SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES

P. DUBREIL

Le théorème de Noether et ses diverses généralisations

Séminaire de Mathématiques (Julia), tome 5 (1937-1938), exp. n° 3, p. 1-28
<http://www.numdam.org/item?id=SMJ_1937-1938__5__A3_0>

SEMINAIRE DE MATHEMATIQUES

Cinquième année 1937-1938

LES FONCTIONS ALGEBRIQUES

Le théorème de NOETHER et ses diverses généralisations

Exposé fait par M. DUBREIL, le lundi 14 Mars 1938

Exemplaire n°

1.- Le théorème de Noether a joué, comme point de départ, un rôle important dans la théorie classique des fonctions algébriques : il conduit, comme on sait, au théorème du Reste et à la construction des séries linéaires complètes au moyen des adjointes (Voir p.ex. PICARD & SIMART, Théorie des fonctions algébriques, t.II, en particulier chpp. 1 et 2); SEVERI-LÖFFLER, Vorlesungen über algebraische Geometrie , chap.5) . Du point de vue de l'Algèbre moderne, le théorème de Noether présente aussi un intérêt en lui-même : en cherchant à le préciser ou à le généraliser, on est conduit à des problèmes qui concernent la théorie de l'élimination, la théorie additive des idéaux, et la théorie des variétés algébriques . C'est sur ces questions que je voudrais insister .

2.- Le théorème de Noether pour deux courbes planes

Dans l'anneau $\Omega[x,y]$, où Ω désigne le corps des nombres complexes, soient $f(x,y)$, $g(x,y)$ deux polynomes tels que les courbes $f = 0$, $g= 0$ soient sans partie commune . Le théorème de Noether exprime les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un polynome $\varphi(x,y)$ satisfasse à une identité de la forme :

$$(1) \qquad \varphi(x,y) = a\,f + b\,g \qquad a, b \in \Omega[x,y]$$

donc pour que φ appartienne à l'idéal $\mathfrak{M} = (f,g)$ [1]

Pour trouver ces conditions nous allons utiliser une méthode dont le principe remonte à Noether lui-même (Math.Ann., t.40, p.140 ou PICARD & SIMART, t.II, ch.1, p.1) mais que nous modifierons en tenant compte de remarques récentes (W.van der Wonde, Über den Noetherschen Fundamentalsatz, Math.Ann. t.111, 1935, p.425; B.L.van der Waerden, Ein neuer Beweis des Restsatzes, Math.Ann. t.111, 1935, p.432 ; P.Dubreil, Thèse, et remarques sur le théorème de Noether, Bull.Soc.Math. 1936) .

Si un polynome φ satisfait à l identité (1) , on peut choisir dans cette identité les polynomes a et b d'une infinité de manières ; à partir d'un couple a,b on en obtient une infinité d'autres en posant

$$a_1 = a + \lambda\, g \qquad , \qquad b_1 = b - \lambda\, f$$

où λ est un polynome arbitraire . En supposant que Oy n'est parallèle à aucune des directions asymptotiques de $f = 0$, nous pouvons choisir les polynomes a et b de manière que b soit de degré $m-1$ en y , m étant le

---

[1] Dans cette première partie nous empruntons seulement à la théorie des idéaux quelques définitions fondamentales .

degré de f ; b s'obtient à partir d'un polynome b_1 quelconque, comme reste de la division de b_1 par f suivant les puissances de y.

Soit
$$\mathcal{R}(x) = u(x,y)\ f(x,y) + v(x,y)\ g(x,y)$$
un polynome en x seul appartenant à l'idéal $\mathfrak{M}$: il existe de tels polynomes puisque le résultant de f et de g, par exemple, en est un.

Si $\varphi(x,y)$ est un polynome quelconque, nous pouvons écrire :

$$(2)\qquad \mathcal{R}(x)\ \varphi(x,y) = u\varphi\,.\,f + v\varphi\,.\,g = s\,f + t\,g$$

où t est le reste de la division de $v\varphi$ par f suivant les puissances de y.

Si φ satisfait à l'identité (1) (avec b de degré $m-1$ en y), on a :

$$\mathcal{R}\varphi = s\,f + t\,g = \mathcal{R}\,a\,f + \mathcal{R}\,b\,g$$

d'où $t = \mathcal{R}\,b$; réciproquement, si, dans l'identité (2), t est divisible par $\mathcal{R}$, il en est de même du produit sf, donc de s, puisque $f = 0$ n'admet pas Oy comme direction asymptotique. Donc :

<u>Théorème I</u>

<u>La condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynome φ appartienne à l'idéal $\mathfrak{M}$ est que le reste</u>

t(x,y) de la division de $v\varphi$ par f suivant les puissances de y soit divisible par $\mathcal{R}(x) = uf + vg$.

