétique φ, il en résulte immédiatement que *l'intégrale générale est une combinaison linéaire et homogène de m solutions linéairement indépendantes.*

Ainsi sont réobtenues sans effort les propriétés fondamentales des équations linéaires. (Rappelons qu'un *système* d'équations linéaires simultanées peut toujours être ramené à une équation différentielle linéaire *unique*.)

Complétons cet exposé rapide *par l'étude des intégrales au voisinage d'un point singulier.*

10. Théorème de Fuchs. — Voyons maintenant la façon dont se comporte la solution $\sigma(t)$ quand t s'approche d'un point singulier θ des coefficients p_k. Supposons que θ soit un pôle pour ces coefficients, d'ordre λ_k pour $p_k (k = 1, 2, \ldots, m)$ (quelques-uns des nombres λ_k pouvant d'ailleurs être $\leqq 0$); il existe donc un certain cercle R, de centre θ, à l'intérieur duquel tous les coefficients peuvent être représentés par des expressions de la forme suivante :

$$p_k = \frac{a_k + b_k(t-\theta) + \ldots}{(t-\theta)^{\lambda_k}}, \qquad \text{avec} \quad a_k \neq 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

où le numérateur est une série entière convergente.

Pour connaître l'allure des solutions quand t reste dans le domaine R, il est naturel de remplacer, dans la série σ, qui représente les solutions, les coefficients p_k par les développements précédents. Cette substitu tion ne sera légitime que si t ne peut pas sortir de R; nous supposerons donc que t_0 est à l'intérieur de R, ainsi que le chemin d'intégration C tout entier. [Si le point initial t_0 ne remplissait pas cette condition, on le remplacerait par un autre t_1, intérieur à R, pour lequel on calculerait les nouvelles valeurs initiales de l'intégrale $\sigma(t)$ et de ses dérivées]. Ordonnons en même temps le polynome u_0 suivant les puissances croissantes de $(t-\theta)$, ainsi que ses dérivées $D^{m-1} u_0$, $D^{m-2} u_0, \ldots, D^{m-k} u_0, \ldots, D u_0$.

On voit que les différents termes de σ, savoir

$$u_1 = \int^m \left[\frac{a_1 + b_1(t-\theta) + \ldots}{(t-\theta)^{\lambda_1}} D^{m-1} u_0 + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{a_k + b_k(t-\theta) + \ldots}{(t-\theta)^{\lambda_k}} D^{m-k} u_0 + \ldots \right] dt^m,$$
$$u_n = \int^m \left[\frac{a_1 + b_1(t-\theta) + \ldots}{(t-\theta)^{\lambda_1}} D^{m-1} u_{n-1} + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{a_k + b_k(t-\theta) + \ldots}{(t-\theta)^{\lambda_k}} D^{m-k} u_{n-1} + \ldots \right] dt^m$$

sont des quantités formées avec les puissances de $(t-\theta)$, de $\frac{1}{t-\theta}$ et avec des logarithmes.

En raison de la convergence absolue, on peut réunir ensemble les termes contenant une même puissance de $(t-\theta)$ ou de $\frac{1}{t-\theta}$ et obtenir ainsi une série ordonnée suivant les puissances positives et négatives de $(t-\theta)$ (avec des coefficients contenant des logarithmes), et représentant l'intégrale générale dans tout le cercle de convergence R commun aux coefficients p_k.

Nous allons alors prouver avec une facilité extrême le théorème suivant :

Théorème de Fuchs. — *Pour que ce développement — valable pour* TOUTES *les solutions dans le cercle* R — *soit limité du côté des puissances* *négatives, il faut et il suffit que chaque nombre satisfasse à la condition* $\lambda_i \leqq i \ (i = 1, 2, \ldots, m)$.

On dit alors que *toutes* les solutions sont *régulières* au voisinage du point θ. — En effet supposons qu'un au moins des nombres λ_i, λ_r par exemple, ne satisfasse pas à cette condition. On a donc $\lambda_r > r$. Soit λ_k le plus grand des nombres λ_i.

Dans l'expression générale du terme u_1, il figure un terme de la forme

$$I_1 = \int^m \frac{dt^m}{(t-\theta)^{\lambda_k}},$$

à un coefficient numérique près. Et comme on a par hypothèse $\lambda_k \geqq \lambda_r > r$, il figurera dans u_2 un terme en

$$I_2 = \int^m \frac{dt^m}{(t-\theta)^{\lambda_r}} \cdot \frac{1}{(t-\theta)^{\lambda_k - r}},$$

c'est-à-dire de la forme

$$I_2 = \int^m \frac{dt^m}{(t-\theta)^{\lambda_{k_1}}}, \qquad \text{où} \qquad \lambda_{k_1} = \lambda_k + \lambda_r - r > \lambda_k > r.$$

Puis de même dans u_3 figurera un terme en

$$I_3 = \int^m \frac{dt^m}{(t-\theta)^{\lambda_r}} \cdot \frac{1}{(t-\theta)^{\lambda_{k_1} - r}},$$

c'est-à-dire de la forme

$$I_3 = \int^m \frac{dt^m}{(t-\theta)^{\lambda_{k_2}}}, \qquad \text{avec} \qquad \lambda_{k_2} > \lambda_{k_1};$$

et ainsi de suite.

Puisque nous considérons *toutes* les solutions de l'équation, les m constantes d'intégration $c_0, c_1, \ldots, c_{m-1}$ sont susceptibles de prendre *tous* les systèmes de valeurs possibles. Nous sommes donc sûr qu'il existe une *infinité* de systèmes de valeurs de ces m constantes pour lesquels tous les termes $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ contiennent bien effectivement les expressions $I_1, I_2, \ldots$ (même s'il pouvait arriver que, pour *certains* de ces systèmes satisfaisant à des conditions particulières, ces expressions $I_1, I_2, \ldots$ disparaissent des termes successifs $u_1, u_2, \ldots$).

Or, ces expressions $I_1, I_2, I_3, \ldots$, etc. contiennent, sous le signe $\int$, la quantité $\frac{1}{t-\theta}$ à des puissances constamment croissantes

$$\lambda_k < \lambda_{k_1} < \lambda_{k_2} < \ldots.$$

Par conséquent, à partir d'un certain terme (correspondant à une valeur finie de n), tous les termes suivants $u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots$ contiendront $\frac{1}{t-\theta}$ en facteur à des puissances croissantes. Le développement ne sera donc pas limité du côté des puissances négatives de $(t-\theta)$.

La condition $\lambda_i \leqq i \; (i = 1, 2, \ldots, m)$ est donc bien nécessaire pour que *toutes* les solutions soient régulières; et elle est d'ailleurs évidemment suffisante. C. Q. F. D.

11. *Généralisation.* — Si la condition $\lambda_i \leqq i$ n'est pas satisfaite pour toutes les valeurs $i = 1, 2, \ldots, m$, on vient de voir qu'il ne peut exister m solutions linéairement indépendantes, *régulières* au voisinage du point singulier θ. Cherchons s'il peut y en avoir un nombre moindre, par exemple $(m-h)$.

Par analogie avec le cas précédent, résolvons l'équation différentielle donnée (9) par rapport à la dérivée d'ordre $(m-h)$

$$\mathrm{D}^{m-h}\varphi = \frac{1}{p_h}\mathrm{D}^m\varphi - \frac{\mathrm{P}_1}{\mathrm{P}_h}\mathrm{D}^{m-1}\varphi - \ldots - \frac{p_{h-1}}{\mathrm{P}_h}\mathrm{D}^{m-h+1}\varphi - \frac{p_{h+1}}{\mathrm{P}_h}\mathrm{D}^{m-h-1}\varphi - \ldots$$
$$- \frac{p_{m-1}}{p_h}\mathrm{D}\varphi - \frac{\mathrm{P}_m}{\mathrm{P}_h}\varphi.$$

Posons, pour plus de symétrie, $-1 = p_0$, en sorte que le coefficient de $\mathrm{D}^m\varphi$ devienne $-\frac{p_0}{p_h}$. Puis, pour simplifier, posons

$$\pi_i = \frac{p_i}{p_h} \; (i = 0, 1, \ldots, h-1, h+1, \ldots, m-1, m).$$

Si nous appelons μ_i l'ordre du pôle θ pour le coefficient π_i (μ_i pouvant d'ailleurs être nul ou négatif pour certaines valeurs de i) et si nous continuons à désigner par λ_i l'ordre du pôle θ pour p_i) nous aurons

$$\mu_i = \lambda_i - \lambda_h.$$

Considérons maintenant la série suivante Σ, qui est formée d'une façon analogue à $\sum_0^\infty u_n$, mais en remplaçant les intégrales m-uples par des intégrales d'ordre $(m-h)$,

$$\Sigma = v_0 + v_1 + \ldots + v_n + \ldots,$$

v_0 étant un polynome entier en $(t-t_0)$ de degré $(m-h-1)$ à coefficients arbitraires, et chaque terme s'exprimant en fonction du précédent par la formule de récurrence

$$v_n = -\int^{m-h} \left[\pi_0 D^m v_{n-1} + \pi_1 D^{m-1} v_{n-1} + \ldots + \pi_{h-1} D^{m-h+1} v_{n-1} + \pi_{h+1} D^{m-h-1}_{v_{n-1}} + \ldots + \pi_m v_{n-1}\right] dt^{m-h}.$$

Cette série est visiblement une solution formelle de l'équation. Admettons qu'elle soit absolument convergente, pour des valeurs de t voisines de θ, de telle sorte qu'on puisse reprendre un raisonnement analogue à celui de tout à l'heure. Je vais l'indiquer très brièvement : v_1 contiendra en général des termes de la forme $\int^{m-h} \frac{dt^{m-h}}{(t-\theta)^{r_k}}$, qui, substitués dans v_2, donneront des termes de la forme

$$\int^{m-h} \left[\frac{a_0}{(t-\theta)^{r_0}} \cdot \frac{1}{(t-\theta)^{r_k+h}} + \frac{a_1}{(t-\theta)^{r_1}} \cdot \frac{1}{(t-\theta)^{r_k+h-1}} + \ldots + \frac{a_i}{(t-\theta)^{r_i}} \cdot \frac{1}{(t-\theta)^{r_k+h-i}} + \ldots\right] dt^{m-h},$$

où a_0, a_1, ..., a_i sont des coefficients numériques. Et ainsi de suite.

On voit donc que si ces différents termes ne disparaissent pas (par suite de valeurs particulières des coefficients du polynome v_0), et si l'un des nombres μ_0, μ_1, ..., μ_m, soit μ_i par exemple, vérifie l'inégalité

$\mu_i + h - i > 0$, la série Σ contiendra des puissances constamment croissantes de $\frac{1}{t-\theta}$.

Par conséquent inversement, pour que la solution représentée par Σ soit régulière, il faut que la condition suivante soit satisfaite pour toutes les valeurs de i

$$\mu_i + h - i \leqq 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad (\lambda_i - \lambda_h) + h - i \leqq 0.$$

D'ailleurs Σ est la combinaison linéaire de $(m-h)$ solutions particulières qu'on obtient en annulant tous les coefficients du polynome v_0 sauf un, et qui sont linéairement indépendantes, comme on le voit aisément.

Conclusion. — Ainsi de cet examen il ressort finalement ceci :

Si $(\lambda_h - h)$ *est le plus grand des nombres algébriques* $(\lambda_i - i)$, *autrement dit si l'on a*

$$\lambda_i \leqq i + (\lambda_h - h) \qquad \text{pour} \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, m,$$

et si le développement correspondant Σ [*formé au moyen d'intégrales* $(m-h)$*-uples*] *est absolument convergent* (*de telle sorte qu'on puisse l'ordonner suivant les puissances croissantes de* $\frac{1}{t-\theta}$ *au voisinage du point singulier* θ), *il existe* $(m-h)$ *solutions indépendantes qui sont* RÉGULIÈRES *aux environs du point* θ.

Bien entendu si, parmi les nombres $(\lambda_i - i)$, il y en a plusieurs qui ont la valeur maxima $(\lambda_h - h)$, il est toujours permis de choisir celui pour lequel le rang h a la plus petite valeur et pour lequel par conséquent $(m-h)$ a la plus grande valeur.

Remarquons qu'en faisant $h = 0$, on retombe sur la condition $\lambda_i \leqq i$ énoncée au paragraphe précédent pour le cas de m intégrales indépendantes régulières. C'est à ce point de vue que les nouvelles conditions apparaissent comme une généralisation de celles du théorème de Fuchs.

