

# SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES

P. DUBREIL

**Algèbres de Lie (suite)**

*Séminaire de Mathématiques (Julia)*, tome 4 (1936-1937), exp. n° 9, p. 1-35

[http://www.numdam.org/item?id=SMJ\\_1936-1937\\_\\_4\\_\\_A13\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SMJ_1936-1937__4__A13_0)

© École normale supérieure, Paris, 1936-1937, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de mathématiques implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

UNIVERSITÉ DE PARIS  
FACULTÉ DES SCIENCES

CABINET DU DÉPARTEMENT  
DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

IV. - J

SEMINAIRE DE MATHÉMATIQUES

---

Quatrième année - 1936-37

---

Les TRAVAUX de M. Elie CARTAN

---

Algèbres de Lie

(suite)

---

Exposé fait par M. DUBREIL, le lundi 26 Avril 1937

---

Exemplaire n° 3



simple . Nous allons les déduire du second critère de Cartan:

$\mathfrak{G}_2(x) = \text{tr. } X^2$  n'est pas dégénérée où  $x$  est un élément général de  $\mathfrak{G}$  :

$$x = x_0 + \sum_{\alpha \neq 0} x_\alpha = \lambda^i h_i + \sum_{\alpha \neq 0} (\xi^\alpha u_\alpha + \xi'^\alpha u'_\alpha + \dots)$$

On a :

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_2(x) = \text{tr. } X^2 &= \text{tr. } X_0^2 + \sum_{\alpha \neq 0} \text{tr. } X_\alpha X_{-\alpha} \\ &= \Phi(\lambda) + \sum_{\alpha \neq 0} (\xi^\alpha \xi^{-\alpha} \text{tr. } U_\alpha U_{-\alpha} + \xi'^\alpha \xi'^{-\alpha} \text{tr. } U'_\alpha U'_{-\alpha} \\ &\quad + \dots) \end{aligned}$$

car  $\text{tr. } U_\alpha U_\beta \neq 0$  si  $\alpha + \beta \neq 0$  puisque  $U_\alpha U_\beta$  transforme un vecteur de  $\mathfrak{G}_\rho$  en un vecteur de  $\mathfrak{G}_{\rho+\alpha+\beta}$

La forme quadratique  $\mathfrak{G}_2$  n'étant pas dégénérée contient effectivement les  $r$  variables  $\xi, \eta$ , cela nous donne :

1) puisque  $\Phi(\lambda)$  est la somme des carrés des racines  $\alpha$  : il y a exactement  $n$  racines  $\alpha$  linéairement indépendantes. Ces racines ne s'annulent toutes que pour  $\lambda^1 = \dots = \lambda^n = 0$ , c'est-à-dire pour  $h = 0$ . Or on a vu qu'elles sont nulles pour tout élément de  $\mathfrak{G}'_0$ . On a donc

$\mathfrak{G}'_0 = 0$  :  $\mathfrak{G}_0$  est abélien.

2) tous les  $\xi^\alpha$  doivent figurer, donc :  $-\alpha$  est racine en même temps que  $\alpha$ , et les quantités  $\text{tr.} U_\alpha U_{-\alpha}$ ,  $\text{tr.} U_\alpha U'_{-\alpha}$ , .... ne sont pas toutes nulles : soit  $u_{-\alpha}^*$  celui des éléments de base de  $\mathfrak{G}_{-\alpha}$  tel que  $\text{tr.} U_\alpha U_{-\alpha}^* \neq 0$ .

Pour pouvoir donner les deux dernières propriétés des racines des groupes semi-simples, à savoir :  $\alpha$  est racine simple, et  $m\alpha$  (ou  $m$  est un nombre fixe  $\neq \pm 1, 0$ ) n'est pas racine, nous avons besoin de quelques propositions préliminaires, qui seront d'ailleurs fondamentales pour la suite ; en particulier, il nous faut avoir la valeur de  $\text{tr.} U_\alpha U_{-\alpha}^*$ . Pour cela, considérons une racine  $\rho$  différente de  $\alpha$ , et supposons que  $\rho - \alpha$  n'est pas racine mais que  $\rho + p\alpha$  est racine pour  $p$  entier positif ou nul, jusqu'à une certaine valeur  $P$ . L'ensemble de ces racines sera appelé une suite  $-(\alpha)$ .

