FRÉDÉRIC ROGER

Le principe de correspondance de Chasles-Cayley-Hurwitz

Séminaire de Mathématiques (Julia), tome 5 (1937-1938), exp. nº 4, p. 1-18
<http://www.numdam.org/item?id=SMJ_1937-1938__5__A4_0>

SEMINAIRE DE MATHEMATIQUES

Cinquième année 1937-1938

LES FONCTIONS ALGEBRIQUES

Le principe de correspondance de Chasles - Cayley - Hurwitz

Exposé fait par M. Frédéric ROGER, le lundi 28 Mars 1938

INTRODUCTION

A chaque point x d'une droite, faisons correspondre algébriquement α points y de cette droite, et supposons qu'inversement un même point y corresponde ainsi à β points x. Quand l'un des α points y correspondant à x vient coincider avec ce dernier, le point $x = y$ est un point double de la correspondance. C'est le principe de Chasles que le nombre de ces points est $\alpha + \beta$. Exemple : $\alpha = \beta = 1$ la correspondance est homographique, elle admet $\alpha + \beta = 2$ points doubles. Ce principe a été, par Chasles lui-même, étendu aux courbes unicursales.

Sur une courbe algébrique C de genre p, supposons la correspondance définie par une relation algébrique entre les coordonnées des points x et y. x étant fixé, y doit alors se trouver sur une courbe algébrique Γ_x dépendant de la position de x. Mais il peut se faire que γ des points d'intersection de Γ_x avec C, constamment confondus avec x lui-même (et non pas accidentellement comme il arrive en un point double), ne doivent pas figurer parmi les α points y correspondant à x. Dans ces conditions, le nombre des points doubles, donné indépendamment par Cayley et par Brill, est $\alpha + \beta + 2p\gamma$.

Exemple : prenons pour Γ_x la droite joignant x à un point fixe σ situé en dehors de C . Γ_x coupe C en $\gamma = 1$ point constamment confondu avec x , et $\alpha = r-1$ points y (n désignant le degré de C) . Inversement, un point y correspond à autant de points x qu'il y a de points de C , autres que y , sur la droite σy , soit $\beta = n-1$. Quant aux points doubles, ce sont les points de contact des tangentes à C issues de σ . Et la formule de Cayley-Brill donne pour classe c de C , en fonction du genre et du degré, l'expression connue par ailleurs .

Autre exemple : en prenant pour Γ_x la tangente en x à C , on trouve $\gamma = 2$, $\alpha = n-2$, $\beta = c-2$; et la formule de Cayley-Brill donne alors le nombre des inflexions de C .

Dans cet exposé, nous allons, avec Hurwitz(1), sur une surface de Riemann de genre p , faire correspondre, à chaque point x , un nombre fini α de points y : y' ,y" , ..., y^{α} dont nous supposerons seulement les positions , fonctions analytiques de celle de x . Deux faits essentiels vont être mis en évidence : l'existance, en général, d'un nombre jouant le rôle de γ de la formule de Cayley-Brill, qui se compose par addition et multiplication comme les cor-

(1) Ueber algebraische Correspondenzen und das verallgemeinerte Correspondenzprincip (Math. Ann. 28 , 1887, 561-585)

respondances elles-mêmes ; la possibilité de définir une telle correspondance par une ou tout au plus deux relations algébriques entre les coordonnées des points x et y, même dans le cas des correspondances singulières où le nombre γ fait défaut .

I.- VALENCE

Les intégrales abéliennes de première espèce sur la surface de Riemann considérée (intégrales de fonctions algébriques sur la surface, qui n'admettent aucun point critique-logarithmique ni polaire -) sont fonctions linéaires de p d'entre elles qu'on peut choisir de manière que leurs périodes cycliques (quantités dont elles s'augmentent quand x décrit l'un des p premiers circuits ou l'un des p seconds circuits des p rétrosections qui rendent la surface simplement convexe, circuits auxquels se ramène, par déformation continue, tout chemin fermé tracé sur la surface) forment un tableau du type suivant :[1]

$$
\begin{array}{lcccccccccc}
u_1(x) & : & 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 & , & a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1p} \\
u_2(x) & : & 0 & 1 & \ldots\ldots & 0 & , & a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2p} \\
\ldots & & & & & & & & & & \\
u_p(x) & : & 0 & 0 & \ldots\ldots & 1 & , & a_{p1} & a_{p2} & & a_{pp}
\end{array}
$$

où $a_{ij} = a_{ji} \quad (i,j = 1,2,\ldots,p)$.