Ce théorème fournit donc un critère simple et élémentaire, qui a en outre l'avantage de donner, par un procédé rationnel, le polynome b coefficient de g dans l'identité (1).

Si nous supposons que Oy n'est parallèle à aucune des droites joignant deux à deux les points d'intersection M_i des deux courbes de base, $\mathcal{R}(x)$ est le produit de facteurs primaires qui correspondent biunivoquement à ces différents points :

$$\mathcal{R}(x) = (x - x_1)^{\sigma_1} (x - x_2)^{\sigma_2} \dots (x - x_N)^{\sigma_N}$$

et pour que φ appartienne à $\mathfrak{M}$, il faut et il suffit que le reste t(x,y) correspondant soit divisible séparément par chacun de ces facteurs primaires $(x - x_i)^{\sigma_i}$.

Or l'ensemble des polynomes φ pour lesquels t est divisible par $(x - x_i)^{\sigma_i}$ est visiblement un idéal $\mathfrak{J}_i$, de sorte que l'idéal $\mathfrak{M}$ est l'intersection[1] (au sens de la théorie des ensembles) des idéaux $\mathfrak{J}_i$ relatifs

(1) On emploie aussi l'expression de plus petit commun multiple.

aux différents points M_i :

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_N$$

Nous nous proposons maintenant d'étudier ces idéaux $\mathfrak{q}_i$, et notamment de montrer qu'ils sont <u>primaires</u>.

Prenons un des points d'intersection M_i comme origine O . Désignons par $\mathfrak{q}$ $(= \mathfrak{q}_i)$ l'idéal correspondant , par $\mathfrak{p}$ l'idéal, <u>premier</u>, de tous les polynomes nuls en O . Posons :

$$\mathcal{R}(x) = x^{\sigma}\, \mathcal{R}_1(x) \qquad\qquad \mathcal{R}_1(0) \neq 0$$

Si $\varphi \in \mathfrak{q}$,on a :

$$x^{\sigma}\, \mathcal{R}_1(x).\varphi = s\,f + t\,g \qquad\qquad \text{avec } t = x^{\sigma}\, t_1$$

d'où

$$(3) \qquad \mathcal{R}_1(x).\,\varphi = s_1 f + t_1 g \in \mathfrak{M} \subset \mathfrak{p}$$

et il vient, puisque $\mathcal{R}_1(0) \neq 0$,

$$\varphi \in \mathfrak{p} \qquad \text{donc} \qquad \underline{\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}}$$

De plus, d'après (3), $\mathfrak{q}$ <u>est l'ensemble des polynomes</u> φ , <u>dont le produit par</u> $\mathcal{R}_1(x)$ <u>appartient à</u> $\mathfrak{M}$. Comme $\mathcal{R}_1(x)$ ne s'annule pas en O, on peut , pour tout entier α , trouver un polynome h tel que l on ait :

$$\mathcal{R}_1\, h = 1 + p_{\alpha}$$

où p_{α} est un polynome ne contenant aucun terme de degré moindre que α :

$$p_\alpha \subset \mathfrak{p}^\alpha$$

En multipliant par h les deux membres de (3) , on obtient

$$\varphi = hs_1 . f + ht_1 . g - \varphi p_\alpha$$

c'est-à-dire

$$\varphi \in (\mathfrak{M} . \mathfrak{p}^\alpha)$$

de sorte que nous avons, pour tout entier α

$$\mathfrak{q} \subset (\mathfrak{M} , \mathfrak{p}^\alpha)$$

Théorème II

Pour α suffisamment grand - d'une manière précise, pour

$$\alpha \geq \sigma + r - 1 - \ell$$

où r et ℓ désignent respectivement les ordres de multiplicité de f et v en 0 - on a inversement

$$(\mathfrak{M} . \mathfrak{p}^\alpha) \subset \mathfrak{q}$$

donc $$\mathfrak{q} = (\mathfrak{M} , \mathfrak{p}^\alpha)$$

ce qui donne une définition simple des idéaux $\mathfrak{q}_i$.

Pour démontrer cette propriété nous supposerons en plus des hypothèses de ce genre déjà faites, que Oy n'est parallèle à aucune des tangentes à f = 0 au point r-uple 0 .