Soit  $v_0 = u_\rho$  le vecteur de poids  $\rho$  dans  $\mathfrak{G}$ . Formons la suite de vecteurs :

$$v_0, v_1 = [u_\alpha v_0] = U_\alpha v_0, \dots, v_{p+1} = U_\alpha v_p, \dots$$

Si  $v$  est un vecteur de poids  $\Lambda$ ,  $U_\alpha v$  est un vecteur de poids  $\Lambda + \alpha$ , puisque :

$$H \cdot U_\alpha v = [H U_\alpha] v + U_\alpha H v = (\alpha + \Lambda) \cdot U_\alpha v$$

On a donc :

$$(1) \quad H v_p = (\rho + p \alpha) v_p$$

Appliquons à  $v_{p+1}$  la transformation  $U_{-\alpha}^*$  :

$$U_{-\alpha}^* v_{p+1} = [u_{-\alpha}^* [u_{\alpha} v_p]] = -[u_{\alpha} [v_p u_{-\alpha}^*]] - [v_p [u_{-\alpha}^* u_{\alpha}]]$$

ou, en posant  $h_{\alpha}^* = [u_{\alpha} u_{-\alpha}^*]$  :

$$(2) \quad U_{-\alpha}^* v_{p+1} = [u_{\alpha} [u_{-\alpha}^* v_p]] - H_{\alpha}^* v_p$$

Meis  $[u_{-\alpha}^* v_0]$  étant nul, (2) s'écrit pour  $p = 0$  :

$$U_{-\alpha}^* v_1 = -H_{\alpha}^* v_0 = -\rho_{\alpha}^* v_0$$

en désignant par  $\psi_{\alpha}^*$  la valeur que prend pour  $h = h_{\alpha}^*$  une forme linéaire  $\psi(\lambda)$ .

On en déduit de proche en proche :

$$(3) \quad U_{-\alpha}^* v_{p+1} = U_{-\alpha}^* U_{\alpha} v_p = \mu_{p+1} v_p$$

avec :

$$(4) \quad \begin{cases} \mu_1 = -\rho_{\alpha}^* \\ \mu_{p+1} = \mu_p - (\rho_{\alpha}^* + p \alpha_{\alpha}^*) = -(p+1)(\rho_{\alpha}^* + \frac{p}{2} \alpha_{\alpha}^*) \end{cases}$$

Avant d'utiliser ces formules, nous devons remarquer qu'elles subsistent à de très légères modifications près, si on fait les hypothèses :

$$p = \alpha \quad v_0 = u'_\alpha \quad (\text{2ème vecteur de base de } \mathcal{G}_\alpha)$$

On a cette fois la congruence :

$$(1') \quad H v_0 \equiv \alpha v_0 \pmod{u_\alpha}$$

$$\text{soit : } H v_0 = \alpha v_0 + k u_\alpha$$

et on voit sans peine que :

$$(1'') \quad H v_p = (p+1) \alpha v_p \quad \text{pour } p \geq 1$$

D'autre part, la relation (2) pour  $p = 0$  donne ici, en remarquant que  $[u_{-\alpha}^*, v_0]$  est un élément  $h'$  de  $\mathcal{G}_0$

la congruence :

$$(3') \quad U_{-\alpha}^* v_1 \equiv \omega_1 v_0 = -\alpha_\alpha^* v_0 \pmod{u_\alpha}$$

On a ensuite les égalités :

$$(3'') \quad U_{-\alpha}^* v_{p+1} = \omega_{p+1} v_p = -\frac{(p+1)(p+2)}{2} \alpha_\alpha^* v_p \quad \text{pour } p \geq 1.$$

Revenons aux premières hypothèses. Soit  $l \geq 0$  le plus petit entier tel que l'on ait :  $v_{l+1} = 0$ ;  $l$  sera appelé la longueur de la suite  $(\alpha)$  considérée. La relation (3), pour  $p = l$ , donne :

$$\omega_{l+1} = 0$$

d'où

$$(5) \quad l = - \frac{3 \rho \alpha^*}{\alpha \alpha^*}$$

et si  $\beta = \rho + p \alpha$  est une racine quelconque de la suite on a :

$$l - 2p = - \frac{2 \beta \alpha^*}{\alpha \alpha^*}$$

Le nombre  $\frac{2 \beta \alpha^*}{\alpha \alpha^*}$  est donc un entier. De plus, les quantités