IV. — Équations intégro-différentielles linéaires à plusieurs variables.

A. — *Théorème d'existence et représentation des solutions dans tout le domaine* (D_x, D_y).

12. Ici le polynome P de l'équation (1) sera une fonction *linéaire* de l'inconnue $\varphi(tv)$ et de ses dérivées partielles $\frac{\partial^{r_i+q_i}\varphi(tv)}{\partial t^{r_i}\partial v^{q_i}}$; l'équation intégro-différentielle linéaire peut donc s'écrire d'une manière générale (en supposant, pour simplifier, que dans chaque intégrale multiple tous les chemins d'intégration ont même origine x_0 ou y_0)

$$(1)\qquad \varphi(xy) = f(xy) + \int_{L_x}^{m} dt^m \int_{L_y}^{P} \sum_{r_i, q_i=0}^{r_i=r, q_i=q} K_{r_i q_i}(xy\,tv)\frac{\partial^{r_i+q_i}\varphi(tv)}{\partial t^{r_i}\partial v^{q_i}}\,dv^P.$$

Forme de la solution. — Elle a manifestement pour *solution formelle* la série

$$\varphi(xy) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(xy),$$

dont les différents termes sont

$$(2)\qquad \left\{ \begin{aligned} & u_0(xy) = f(xy), \qquad \ldots, \\ & u_n(xy) = \int_{L_x}^{m} dt^m \int_{L_y}^{P} \sum_{r_i, q_i=0}^{r, q} K_{r_i q_i}(xy\,tv)\frac{\partial^{r_i+q_i} u_{n-1}(tv)}{\partial t^{r_i}\partial v^{q_i}}\,dv^P, \qquad \ldots, \end{aligned} \right.$$

et qui rentre dans la forme générale indiquée au paragraphe **2**.

Convergence. — Nous allons étudier la *convergence* de cette série *en supposant spécialement que l'ordre d'intégration* $(m+p)$ *est supérieur* *à l'ordre maximum de dérivation* $r+q$ (comme cela a lieu dans une équation différentielle ordinaire [1]). Dans ce cas, l'équation (1) sera dite *normale*. Cette étude va nous conduire alors au théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si* $m+p>r+q$, *l'équation intégro-différentielle normale* (1) *admet une solution* $\varphi(xy)$, *qui est :* 1° *holomorphe dans toute région intérieure au domaine d'holomorphie* (D_x, D_y) *des coefficients;* 2° *représentable dans tout ce domaine* [2] (*c'est-à-dire dans la totalité de* D_x *et* D_y, *sauf sur les frontières* C_0 *et* Γ_0) *par l'unique développement synthétique*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(xy),$$

qui y est absolument et uniformément convergent.

Pour la clarté de l'exposition, nous effectuerons la démonstration avec un polynome P réduit à un terme unique $K(xytv)\dfrac{\partial^{r+q}\varphi(tv)}{\partial x^r\,\partial v^q}$. Les raisonnements et résultats correspondants s'étendent immédiatement, comme il est facile de s'en rendre compte, au cas général (et à un nombre quelconque de variables).

Soit donc l'équation

$$\text{(1 bis)}\qquad \varphi(xy) = f(xy) + \int_{L_x}^{m} dt^m \int_{L_y}^{P} K(xytv)\,\frac{\partial^{r+q}\varphi(tv)}{\partial t^r\,\partial v^q}\,dv^P,$$

et le développement en série

$$\varphi(xy) = \sum_{0}^{\infty} \overset{\circ}{u}_n(xy),$$

---

(1) Plus loin, nous indiquerons le résultat auquel nous sommes parvenus en supposant $m+p=r+q$.

(2) Sans qu'aucune opération de prolongement (par cheminement ou autrement) soit nécessaire.

dont les divers termes sont

$$
(2\ bis) \qquad \left\{ \begin{array}{l} u_0(xy) = f(xy), \qquad \ldots, \\ u_n(xy) = \displaystyle\int_{\mathrm{L}_x}^{m} dt^m \int_{\mathrm{L}_y}^{\mathrm{P}} \mathrm{K}(xy\,tv) \frac{\partial^{r+q} u_{n-1}(tv)}{\partial t^r \, \partial v^q} dv^{\mathrm{P}}, \qquad \ldots. \end{array} \right.
$$

Cela posé, le principe de la méthode que nous allons employer consiste à montrer qu'on peut trouver une série *numérique* convergente, dont chaque terme soit supérieur au module du terme u_n de même rang dans un certain domaine; dans celui-ci, *la série* Σu_n *sera donc* UNIFORMÉMENT (et absolument) *convergente* et, par suite, *représentera* — en vertu du théorème classique α (n° 7) — *une fonction holomorphe et dérivable terme à terme ; cette fonction sera donc bien effectivement une solution* $\varphi\,(xy)$ *de l'équation donnée.*

La démonstration va reposer sur quelques propositions, que nous commencerons par établir à titre de lemmes préliminaires :

13. Lemme I. — Cherchons d'abord une limite supérieure $\mathrm{U}_n(xy)$ de $|u_n(xy)|$. Pour $n = 0$, nous possédons une telle limite supérieure $\mathrm{U}_0(xy)$ du module du premier terme $u_0(xy)$, limite supérieure qui est valable dans tout le domaine D_x, D_y; c'est la borne supérieure μ de $|f(xy)|$ dans le domaine borné et complet $(\mathrm{D}_x, \mathrm{D}_y)$, où $f(xy)$ est holomorphe

$$
(3) \qquad |u_0(xy)| \leqq \mu = \mathrm{U}_0(xy).
$$

Par conséquent, pour pouvoir déterminer une limite supérieure $\mathrm{U}_n(xy)$, il nous suffit de savoir la définir par récurrence, comme nous allons le faire ci-après, en fonction de la limite supérieure $\mathrm{U}_{n-1}(xy)$ supposée connue pour certaines valeurs de x et y.

Pour cela, considérons la borne supérieure M de $|\mathrm{K}(xy\,tv)|$ dans $(\mathrm{D}_x, \mathrm{D}_y)$ et, remplaçant dans (2 *bis*) les fonctions par leurs modules, nous aurons

$$
(4) \qquad |u_n(xy)| \leqq \mathrm{M} \int_{\mathrm{L}_x} |dt|^m \int_{\mathrm{L}_y} \left| \frac{\partial^{r+q} u_{n-1}(tv)}{\partial t^r \, \partial v^q} \right| |dv|^{\mathrm{P}}.
$$

Calculons une limite supérieure du module de $\dfrac{\partial^{r+q} u_{n-1}(tv)}{\partial t^r \partial v^q}$, en exprimant cette dérivée au moyen de la formule fondamentale de Cauchy,

$$(5) \qquad \frac{\partial^{r+q} u_{n-1}(tv)}{\partial t^r \partial v^q} = \frac{r!\, q!}{(2\pi i)^2} \int_{C_n} dz_n \int_{\Gamma_n} \frac{u_{n-1}(z_n, \zeta_n)\, d\zeta_n}{(z_n - t)^{r+1}(\zeta_n - v)^{q+1}},$$

dans laquelle z_n et ζ_n sont les points courants sur deux contours C_n et Γ_n que nous faisons correspondre l'un au point t, l'autre au point v; ces contours peuvent être choisis à volonté, sans que l'emploi de la formule (5) cesse d'être légitime, pourvu seulement qu'ils satisfassent à la *double condition suivante* A, savoir : 1° que le point t soit *intérieur* à C_n et v intérieur à Γ_n; 2° que C_n et Γ_n soient tout entiers *intérieurs* respectivement aux domaines D_x et D_y, où $u_{n-1}(tv)$ est bien holomorphe en raison des hypothèses faites sur l'holomorphie des coefficients $f(xy)$ et $K(xy\, tv)$ dans ces domaines.

Pour rappeler constamment à l'esprit la sujétion 1°, qui lie C_n à t et Γ_n à v, nous désignerons souvent par C_n^t et Γ_n^v ces contours attachés à t et à v, et par z_n^t, ζ_n^v les variables z_n et ζ_n.

Si ces conditions A sont réalisées, on déduit de (5), en y remplaçant les diverses quantités par leurs modules,

$$(6) \qquad \left|\frac{\partial^{r+q} u_{n-1}(tv)}{\partial t^r \partial v^q}\right| \leqq \frac{r!\, q!}{(2\pi i)^2} \int_{C_n^t} |dz_n^t| \int_{\Gamma_n^v} \frac{|u_{n-1}(z_n^t \zeta_n^v)| \times d\zeta_n^v}{|z_n^t - t|^{r+1} \times |\zeta_n^v - v|^{q+1}}.$$

Si en outre la limite supérieure $U_{n-1}(x, y)$ — connue, par hypothèse, pour certaines valeurs x, y — satisfait à la *condition* B, savoir : d'être aussi valable quand x et y viennent en z_n^t et ζ_n^v, on pourra remplacer $|u_{n-1}(z_n^t \zeta_n^v)|$ par sa limite supérieure $U_{n-1}(z_n^t, \zeta_n^v)$, ce qui donnera

$$(7) \qquad \left|\frac{\partial^{r+q} u_{n-1}(tv)}{\partial t^q \partial v^q}\right| \leqq \frac{r!\, q!}{(2\pi i)^2} U_{n-1}(z_n^t \zeta_n^v) \int_{C_n^t} \frac{|dz_n^t|}{|z_n^t - t|^{r+1}} \times \int_{\Gamma_n^v} \frac{|d\zeta_n^v|}{|\zeta_n^v - v|^{q+1}},$$

ou, en appelant γ_n^t et γ_n^v ces deux dernières intégrales et a la constante $\dfrac{r!\,q!}{(2\pi i)^2}$,

(8) $$\left|\frac{\partial^{r+q}\, u_{n-1}(tv)}{\partial t^r\, \partial v^q}\right| \leqq a\, U_{n-1}(z_n^t\, \zeta_n^v)\cdot\gamma_n^t\gamma_n^t.$$

En tenant compte de ce résultat, la relation (4) devient finalement

(9) $$|\, u_n(xy)\,| \leqq a M \int_{L_x}^{m} |\,dt\,|^m \int_{L_y}^{p} U_{n-1}(z_n^t \zeta_n^v)\, \gamma_n^t \gamma_n^v\, |\,dv\,|^p = W_n(xy).$$

Donc si les conditions A *et* B — *que nous appellerons* CONDITIONS DE VALIDITÉ D'ORDRE n OU CONDITIONS $n^{\text{ièmes}}$ — *sont satisfaites, il sera permis de prendre pour* $U_n(xy)$ toute *fonction qu'on voudra, dont la valeur soit au moins égale au second membre* $W_n(xy)$ *de la relation* (9).

Nous pouvons résumer tout ceci dans ce lemme, qui définit bien, comme nous l'avions annoncé, une limite supérieure $U_n(xy)$ *par récurrenee* [au moyen de (9)] en fonction de $U_{n-1}(xy)$.

Toute fonction $U_n(xy)$ *ayant une valeur* $\geqq W_n(xy)$ *est valable en tant que limite supérieure de* $|\, u_n(xy)\,|$ *pour tous les points* x, y *qui — moyennant un choix convenable des chemins d'intégration et des contours* C_n, Γ_n — *satisfont aux* CONDITIONS $n^{\text{ièmes}}$ SUIVANTES :

A. *A tout point x ou t (y ou v) de L_x (de L_y) correspond un des contours $C_n(\Gamma_n)$ considérés qui entoure ce point et qui en même temps soit entièrement intérieur à D_x (à D_y)*;

B. *La fonction connue $U_{n-1}(z_n^t, \zeta_n^v)$ est valable, en tant que limite supérieure de $|\, u_{n-1}(z_n^t, \zeta_n^v)\,|$, pour tous les points z_n^t et ζ_n^v de tous les contours C_n^t et Γ_n^v attachés à tous les points t de L_x et v de L_y; autrement dit, les* CONDITIONS $(n-1)^{\text{ièmes}}$ *sont satisfaites aux points z_n^t et ζ_n^v.*

14. *Expression explicite de ces conditions de validité d'ordre n.* — Celles-ci viennent d'être formulées seulement sous une forme *récurrente* au moyen des conditions analogues d'ordre $(n-1)$. Explicitons-les complètement en remontant de proche en proche jusqu'à $U_0(xy)$, qui est connue et égale à μ [(équation (3)] pour tous les points x, y de D_x, D_y :

D'après la loi récurrente qui sert à les définir, les conditions $(n-1)^{\text{ièmes}}$, exigées (par la sujétion B des conditions $n^{\text{ièmes}}$ du lemme I) relativement à z_n^t et ζ_n^v, impliquent à leur tour cette double condition que : A. à tout point z_n^t (ou ζ_n^v) — quelle que soit sa position sur C_n^t (et Γ_n^v) et celle de t (et v) sur L_x (et L_y) — et d'une manière générale à tout point intermédiaire du chemin « auxiliaire » [1] d'intégration $L_{z_n^t}$ (et $L_{\zeta_n^v}$), joignant x_0 à z_n^t (y_0 à ζ_n^v), correspond un contour C_{n-1} (ou Γ_{n-1}) qui *entoure* complètement ce point et qui en même temps est lui-même entièrement intérieur à D_x (à D_y) ; B. les conditions $(n-2)^{\text{iemes}}$ sont satisfaites en *tous* les points z_{n-1} (et ζ_{n-1}) de chacun des contours C_{n-1} (et Γ_{n-1}) visés à l'instant.