Un polynome

$\varphi \in (\mathfrak{M}, \mathfrak{f}^{\alpha})$ $\qquad \alpha \geq \sigma + r - 1 - \ell$

peut se mettre sous la forme

(4) $\qquad \varphi = a' f + b' g + \Delta$

où l'ordre de Δ en O est au moins égal à $\sigma + r - 1 - \ell$

Si φ n'appartenait pas à $\mathcal{O}\!\!/$, le reste t correspondant serait divisible seulement par $x^{\sigma - \tau}$ $(1 \leq \tau \leq \sigma)$ et on aurait :

$$x^{\tau} \mathcal{R}_1(x) \varphi = s_1 f + t_1 g$$

$t_1(0,y)$ étant un polynome non identiquement nul, ce qui entraine

$$t_1(0,y) = \Theta(y) f_1(y)$$

en posant $\qquad f_1(y) = \dfrac{f(0,y)}{y^{r}}$

On a d'autre part :

$$t = x^{\sigma - \tau} t_1 = v \varphi - \lambda f = v(a'f + b'g + \Delta) - \lambda f$$

ou

(5) $\qquad x^{\sigma - \tau} t_1 = b' x^{\sigma} r_1(x) + c f + v \Delta$

avec

$$c = a'v - b'u - \lambda$$

Le polynome $cf + v\Delta$ étant multiple de

$x^{\sigma-\tau}$ et $v\,\Delta$ étant en O d'ordre au moins égal à $\sigma+r-1$ toute partie homogène de degré inférieur à $\sigma+r-1$ dans le produit $c\,f$ est multiple de $x^{\sigma-\tau}$, d'où résulte :

$$c = x^{\sigma-\tau}\, s_1 + c_2$$

c_2 étant en O d'ordre au moins égal à $\sigma - 1$, et l'identité (5) s'écrit :

$$(6) \qquad t_1 = b' x^{\tau}\, r_1(x) + c_1\, f + d$$

en posant :

$$c_2\, f + v\,\Delta = x^{\sigma-\tau}\, d$$

Au point O, d est d'ordre au moins égal à

$$\sigma + r - 1 - (\sigma - \tau) = r + \tau - 1 \geq r$$

d'où

$$d(0,y) = y^r\, d_1(y)$$

et nous obtenons, en remplaçant dans (6), x par zéro :

$$t_1(0,y) = f_1(y)\,\Theta(y) = c_1(0,y)\, y^r f_1(y) + y^r d_1(y)$$

d'où

$$\Theta(y) = \text{multiple de } y^r$$
$$t_1(0,y) = \text{multiple de } f(0,y)$$

ce qui est impossible, puisque le degré du premier membre est inférieur au degré du second.

Le plus petit entier β tel que l'on ait

$$(\mathfrak{M}.\mathfrak{P}^{\beta}) \subset \mathfrak{q} \quad \text{donc} \quad \mathfrak{q} = (\mathfrak{M}.\mathfrak{P}^{\beta})$$

est appelé la <u>multiplicité de Noether</u> du point d'intersection O . De ce qui précède résulte :

$$(7) \qquad \beta \leq \sigma + r - 1 - l$$

et le théorème II nous donne, comme **première conséquence**, le <u>Théorème de Noether</u> (forme classique) .

<u>Pour qu'un polynome</u> φ <u>satisfasse à l'identité (1) , il faut et il suffit qu'en tout point d'intersection</u> M_i <u>de deux courbes de base, il existe des polynomes</u> a'_i, b'_i <u>tels que la différence</u>

$$\varphi - a'_i\, f - b'_i\, g$$

<u>développée suivant les puissances de</u> $x - x_i$, $y - y_i$ <u>commence par des termes d'ordre au moins égal à la multiplicité de Noether</u> β_i ("<u>condition de Noether</u>") .

D'autre part, l'égalité

$$\mathfrak{q} = (\mathfrak{M}.\mathfrak{P}^{\beta})$$

entraine

$$(8) \qquad \mathfrak{P}^{\beta} \subset \mathfrak{q} \subset \mathfrak{P}$$

d'où résulte que $\mathfrak{q}$ <u>est primaire et que</u> $\mathfrak{P}$ <u>est l'idéal premier appartenant à</u> $\mathfrak{q}$. Pour cela, il suffit de montrer que :

$$\left.\begin{array}{l}\varphi\psi \in \mathfrak{q} \\ \psi \notin \mathfrak{p}\end{array}\right\} \quad \text{entrainent} \quad \varphi \in \mathfrak{q}$$

Or ψ n'appartenant pas à $\mathfrak{p}$, on peut trouver un polynome η tel que l'on ait :

$$\eta\psi = 1 + p_\beta \qquad\qquad p_\beta \in \mathfrak{p}^\rho \subset \mathfrak{q}$$

et de la relation

$$\eta\varphi\psi = \varphi + \varphi p_\beta$$

où $\eta\varphi\psi$ et φp_β appartiennent à $\mathfrak{q}$ résulte bien $\varphi \in \mathfrak{q}$.

<u>L'idéal</u> $\mathfrak{M}$ <u>est donc bien l'intersection d'un nombre fini d'idéaux primaires</u> ;

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \ldots . \cap \mathfrak{q}_N$$

qui correspondent aux différents points d'intersection .