$\beta - k \alpha$  où l'entier  $k$  prend toutes les valeurs compri-

ses entre 0 et  $\frac{3 \beta \alpha^*}{\alpha \alpha^*}$  sont des racines : ce sont les racines

de la suite  $(\alpha)$  comprises entre  $\beta = \rho + p \alpha$  et

$\beta' = \rho + (l - p) \alpha$  :

$$\rho \quad \beta' \quad \beta \quad \rho + l \alpha$$

D'après (3), la transformation  $U_{-\alpha}^* U_{\alpha}$  laisse invariant l'espace  $\mathcal{R}_1 = (v_0, v_1, \dots, v_l)$  et sa trace dans cet espace est :

$$\text{tr. } \mathcal{R}_1 \quad U_{-\alpha}^* U_{\alpha} = \sum_{p=1}^l m_p = \sum_{p=1}^l \frac{p(l-p+1)}{2} \alpha \alpha^* = \frac{\alpha \alpha^* \cdot l(l+1)(l+2)}{6}$$

On peut maintenant faire le même raisonnement dans l'espace facteur  $\mathcal{G} / \mathcal{R}_1$  ; on aura dans cet espace (où



les poids sont toujours des racines de  $G_f$  ) une nouvelle suite  $(\alpha)$  de longueur  $l' \geq 0$ , et ainsi de suite . On voit ainsi que :

1) les propriétés précédentes des nombres  $\frac{3\beta_\alpha^*}{\alpha_\alpha^*}$  sont valables pour toute racine  $\beta$  ;

2) la trace de la transformation  $U_{-\alpha}^* U_\alpha$  dans l'espace  $G_f$  lui-même est :

$$\text{Tr. } U_{-\alpha}^* U_\alpha = \frac{\alpha_\alpha^*}{3} \sum \frac{l(l+1)(l+2)}{6}$$

la sommation étant étendue aux suites  $(\alpha)$  considérées successivement dans  $G_f, G_f/P_1, \dots$  . Comme on a

$$\text{Tr } U_\alpha U_{-\alpha}^* = \text{Tr } U_{-\alpha}^* U_\alpha \neq 0$$

il vient

$$\alpha_\alpha^* \neq 0$$

Nous allons en déduire que la racine  $\alpha$  est nécessairement simple . En effet s'il en était autrement,  $G_{f_\alpha}$  admettrait au moins un deuxième vecteur de base  $u'_\alpha \neq 0 \pmod{u_\alpha}$  . La suite des  $v$  formée à partir de  $v_0 = u'_\alpha$  ne comprendrait d'après (3") que des vecteurs différents de 0 quel que soit  $p > 0$  , ce qui est absurde . Toutes les racines sont donc simples, et on a :

$$U_{-\alpha}^* = U_{-\alpha} \quad . \quad \text{tr. } U_{\alpha} U_{-\alpha} = N_{\alpha} \neq 0 \quad \alpha_{\alpha}^* = \alpha_{\alpha} \} \alpha_{\alpha} \neq 0 .$$

Enfin, si  $m\alpha$ ,  $-m\alpha$  ( $m \geq 2$ ) étaient racines, mais non  $(m+1)\alpha$ ,  $-(m+1)\alpha$ , on pourrait construire la suite définie par le vecteur  $v_0 = u_{-m\alpha}$  ( $\neq 0$ ). Cette suite, puisque  $\alpha_{\alpha} \neq 0$  serait de longueur  $2m$  et le premier vecteur pouvant être nul serait  $v_{2m+1}$ . Or  $v_{m+1}$  étant de poids  $\alpha$ , est un multiple de  $u_{\alpha}$  et  $v_{m+2} = [u_{\alpha}, v_{m+1}]$  est nul. On a donc :

$$2m + 1 \leq m + 2 \quad \text{c'est-à-dire} \quad m \leq 1$$

et aucun multiple entier de  $\alpha$  n'est racine. Il est impossible de plus que  $k\alpha$  soit racine,  $k$  étant un nombre fixe quelconque différent de  $\pm 1$  et de 0. Si on avait en effet  $\beta = k\alpha$ , il en résulterait

$$\frac{2\beta_{\alpha}}{\alpha_{\alpha}} = 2k \quad \frac{2\alpha_{\beta}}{\beta_{\beta}} = \frac{2}{k}$$

$2k$  et  $\frac{2}{k}$  devant être entiers et  $2\alpha$ ,  $2\beta$  n'étant pas racines, il reste la seule possibilité  $k = \pm 1$ .