Chacune des p expressions $u_k(y')+ u_k(y'')+..+u_k(y^{\alpha})$ $(k = 1,2,\ldots,p)$, considérée comme fonction analytique de x, reste finie quel que soit x puisqu'il en est ainsi de ses

---

(1) Cf. Jordan , Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique t.2 , ch.8 .

α termes et ne peut, quand x décrit un chemin fermé, que s'augmenter d'une combinaison linéaire à coefficients entiers des périodes de u_k puisque les y', y'', ..., y^α ne peuvent que s'échanger entre eux. Sa dérivée par rapport à x est donc une fonction uniforme sans autres singularités possibles que des pôles : c'est une fonction algébrique sur la surface. Par suite l'expression considérée est une intégrale abélienne de première espèce :

$$(1) \qquad \sum_{r=1}^{r=\alpha} u_k(y^r) = \sum_i \Pi_{ki} \, u_i(x) + \Pi_k \qquad (k=1,2,\dots,p)$$

où la sommation par rapport à l'indice i (ainsi que nous le convenons une fois pour toutes quand les limites ne sont pas précisées) doit être faite de 1 à p. Les Π sont des constantes : les Π_k dépendent des constantes d'intégration des $u_i(x)$ et les Π_{ki} vérifient les relations suivantes : Quand x décrit le $\ell^{\text{ième}}$ des p premiers circuits fondamentaux, le second membre de (1) s'augmente de $\Pi_{k\ell}$ et le premier, d'une combinaison linéaire à coefficients entiers des périodes de u_k :

$$(2) \qquad \Pi_{k\ell} = h_{k\ell} + \sum_i g_{i\ell} \, a_{ki} \qquad (k, \ell = 1,2,\dots,p) .$$

De même, pour le $\ell^{\text{ième}}$ des p seconds circuits fondamentaux :

$$(3)\quad \sum_i \Pi_{ki}\, a_{i\ell} = H_{k\ell} + \sum_j G_{j\ell}\, a_{kj} \quad (k, \ell = 1,2,\dots,p).$$

Et l'élimination des Π_{ki} conduit à

$$(4)\quad \sum_i h_{ki}\, a_{i\ell} + \sum_{i,m} g_{mi}\, a_{km}\, a_{i\ell} = H_{k\ell} + \sum_j G_{j\ell}\, a_{kj}$$

$(k, \ell = 1,2,\dots,p)$.

Alors, de deux choses l'une, ou bien (et c'est le cas général) , entre les secondes périodes cycliques a_{ij} des intégrales abéliennes de première espèce de la surface, de telles relations, où les h , g , G , H sont des nombres entiers, ne peuvent avoir lieu sans être des identités par rapport à ces périodes ; ou bien, la surface de Riemann est assez singulière pour que de telles relations puissent avoir lieu sans être des identités et de plus, la correspondance envisagée est assez singulière pour que les Π_{ki} conduisent précisément à ces relations .

1.- Correspondances douées de valence

Plaçons-nous d'abord dans le premier cas : l'absence de termes du second degré au second membre et de degré zéro dans le premier exige que le g et H soient nuls quels qu'en soient les indices ; d'autre part, pour $k \neq \ell$, seul $a_{k\ell}$ peut figurer dans les deux membres .

$h_{ki} = 0$ pour $i \neq k$, $G_{j\ell} = 0$ pour $j \neq \ell$, $h_{kk} = G_{\ell\ell}$.