On voit immédiatement que l'<u>exposant</u> ρ de l'idéal primaire $\mathfrak{q}$, c'est-à-dire le plus petit entier pour lequel on a

$$(9) \qquad \mathfrak{p}^\rho \subset \mathfrak{q}$$

n'est autre que la <u>multiplicité de Noether</u>

3.- Compléments du théorème de Noether pour deux courbes planes .

La détermination de l'exposant ρ a donné lieu à des recherches de Noether, Bertini, Voss, etc ... Comme ces recherches, bien qu'assez nombreuses, n'avaient abouti qu'à des résultats partiels, je me suis proposé de reprendre la question systématiquement dans ma thèse .

Dans ce qui précède, un rôle important a été joué par le polynome désigné par $\mathcal{R}(x)$. Or l'ensemble des polynomes qui ne dépendent que de x et appartiennent à l'idéal $\mathfrak{M}$, est, dans l'anneau $\Omega[x]$, un idéal principal : tous ces polynomes sont multiples d'un d'entre eux, qui a le degré minimum, et que nous appellerons le sous-résultant des polynomes f , g , car il est en général distinct du résultant . C'est lui que j'ai utilisé comme polynome $\mathcal{R}(x)$, parce qu'il joue, pour le théorème de Noether, comme nous allons le voir, un rôle assez analogue à celui du résultant pour le théorème de Bezout .

De la relation

$$x^{\rho} \in \mathfrak{p}^{\rho} \subset \mathfrak{I}$$

résulte

$$x^{\rho}\mathcal{R}_1(x) \in \mathfrak{M}$$

et par suite, grâce au choix du sous-résultant comme polynome $\mathcal{R}(x)$:

$$\sigma \leq \rho \qquad (= \beta \leq \sigma + r - 1 - \ell)$$

Si dans l'identité

$$\mathcal{R}(x) = x^{\sigma} \mathcal{R}_1(x) = u\, f + v\, g \qquad (\mathcal{R}_1(0) \neq 0)$$

nous remplaçons y par la fonction algébrique de x définie par une branche de la courbe $f = 0$ au voisinage de O, $g(x,y)$ devient une fonction de x d'ordre égal à $s + N_0$ s étant l'ordre de multiplicité de O pour $g = 0$ et N_0 la somme des ordres de contact de la branche de f considérée avec toutes les branches de v ; de même, v devient une fonction de x d'ordre au moins égal à ℓ et on a par suite

$$\sigma \geq \ell + s + N_0 \geq s$$

de même

$$\sigma \geq r$$

Nous avons donc finalement les inégalités :

$$(10) \qquad s \leq \ell + s + N_0 \leq \sigma \leq \rho \leq \sigma + r - 1 - \ell$$

d'où

$$(11) \qquad \ell \leq r - 1$$

En premier lieu, on peut montrer qu'on a l'égalité

$$(13) \qquad \rho = \sigma + r - 1 - \ell$$

Cette égalité est évidente pour $\ell = r - 1$. Supposons $\ell \leq r - 2$, et montrons que l'on a

$$\rho > \sigma + r - 2 - \ell$$

c'est-à-dire que les monômes $x^{\sigma-1}\, y^{r-1-\ell}$, $x^{\sigma-2}\, y^{r-\ell}$, ..., $y^{\sigma-1}$ n'appartiennent pas tous à $\mathcal{J}$. Dans le cas contraire, on voit aisément qu'on aurait une identité de la forme :

$$v\, y^{\sigma+r-2-\ell} = q_\sigma f + x^\sigma t$$

où q_σ serait d'ordre $\sigma - 1$ au moins en 0. Le premier membre étant seulement d'ordre $\sigma+r-2$, x^σ devrait diviser le polynome homogène de degré minimum ℓ dans v, ce qui exigerait

$$\sigma \leq \ell \leq r - 2$$

inégalité impossible, puisque $\sigma \geq r$.

<u>Application</u>

Considérons le cas (appelé "<u>cas simple</u>" par les géomètres italiens) où les courbes $f = 0$, $g = 0$ n'ont <u>pas de tangente commune en 0</u>. Les polynomes homogènes de degré r et s dans f et g étant premiers entre eux, l'identité

$$x^{\sigma}\mathcal{R}_1(x) = u\,f + v\,g$$

entraine

$$\sigma = s + \ell$$

d'où

$$\rho = r + s - 1$$

résultat déjà donné par Noether .

Comparons maintenant les nombres ρ et σ : le premier est un invariant projectif, et il est facile de voir qu'il n'en est pas de même du second , d'où résulte qu'une relation quelconque $f(\rho, \sigma) = 0$ ne peut être valable d'une manière absolue.