En résumé, un groupe semi-simple a une base de la forme

$$G = (h_1, \dots, h_n, u_{\alpha}, u_{-\alpha}, u_{\beta}, u_{-\beta}, \dots)$$

et sa structure est définie par les relations :

$$[h_i h_k] = 0 \quad . \quad [h u_\alpha] = \alpha u_\alpha \quad . \quad \alpha = a_i \lambda^i \quad .$$

$$[u_\alpha u_{-\alpha}] = h_\alpha = -a^i h_i \quad . \quad [u_\alpha u_\beta] = N_{\alpha\beta} u_{\alpha+\beta}$$

(  $N_{\beta\alpha} = -N_{\alpha\beta}$  ,  $N_{\alpha\beta} = 0$  si  $\alpha + \beta$  n'est pas racine )

et on a

$$\sigma_2(x) = \Phi(\lambda) + \sum_{\alpha \neq 0} N_\alpha \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ -\alpha \end{matrix} \right\}$$

$$N_\alpha = \text{Tr.} U_\alpha U_{-\alpha} = \frac{\alpha^2}{2} \sum \frac{l(l+1)(l+2)}{6}$$

avec

$$\Phi(\lambda) = \sum \alpha^2 = g_{ik} \lambda^i \lambda^k$$

## 2.- Classification des groupes simples .

Chacun des vecteurs  $u_\alpha, u_{-\alpha}, u_\beta, \dots$  n'étant défini qu'à un facteur près, on pourra les normer de manière à simplifier les constantes  $N_\alpha, N_{\alpha\beta}$  . Nous choisirons  $u_\alpha, u_{-\alpha}$  de manière que l'on ait

$$N_\alpha = -1$$

$\alpha_\alpha$  est alors négatif et rationnel . Cela fait, on pourra encore multiplier  $u_\alpha$  par un facteur arbitraire  $\mu_\alpha$  , à condition de multiplier  $u_{-\alpha}$  par  $\frac{1}{\mu_\alpha}$  .

La forme  $G_2$  étant invariante par le groupe adjoint, on a pour tout  $x$  :

$$x = \lambda^i h_i + \sum_{\beta \neq 0} \xi^\beta u_\beta$$

$$G_2([u_\alpha x], x) = 0$$

Or

$$[u_\alpha x] = - \xi^{-\alpha} a^i h_i - \alpha u^\alpha + \sum_{\substack{\beta \neq 0 \\ \beta \neq -\alpha}} N_{\alpha\beta} \xi^\beta u_{\alpha+\beta}$$

ce qui donne

$$G_2([u_\alpha x], x) = - \xi^{-\alpha} \Phi(a^i, \lambda^k) + \alpha \xi^{-\alpha} - \sum_{\alpha+\beta+\gamma=0} N_{\alpha\beta} \xi^\beta \xi^\gamma = 0$$

d'où les deux relations importantes :

$$(6) \quad \Phi(a^i, \lambda^k) = g_{ik} a^i \lambda^k = \alpha = \vartheta_k \lambda^k$$

$$(7) \quad \sum_{\alpha+\beta+\gamma \neq 0} N_{\alpha\beta} \xi^\beta \xi^\gamma = 0$$

Utilisons d'abord la première ; nous avons :

$$a_k = g_{ik} a^i$$

de sorte que les  $a_k$  et les  $a^i$  sont les composantes covariantes <sup>et contravariantes</sup> du même vecteur  $a$  par rapport au tenseur fondamental  $g_{ik}$  : ce vecteur  $a$  de l'espace à  $n$  dimensions qui

correspond d'une manière biunivoque à la racine  $\alpha = a_i \lambda^i$  sera appelé vecteur-racine. Comme  $h_\beta = -b^i h_i$ , on peut écrire :

$$\alpha_\beta = -a_i b^i = -(a b)$$

$(a, b)$  désignant le produit scalaire des deux vecteurs  $a$  et  $b$ ; de là résulte la propriété de symétrie  $\alpha_\beta = \beta_\alpha$ .