En posant $h_{11} = h_{22} = \dots = h_{pp} = G_{11} = G_{22} = \dots = G_{pp} = \delta$ les relations (1) s'écrivent alors :

$$(5) \qquad \sum_{r=1}^{r=\alpha} u_k(y^r) = \delta \, . \, u_k(x) + \Pi_k \qquad (k=1,2,\dots,p)$$

La suite nous apprendra que le nombre entier δ ainsi mis en évidence n'est autre que l'opposé du γ de l'introduction . Dès à présent, la structure des équations (5) conduit à une propriété fondamentale de ce nombre .

Considérons, à côté de la correspondance C , qui au point x , fait correspondre les α points y' , y'' , ... y^α , une correspondance C' qui, au même point x , fasse correspondre α' points $y^{\alpha+1}$, $y^{\alpha+2}$, ... , $y^{\alpha+\alpha'}$. La correspondance C'' qui, au point x , fait correspondre les $\alpha + \alpha'$ points y' , y'' , ..., y^α, $y^{\alpha+1}$, ... , $y^{\alpha+\alpha'}$ sera dite la somme $C+C'$ des deux premières . De (5) et de

$$\sum_{r'=1}^{r'=\alpha'} u_k(y^{r'}) = \delta' \, . \, u_k(x) + \Pi_k' \quad (k=1,2,..,p)$$

résulte

$$\sum_{r''=1}^{r''=\alpha+\alpha'} u_k(y^{r''}) = (\delta + \delta') \, u_k(x) + (\Pi_k + \Pi_k') \qquad (k=1,2,..,p)$$

Par suite le nombre attaché à $C'' = C + C'$ n'est autre que

$\delta'' = \delta + \delta'$.

Maintenant, à la suite de la correspondance C , considérons une correspondance C' qui, à chaque point y^r, fasse correspondre α' points $(y^r)'$, $(y^r)''$, ..., $(y^r)^{\alpha'}$ La correspondance C" qui, au point x , fait correspondre les $\alpha\alpha'$ points $y^{r''} = (y^r)^{r'}$ sera dite le produit C'C des deux premières . De (5) et de

$$\sum_{r'=1}^{r'=\alpha'} u_k\left[(y^r)^{r'}\right] = \delta' . \, u_k(y^r) + \Pi_k' \quad \begin{pmatrix} k=1,2,\ldots,p \\ r=1,2,\ldots.,\alpha \end{pmatrix}$$

résulte

$$\sum_{r''=1}^{r''=\alpha\alpha'} u_k(y^{r''}) = \delta'\left[\delta . \, u_k(x) + \Pi_k\right] + \alpha\,\Pi_k' \quad (k=1,2,\ldots,p).$$

Par suite le nombre attaché à C"= C'C n'est autre que

$\delta'' = \delta'\delta$.

Ainsi, dans l'addition et la multiplication des correspondances non singulières, les nombres δ qui leur sont attachés se composent comme elles . Ce nombre δ , ou plutôt son opposé γ (de manière qu'il soit positif dans le cas élémentaire de l'introduction), sera dit la "valence" de la correspondance ("Werthigkeit" selon Brill, "Valenza" selon Severi).

2.- Correspondances singulières

Plaçons-nous maintenant sur une surface de Riemann singulière : il existe un système de nombres Π_{ki} vérifiant les relations (2) et (3) et conduisent à des relations (4) qui ne sont pas des identités par rapport aux a_{ij}. Les p relations

$$(6) \qquad u_k(y') + u_k(y'') + \dots + u_k(y^p) = \sum_i \Pi_{ki}\, u_i(x) + \Pi_k$$

$(k=1,2,\dots,p)$, définissent y', y'', ..., y^p comme p fonctions analytiques de x. Une telle correspondance ne pourrait être douée d'une valence γ sans que les seconds membres de (6) ne se réduisent à $-\gamma u_k(x)$; mais alors les relations (4) seraient des identités par rapport aux a_{ij}, contrairement aux hypothèses faites. Ainsi, sur une surface de Riemann singulière, on peut définir au moins une correspondance singulière.