Or, de même, ces dernières conditions $(n-2)^{\text{ièmes}}$ imposent : A. à tout contour C_{n-2} (ou Γ_{n-2}), entourant un point quelconque z_{n-1} (ou ζ_{n-1}) desdits contours C_{n-1} et Γ_{n-1}, ou entourant un point quelconque des chemins « auxiliaires » d'intégration qui aboutissent en ces points z_{n-1} et ζ_{n-1}, d'être intérieur à D_x (ou à D_y) ; B. à tous les points z_{n-2} et ζ_{n-2} situés sur ces contours C_{n-2} et Γ_{n-2} de satisfaire aux conditions $(n-3)^{\text{ièmes}}$ de validité.

Et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive, en diminuant constamment l'ordre de ces conditions de validité, à des points z_2 et ζ_2 qui seront les points courants sur certains contours analogues C_2 et Γ_2 et qui devront satisfaire aux conditions premières de validité, c'est-à-dire que z_2 et ζ_2 devront — en vertu de la sujétion A, que comportent ces conditions premières — pouvoir être entourés (ainsi d'ailleurs que tous les points des chemins « auxiliaires » d'intégration aboutissant à ces points z_2, ζ_2) de contours C_1 et Γ_1 qui soient *intérieurs* à D_x et

---

[1] L'épithète « auxiliaire » a pour but de distinguer ces chemins, nécessités uniquement par le mode de démonstration, des chemins L_x et L_y, qui font partie des données mêmes de la question, et qui, pour cette raison, méritent d'être appelés « principaux ».

à D_y. Quant à la sujétion B, elle sera alors satisfaite d'elle-même en même temps que A, car $U_0(xy)$ — c'est-à-dire μ — est valable en tous les points de D_x, D_y, donc notamment aux points z_1 et ζ_1 des contours C_1 et Γ_1, du moment que la condition A est remplie.

L'ensemble des conditions ainsi énumérées forme donc les conditions de validité d'ordre n.

15. Exprimons-les sous une forme plus simple qui permettra de s'assurer facilement qu'elles sont bien remplies; dans ce but, introduisons la notion suivante :

Chaîne d'ordre n ou $n^{\text{ième}}$. — Il résulte entre autres choses des lignes précédentes qu'on doit entourer : 1° chaque point t (et v) du chemin L_x (et de L_y) d'un contour C_n^t (et Γ_n^v) ; 2° chaque point z_n (et ζ_n) appartenant à ce contour C_n^t (et Γ_n^v), à son tour d'un contour C_{n-1} (et Γ_{n-1}) ; 3° chaque point z_{n-1} (et ζ_{n-1}), appartenant à chacun de ces derniers contours C_{n-1} (et Γ_{n-1}), d'un nouveau contour C_{n-2} (et Γ_{n-2}), ..., et ainsi de suite; n° enfin chaque point z_2 (et ζ_2), appartenant à chacun des contours C_2 (et Γ_2), qui viennent immédiatement avant, d'un contour C_1 (et Γ_1).

Tous ces contours, ainsi déduits les uns des autres à partir d'un point déterminé t (et v), seront dits former une chaîne $n^{\text{ième}}$ *ou d'ordre n attachée au point t* (et v), qu'on désignera par le symbole χ_n^t (et χ_n^v).

Autre expression des conditions $n^{\text{ièmes}}$ du lemme I. — Avec cette terminologie, *les conditions $n^{\text{ièmes}}$ de validité* du lemme I s'expriment ainsi :

Il faut que :

1° *La chaîne $n^{\text{ième}}$ χ_n^t (ou χ_n^v) attachée à chaque point t (et v) du chemin « principal »* L_x *(et* L_y*) soit à l'intérieur de* D_x *(de* D_y*)* ;

2° *Les contours, formant les chaînes d'ordre* INFERIEUR *à n qui sont attachés, comme on a dit, aux différents points de tous les chemins « auxiliaires » d'intégration (chemins joignant x_0 et y_0 aux divers points des* *contours de la chaîne* χ_n^t (*et de* χ_n^v), *soient également à l'intérieur de* D_x (*et de* D_y).

Remarque. — Pour nous assurer que les chemins « auxiliaires » satisfont bien à la partie 2° des conditions $n^{\text{ièmes}}$, nous les choisirons de telle façon que, si le point *terminal* d'un tel chemin auxiliaire y satisfait, tous les autres points intermédiaires de ce même chemin y satisfassent *ipso facto*.

La vérification de la partie 1° des conditions de validité — relative à la chaîne χ_n^t — *entraînera* donc forcément avec elle celle de la partie 2°, relative aux chemins auxiliaires. Des chemins auxiliaires ainsi choisis seront dits satisfaire à la *condition des chemins auxiliaires.*

Un pareil choix sera possible d'une infinité de manières, en raison de ce que les chaînes partielles attachées aux points des chemins auxiliaires sont d'ordre *inférieur* à n. Cette indétermination permettra éventuellement de choisir de tels chemins « auxiliaires » satisfaisant en même temps à d'autres conditions (*voir* p. 40).

Indiquons maintenant une définition particulièrement simple des contours C_n, Γ_n et des chemins d'intégration, qui permet de remplir les conditions de validité et qui suffit pour démontrer la première partie du théorème annoncé.

16. *Choix des contours* C_n, Γ_n. — Prenons pour contour C_n (ou Γ_n), relatif à un point quelconque t (ou v) donné dans le plan des x (ou des y), un cercle entourant ce point t (ou v) de telle façon que la plus courte distance à ce cercle du point t (ou v) — situé à son intérieur — soit une constante δ_n; celle-ci sera fonction seulement du rang n (fonction dont nous n'aurons besoin de préciser la nature que plus tard) et devra être le terme général d'une série convergente ayant pour somme la constante positive arbitrairement petite ε.

Nous appellerons ε_n la somme $\sum_{\nu=1}^{\nu=n} \delta_n$ des n premiers termes de cette série; on aura

$$\lim_{(n=\infty)} \varepsilon_n = \varepsilon.$$

En outre, dans une première méthode [1] (destinée à établir uniquement la partie 1° du théorème annoncé), prenons pour centre de ce cercle le point fixe x_0 (et y_0).

Les contours C_n et Γ_n ainsi définis dépendent à la fois de l'entier n et de la position du point t ou v auquel ils sont attachés.

Ils méritent donc pleinement d'être désignés par la notation C_n^t, Γ_n^v.

Ils sont complètement déterminés. Leurs rayons respectifs R_n^t et R_n^v sont

$$\text{(10)} \qquad R_n^t = |t - x_0| + \delta_n, \qquad R_n^v = |v - y_0| + \delta_n.$$

Choix des chemins d'intégration. — Dans cette première méthode, nous prendrons pour *chemin d'intégration* (principal ou auxiliaire) L_t, reliant x_0 à un point *quelconque* t de D_x, *le segment de droite* qui joint x_0 à t (et de même, quel que soit v, nous prendrons comme chemin L_v, dans D_y, le segment de droite joignant y_0 à v).

17. LEMME II. — Cherchons dans quels domaines doivent être situés les points x, y pour satisfaire aux conditions de validité lorsque les contours C_n, Γ_n et les chemins d'intégration sont définis comme au numéro précédent (n° **16**).

Il est évident, d'après ces définitions, que la condition *des chemins auxiliaires* (formulée dans la Remarque du n° **15**) est toujours satisfaite. Donc les conditions de validité, prises sous la seconde forme (n° **15**), seront vérifiées entièrement si elles le sont en ce qui concerne leur première partie (sujétion 1°).

---

(1) Plus loin, dans une seconde méthode qui servira à démontrer plus spécialement la partie 2° du théorème, nous prendrons pour centre le point t (et v) lui-même. On voit par là que la position exacte des centres des cercles n'intervient dans la question que d'une manière un peu secondaire.

Occupons-nous donc de celle-ci. Or *chacun* des cercles concentriques C_n^t, C_{n-1}, ..., C_1 de la chaîne χ_n^t d'ordre n attachée au point t est *entièrement intérieur* au suivant; le plus grand d'entre eux (c'est-à-dire le dernier C_1) a un rayon égal à $|t-x_0|+\varepsilon_n$; appelons-le E_{n-1}^t.

En passant à la limite, on voit que *tous* les cercles de la chaîne χ_n^t sont — *quel que soit n* — intérieurs au cercle E_∞^t (limite de E_{n-1}^t pour $n=\infty$), qui a pour centre x_0 et pour rayon $|t-x_0|+\varepsilon$ [1].

Donc on sera sûr que les conditions de validité de *tous* les ordres sont bien remplies (en ce qui concerne le plan des x), si, quel que soit t sur le chemin L_x, le cercle E_∞^t est intérieur à D_x, c'est-à-dire si *le plus grand* de ces cercles, savoir E_∞^x, est bien intérieur à D_x.

Or le point x est à l'intérieur de ce cercle E_∞^x et à une plus courte distance de lui égale à la quantité *arbitrairement* petite ε [2].

Donc (le raisonnement étant le même pour la variable y), on sera sûr que, moyennant les définitions de contours et de chemins données au n° **16**, *les conditions de validité de tous les ordres sont remplies, si x (et y) est intérieur au plus grand cercle d_{x_0} (et d_{y_0}) qu'on puisse tracer avec x_0 (et y_0) pour centre sans sortir de D_x (de D_y).*

Tel est le lemme II qui répond définitivement aux questions de nature géométrique posées par les conditions de validité.

Nous allons continuer la détermination analytique de U_n en supposant que x et y vérifient cette condition du lemme II d'être *intérieurs* au domaine bicirculaire (d_{x_0}, d_{y_0}).

18. *Détermination effective de* $U_n(xy)$. — Cette détermination nécessite le calcul d'intégrales prises le long de L_x et de L_y. Appe-

---

(1) Ils sont d'ailleurs aussi tous extérieurs au cercle C_∞^t (limite de C_n^t), qui a pour centre x_0, et qui passe par le point t. Ils sont donc tous dans la couronne comprise entre les deux cercles concentriques E_∞^t et C_∞^t.

(2) C'est ici l'endroit où apparaît la nécessité d'avoir choisi comme constantes δ_n des quantités formant une série convergente de somme ε.

lons désormais $s(x)$ et $s(y)$ *les longueurs des lignes* d'intégration L_x et L_y comptées l'une depuis x_0 jusqu'à x, l'autre de y_0 à y.

Pour simplifier, nous mettrons à l'occasion s à la place de $s(t)$ et s' pour $s(v)$, t et v étant les variables d'intégration sur L_x et L_y. On aura donc évidemment

$$|dt| = ds, \qquad |dv| = ds'.$$

et

$$\int_{L_x}^{m} |dt|^m = \int_0^{s(x)} ds^m = \frac{s^m(x)}{m!}, \qquad \int_{L_y}^{p} |dv|^p = \frac{s^p(y)}{p!}.$$

En particulier, $L_{z_n^t}$ et $L_{\zeta_n^v}$ étant les chemins « *auxiliaires* » d'intégration, qui joignent respectivement x_0 et y_0 à deux points quelconques z_n^t et ζ_n^v des cercles C_n^t et Γ_n^v, les expressions $s(z_n^t)$ et $s(\zeta_n^v)$ représenteront les longueurs de ces chemins tout entiers, de x_0 jusqu'à z_n et de y_0 à ζ_n.

Cela posé, nous allons en procédant de proche en proche et faisant successivement $n = 0, 1, 2, \ldots$ *déterminer effectivement* la fonction $U_n(xy)$, qui a été définie par récurrence au lemme I comme ayant une valeur au moins égale au second membre $W_n(xy)$ de la relation (9).