Considérons maintenant  $n$  racines linéairement indépendantes :  $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n)}$  dont toute autre racine  $\rho$  est une combinaison linéaire

$$\rho = r_k \alpha^{(k)}$$

Désignons par  $a^{(i)}$  et  $r$  les vecteurs-racines correspondant à  $\alpha^{(i)}$  et  $\rho$ , et par  $\omega_i^k$  l'entier  $2 \frac{(a^{(k)} a^{(i)})}{(a^{(i)} a^{(i)})}$

on voit facilement que le déterminant  $|\omega_i^k|$  est différent de zéro ; les  $n$  coefficients  $r_k$  peuvent se déterminer au moyen des  $n$  relations :

$$2 \frac{(r a^{(i)})}{(a^{(i)} a^{(i)})} = \omega_i^k r_k$$

et les  $r_k$  sont réels et rationnels. Nous pouvons donc choisir dans l'espace à  $n$  dimensions des vecteurs  $a$  un système de coordonnées tel que toutes les racines soient réelles : la forme quadratique  $\Phi(\lambda) = \sum \alpha^2 = g_{ik} \lambda^i \lambda^k$

est alors réelle et définie-positive, et la métrique définie par le tenseur  $g_{ik}$  est une métrique euclidienne ordinaire.

On peut achever de normer les vecteurs de base  $u_\alpha$  du groupe  $G_f$  de façon que les constantes  $N_{\alpha\beta}$  elles-mêmes deviennent réelles. Pour établir ce point, on peut remarquer d'abord que la relation (7) entraîne :

$$(8) \quad N_{\beta\gamma} = N_{\gamma\alpha} = N_{\alpha\beta} \quad \text{dès que } \alpha + \beta + \gamma = 0.$$

D'autre part, si  $\beta$  appartient à la suite  $(\alpha)$  :

$$\beta - j\alpha, \dots, \beta - \alpha, \beta, \beta + \alpha, \dots, \beta + k\alpha$$

on a d'après (3)

$$\left[ u_{-\alpha} \left[ u_\alpha u_\beta \right] \right] = \frac{(j+1)k}{2} \alpha_\alpha u_\beta$$

d'où, en tenant compte de (8) :

$$(9) \quad N_{\alpha\beta} N_{-\alpha, -\beta} = R_{\alpha\beta}$$

où la quantité

$$R_{\alpha\beta} = - \frac{(j+1)k}{2} \alpha_\alpha$$

est rationnelle et positive, dès que  $\alpha + \beta$  est racine ( $k \geq 1$ ), ce qui entraîne  $N_{\alpha\beta} \neq 0$ .

De plus, les racines étant des formes linéaires réelles, on peut les ordonner : cela permet de normer de proche en proche (en multipliant  $u_\alpha$  et divisant  $u_{-\alpha}$  par le même

facteur  $\mu_\alpha$  } de manière que l'on ait

$$N_{\alpha\beta} = N_{-\alpha, -\beta}$$

Alors, d'après l'équation (9) . les constantes de structure  $N_{\alpha\beta}$  sont réelles . On constate en outre que les nombres  $N_{\alpha\beta}$  sont déterminés d'une manière unique par le système  $\sum_n$  des vecteurs-racines  $a, b, \dots$  . Il en est évidemment de même de l'ordre  $r$  du groupe  $G_f$  puisque  $\sum_n$  se compose de  $r-n$  vecteurs .

Nous nous proposons maintenant d'indiquer la méthode qui permet de former tous les systèmes  $\sum_n$  correspondant aux groupes simples . D'après les propriétés établies, ces systèmes satisfont aux quatre conditions suivantes :

1°-  $\sum_n$  contient  $-a$  en même temps que  $a$  , mais non  $ka$  ( $k \neq 0, \pm 1$ ) .

2°-  $2 \frac{(ab)}{(aa)} = 2 \frac{\beta_\alpha}{\alpha_\alpha}$  est entier . Par conséquent,

si  $\varphi$  désigne l'angle des deux vecteurs  $a$  et  $b$  , on a :

$$\cos^2 \varphi = \frac{(ab)^2}{(aa)(bb)} = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \text{ ou } \frac{3}{4}$$

et  $\varphi$  ne peut être que  $= 90^\circ, 60^\circ, 45^\circ$  , ou  $30^\circ$  (ou leurs suppléments, mais, en remplaçant un des vecteurs par son opposé, on peut toujours se ramener au cas d'un angle non obtus).