On peut même en définir bien d'autres par addition de correspondances régulières. Inversement d'ailleurs, étant donnée une correspondance singulière qui, à x, fait correspondre y', y'', ..., y^α, on a

$$\sum_{r=1}^{r=\alpha} u_k(y^r) = \sum_i \Pi_{ki}\, u_i(x) + \Pi_k \qquad (k=1,2,\dots,p)$$

où les Π_{ki} conduisent à des relations (4) qui ne sont pas des identités . Considérons alors la correspondance singulière C' qui, à x , fait correspondre $y^{\alpha+1}$, $y^{\alpha+2}$,...., $y^{\alpha+p}$ définis par les relations

$$\sum_{r'=1}^{r'=p} u_k(y^{\alpha+r'}) = -\gamma u_k(x) + \sum_i (-\Pi_{ki})\, u_i(x) + \Pi_k' \qquad (k=1,2,..,p)$$

Dès lors :

$$\sum_{r''=1}^{r''=\alpha+p} u_k(y^{r''}) = -\gamma u_k(x) + (\Pi_k + \Pi_k') \qquad (k=1,2,..,p)$$

La correspondance est donc douée de valence γ .

Ainsi, toute correspondance singulière peut être envisagée comme une partie d'une correspondance non singulière .

II.- RELATIONS ALGEBRIQUES

Soit $\theta(v_1, v_2, \dots, v_p)$ -symboliquement $\theta(v_k)$ - la fonction introduite par Riemann dans l'inversion des intégrales abéliennes . Quand les arguments v_k s'augmentent de quantités de la forme $h_k + \sum_\ell g_\ell a_{\ell k}$ où les h et g sont des nombres entiers, la fonction θ se reproduit multipliée par $e^{-i\pi \sum_\ell g_\ell (2v_\ell + a_{\ell\ell})}$. D'autre part, il est possible de choisir les constantes c_k de manière que $\theta\left[u_k(y) - u_k(x) - c_k\right]$, considérée comme fonction de la seule variable y , admette la racine $y = x$ et p-1 autres indépendantes de x , et considérée comme fonction de x seul, admette la racine $x = y$ et p-1 autres indépendantes de y .

Grâce à ces propriétés, l'expression

$$\Pi(x,y) = \sum_{r=1}^{r=\alpha} \frac{\theta\left[u_k(y) - u_k(y^r) - c_k\right]}{\theta\left[u_k(y) - u_k(y_o^{\,r}) - c_k\right] . \theta\left[u_k(y_o) - u_k(y^r) - c_k\right]}$$

où les y^r désignent les correspondants de x , les $y_o^{\,r}$ ceux d'un point fixe x_o et y_o un autre point fixe, considérée comme fonction de y seul, n'admet pour racines que les α points y^r et pour pôles que les α points $y_o^{\,r}$. Comme fonction de x , elle s'annule quand l'un des y^r devient égal à y et devient infinie quand l'un des y^r devient égal à y_o . Or les points x auxquels correspond un point y donné ne peuvent être qu'en nombre fini β, car s'il existait un point η correspondant à une infinité de points x, ceux-ci auraient un point d'accumulation ξ sur la surface et la fonction analytique $y(x) - \eta$ admettrait ξ comme racine non isolée, ce qui n'est pas possible.

Supposons d'abord la correspondance douée de la valence γ et considérons le produit

$$F(x,y) = \left\{ \frac{\Theta\left[u_k(y) - u_k(x) - c_k\right]}{\Theta\left[u_k(y) - u_k(x_0) - c_k\right] \cdot \Theta\left[u_k(y_0) - u_k(x) - c_k\right]} \right\}^{\gamma} \cdot \Pi(x,y).$$

Outre les racines et pôles de Π, il admet à l'ordre γ en y, la racine $y = x$ et le pôle $y = x_0$; en x, la racine $x = y$ et le pôle $x = y_0$ (racines et pôles à permuter si $\gamma < 0$). Compte tenu des relations (5) (où $\delta = -\gamma$), $F(x,y)$ ne change pas quand y décrit un chemin fermé. Quand c'est x, il se reproduit multiplié par $e^{2i\pi \sum_\ell M_\ell [u_\ell(y) - u_\ell(y_0)]}$ Si les nombres entiers M_ℓ n'étaient pas tous nuls, en faisant décrire ensuite à y le $\ell^{\text{ième}}$ des p premiers circuits fondamentaux, on ne trouverait pas le même résultat qu'en intervertissant les deux opérations. Concluons donc que $F(x,y)$, soit comme fonction de x, soit comme fonction de y, uniforme et sans autre singularité que des pôles, est algébrique sur la surface.