Dans ce but, remarquons qu'on peut trouver pour les deux *intégrales* γ_n^t et γ_n^v, *figurant dans* $W_n(xy)$, *des limites supérieures* Δ_n, Δ_n' *qui soient fonctions uniquement de* δ_n, c'est-à-dire qui ne dépendent pas de la position de t ou de v à l'intérieur de C_n^t ou de Γ_n^v autrement que par la constante δ_n (représentant, d'après la définition du n° **1**, la plus courte distance de t et v au cercle correspondant C_n^t, Γ_n^v).

En effet, par exemple, si A désigne une constante supérieure au périmètre d'un quelconque des contours C_n et Γ_n considérés (contours qui sont intérieurs au domaine borné D_x, D_y), on pourrait évidemment prendre $\Delta_n = \frac{A}{\delta_n^{r+1}}$ et $\Delta_n' = \frac{A}{\delta_n^{q+1}}$ (et cela, même si l'on avait choisi des contours *quelconques*, non circulaires).

D'ailleurs nous verrons plus loin (lemme III) qu'on peut obtenir aisément une meilleure approximation, *lorsque les contours* C_n^t *et* Γ_n^v

sont des cercles, comme il a été supposé au n° **16**. Mais pour le moment, nous n'avons pas besoin des expressions mêmes de Δ_n et Δ'_n; il nous suffit de savoir que ces quantités sont indépendantes des variables t et v.

19. *Expression de* $U_1(xy)$. — Cela étant, pour $n=0$, on a

$$U_0(xy)=\mu$$

et, par suite, pour $n=1$, $U_1(xy)$ pourra être définie par

$$(11)\quad W_1(xy) \leqq \mu a M \Delta_1 \Delta'_1 \int_{L_x}^{m} |dt|^m \int_{L_y}^{p} |dv|^p = \mu a M \Delta_1 \Delta'_1 \frac{s^m(x)}{m!}\frac{s^p(y)}{p!} = U_1(xy).$$

20. *Expression de* $U_2(xy)$. « *Relation des arcs* ». — Puis pour $n=2$, on aura de même

$$(12)\quad \begin{aligned} W_2(xy) &\leqq aM\Delta_2\Delta'_2 \int_{L_x}^{m} |dt|^m \int_{L_y}^{p} U_1(z_2^t \zeta_2^v)\,|dv|^p \\ &= \mu(aM)^2 \Delta_1\Delta_2\Delta'_1\Delta'_2 \int_{L_x} ds^m \int_{L_y} \frac{s^m(z_2^t)}{m!}\frac{s^p(\zeta_2^v)}{p!}\,ds^p, \qquad \leqq U_2(xy). \end{aligned}$$

Nous avons besoin maintenant de connaître l'expression (ou tout au moins une limite supérieure) de $s(z_2^t)$ et $s(\zeta_2^v)$ en fonction de t et v.

Relations des arcs. — Or nous allons montrer que d'une manière générale *la définition adoptée au n°* **16** *pour les chemins « auxiliaires » d'intégration* $L_{z_n^t}$, $L_{\zeta_n^v}$ *entraîne instantanément les relations suivantes, que nous appellerons les* Relations des Arcs, savoir :

$$(13)\qquad s(z_n^t)=s(t)+\delta_n, \qquad s(\zeta_n^v)=s(v)+\delta_n,$$

et qui ont lieu pour tous les points t, v des chemins L_x, L_y et pour toute valeur de n.

Cela est immédiat; en effet, cette définitiou du n° **16** entraîne la suite d'égalités évidentes que voici :

$$(14) \qquad s(z_n^t) = |z_n^t - x_0| = \mathrm{R}_n^t = |t - x_0| + \delta_n = s(t) + \delta_n.$$

On aurait des égalités analogues avec $s(\zeta_n^v)$ dans le domaine D_y.

En vertu des égalités (13), où l'on fait $n = 2$, la relation (12) devient

$$(15) \qquad \mu(a\mathrm{M})^2 \Delta_1 \Delta_2 \Delta'_1 \Delta'_2 \int_{\mathrm{L}_x} \frac{[s(t)+\delta_2]^m\, ds^m}{m!} \cdot \int_{\mathrm{L}_y} \frac{[s(v)+\delta_2]^p\, ds'^p}{p!} \leqq \mathrm{U}_2(xy).$$

Évaluons une limite supérieure de ces deux intégrales. On a, d'après les relations convenues (nº **18**) pour les longueurs des lignes d'intégration

$$\int_{\mathrm{L}_x}^{m} \frac{[s(t)+\delta_2]^m\, ds^m}{m!} \int_0^{s(x)} \frac{(s+\delta_2)^m\, ds^m}{m!}$$
$$= \int_0^{s(x)} ds_{m-1} \int_0^{s_{m-1}} ds_{m-2} \cdots \int_0^{s_3} ds_2 \int_0^{s_2} ds_1 \int_0^{s_1} \frac{(s+\delta_2)^m\, ds}{m!}.$$

Appelons $\mathrm{I}_m[s(x)]$ cette intégrale m-uple. Calculons ces intégrales superposées ; on a (en désignant au besoin les factorielles par la notation commode $\underline{|\quad}$)

$$\mathrm{I}_1(s_1) = \int_0^{s_1} \frac{(s+\delta_2)^m\, ds}{m!} = \left[\frac{(s+\delta_2)^{m+1}}{\overline{m+1}!}\right]_{s=0}^{s=s_1} < \frac{(s_1+\delta_2)^{m+1}}{\overline{m+1}!},$$

$$\mathrm{I}_2(s_2) = \int_0^{s_2} ds_1 \int_0^{s_1} \frac{(s+\delta_2)^m\, ds}{m!}$$
$$= \int_0^{s_2} \mathrm{I}_1(s_1)\, ds_1 < \left[\frac{(s_1+\delta_2)^{m+2}}{\overline{m+2}!}\right]_{s_1=0}^{s_1=s_2} < \frac{(s_2+\delta_2)^{m+2}}{\underline{|m+2}}.$$

D'une manière générale, montrons que l'inégalité suivante est générale

$$(16) \qquad \mathrm{I}_\nu(s_\nu) < \frac{(s_\nu+\delta_2)^{m+\nu}}{\overline{m+\nu}!}.$$

Puisqu'elle est vraie pour $\nu = 1$ et 2, il n'y a qu'à la supposer encore vraie pour ν et à faire la preuve pour $(\nu + 1)$

$$I_{\nu+1}(s)_{\nu+1} = \int_0^{s_{\nu+1}} I_\nu(s_\nu)\, ds_\nu < \int_0^{s_{\nu+1}} \frac{(s_\nu + \delta_2)^{m+\nu}}{\underline{|m+\nu}!}\, ds_\nu$$

$$= \left[\frac{(s_\nu + \delta_2)^{m+\nu+1}}{\underline{|m+\nu+1}}\right]_{s=0}^{s_\nu = s_{\nu+1}} < \frac{(s_{\nu+1} + \delta_2)^{m+\nu+1}}{(m+\nu+1)!}.$$

Cela étant, on aura donc *a fortiori*, en remplaçant δ_2 par la somme $(\delta_1 + \delta_2)$ ou ε_2,

$$\int_{L_x}^{m} \frac{[s(t) + \delta_2]^m\, ds^m}{m!} = I_m[s(x)] < \frac{[s(x) + \delta_2]^{2m}}{(2m)!} < \frac{[s(x) + \varepsilon_2]^{2m}}{(2m)!},$$

$$\int_{l_y}^{p} \frac{[s(v) + \delta_2]^p\, ds^p}{p!} < \frac{[s(y) + \delta_2]^{2p}}{(2p)!} < \frac{[s(y) + \varepsilon_2]^{2p}}{(2p)!}.$$

Nous ne ferons donc qu'augmenter le premier membre de (15) en y remplaçant les deux intégrales par ces deux limites supérieures et par suite nous pourrons prendre pour $U_2(xy)$ la fonction qui en résulte :

$$(17) \qquad U_2(xy) = \mu(aM)^2 \Delta_1 \Delta_2 \Delta'_1 \Delta_2 \frac{[s(x) + \varepsilon_2]^{2m}}{(2m)!} \frac{[s(y) + \varepsilon_2]^{2p}}{(2p)!}.$$

Et ainsi de suite.

21. *Expression de* $U_n(xy)$. — D'une manière générale, admettons que la fonction $U_{n-1}(xy)$ soit

$$(18) \qquad U_{n-1}(xy) = \mu(aM)^{n-1} \Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_{n-1} \times \Delta'_1 \Delta'_2 \ldots \Delta'_{n-1} \times \frac{[s(x) + \varepsilon_{n-1}]^{(n-1)m}}{\underline{|(n-1)m}} \times \frac{[s(y) + \varepsilon_{n-1}]^{(n-1)p}}{(n-1)p!},$$

comme cela a lieu par exemple pour U_2.

Démontrons que pour la valeur suivante de l'indice, *n augmentant* d'une unité, *nous pourrons aussi prendre pour* $U_n(xy)$ *une expression de même forme*, savoir

$$(19) \qquad U_n(xy) = \mu(aM)^n \Delta_1 \ldots \Delta_n \times \Delta_1 \ldots \Delta'_n \times \frac{[s(x) + \varepsilon_n]^{nm}}{(nm)!} \frac{[s(y) + \varepsilon_n]^{np}}{(np)!}.$$

En effet, pour déterminer la fonction $U_n(xy)$ nous devons remplacer, dans le second membre de (9), $U_{n-1}(z_n\zeta_n)$ par sa valeur déduite de (18) ; nous devons donc, dans (18), faire $x = z_n$, $y = \zeta_n$, puis y remplacer $s(z_n)$ et $s(\zeta_n)$ par leurs expressions (13), ce qui donne

$$U_{n-1}(z_n\zeta_n) = \mu(aM)^{n-1}\Delta_1\ldots\Delta_{n-1}\Delta'_1\ldots\Delta'_{n-1} \times \frac{[s(t)+\delta_n+\varepsilon_{n-1}]^{(n-1)m}}{[(n-1)m]!}\,\frac{[s(v)+\delta_n+\varepsilon_{n-1}]^{(n-1)p}}{[(n-1)p]!}.$$

Substituons encore à la somme $(\delta_n + \varepsilon_{n-1})$ son expression ε_n [formule (3)] et portons dans (9) ; il vient

$$(20)\qquad W_n(xy) \leqq \mu(aM)^n\Delta_1\ldots\Delta_{n-1}\Delta_n\Delta'_1\ldots\Delta'_{n-1}\Delta'_n \times \int_{L_x}^{m}\frac{(s+\varepsilon_n)^{(n-1)m}}{\underline{|(n-1)m}}\,|dt|^m \times \int_{L_y}^{p}\frac{(s'+\varepsilon_n)^{(n-1)p}}{\underline{|(n-1)p}}\,|dv|^p.$$

Or on a ici, comme dans le cas de $U_2(xy)$,

$$\int_{L_x}^{m}\frac{(s+\varepsilon_n)^{(n-1)m}}{\underline{|(n-1)m}}\,|dt|^m = \int_0^{s(x)}\frac{(s+\varepsilon_n)^{(n-1)m}\,ds^m}{\underline{|(n-1)m}} < \frac{[s(x)+\varepsilon_n]^{nm}}{(nm)!}.$$

L'autre intégrale de (20) conduit à une inégalité analogue. En tenant compte de ces inégalités dans (20), le second membre de (20) devient identique à celui de (19).

Conclusion. — Puisque le lemme I exige simplement de la fonction cherchée $U_n(xy)$ qu'elle ait une valeur supérieure ou au moins égale à $W_n(xy)$, *nous avons bien le droit d'adopter pour* $U_n(xy)$ *le second membre de* (19).

Nota. — Observons que c'est grâce aux *relations des arcs* (13), que les factorielles $\underline{|(n-1)m}$ et $\underline{|(n-1)p}$, figurant au dénominateur de $U_{n-1}(xy)$, se transforment, dans $U_n(xy)$, en $(nm)!$ et $(np)!$. Or ces factorielles vont jouer maintenant un rôle essentiel pour contre-balancer le produit des Δ_n et Δ'_n et assurer ainsi la convergence de la série

$\Sigma U_n(xy)$. Comme d'ailleurs la possibilité de satisfaire à ces *conditions des arcs* est due elle-même à ce que les contours C_n^t et Γ_n^v sont *variables avec t et v*, on voit en dernière analyse que c'est en grande partie de cette propriété des contours que va découler d'une manière simple la démonstration de la convergence.