Les différentes possibilités, en supposant que  $a$  est le plus petit des deux vecteurs, sont données par le tableau suivant :

$\varphi$	$\frac{(ab)}{(aa)}$	$\frac{(ab)}{(bb)}$	$\frac{(bb)}{(aa)}$
$30^\circ$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	3
$45^\circ$	1	$\frac{1}{2}$	2
$60^\circ$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$90^\circ$	0	0	quelconque

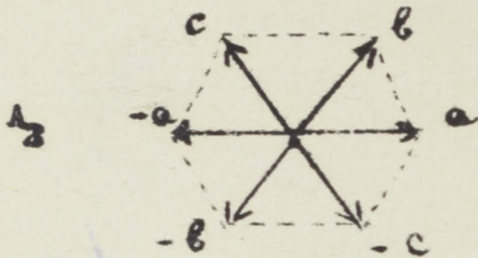
De ce tableau résulte que, du rapport des longueurs de deux vecteurs non perpendiculaires, on peut déduire leur angle.

$3^\circ \sum_n$  contient en même temps que  $a$  et  $b$ , tous les vecteurs  $b - ka$  où l'entier  $k$  prend les valeurs

$0, \dots, 2 \frac{(ab)}{(aa)}$ . Cela entraîne les conséquences suivantes:

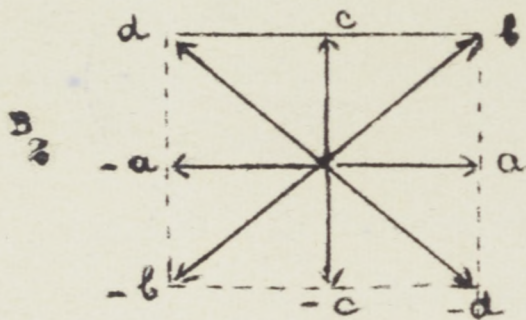
1) Si  $a$  et  $b$  font un angle de  $60^\circ$ , on a  $2 \frac{(ab)}{(aa)} = 1$





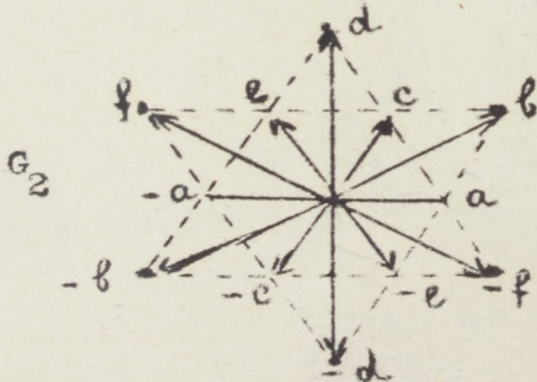
es  $b - a = c$  appartient au système. En introduisant les vecteurs opposés, on a le système  $A_2$  des six rayons d'un hexagone régulier.

2) Si  $a$  et  $b$  font un angle de  $45^\circ$ , on a  $2 \frac{(ab)}{(aa)} = 2$



et les deux vecteurs  $c = b - a$  et  $d = b - 2a$  appartiennent au système, ce qui donne, avec les vecteurs opposés, un système  $B_2$  de huit vecteurs formant les demi-diagonales et les demi-médiatrices d'un carré.

3) Si  $a$  et  $b$  font un angle de  $30^\circ$ , on a  $2 \frac{(ab)}{(aa)} = 3$



d'où les trois vecteurs :  
 $c = b - a$ ,  $e = b - 2a$ ,  $f = b - 3a$   
 Comme  $b$  fait avec  $-f$  un angle de  $60^\circ$ , nous avons encore nécessairement le vecteur  $d = b + f$  complétant l'hexagone. On a donc finalement avec  $a$  et  $b$  un système  $G_2$  de 12

vecteurs formant une sorte d'étoile qui résulte de la réunion de deux hexagones du type  $A_2$ .

4° Le groupe  $G_2$  étant simple,  $\Sigma_n$  ne se décompose pas en deux systèmes partiels perpendiculaires l'un à l'autre, car on voit sans difficulté que le sous-espace de  $G_2$  engendré par les vecteurs  $u_\alpha$  correspondant aux vecteurs-racines  $a$  d'un des systèmes partiels, et par les crochets  $[u_\alpha u_{-\alpha}]$  serait sous-groupe invariant de  $G_2$ .

Cela étant, il y a un seul système  $\Sigma_1$ , constitué par deux vecteurs opposés :

$$-a \longleftarrow \overset{0}{\text{---}} \longrightarrow a$$

le groupe simple correspondant est à trois paramètres.