Mais posons :

$$X = x + t\,y$$

où t est une indéterminée , et considérons le sous-résultant par rapport à la variable X : le nombre σ correspondant est égal à ρ , car tout monôme de degré σ en x et y appartient à $\mathcal{O}$. Si on spécialise t , l'égalité $\sigma = \rho$ subsiste sauf au plus pour un nombre fini de valeurs de t , et nous avons, pour la multiplicité de Noether, le résultat algébrique suivant :

Ox étant fixé, on peut donc toujours choisir l'axe Oy de manière que l'on ait l'égalité

$$\sigma = \rho$$

C_y est dit alors <u>normal</u> , <u>et pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit, d'après (12) , que l'on ait</u>

(11') $\quad l = r - 1$

Cela étant, si nous appelons N le maximum de la somme N_0 des ordres de contact d'une branche de f en O, avec tous les branches de O , l'inégalité (10) nous donne pour ρ la <u>limite inférieure</u>

(10') $\quad r + s - 1 + N \leq \rho$

Pour étudier cette limite , fonction d'éléments géométriques simples, il est commode d'approcher convenablement les courbes de base par des <u>courbes décomposées</u>, ce qui est possible puisqu'il s'agit d'une <u>étude locale</u> . En utilisant quelques théorèmes relatifs au cas où les polynomes de base sont décomposés, on voit que cette limite inférieure (10') est atteinte <u>toutes les fois que les tangentes communes aux deux courbes de base en O sont simples pour f=0</u> .

D'autre part, Bertini et Voss avaient donné comme <u>limite supérieure</u> de ρ l'expression suivante :

$$\rho = \kappa - (r-1)(s-1) = r + s - 1 + \sum v_{ij}$$

où $k = (rs + \sum v_{ij})$ désigne la multiplicité de Bezout, les v_{ij} étant les ordres de contact en O des différentes branches de f avec les différentes branches de g : cette limite n'est atteinte que dans le cas particulier où les courbes de base ont, en O, au plus une tangente commune, celle-ci étant le plus simple pour l'une d'elles. De cette limite résulte que le sous-résultant et le résultant ne peuvent être identiques que si chaque point d'intersection est simple au moins pour l'une des deux courbes, et cette condition nécessaire est aussi suffisante, d'après (10').

Signalons aussi que, lorsque $f = 0$ n'admet que des points multiples à tangentes distinctes, on peut indiquer des conditions suffisantes pour qu'un polynome appartienne à l'idéal $\mathfrak{M}$, conditions qui font intervenir seulement des multiplicités d'intersection, et sont utiles pour une démonstration tout à fait rigoureuse du théorème du Reste (van der Waenden, Zur Begründung des Restsatzes mit dem Noetherschen Fundamentalsatz, Math. Ann. 1931, p.472).

En utilisant toujours des polynomes de base décomposés, on peut enfin ramener le cas où il y a des tangentes communes multiples pour les deux courbes à celui où les deux courbes ont en O toutes leurs tangentes confondues avec une même droite . L'étude des singularités des deux courbes qui est nécessaire pour traiter de cas fait intervenir dans chacune de ces courbes certains groupements de branches, appelés faisceaux, et distincts des systèmes circulaires : un ensemble φ de branches de f est un faisceau par rapport à g si deux branches quelconques de φ ont un contact de même ordre avec chaque branche de g. On appelle système conjugué , γ , de φ dans g l'ensemble des branches de g qui ont le contact maximum avec les branches de φ . Si le conjugué de φ ne contient aucun autre système conjugué, le faisceau est dit principal et son système conjugué dans g est lui-même un faisceau principal par rapport à f : à chacun de ces couples, φ_i , γ_i de faisceaux principaux conjugués correspond un nombre

$$\delta_i = r + s - 1 + (r_i + s_i - 1)\nu_i + N_i + N'_i$$

où r_i , s_i désignent les ordres (nombres de branches) de φ_i , et γ_i , ν_i l'ordre de contact d'une branche de φ_i avec une branche de γ_i , N_i la somme des ordresde contact d'une branche de φ_i avec les branches de $g - \gamma_i$ N'_i la somme des ordres de contact d'une branche de γ_i avec les branches de $f - \varphi_i$. Le plus grand, δ , des nombres δ_i (ou sa partie entière si δ n'est pas entier) est une limite supérieure de ρ . Cette limite est atteinte en général ; mais moyennant certaines conditions, ρ peut être égal à sa borne inférieure (10') ou à un nombre quelconque compris entre cette borne et δ .

---

4. - Généralisations du théorème de Noether : cas non homogène.

Nous avons vu que l'idéal

$$\mathfrak{M} = (f,g)$$

dont il s'agit dans le théorème de Noether est l'intersection d'un nombre fini d'idéaux primaires . On démontre que dans des anneaux satisfaisant à des conditions générales vérifiées pour les anneaux de polynomes , tout idéal est l'intersection d'un nombre fini d'idéaux primaires (voir le Séminaire de 1934-35) .