Convergence de la série majorante $\Sigma U_n(xy)$.

22. Le moment est venu, pour étudier cette convergence, de calculer les quantités Δ_n, Δ'_n qui figurent dans l'expression (19) adoptée pour $U_n(xy)$.

C'est au n° **18** que nous avons défini ces symboles Δ_n et Δ'_n comme limites supérieures des deux intégrales

$$\gamma_n^t = \int_{C_n^t} \frac{|dz_n^t|}{|z_n^t - t|^{r+1}}, \qquad \gamma_n^v = \int_{\Gamma_n^v} \frac{|d\zeta_n^v|}{|\zeta_v^n - v|^{q+1}},$$

qui figurent dans la relation (7), mais sous la condition que ces limites supérieures soient fonctions uniquement de la plus courte distance, δ^n du point t (ou v) au contour C_n^t (ou Γ_n^v), qui l'entoure.

Nous prendrons pour Δ_n la valeur fournie par la proposition suivante (et pour Δ'_n une valeur analogue) :

Lemme III. — *Le contour C_n^t étant circulaire, l'intégrale γ_n^t admet pour limite supérieure la constante $\frac{2\pi}{\delta_n^r}$, quels que soient la position de t à l'intérieur du cercle C_n^t et le rayon de celui-ci.*

Démontrons qu'on a toujours dans ce cas

$$\gamma_n^t \leqq \Delta_n = \frac{2\pi}{\delta_n^r}.$$

En effet :

1° Si t est le *centre* de C_n, $|z_n^t - t|$ est égal à δ_n et γ_n^t a bien pour valeur $\frac{2\pi}{\delta_n^r}$.

2° Si t n'est pas au centre, $|z_n^t - t|$ est $\geqq \delta_n$, donc on a visiblement

$$\gamma_n^t \leqq \frac{\gamma}{\delta_n^{r-1}}$$

en posant

$$\gamma = \int_{C_n^t} \frac{|dz_n^t|}{|z_n^t - t|^2}.$$

Le point t étant un point quelconque supposé fixe à l'intérieur du cercle également fixe C_n^t, appelons ρ la distance de t au point z_n^t variable sur C_n^t, et $d\sigma$ l'élément d'arc compté sur C_n^t à partir d'une origine fixe avec le sens positif de circulation convenu une fois pour toutes. L'intégrale γ peut s'écrire

$$\gamma = \int_{C^t} \frac{d\sigma}{\rho^2}.$$

Donc pour montrer que γ_n^t est $< \frac{2\pi}{\delta_n^r}$, il suffit de prouver que γ est $< \frac{2\pi}{\delta_n}$.

Or soient R le rayon de C_n^t, h la distance $R - \delta_n$ du centre au point t, φ l'angle du rayon *fixe passant par t* avec le rayon aboutissant au point variable z_n^t. Alors ρ est égal a

$$\sqrt{h^2 + R^2 - 2hR\cos\varphi}$$

ou à

$$\sqrt{(h^2 + R^2)(1 - g\cos\varphi)},$$

en désignant par g la quantité $\frac{2hR}{h^2 + R^2}$. Par suite, $d\sigma$ étant égal à $R\,d\varphi$, on a

$$\gamma = \frac{g}{2h}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - g\cos\varphi}.$$

On sait (¹) que cette dernière intégrale a pour valeur $\frac{2\pi}{\sqrt{1 - g^2}}$, c'est-à-dire $\frac{2\pi(h^2 + R^2)}{(R - h)(R + h)}$ ou encore $\frac{2\pi(h^2 + R^2)}{\delta_n(2R - \delta_n)}$. Puisque $2R - \delta_n$

(¹) *Leçons d'Algèbre* de Briot et Goursat, p. 523, 3°.

est $>$ R, on a donc bien

$$\gamma = \frac{R}{h^2+R^2} \cdot \frac{2\pi(h^2+R^2)}{\delta_n(2R-\delta_n)} < \frac{2\pi}{\delta_n}.$$

C. Q. F. D.

23. *Choix de δ_n.* — Cela posé, la quantité δ_n, fonction seulement de l'entier n, doit être, d'après sa définition du n° **16**, le terme général d'une série convergente de somme ε. Nous pouvons donc prendre pour δ_n l'expression suivante, qui répond bien à ces conditions :

$$\delta_n = \frac{\varepsilon}{\omega} \times \frac{1}{n^\alpha},$$

α étant une constante arbitraire réelle > 1 et ω la somme de la série convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

Pour cette valeur de δ_n, on aura, d'après le lemme III,

$$\Delta_n = 2\pi \left(\frac{\omega}{\varepsilon}\right)^r n^{\alpha r}.$$

De même, pour obtenir la limite supérieure Δ'_n de γ''_n, il suffit de remplacer r par q, d'où

$$\Delta'_n = 2\pi \left(\frac{\omega}{\varepsilon}\right)^q n^{\alpha q}.$$

24. En substituant dans la formule (19) ces valeurs de Δ_n et Δ'_n, il vient

$$\text{(22)} \qquad U_n(xy) = \mu(n!)^{\alpha(r+q)} \frac{(X_n)^n}{(nm)!\,(np)!},$$

en posant pour simplifier

$$\text{(23)} \qquad X_n = a M 4\pi^2 \left(\frac{\omega}{\varepsilon}\right)^{r+q} [s(x)+\varepsilon_n]^m [s(y)+\varepsilon_n]^p.$$

Or on ne fera qu'accroître le second membre de (22) en remplaçant d'une part au dénominateur les deux factorielles $(nm)!$ et $(np)!$ par les quantités visiblement moindres $(n!)^m$ et $(n!)^p$; d'autre part, dans X_n,

ε_n par sa limite ε, qui est plus grande; si l'on appelle X ce que devient ainsi X_n, on aura (X étant donc indépendant de n),

$$(24) \qquad U_n(xy) < \mu \frac{(X)^n}{(n!)^\tau},$$

avec

$$\tau = m + p - \alpha(r + q).$$

Mais on peut faire en sorte que τ soit positif; il n'y a qu'à choisir [1] pour α un des nombres qui vérifient simultanément ces deux intégralités-ci (*compatibles en vertu de l'hypothèse* $m + p > r + q$) :

$$1 < \alpha < \frac{m+p}{r+q}.$$

Le second membre de (24) est donc le terme général d'une série qui *est convergente quelles que soient les valeurs finies de* $s(x)$ *et* $s(y)$ (comme on le voit instantanément en appliquant, par exemple, la règle de d'Alembert). Cela a lieu notamment si l'on substitue à $s(x)$ et $s(y)$ deux nombres fixes positifs l et l', qui soient supérieurs à toutes les valeurs que $s(x)$ et $s(y)$ peuvent prendre, quand on donne aux deux extrémités x et y des chemins L_x et L_y toutes les positions possibles dans les domaines *bornés* D_x et D_y, leurs origines fixes x_0 et y_0 étant elles-mêmes choisies d'une manière quelconque dans ces domaines.

25. *Conclusion. — Ainsi la série* $\sum_{n=0}^{\infty} U_n(xy)$ *et* a fortiori $\Sigma|u_n(xy)|$ *est dominée par une série numérique convergente* (à termes indépendants de x et y).

La série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(xy)$ est donc absolument et uniformément convergente sans aucune restriction nouvelle autre que celles des conditions

(1) C'est ici qu'apparaît l'intérêt d'avoir choisi pour δ_n non pas le terme général d'une série convergente *quelconque* ayant pour somme ε, mais précisément l'expression ci-dessus; celle-ci en effet décroît *assez lentement* (et par conséquent inversement Δ_n croît assez lentement) pour que les factorielles du dénominateur de $U_n(x, y)$ [équations (19) ou (22)] l'emportent sur les produits de Δ_n et Δ'_n.

de validité qui a été formulée au lemme II (n° **17**); c'est-à-dire que cette convergence a lieu tant que les points x et y sont intérieurs aux cercles d_{x_0} et d_{y_0}.

Donc comme nous l'annoncions au n° **12** le développement synthétique $\Sigma U_n(x, y)$ représente une fonction $\varphi(x, y)$, holomorphe et dérivable terme à terme, et sera bien réellement solution de l'équation donnée, dans le domaine bicirculaire (d_{x_0}, d_{y_0}) constitué par les deux plus grands cercles de centres x_0 et y_0, qui soient intérieurs respectivement à D_x et D_y.

Ce domaine d'existence de la solution est donc le même que celui dans lequel les coefficients de l'équation sont eux-mêmes développables en série de Taylor procédant suivant les puissances croissantes de $(x - x_0)$ et $(y - y_0)$.

Donc la solution holomorphe $\varphi(x, y)$ pourra être prolongée par cheminement comme les coefficients eux-mêmes, dans toute la région (D_x, D_y).

La première partie du théorème énoncé au n° **12** *est ainsi démontrée.*

Démonstration de la seconde partie.

26. Pour démontrer la seconde partie du théorème (ce qui en somme fournira en même temps *une seconde démonstration de la première partie*), nous emploierons une méthode toute semblable à la précédente, la seule différence portant sur le choix des contours C_n^t et Γ_n^v et des chemins d'intégration.

Les contours que nous allons prendre seront définis de la manière que nous avons annoncée en note au n° **16**, savoir :

Les contours C_n^t *et* Γ_n^v *seront de petits cercles ayant pour centre* VARIABLE *respectivement les points* t *et* v *eux-mêmes et pour rayon la longueur* δ_n (variable avec n seulement et indépendante de t et v).

Les chemins principaux L_x et L_y seront tracés à volonté à l'intérieur du domaine (D_x, D_y); les chemins « auxiliaires » seront définis quelques lignes plus loin, de façon à satisfaire à la *condition des chemins auxiliaires* du n° **15** et à la *relation des arcs* du n° **20**.

Moyennant ces divers choix, il est clair que les raisonnements et calculs se développent comme pour la première partie : on trouve pour limite supérieure $U_n(xy)$ une expression de forme identique à la précédente, et la convergence de la série $\Sigma U_n(xy)$ n'introduit pas non plus de sujétion spéciale. Les seules conditions à remplir sont donc, comme avant, celles de la validité.

Mais — c'est ici la différence fondamentale des deux méthodes — *grâce au choix des contours et des chemins, les conditions de validité sont vérifiées cette fois dans tout le domaine* (D_x, D_y) (*frontières non comprises*) et l'on obtient ainsi par conséquent le résultat cherché. C'est ce que nous allons faire voir immédiatement :

Nous prendrons pour chemin auxiliaire d'intégration, reliant x_0 (ou y_0) à un point terminal quelconque situé sur un cercle quelconque de la chaîne χ_n^t (ou χ_n^v) attachée au point t (ou v) de L_x (ou de L_y), *une ligne composée d'une part de la portion du chemin principal* L_x (*ou* L_y) *qui va de* x_0 (*ou* y_0) *jusqu'à* t (*ou* v), *et d'autre part, à partir de ce point* t (*ou* v), *du segment de droite qui aboutit au point terminal considéré.*

a. En particulier, si le point terminal en question est un point quelconque z_n^t appartenant au cercle C_n^t (qui est le premier qu'on rencontre à partir du point t quand on construit la chaîne χ_n^t d'ordre n attachée au point t), *le chemin « auxiliaire » correspondant* $L_{z_n^t}$ *sera constitué par l'arc de longueur* $s(t)$, *qui* va de x_0 jusqu'à t sur L_x, *puis par le rayon* δ_n *du cercle* C_n^t.

On aura donc bien *la relation des arcs* (p. 31), et de même dans le domaine D_y.

b. Il est également évident qu'avec ces définitions des contours et des chemins auxiliaires, *la condition des chemins auxiliaires* (*voir* n° **15**) est aussi satisfaite.

c. Il ne reste donc plus qu'à satisfaire *aux conditions de validité de tous ordres en ce qui concerne leur partie* (A).

Or il est clair que *tous les cercles* (C_n^t, C_{n-1}, ..., C_1) *de la chaîne* χ_n^t *sont à l'intérieur du cercle* E_{n-1}^t *de centre* t *et de rayon* ε_n, qui enveloppe ceux des cercles C_1 de la chaîne qui sont le plus éloignés du point t : on le voit aisément en envisageant, dans la chaîne χ_n^t, n cercles consécutifs (C_n^t, C_{n-1}, ..., C_1) dont les centres soient alignés sur une même demi-droite quelconque issue du point t; le dernier cercle C_1 de cette suite est *un* des cercles C_1 précités, c'est-à-dire un de ceux qui sont le plus loin de t, et ce cercle C_1 touche le cercle E_{n-1}^t qui est l'enveloppe de tous les cercles C_1 de cette chaîne.