Les systèmes  $\Sigma_2$  peuvent être construits à partir d'un couple  $a$  et  $b$  faisant l'angle minimum,  $a$  étant le plus petit des vecteurs du couple. On obtient ainsi, pour les valeurs  $60^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $30^\circ$  de l'angle minimum, les systèmes  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $G_2$ , qui sont visiblement complets. Les groupes simples correspondants ont 8, 10 et 14 paramètres.

Voyons maintenant les différents systèmes  $\Sigma_3$  possibles; ils proviennent de  $G_2$ ,  $B_2$ , ou  $A_2$ .

#### Extension de $G_2$

Cherchons à adjoindre à  $G_2$  un vecteur  $u$  non perpendiculaire à son plan : nous pouvons le supposer non perpendi-

culaire à  $a, b, c, d$ . On a ( en prenant  $a$  de longueur 1 )

$$\frac{(rr)}{(aa)} = (rr) = \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{2}, 2 \text{ ou } 1 .$$

$$\frac{(rr)}{(bb)} = \frac{(rr)}{3} = \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{2}, 2 \text{ ou } 1$$

d'où  $(rr) = 3$  ou  $1$ .

1)  $(rr) = 3$  entraîne  $\widehat{ar} = \widehat{cr} = 30^\circ$ .

mais les cônes de révolution d'axes  $a$  et  $c$  et de demi-angle au sommet  $30^\circ$ , n'ont en commun que la ligne d'action de  $b$ . Ce cas est donc impossible.

2)  $(rr) = 1$  entraîne  $\widehat{br} = \widehat{dr} = 30^\circ$ , et ce cas est impossible pour la même raison. Donc :

Le système  $G_2$  n'admet pas d'extension à plus de deux dimensions et aucun système  $\sum_n$  pour  $n \geq 3$ , ne contient d'angle égal à  $30^\circ$ .

#### Extension de $B_2$

Nous adjoignons à  $B_2$  un vecteur  $r$  que nous pouvons toujours supposer non perpendiculaire à  $a$  et à  $b$ . De  $(aa) = 1$ ,  $(bb) = 2$ , résulte  $(rr) = 2$  ou  $1$ .

1°) Cas  $(rr) = 2$ . On a alors  $\widehat{ra} = 45^\circ$ ,  $\widehat{rb} = 60^\circ$