L'application de ce théorème de décomposition conduit à des généralisations naturelles du théorème de Noether . Considérons d'abord, dans l'anneau $\Omega\,[x_1,\ldots,x_n]$ où Ω est un corps algébriquement fermé, un idéal $\mathfrak{M}$ de dimension zéro : sa variété est un système de points M_1, M_1, ..., M_{N-1} et on a la décomposition correspondantes:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{Q} \cap \mathfrak{Q}_1 \cap \ldots\ldots \cap \mathfrak{Q}_{N-1}$$

Si ρ est l'exposant de $\mathfrak{Q}$ et si $\mathfrak{p}$ désigne l'idéal premier de tous les polynomes nuls en $\mathfrak{M}$, nous avons encore :

$$\mathfrak{Q} = (\mathfrak{M}, \mathfrak{p}^\rho)$$

Il est évident, en effet, que $\mathfrak{Q}$ contient $(\mathfrak{M}, \mathfrak{p}^\rho)$; et si inversement, φ est un polynome de $\mathfrak{Q}$ on peut trouver ψ n'appartenant pas à $\mathfrak{p}$ et tel que

$$\varphi\psi \subset \mathfrak{M} \qquad (\psi \not\subset \mathfrak{p})$$

et en multipliant par un polynome η tel que

$$\eta\psi \equiv 1 \quad (\mathfrak{p}^\rho)$$

il vient

$$\varphi \in (\mathfrak{M}, \mathfrak{p}^\rho)$$

Il faut donc et il suffit que pour tous les zéros M_i, on ait

$$\varphi \subset (\mathfrak{M}, \mathfrak{p}_i^{\rho_i})$$

pour que φ appartienne à l'idéal $\mathfrak{M}$.

Considérons maintenant un idéal $\mathfrak{M}_K = (f_1, \ldots f_r)$

toujours de *dimension zéro* , dans l'anneau $\mathfrak{A}_K = K[x_1,\ldots,x_n]$ où le corps K *n'est pas algébriquement fermé* ; si Σ est une extension quelconque de K , et si $\mathfrak{M}_\Sigma = (f_1,\ldots,f_r)$ désigne l'idéal de même base dans l'anneau $\mathfrak{A}_\Sigma = \Sigma[x_1,\ldots,x_n]$ on voit sans peine qu'un polynome de $\mathfrak{A}_K$ qui appartient à $\mathfrak{M}_\Sigma$ appartient à $\mathfrak{M}_K$: on peut donc appliquer les résultats précédents en passant à l'extension algébriquement fermée Ω de K .

Si K est *parfait* (vollkommen) , donc en particulier si ce corps est *de caractéristique 0* , le sous-résultant $\mathfrak{R}(x_1)$ de l'idéal $\mathfrak{M}_\Omega$ appartient à l'anneau $\mathfrak{A}_K$, sa décomposition en puissances de facteurs irréductibles dans cet anneau correspond biunivoquement à la décomposition de $\mathfrak{M}_K$ en idéaux primaires , et on peut toujours choisir les coordonnées de manière que l'exposant de chaque facteur irréductible du sous-résultant soit égal à l'exposant de l'idéal primaire correspondant . Par suite, pour que $\mathfrak{M}_K$ soit primaire, il faut et il suffit que le sous-résultant soit puissance d'un ~~facteur~~ polynome irréductible .

Soit enfin $\mathfrak{M}$ un idéal de *dimension quelconque* $\mathfrak{Q}$ un composant primaire de $\mathfrak{M}$ de dimension d , $\mathfrak{P}$ l'idéal premier appartenant à $\mathfrak{Q}$. On sait définir pour $\mathfrak{P}$ une représentation paramétrique $\xi_1, \ldots, \xi_d, \xi_{d+1}, \ldots, \xi_n$ où $\xi_1 \ldots, \xi_d$ (par exemple) sont des indéterminées, $\xi_{d+1}, \ldots, \xi_n$ des fonctions algébriques de $\xi_1, \ldots, \xi_d$. Effectuons la substitution

$$x_1 = \xi_1, \ldots, x_d = \xi_d$$

dans tout polynome f de $\mathfrak{A} = K[x_1, \ldots, x_n]$ ce qui donne un polynome f' de l'anneau $\mathfrak{A}' = K(\xi_1, \ldots, \xi_d)[x_{d+1}, \ldots, x_n]$ on fait correspondre ainsi à l'idéal $\mathfrak{q}$ de $\mathfrak{A}$ un idéal $\mathfrak{q}'$ de $\mathfrak{A}'$, également primaire et de dimension zéro, à l'idéal $\mathfrak{M} = (f_1, \ldots f_r)$ un idéal $\mathfrak{M}' = (f'_1, \ldots, f'_r)$, dont $\mathfrak{q}'$ est composant primaire . Si on pose :