En passant à la limite, on voit que *tous* les cercles de la chaîne χ_n^t sont — *quel que soit* n — intérieurs au cercle E_∞^t (limite de E_{n-1}^t pour $n = \infty$), qui a pour centre le point t et pour rayon la limite ε de ε_n.

Donc on sera sûr que la chaîne χ_n^t est intérieure à D_x, *quel que soit l'ordre* n, si ce cercle E_∞^t est lui-même intérieur à D_x, c'est-à-dire si le point t est à une distance $> \varepsilon$ de la frontière C_0 de D_x.

Les conditions de validité de tous ordres seront donc bien remplies, si cela a lieu pour *tout* point t du chemin « principal » d'intégration L_x; *c'est-à-dire si tout point* (x *ou* t) *de* L_x *est à l'intérieur d'un contour tracé dans* D_x *à une distance constante* ε *de la frontière* C_0 *de* D_x (le nombre arbitraire ε pouvant d'ailleurs être aussi petit qu'on veut).

Résultat analogue pour le domaine D_y.

Conclusion. — Donc toutes les conditions (conditions de validité de tous ordres et relations des arcs) sont bien satisfaites quand x et tout le chemin L_x (y et tout le chemin L_y) restent dans une région quelconque intérieure à D_x (à D_y).

Cela étant, tous les autres calculs et raisonnements sont les mêmes que dans la première méthode.

Donc la *solution* $\varphi(xy)$ *est bien holomorphe et représentable par la série* $\Sigma u_n(xy)$ *dans la totalité du domaine* (D_x, D_y), sauf peut-être sur les frontières C_0 et Γ_0. Ce résultat comprend la première partie comme cas particulier. C. Q. F. D.

B. — *Formule condensée de résolution formée avec un noyau résolvant.*

27. Étant donnée l'équation intégro-différentielle linéaire normale (1 *bis*) considérée (p. 21), nous allons mettre sa solution $\varphi(xy)$ — représentée par le développement synthétique $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(xy)$, dont on a démontré la convergence uniforme dans le domaine (D_x, D_y) — sous une forme analogue à celle qu'ont fait connaître MM. Volterra et Fredholm pour les équations qui portent leurs noms.

Établissons au préalable une proposition générale, qui concerne l'interversion des intégrations, et qui nous sera utile.

Lemme $\left(\textit{sur l'interversion des signes } \int\right)$. — *Si une fonction de plusieurs variables* — de quatre variables, par exemple, $\psi(tvz\zeta)$ — *admet un développement en série* UNIFORMÉMENT *convergent, dont le terme général soit un produit, où les variables soient séparées par groupes répartis dans plusieurs facteurs* — comme, par exemple, un développement de la forme $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \omega_n(tv) \times w_n(z\zeta)$, où les variables sont séparées en deux groupes (tv) et $(z\zeta)$ entre deux facteurs — *et si l'on applique à cette fonction* ψ *des intégrations quelconques* (simples ou multiples, à limites fixes ou variables) mais *groupées elles-mêmes comme le sont les variables dans le développement, on pourra intervertir dans l'intégration l'ordre de ces groupes d'intégrales (pris en bloc); autrement dit, si par exemple on applique d'une part au groupe de variables* (tv) *le groupe d'intégrales* $\int_{L_x} dt^m \int_{L_y} dv^p$, *qui sont respectivement des intégrales* m-uples *et* p-uples *le long des deux chemins* L_x *et* L_y *et d'autre part au groupe de variables* $(z\zeta)$, *le groupe d'intégrales* $\int_C dz \int_\Gamma d\zeta$ *prises le long de deux autres chemins à limites fixes* C *et* Γ, *on aura l'égalité*

$$(\alpha) \qquad \int_{L_x} dt^m \int_{L_y} dv^p \int_C dz \int_\Gamma \psi(tvz\zeta)\,d\zeta = \int_C dz \int_\Gamma d\zeta \int_{L_x} dt^m \int_{L_y} \psi(tvz\zeta)\,dv^p.$$

(Et, bien entendu, cela aurait lieu pour un nombre quelconque de groupes formés chacun d'une ou plusieurs variables.)

En effet, remplaçons, dans le premier membre de cette égalité (α), la fonction ψ par son développement

$$\Sigma\omega_n(tv) \times \varpi_n(z\zeta);$$

puisque celui-ci est uniformément convergent, on peut l'intégrer terme à terme; autrement dit, on peut intervertir le signe $\sum$ et les signes $\int$, ce qui donne l'égalité

$$(\beta) \qquad \int_{L_x} dt^m \int_{L_y} dv^p \int_C dz \int_\Gamma \left(\sum_0^\infty \omega_n \times \varpi_n \right) d\zeta$$
$$= \sum_{n=0}^\infty \left\{ \int_{L_x} dt^m \int_{L_y} dv^p \int_C dz \int_\Gamma \omega_n(tv) \times \varpi_n(z\zeta)\, d\zeta \right\}.$$

En opérant de même sur le second membre de (α), on obtient l'égalité analogue

$$(\gamma) \qquad \int_C dz \int_\Gamma d\zeta \int_{I_x} dt^m \int_{L_y} \left(\sum_{n=0}^\infty \omega_n \times \varpi_n \right) dv^p$$
$$= \sum_{n=0}^\infty \left\{ \int_C dz \int_\Gamma d\zeta \int_{L_x} dt^m \int_{L_y} \omega_n(tv) \times \varpi_n(z\zeta)\, dv^p \right\}.$$

Or les seconds membres de (β) et (γ) sont égaux, car le premier n'est autre que la somme

$$\sum_0^\infty \left\{ \left[\int_{I_x} dt^m \int_{L_y} \omega_n(tv)\, dv^p \right] \times \left[\int_C dz \int_\Gamma \varpi_n(z\zeta)\, d\zeta \right] \right\},$$

et le second est la même somme, où l'on a simplement interverti l'ordre des deux facteurs dans le terme général.

Donc les premiers membres des égalités (β) et (γ) sont aussi égaux.

C. Q. F. D.

Remarque. — Ce théorème s'appliquera notamment aux fonctions ψ développables en série multiple de Taylor dans le domaine d'intégration.

Bien entendu, on peut aussi bien se placer dans le domaine réel ou complexe.

28. Cela posé, abordons le problème annoncé. D'une manière précise, le résultat que nous avons en vue s'exprime par la proposition suivante :

Théorème. — *Étant donnée l'équation intégro-différentielle considérée* (1 *bis*) *et sa solution holomorphe*

$$\varphi(xy) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(xy),$$

on peut mettre :

1° *Cette équation sous la forme que voici* (en se bornant au cas où les chemins L_x et L_y restent à l'intérieur des cercles C et Γ de centres x_0 et y_0) :

$$(a) \qquad \varphi(xy) = f(xy) + \frac{r!\,s!}{(2\pi i)^2}\int_C\int_\Gamma H_0(xyz\zeta)\,\varphi(z\zeta)\,dz\,d\zeta$$

en posant

$$\int_{L_x}^{m} dt^m \int_{L_y}^{p} \frac{K(xy\,tv)\,dv^p}{(z-t)^{r+1}(\zeta-v)^{q+1}} = H_0(xyz\zeta),$$

et 2° *la solution* $\varphi(xy)$ *sous la forme* (valable dans le même domaine bicirculaire)

$$(b) \qquad \varphi(xy) = f(xy) + \frac{r!\,s!}{(2\pi i)^2}\int_C\int_\Gamma T(xyz\zeta)\times f(z\zeta)\,dz\,d\zeta,$$

dans laquelle $T(xyz\zeta)$, qui joue le rôle du *noyau résolvant* formé au moyen du noyau $H_0(xyz\zeta)$, *a la valeur indiquée un peu plus loin.*

Il est à remarquer que l'équation donnée, qui est du *type Volterra*, est ainsi transformée en une équation du *type Fredholm.*

29. Pour démontrer la première partie du théorème, il suffit d'exprimer, dans l'équation donnée, la dérivée $\frac{\partial^{r+q}\varphi(tv)}{\partial t^r \partial v^q}$ par une intégrale au moyen de la formule fondamentale de Cauchy ; d'où

$$\frac{\partial^{r+q}\varphi(tv)}{\partial t^r \partial v^q} = \frac{r!\, s!}{(2\pi i)^2}\int_{C}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(z\zeta)\, dz\, d\zeta}{(z-t)^{r+1}(\zeta-v)^{q+1}},$$

et l'équation donnée devient

$$\varphi(xy) = f(xy) + \frac{r!\, s!}{(2\pi i)^2}\int_{L_x}^{m} dt^m \int_{L_y}^{p} dv^p \int_{C}\int_{\Gamma}\frac{K(xy\, tv)\,\varphi(z\zeta)}{(z-t)^{r+1}(\zeta-v)^{q+1}}\, dz\, d\zeta.$$

Appelons $\psi(tvz\zeta)$ la fonction $\frac{K(xy\, tv)\,\varphi(z\zeta)}{(z-t)^{r+1}(\zeta-v)^{q+1}}$; elle est développable en une série uniformément convergente dans le domaine bicirculaire envisagé, et de la forme

$$\sum_0^\infty \omega_n(tv)\,\varpi_n(z\zeta);$$

en effet si l'on prend, comme on peut toujours le faire, les centres x_0 et y_0 des deux cercles C et Γ pour origines des axes de coordonnées dans le plan des x et dans le plan des y, la fonction $\frac{1}{(z-t)^{r+1}(\zeta-v)^{q+1}}$ est développable en une série entière procédant suivant les puissances croissantes de $\left(\frac{t}{z}\right)$ et de $\left(\frac{v}{\zeta}\right)$ et uniformément convergente. Alors $\omega_n(tv)$ sera une expression de la forme $a_n K(xy\, tv) \times t^\lambda \times v^\mu$, et $\varpi_n(z\zeta)$ une expression telle que

$$\frac{b_n\varphi(z\zeta)}{z^{r+1}\zeta^{q+1}} \times \frac{1}{z^\lambda} \times \frac{1}{\zeta^\mu}.$$

Donc, en vertu du lemme, on peut intervertir l'ordre des intégrations de façon à retomber sur l'équation (a) cherchée.

30. Passons à la seconde partie : Considérons deux autres cercles

C_∞ et Γ_∞ concentriques et intérieurs à C et Γ respectivement et aussi voisins d'eux qu'on voudra.

Puis insérons entre C et C_∞ d'une part, entre Γ et Γ_∞ d'autre part, deux séries infinies de cercles analogues $(C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots)$ et $(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n, \ldots)$, choisis de façon que C_1 et Γ_1 soient intérieurs à C et Γ, et qu'ensuite chacun des cercles suivants de chacune des deux séries soit intérieur à celui qui le précède et extérieur à C_∞ ou Γ_∞. Autrement dit ils sont concentriques, de rayons décroissants, mais tous étant compris entre C et C_∞ ou entre Γ et Γ_∞.

On peut alors écrire les différents termes de la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(xy)$ de la manière suivante :

$$(c) \qquad \begin{aligned} u_0(xy) &= f(xy), \\ u_1(xy) &= \frac{r!\,s!}{(2\pi i)^2}\int_C\int_\Gamma H_0(xyz\zeta)f(z\zeta)\,dz\,d\zeta, \end{aligned}$$

cette dernière relation impliquant que, conformément à l'hypothèse, L_x est intérieur à C et L_y à Γ; ensuite on a

$$u_2(xy) = \int_{L_x}^{m} dt^m \int_{L_y}^{p} K(xy\,tv)\frac{\partial^{r+q} u_1(tv)}{\partial t^r\,\partial v^q}dv^p,$$

et, pourvu que désormais les chemins L_x et L_y restent à l'intérieur de C_1 et Γ ,on aura

$$\frac{\partial^{r+q} u_1(tv)}{\partial t^r\,\partial v^q} = \frac{r!\,s!}{(2\pi i)^2}\int_{C_1}\int_{\Gamma_1}\frac{u_1(z_1\zeta_1)\,dz_1\,d\zeta_1}{(z_1-t)^{r+1}(\zeta_1-v)^{q+1}},$$

d'où, en recourant encore au lemme pour intervertir l'ordre des intégrations,

$$(d) \qquad \begin{aligned} u_2(xy) &= \frac{r!\,s!}{(2\pi i)^2}\int_{C_1}\int_{\Gamma_1} H_0(xy\,z_1\,\zeta_1)\,u_1(z_1\,\zeta_1)\,dz_1\,d\zeta_1 \\ &= \frac{r!\,s!}{(2\pi i)^2}\int_C\int_\Gamma H_1(xy\,z\zeta)f(z\zeta)\,dz\,d\zeta \end{aligned}$$

avec

$$H_1(xyz\zeta) = \frac{r!\,s!}{(2\pi i)^2}\int_{C_1}\int_{\Gamma_1} H_0(z_1\zeta_1 z\zeta)\,H_0(xyz_1\zeta_1)\,dz_1\,d\zeta_1$$

et ainsi de suite.