Dans le cas où γ est positif, nous voyons que $F(x,y) = 0$, où x est fixé, définit en y, comme dans l'introduction, les α correspondants de x et γ fois x lui-même. Précisons la nature de cette relation. Considérée comme fonction de y, $F(x,y)$ n'admet pour pôles que chacun des y_0^r simples et x_0 d'ordre γ. Or il n'existe qu'un nombre fini de fonctions algébriques sur la surface et admettant ces pôles qui soient linéairement indépendantes ; c'est ce nombre que donne le théorème de Riemann-Roch. Ce qui nous importe est qu'il soit fini : alors on peut trouver $q+1$ fonctions algébriques de y, $f_0(y)$, $f_1(y)$, ..., $f_q(y)$ en fonction linéaire desquelles s'exprime $F(x,y)$. Les coefficients, constantes par rapport à y, sont des fonctions de x, algébriques comme on s'en assure en résolvant, par rapport à elles, les équations linéaires que l'on obtient en donnant à y $q+1$ valeurs particulières choisies de manière à ne pas annuler le déterminant d'ordre $q+1$. En sorte que l'on a

$$F(x,y) = \varphi_0(x)\ f_0(y) + \varphi_1(x)\ f_1(y) + \dots + \varphi_q(x)\ f_q(y)$$

En passant à la représentation des points x en coordonnées homogènes x_1, x_2, x_3, entre les deux fonctions algébriques $\xi_1 = \dfrac{x_1}{x_3}$ et $\xi_2 = \dfrac{x_2}{x_3}$ existe une relation algébrique : $f(x_1,x_2,x_3) = 0$, f désignant un polynome homogène en x_1, x_2, x_3. D'autre part, les fonctions algébriques

$\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ... , $\varphi_q(x)$ s'expriment rationnellement en fonction de ξ_1 , ξ_2 , ainsi que $f_0(y)$, $f_1(y)$, ..., $f_q(y)$ en fonction de $\eta_1 = \dfrac{y_1}{y_3}$, $\eta_2 = \dfrac{y_2}{y_3}$. De sorte que la relation $F(x,y) = 0$ s'écrit $\psi\,(x_1,x_2,x_3 \,/\, y_1,y_2,y_3) = 0$, ψ désignant un polynome homogène séparément en x_1, x_2, x_3 et y_1, y_2, y_3 . Ainsi toute correspondance de valence positive peut s'obtenir au moyen d'une seule relation algébrique .

Quand la valence γ est négative, on peut ajouter à la correspondance C une correspondance C' de $\gamma' > -\gamma$ afin que la somme C" = C + C' ait sa valence $\gamma + \gamma'$ positive . Ce qui conduit à définir C par le quotient des deux relations algébriques définissant respectivement C" et C' . Mais il est peut-être plus commode de considérer C comme la partie commune à deux correspondances C''_1 et C''_2 obtenues en ajoutant séparément à C deux correspondances C'_1 et C'_2 sans éléments communs et telles que $\gamma'_1 > -\gamma$, $\gamma'_2 > -\gamma$. Dans ces conditions, la correspondance C sera définie par l'ensemble des deux relations algébriques définissant respectivement C''_1 et C''_2 .

Ce dernier procédé s'applique tout aussi bien à une correspondance singulière, puisqu'on sait lui ajouter séparément deux correspondances sans éléments communs de manière que les sommes obtenues soient des correspondances douées d'une valence positive . Ainsi toute correspondance du type envisagé par Hurwitz, qu'elle soit ou non singulière, peut être définie par au plus deux relations algébriques ; une seule quand la correspondance est de valence positive, ce qui ramène au cas séparément envisagé par Cayley et par Brill .