$$\mathfrak{p}_\xi = (x_{d+1} - \xi_{d+1}, \ldots, x_n - \xi_n)$$

on voit que <u>la condition nécessaire et suffisante pour que</u> $f \in \mathfrak{M}$ <u>est que</u> :

$$f' \in (\mathfrak{M}', \mathfrak{p}_\xi^{\rho})$$

pour tout composant primaire $\mathfrak{q}$ de $\mathfrak{M}$. C'est le <u>critère de Hentzelt</u>, ou Hentzeltscher Nullstellensatz .

5.- Généralisation du théorème de Noether : cas homogène

Sous la forme non homogène que nous lui avons donnée, le théorème de Noether est en général insuffisant pour les applications géométriques qui exigent le plus souvent qu'on se place dans le plan projectif .

Or l'identité

$$(1) \qquad \varphi = a\,f + b\,g$$

relative à une courbe $\varphi = 0$ passant par les points d'intersection à distance finie de $f = 0$, $g = 0$ et y satisfaisant à la condition de Noether entraine seulement

$$(2) \qquad x_0^{\,h}\,\Phi = A\,F + B\,G$$

où $\Phi(x_0, x_1, x_2)$, F, G, ... sont les formes déduites de φ , f , g ....en homogénéisant, alors que l'identité dont on a besoin est

$$(3) \qquad \Phi = U\,F + V\,G$$

Mais si f et g n'ont pas de points communs à l'infini, (3) se déduit immédiatement de (2) et le théorème de Noether est valable sous forme homogène . On voit sans peine à l'aide d'une transformation homographique qu'il l'est encore quand il y a des points d'intersection à l'infini si Φ satisfait en ces points à la condition de Noether .

Considérons d'une manière générale, dans l'anneau $\Omega[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ (Ω corps des nombres complexes) un idéal homogène $\mathfrak{M} = (F_1, \ldots, F_k)$ c'est-à-dire un idéal dont les éléments de base sont des formes, et qui se déduit par homogénéisation d'un idéal ordinaire $(f_1, \ldots, f_k)$ (Voir conférence de Chabauty). La décomposition de l'idéal $\mathfrak{M}$ en idéaux primaires :

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{q}_0 \cap \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_N$$

fait intervenir les idéaux $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_N$ qui sont homogènes et correspondent aux composants primaires de $(f_1, \ldots, f_k)$; leurs variétés sont des cônes de sommet O (ou des droites passant par O) dans l'espace non projectif C_{n+1}. Mais on peut avoir aussi un composant $\mathfrak{q}_0$ appartenant à l'idéal premier $\mathfrak{p}_0 = (x_0, x_1, \ldots x_2)$ et n'ayant par conséquent pas de variété au point de vue projectif. Sa présence représente une condition algébrique supplémentaire, vérifiée d'elle-même pour les formes de degré suffisamment élevé puisque toute forme de degré au moins égal à l'exposant ρ_0 de $\mathfrak{q}_0$ appartient à $\mathfrak{p}_0^{\rho_0}$ donc à $\mathfrak{q}_0$.

L'extension du théorème de Noether à telle ou telle question de géométrie projective ne sera donc valable sans restriction que si l'idéal homogène correspondant au problème est sans composant impropre . C'est le cas d'après ce que nous venons de voir, pour l'idéal (F,G) défini par deux formes sans facteur commun . Plus généralement, Severi a montré qu'il en était de même pour l'idéal $(F_1,\dots,F_{n-d})$ défini par $n-d$ hypersurfaces $F_i = 0$ de l'espace projectif à n dimensions lorsque l'intersection de ces hypersurfaces est non mixte c'est-à-dire n'est formée que de variétés de dimension d exactement .

C'est au contraire parmi les intersections totales mixtes qu'on trouve des exemples simples d'idéaux avec composant impropre . C'est End, élève de Brill, qui a montré le premier que le théorème de Noether n'est pas valable pour trois surfaces $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$, se coupant suivant une courbe et un système de points . L'identité

$$F = A_1F_1 + A_2F_2 + A_3F_3$$

pour une forme F satisfaisant aux conditions de Noether n'a été établie par End qu'en supposant F de degré suffisamment élevé .

Severi a également attiré l'attention sur le fait qu'une forme F s'annulant aux points d'intersection d'un plan $\Phi = 0$ et d'une quartique gauche unicursale Γ n'appartient pas nécessairement à l'idéal $(\mathfrak{M}, \Phi)$, étant l'idéal attaché à Γ. Il en a d'ailleurs conclu que cette difficulté empêchait l'application à la géométrie de la théorie des formes algébriques de Hilbert et Lasker.