D'une manière générale, si l'on convient que, pour tous les termes à partir de $u_n(xy)$ inclusivement, les chemins L_x et L_y demeurent à l'intérieur de C_{n-1} et Γ_{n-1}, et si l'on pose alors

$$H_{n-1}(xyz\zeta) = \frac{r!\,s!}{(2\pi i)^2}\int_{C_{n-1}}\int_{\Gamma_{n-1}} H_{n-2}(z_{n-2}\zeta_{n-2}z\zeta)\,H_0(xyz_{n-2}\zeta_{n-2})\,dz_{n-2}\,d\zeta_{n-2},$$

on aura

$$u_n(xy) = \frac{r!\,s!}{(2\pi i)^2}\int_{C_0}\int_{\Gamma_0} H_{n-1}(xyz\zeta)\times f(z\zeta)\,dz\,d\zeta.$$

Enfin posons

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(xyz\zeta) = T(xyz\zeta),$$

et convenons que les lignes d'intégration L_x et L_y demeurent tout entières à l'intérieur de C_∞ et Γ_∞; dans ces conditions, *la solution* $\varphi(xy)$, représentable par la série uniformément convergente $\Sigma u_n(xy)$, *sera bien donnée par la formule de résolution* (*b*) *désirée*, si toutefois la série $T(xyz\zeta)$ est uniformément convergente; or c'est bien ce qui a lieu, car les différents termes de cette série T sont formés, à partir de la fonction initiale $H_0(xyz\zeta)$, de la même façon que les termes de la série uniformément convergente $\Sigma u_n(xy)$ le sont à partir de la fonction initiale $f(xy)$ [pour s'en rendre compte, il n'y a qu'à comparer par exemple l'expression de $H_1(xyz\zeta)$ avec l'expression (*d*) de $u_2(xy)$ en fonction du terme précédent u_1, ou encore avec l'expression (*c*) de $u_1(xy)$ en fonction de $f(xy)$, etc.]. C. Q. F. D.

31. Théorème *généralisant le précédent. — Le théorème précédent n'est pas seulement vrai dans le domaine* BICIRCULAIRE (C, Γ) *consideré, mais encore dans le double domaine* (D_x, D_y) TOUT ENTIER, *à condition de remplacer d'abord les deux premiers cercles* C *et* Γ *par les frontières* C_0, Γ_0 *de*

D_x *et* D_y, *puis tous les cercles suivants* ($C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$) *et* ($\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n, \ldots$) *par des contours parallèles à ces frontières* C_0 *et* Γ_0 *et s'emboîtant les uns dans les autres. Avec cette convention la formule de résolution* (b) *sera bien générale.*

En effet, pour s'en convaincre, il suffit d'observer que l'introduction de domaines *circulaires* dans la démonstration précédente a été imposée par la nature du développement adopté pour la fonction

$$\frac{1}{(z-t)^{r+1} \times (\zeta - v)^{q+1}},$$

développement qui n'était valable que dans un tel domaine.

Par conséquent, pour étendre les résultats au domaine (D_x, D_y) tout entier, il n'y aura qu'à remplacer ce développement par un autre développement, qui soit valable dans tout ce domaine $D_x D_y$, un développement en séries de polynomes, par exemple. Donc ....

C. Q. F. D.

Cas général. — Tout ce que nous venons de dire de l'équation (1 *bis*) sur laquelle nous avons raisonné parce que la présence *d'un seul* coefficient $K(xytv)$ simplifie les écritures, s'étend de soi-même à l'équation générale (1); il suffit de remplacer partout le terme unique en K par une somme de termes analogues.

C. — *Rapprochement entre les équations intégro-différentielles partielles normales et les équations différentielles ordinaires.*

32. Une ressemblance manifeste vient de se révéler sur un point fondamental entre nos équations normales et les équations différentielles linéaires, qui n'en sont d'ailleurs qu'un cas particulier, quand il n'y a *qu'une seule* variable x: pour ces deux types d'équations, les solutions ont le même domaine d'holomorphie (supposé simplement connexe) que les coefficients.

On va voir que cette similitude peut s'étendre partiellement à deux autres propriétés essentielles : celle que possède la solution générale d'une équation différentielle linéaire d'être une combinaison linéaire de solutions particulières, et celle qui s'exprime par le théorème de Fuchs et sa généralisation.

On constatera ainsi un parallélisme complet entre les deux catégories d'équations.

Forme des solutions d'une « classe » d'équations intégro-différentielles; solutions particulières et solution générale d'une telle « classe ». — Il est bien clair que, si la fonction $f(xy)$ est la somme de deux autres f_1 e f_2, la solution $\varphi(xy)$ de l'équation intégro-différentielle linéaire est la somme de deux fonctions φ_1 et φ_2, qui sont les solutions de deux équations analogues, dans lesquelles on a simplement remplacé f par f_1 ou par f_2.

Nous dirons que l'ensemble de toutes les équations intégro-différentielles linéaires semblables, qui diffèrent *uniquement* par la nature de la fonction $f(xy)$ forment une « classe » d'équations.

Or, d'une manière générale, une fonction *quelconque* $f(xy)$, holomorphe dans le domaine (D_x, D_y), est développable autour d'un point fixe quelconque (ξ, η) de ce double domaine en une série de Taylor $\sum\limits_{\mu,\nu} C_{\mu,\nu}(x-\xi)^\mu(y-\eta)^\nu$ convergente. A chaque système particulier de valeurs des constantes $C_{\mu,\nu}$, pour lesquelles cette série est convergente, correspond une équation particulière de la « classe » considérée.

Considérons notamment les fonctions

$$f_{\mu,\nu}(xy) = (x-\xi)^\mu(y-\eta)^\nu;$$

à chacune correspond une équation, dont nous appellerons la solution $\varphi_{\mu,\nu}(xy)$, qui sera dite une *solution* PARTICULIÈRE *de la classe*.

Appelons, au contraire, *solution* GÉNÉRALE *de la classe* pour le domaine D_x, D_y la solution $\varphi(xy)$ de l'équation qui correspond à la fonction générale

$$f(xy) = \sum_{\mu,\nu} C_{\mu\nu}(x-\xi)^{\mu}(y-\eta)^{\nu}$$

capable de représenter dans un domaine bicirculaire *toute* fonction holomorphe dans (D_x, D_y).

Avec cette terminologie, on peut énoncer la proposition suivante :

Théorème. — *La solution générale d'une « classe » d'équations intégro-différentielles partielles est une combinaison linéaire de solutions « particulières » linéairement indépendantes.*

Passons à une généralisation plus intéressante, celle du théorème de Fuchs.

D. — *Allure des solutions au voisinage de singularités polaires. Extensions diverses du théorème de Fuchs.*

33. Considérons l'équation intégro-différentielle linéaire normale (1). Mais afin de nous rapprocher des notations habituellement usitées pour les équations différentielles linéaires, nous écrirons le polynome linéaire P, qui figure sous les signes $\int$, comme ceci :

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=r} \sum_{\mu=0}^{\mu=q} K_{\nu+1}^{\mu+1}(xytv)\, D_t^{r-\nu} D_v^{q-\mu}\, \varphi(tv).$$

L'équation considérée prendra donc la forme suivante :

$$\text{(A)} \qquad \varphi(xy) = f(xy) + \int_{1_x}^{m} dt^m \int_{1_y}^{p} \sum_{\nu=0}^{\nu=r} \sum_{\mu=0}^{\mu=q} K_{\nu+1}^{\mu+1}(xytv)\, D_t^{r-\nu} D_v^{q-\mu}\, \varphi(tv)\, dv^p.$$

Supposons maintenant qu'il existe un certain domaine double (Δ_x, Δ_y) — empiétant sur le domaine (D_x, D_y), mais possédant une région extérieure à celui-ci — dans lequel chaque coefficient $K_{\nu+1}^{\mu+1}(xytv)$

puisse être mis sous la forme

$$\text{(B)} \qquad \mathrm{K}_{\nu+1}^{\mu+1}(xytv) = \frac{g_{\nu+1}^{\mu+1}(xytv)}{[\mathrm{R}(xytv)]^{\lambda_{\nu+1}^{\mu+1}}};$$

l'exposant $\lambda_{\nu+1}^{\mu+1}$ est un entier, qui est *positif* pour un au moins des coefficients; les fonctions $g_{\nu+1}^{\mu+1}(xytv)$ et $\mathrm{R}_{\nu+1}^{\mu+1}(xytv)$ sont des fonctions *holomorphes* des variables quand x et t d'une part, et y, v d'autre part restent dans les domaines Δ_x et Δ_y; en outre $\mathrm{R}(xytv)$ *peut s'annuler* dans la portion de (Δ_x, Δ_y) qui est *extérieure* à $(\mathrm{D}_x, \mathrm{D}_y)$, mais non pas dans la région (d_x, d_y) commune à ces deux domaines.

Nous supposerons en outre que l'origine x_0 et le chemin d'intégration L_x tout entier appartiennent à la partie commune d_x, et que y_0 et L_y appartiennent à d_y.

Si nous nous bornons alors à étudier la solution $\varphi(xy)$ dans le *domaine commun* (d_x, d_y), nous pouvons nous servir des expressions (B) des coefficients, puisqu'elles y sont valables; l'équation (A) devient

$$\varphi(xy) = f(xy) + \int_{\mathrm{L}_x}^{m} dt^m \int_{\mathrm{L}_y}^{p} \sum_{\nu=0}^{\nu=r} \sum_{\mu=0}^{\mu=q} \frac{g_{\nu+1}^{\mu+1}(xytv)}{[\mathrm{R}(xytv)]^{\lambda_{\nu+1}^{\mu+2}}} \mathrm{D}_t^{r-\nu} \mathrm{D}_v^{q-\mu} \varphi(tv)\, dv^p.$$

Dans ces conditions les différents termes de la série uniformément convergente $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(xy)$, qui représente la solution $\varphi(xy)$, prennent la forme

$$u_0(xy) = f(xy),$$

$$u_1(xy) = \int_{\mathrm{L}_x}^{m} dt^m \int_{\mathrm{L}_y}^{p} \sum_{\nu=0}^{\nu=r} \sum_{\mu=0}^{\mu=q} \frac{g_{\nu+1}^{\mu+1}(xytv)}{[\mathrm{R}(xytv)]^{\lambda_{\nu+1}^{\mu+1}}} \mathrm{D}_t^{r-\nu} \mathrm{D}_v^{q-\mu} f(tv)\, dv^p,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$u_n(xy) = \int_{\mathrm{L}_x}^{m} dt^m \int_{\mathrm{L}_y}^{p} \sum_{\nu=0}^{\nu=r} \sum_{\mu=0}^{\mu=q} \frac{g_{\nu+1}^{\mu+1}(xytv)}{[\mathrm{R}(xytv)]^{\lambda_{\nu+1}^{\mu+1}}} \mathrm{D}_t^{r-\nu} \mathrm{D}_v^{q-\mu} u_{n-1}(tv)\, dv^p,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Définition. — Si ces termes $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ contiennent la fonction $R(xytv)$, en dénominateur sous les symboles d'intégration, à des puissances *qui ne croissent pas au delà de toute limite avec n*, nous dirons *que la solution* $\varphi(xy)$ *est régulière* relativement aux singularités représentées par les valeurs des variables qui satisfont à l'équation

$$R(xy\,tv) = 0.$$

Le problème qu'on peut alors se poser est le suivant :

Problème. — Reconnaître *à quelles conditions* la solution générale de la classe d'équations considérées *est régulière* [la solution générale correspondant à la fonction $f(tv)$ la plus générale holomorphe dans D_x, D_y].

L'intérêt qu'il y a à résoudre ce problème est de renseigner sur l'allure de la solution $\varphi(xy)$ au point de vue de son mode de croissance si l'on déplace les frontières C_0 de D_x et Γ_0 de D_y, et en même temps les points xy, de façon que certains points x, t du chemin L_x et y, v du chemin L_y puissent s'approcher des systèmes de valeurs qui annulent le dénominateur $R\,(xy\,tv)$, et qui constituent des singularités non essentielles pour les coefficients.