III.- POINTS DOUBLES.

Reprenons l'expression

$$\Pi(x,y) = \sum_{r=1}^{r=\alpha} \frac{\theta\left[u_k(y) - u_k(y^r) - c_k\right]}{\theta\left[u_k(y) - u_k(y_o{}^r) - c_k\right] \cdot \theta\left[u_k(y_o) - u_k(y^r) - c_k\right]}$$

dont les racines en y sont les α points y^r correspondant à x. Quand on y fait $y = x$, les racines sont alors les points doubles de la correspondance.

Envisageant d'abord le cas d'une correspondance de valence γ, ceci nous conduit à considérer l'expression

$$F(x) = \left[\frac{F(x,y)}{\left\{\theta\left[u_k(y) - u_k(x) - c_k\right]\right\}^{\gamma}} \right]_{y=x}$$

construite de manière à reprendre la même valeur quand $y=x$ décrit un chemin fermé. C'est donc une fonction algébrique de x : les racines sont en même nombre que ses pôles. Parmi ces derniers figurent les α points $y_o{}^r$ et les β points x pour lesquels l'un des y^r vient en y_o. Quant aux $2p$ racines de $\theta\left[u_k(x) - u_k(x_o) - c_k\right] . \theta\left[u_k(y_o) - u_k(x) - c_k\right]$ elles comptent pour $2p\gamma$ pôles ou racines suivant que γ est positif ou négatif. Dans tous les deux cas, le nombre des points doubles de la correspondance est $\alpha + \beta + 2p\gamma$: c'est la formule de Cayley-Brill, mais valable encore pour $\gamma < 0$.

Quand la correspondance est singulière, il faut évaluer autrement le nombre des racines de $\Pi(x) = \left[\Pi(x,y)\right]_{y=x}$

Voici un procédé valable pour toutecorrespondance (singulière ou non) et conduisant à une formule tout à fait générale . La fonction $\Pi(x)$ n'est pas uniforme sur la surface, mais elle le devient quand on coupe la surface aux p rétrosections canoniques ; en sorte que l'intégrale

$$\frac{1}{2 i \pi} \int d \log \Pi(x)$$

prise le long de ces rétrosections est égale à la différence entre le nombre des racines et celui des pôles . Ce dernier valant $\alpha + \beta$, on obtient , compte tenu des relations (1), (2) et (3) , pour nombre des points doubles

$$\alpha + \beta - (h_{11} + h_{22} + \ldots + h_{pp} + G_{11} + G_{22} + \ldots + G_{pp})$$

Pour une correspondance de valence γ , comme

$$h_{11} = h_{22} = \ldots = h_{pp} = G_{11} = G_{22} = \ldots = G_{pp} = -\gamma \quad .$$

on retrouve bien le nombre $\alpha + \beta + 2p\gamma$ précédemment donné.

Comme application du principe de correspondance de Chasles-Cayley-Hurwitz donnant le nombre des points doubles, proposons-nous de trouver le nombre des couples communs à deux correspondances . Afin de ne pas compliquer les notations, plaçons-nous dans le cas de deux correspondances C et C' de valences respectives γ et γ' . C fait correspondre à un point x, α points y et un point y correspond à β points x ; de même, C' fait correspondre à un point x', α' points y' et un point y' correspond à β' points x'. Identifions y et y' et considérons la correspondance ainsi définie entre x et x' : les couples communs à C et C' proviendront des points doubles de cette correspondance . A un point x correspondent $\alpha'' = \alpha\beta'$ points x' et un point x' correspond à $\beta'' = \beta\alpha'$ points x ; quant à la valence de cette correspondance produit, elle est donnée par $-\gamma'' = (-\gamma).(-\gamma')$. Et le nombre cherché est

$$\alpha'' + \beta'' + 2p\gamma'' = \alpha\beta' + \beta\alpha' - 2p\gamma\gamma' .$$