Il m'a semblé intéressant d'établir des conditions moyennant lesquelles un idéal homogène $\mathfrak{a}$ n'admettrait pas de composant impropre.

Considérons pour cela la fonction caractéristique de Hilbert $\chi(\mathfrak{a}, l)$ de l'idéal $\mathfrak{a}$, c'est-à-dire le nombre de conditions indépendantes pour qu'une forme de degré l appartienne à $\mathfrak{a}$. Supposons les coordonnées choisies de manière que l'hyperplan $x_0 = 0$ par exemple, ne contienne aucune des variétés irréductibles $V_1, \ldots, V_h$ des composants primaires propres $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_h$ de $\mathfrak{a}$. Les formes $F(0, x_1, \ldots, x_n)$ déduites de celles de $\mathfrak{a}$ par la substitution $x_0 = 0$ engendrent dans l'anneau $\Lambda[x_1 \ldots x_n]$ un idéal $\bar{\mathfrak{a}}$ appelé section de $\mathfrak{a}$. On a :

$$\chi(\mathfrak{a}, l) = \chi(\mathfrak{a}, l) - \chi(\mathfrak{a}, l-1) + \lambda(l)$$

où $\lambda(\ell)$ est une fonction positive ou nulle, nécessairement nulle, comme l'a montré M. Janet (Ann. Ec. Normale, 1924) pour les valeurs de ℓ dépassant une certaine limite. Pour que $\mathfrak{A}$ n'admette pas de composant impropre, il faut et il suffit que la fonction $\lambda(\ell)$ soit identiquement nulle (Propriétés des variétés algébriques, fasc. XII de la Collection publiée à la mémoire de Jacques Herbraud).

Soit alors $\mathfrak{M}$ un idéal homogène sans composant impropre, par exemple l'idéal attaché à une variété V. En appliquant le critère précédent à l'étude de l'idéal $(\mathfrak{M}, \Phi)$ où Φ est une forme qui n'est contenue dans aucun des idéaux premiers appartenant à $\mathfrak{M}$, on trouve que la condition nécessaire et suffisante pour que $(\mathfrak{M}, \Phi)$ n'admette pas de composant impropre est que la section $\overline{\mathfrak{M}}$ de $\mathfrak{M}$ soit elle-même sans composant impropre. Ce résultat auquel conduisent les méthodes algébriques, est d'autant plus curieux que Légaut, dans sa thèse, avait été assez naturellement conduit, par l'emploi de méthodes purement géométriques, à penser le contraire : il a énoncé, d'ailleurs sans démonstration, dans le cas de l'intersection d'une courbe gauche et d'une surface Φ, une proposition équivalente à l'absence de composant impropre lorsque la surface Φ est d'un degré assez élevé, alors que, comme nous venons de le voir, cette condition est absolument indépendante de Φ .

Les idéaux $\mathfrak{M}$ pour lesquels $\mathfrak{M}$, ou $(\mathfrak{M}, \Phi)$ sont sans composant impropre, sont dits idéaux de première espèce . Une variété V de l'espace projectif P_n est de première espèce si l'idéal attaché à cette variété est de première espèce , et on a le résultat suivant : le théorème de Noether est valable pour l'intersection d'une variété de première espèce et d'une hypersurface $\Phi = 0$ ne contenant aucune partie irréductible de cette variété . Réciproquement, si le théorème de Noether est valable pour l'intersection d'une variété V et d'une hypersurface particulière Φ , V est de première espèce . Un idéal ou une variété qui ne sont pas de première espèce sont dits de seconde espèce.

Toute intersection totale non mixte $\mathfrak{J}$ de dimension $d \geq 1$ est de première espèce . Si nous faisons passer par $\mathfrak{J}$ n-d hypersurfaces quelconques se recoupant suivant une variété $\mathfrak{J}'$ à d dimensions, $\mathfrak{J}'$ est également de première espèce ; de même toute variété $\mathfrak{J}''$ déduite de $\mathfrak{J}'$ comme $\mathfrak{J}'$ de $\mathfrak{J}$, et ainsi de suite, d'où résulte notamment que les courbes gauches appelées par Légaut courbes "congrues au plan" sont de première espèce .

Considérons enfin un idéal $\mathfrak{A} = (F_1, \ldots, F_{n-d+1})$ ayant pour variété l'ensemble d'une variété V à d dimensions et d'une variété V' à d-1 dimensions : pour que cet idéal n'admette pas de composant impropre, il faut et il suffit que V soit variété complémentaire d'une variété de première espèce, ce qui détermine les cas où le théorème de Noether vaut pour les intersections totales mixtes .