34. On peut montrer d'une façon presque intuitive sur plusieurs exemples que la réponse à cette question est analogue au résultat formulé dans le théorème de Fuchs. Nous nous contenterons d'indiquer les résultats; les démonstrations en sont très simples, mais la place nous manque pour les donner.

Premier cas. — Particularisons d'une première manière la fonction $R(xy\,tv)$ en posant

$$R(xy\,tv) \equiv (t-\theta),$$

θ étant ainsi à l'extérieur de D_x un pôle *fixe* pour les coefficients, d'ordre $\lambda_{\nu+1}^{\mu+1}$ pour $K_{\nu+1}^{\mu+1}$ (certains de ces exposants λ pouvant d'ailleurs être $\leqq 0$).

Il existe bien alors un cercle Δ_x de centre θ, dans lequel tous les coefficients peuvent s'exprimer par une relation de la forme (B).

Dans ce premier cas, on a le théorème suivant :

Théorème. — *Pour que la solution générale $\varphi(xy)$ soit régulière au voisinage du point fixe θ, qui est un pôle d'ordre $\lambda_{\nu+1}^{\mu+1}$ pour le coefficient $K_{\nu+1}^{\mu+1}(xytv)$, il faut et il suffit que l'on ait (quel que soit μ, et pour toutes les valeurs de ν depuis* o *jusqu'à r)*,

$$\lambda_{\nu+1}^{\mu+1} \leqq \nu + (m - r),$$

$(m - r)$ pouvant être positif, négatif ou nul. Soulignons l'analogie de ce théorème avec le théorème de Fuchs ordinaire :

a. Dans le cas particulier, par exemple, où l'on a $m = r + 1$ (comme cela a lieu avec les notations habituelles dans les équations différentielles linéaires ordinaires), la condition précédente prend la forme, qui figure dans le théorème de Fuchs,

$$\lambda_{\nu+1}^{\mu+1} \leqq \nu + 1.$$

Si, plus particulièrement encore, on supposait que l'équation ne contient plus que la seule variable x, μ disparaîtrait de cette dernière relation et l'*on retrouverait le théorème de Fuchs lui-même. Le théorème ci-dessus le généralise donc bien.*

b. Dans le cas au contraire, où $m < r$, posons $m = r - h$; la condition ci-dessus s'écrit

$$\lambda_{\nu+1}^{\mu+1} \leqq \nu - h.$$

En appliquant ceci au cas très particulier, où il n'y a que la seule variable x (*équations différentielles linéaires ordinaires*), *on retombe* (à un léger changement de notations près) sur la « Généralisation du théorème de Fuchs » (n° **11**, p. 19).

En effet, $\lambda_{\nu+1}^{\mu+1}$ devient alors ce que nous avions appelé μ_i (le coefficient $K_{\nu+1}^{\mu+1}$ du terme en $D_t^{r-\nu}\varphi$ devenant le coefficient, que nous appelions π_i, de $D^{r-i}\varphi$). Et l'on retrouve bien ainsi la condition (p. 19) $\mu_i \leqq i - h$.

Mais il y a pourtant une différence essentielle à signaler ici : dans le cas actuel d'une équation *intégro-différentielle normale à plusieurs variables*, la condition énoncée dans le théorème ci-dessus est *toujours* valable, *même pour* $m < r$, puisqu'on est ici toujours assuré de la convergence de la série $\Sigma u_n(xy)$, qui représente la solution φ (cela tient à ce que nous supposons l'équation *normale*, c'est-à-dire $m+p$ supérieur à $r+q$). Au contraire, dans le cas des équations différentielles *ordinaires*, la condition $\mu_i \leqq i - h$ n'a de valeur qu'en ADMETTANT la convergence du développement synthétique correspondant $\Sigma u_n(xy)$, convergence sur laquelle on ne possède pas de renseignement général certain, quand on suppose $m < r$.

35. *Deuxième cas.* — Prenons maintenant

$$R(xy\,tv) = t - \theta(v).$$

$\theta(v)$ étant une fonction holomorphe de v. Dans ce cas, on a cette proposition, qui est une autre extension du théorème de Fuchs :

THÉORÈME. — *Pour que la solution générale $\varphi(xy)$ d'une classe d'équations linéaires normales soit* RÉGULIÈRE *au voisinage des valeurs singulières qui annulent l'expression $t - \theta(v)$, contenue en dénominateur à la puissance $\lambda_{\nu+1}^{\mu+1}$ (positive, négative ou nulle) dans chaque coefficient $K_{\nu+1}^{\mu+1}(xy\,tv)$, il faut et il suffit que l'on ait, pour* TOUTES *les valeurs de ν (de 0 à r) et de μ (de 0 à q), la relation*

$$\lambda_{\nu+1}^{\mu+1} \leqq \nu + \mu + [(m-r) + (p-q)].$$

Nota. — Posons $m + p - (r+q) = j$ (ce nombre entier j est > 0 par hypothèse, donc $\geqq 1$). La condition précédente s'écrit donc

$$\lambda_{\nu+1}^{\mu+1} \leqq \nu + \mu + j.$$

En particulier, si $j = 2$, cette condition prendra la forme

$$\lambda_{\nu+1}^{\mu+1} \leqq (\nu + 1) + (\mu + 1),$$

très voisine également de celle qui est fournie par le théorème classique de Fuchs.

Même résultat quand on prend $R(xy\,tv) = t - \theta(y)$.

E. — *Équations intégro-différentielles linéaires non « normales » $(m + p = r + q)$.*

36. Dans l'hypothèse $m + p = r + q$, voici les résultats que nous avons obtenus et que, pour simplifier, nous nous bornons à formuler pour le second ordre, mais qui s'étendent évidemment au cas général d'un ordre quelconque et d'un nombre quelconque de termes sous le symbole d'intégration.

Théorème *a*. — *Étant donnée l'équation*

$$\varphi(xy) = f(xy) + \int_{x_0}^{x} dt_1 \int_{x_0}^{t_1} K(x, t_2) \frac{\partial^2 \varphi(t_2, y)}{\partial y^2} dt_2,$$

où le coefficient K, *sous l'intégrale du second membre, ne renferme pas les variables indépendantes, qui servent à former les dérivées partielles*, et où les fonctions $f(xy)$ et $K(x, t_2)$ sont holomorphes dans le domaine (D_x, D_y), cette équation admet pour solution la fonction représentée par le développement synthétique $\Sigma u_n(xy)$ (défini comme précédemment), celui-ci étant absolument et uniformément convergent quand x reste dans la région du domaine D_x, qui est intérieure au cercle de centre x_0 et de rayon $\frac{2\pi}{\sqrt{M}}\delta$, si l'on appelle δ la plus courte distance à laquelle y (intérieur à D_y) s'approche de la frontière de D_y, et M la borne supérieure de $K(x, t)$ dans D_x.

Théorème *b*. — Étant donnée l'équation

$$\varphi(xy) = f(xy) + \int_{x_0}^{x} dt_1 \int_{x_0}^{t_2} K(x, y, t_2) \frac{\partial^2 \varphi(t_2 y)}{\partial^2 y} dt^2,$$

où le coefficient K dépend cette fois de *toutes* les variables indépendantes (mais toujours pas de la fonction inconnue φ) et où les fonctions $f(xy)$ et $K(xyt_2)$ sont holomorphes dans le domaine (D_x, D_y), cette équation admet encore pour solution la fonction représentée par le développement synthétique $\Sigma u_n(xy)$ (défini comme précédemment), celui-ci étant absolument et uniformément convergent quand x reste dans tout cercle qui soit intérieur à D_x et qui, ayant x_0 pour centre, ait un rayon inférieur à $\frac{2}{3}\delta\sqrt{\frac{\delta}{\rho M}}$, si l'on appelle ρ le rayon d'un cercle C_ρ à l'intérieur duquel le point y demeure et qui appartienne à D_y, δ la plus courte distance de y à ce cercle, M la borne supérieure du coefficient K quand y reste dans le cercle C_ρ et x dans le plus grand cercle de centre x_0, qui soit intérieur à D_x.

Corollaire c du théorème b. — Le développement synthétique, qui représente la solution de l'équation considérée dans le théorème ***b***, est valable tant que x reste dans un des cercles qu'on peut tracer dans D_x avec x_0 pour centre et avec un rayon inférieur à $\frac{2}{3}\delta\sqrt{\frac{\delta}{\rho M'}}$, en appelant ρ le rayon du plus grand cercle appartenant à D_y, M′ la borne supérieure du coefficient K quand x et y restent dans D_x, D_y, enfin δ la plus courte distance à laquelle on suppose que y s'approche de la frontière de D_y.

V. — Équations aux dérivées partielles linéaires.

37. Comme nous l'avons remarqué au n° **2** (p. 6), toutes les équations intégro-différentielles considérées comprennent comme cas particuliers des équations aux dérivées partielles.

Tout ce qu'on a dit au Chapitre IV sur les équations « normales » et non normales donnera donc lieu à une application relative aux équations aux dérivées partielles. Énonçons brièvement les résultats.

D'abord pour les équations normales :

Théorème. — Les conclusions (1° et 2°) du théorème formulé au n° **12** (p. 21) s'appliquent (avec les mêmes hypothèses d'holomorphie) à toute équation aux dérivées partielles linéaires dans laquelle il existe une dérivée partielle d'un ordre supérieur à toutes les autres. Une telle équation sera dite « normale » et désignée par la notation N.

Théorème. — La solution d'une équation aux dérivées partielles linéaire normale N peut se mettre sous une forme condensée analogue à celle indiquée au n° **28** (p. 44).

Théorème. — Les conditions pour qu'une équation N ait ses solutions *régulières*, quand ses coefficients ont des singularités polaires, sont celles que fournissent les généralisations du théorème de Fuchs (n^os^ **34** et **35**, p. 52 et 54).

38. Ensuite pour les autres équations :

Théorème. — L'équation

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \mathrm{K}(x)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2},$$

où $\mathrm{K}(x)$ est holomorphe dans le domaine D_x admet une solution $\varphi(xy)$ telle que, pour $x = x_0$, φ et $\frac{\partial y}{\partial x}$ se réduisent à des fonctions données arbitrairement $\lambda_0(y)$ et $\lambda_1(y)$ et qui est représentée par le développement synthétique dont le premier terme est

$$f(xy) = \lambda_0(y) + \lambda_1(y)(x - x_0);$$

ce développement est $\Sigma u_n(xy)$ valable quand x reste dans la région du domaine D_x qui est intérieure au cercle de centre x_0 et de rayon $\frac{2\pi}{\sqrt{\mathrm{M}}}\delta$, en appelant M la borne supérieure de $\mathrm{K}(x)$ dans D_x et δ la plus courte distance à laquelle le point y s'approche de la frontière du domaine D_y auquel il appartient et qui est le domaine d'holomorphie des fonctions données $\lambda_i(y)$.

THÉORÈME. — L'équation

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \mathrm{K}(xy) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2},$$

où $\mathrm{K}(xy)$ est holomorphe dans $(\mathrm{D}_x, \mathrm{D}_y)$, admet une solution jouissant des mêmes propriétés que celle du théorème précédent, sauf que son développement synthétique est valable tant que x reste dans un des cercles qu'on peut tracer dans D_x avec x_0 pour centre et avec un rayon inférieur à $\frac{2}{3}\delta\sqrt{\frac{\delta}{\rho \mathrm{M}'}}$, en appelant ρ le rayon du plus grand cercle (de centre quelconque) appartenant à D_y, M' la borne supérieure du coefficient K quand x et y restent dans D_x et D_y, enfin δ la plus courte distance à laquelle on suppose que y s'approche de la frontière de D_y.

Applications diverses.

Nous avons appliqué les résultats de ce travail à des questions très variées d'Analyse (Représentation des solutions des Équations différentielles), de Théorie des Fonctions (Représentation des Fonctions implicites, des Fonctions algébriques et algébroïdes, des Intégrales abéliennes, Détermination dans certains cas des singularités d'une fonction définie par une série de Taylor), d'Algèbre (Représentation des racines des équations, Détermination des points réels communs à plusieurs courbes), de Théorie des nombres (congruences, congruences « généralisées »). Nous avons développé ces applications diverses dans d'autres Mémoires étendus.

Vu et approuvé :
Paris, le 22 janvier 1924.
LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
M. MOLLIARD.

Vu et permis d'imprimer :
Paris, le 22 janvier 1924.
LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
P. APPELL.