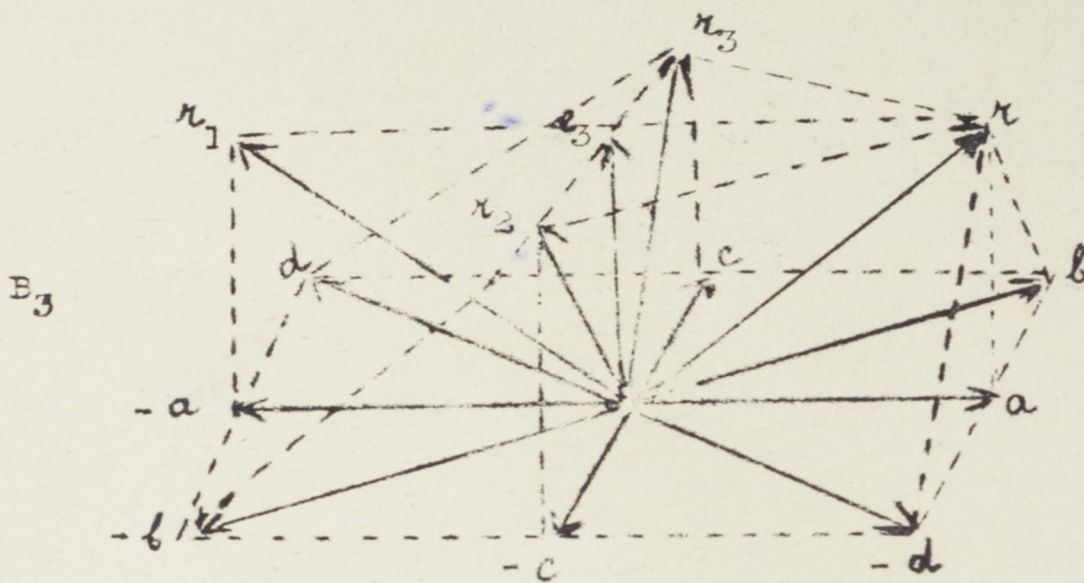
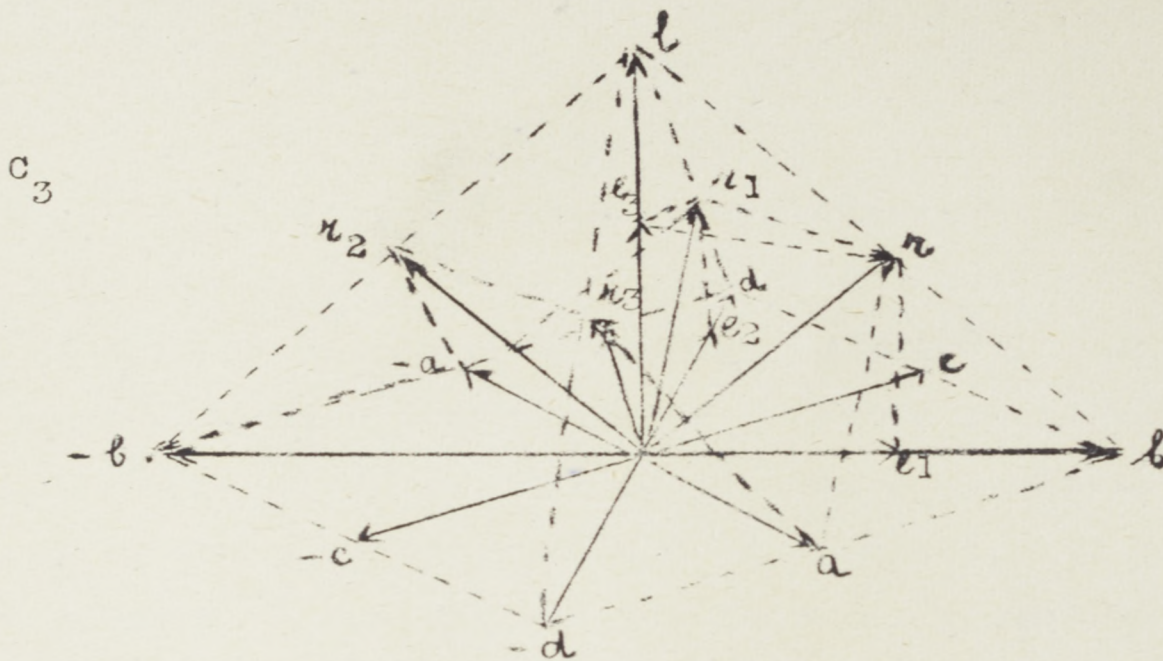


fig.1

et  $r$  est la demi-diagonale du carré construit sur  $a$  dans le plan perpendiculaire à  $B_2$  (fig.1). De  $a$  et  $r$  on déduit les vecteurs  $e_3$  et  $r_1$ ; de  $b$  et  $r$  le vecteur  $r_2$  (diagonale du carré  $-c, e_3$ ), de  $-d$  et  $r$  (ou de  $-c$  et  $r_2$ ) le vecteur  $r_3$ . Avec les vecteurs opposés, on a un système que nous appellerons  $B_3$ . On ne peut adjoindre à ce système aucun vecteur sans augmenter sa dimension, car il contient déjà toutes les solutions  $r$  du type  $(rr) = 2$ , et nous verrons qu'il ne peut contenir une solution du type  $(rr) = 1$ .

Si nous prenons dans l'espace à trois dimensions, les vecteurs fondamentaux  $e_1 = a$ ,  $e_2 = c$ , et  $e_3$ , les vecteurs de  $B_3$  sont les vecteurs  $\pm e_i$  et  $\pm e_i \pm e_j$

3°) Cas  $(rr) = 1$ . On a cette fois :  $\hat{r}a = 60^\circ$ ,  
 $\hat{r}b = 45^\circ$  et  $r$  est la demi-diagonale du carré construit



sur  $l$  dans le plan perpendiculaire à  $B_2$  (fig. 2).

On en déduit successivement les différents vecteurs portés sur la figure qui, avec les vecteurs opposés, forment un système à trois dimensions  $C_3$ . Il est impossible de combiner  $C_3$  avec  $B_3$ , car l'un contient un vecteur  $l$  de longueur  $\sqrt{2}$  porté par la perpendiculaire au plan  $B_2$ , tandis que l'autre contient un vecteur de longueur 1 porté par la même droite.

Si on rapporte l'espace aux vecteurs :  $e_1 = \frac{l}{2}$ ,  
 $e_2 = \frac{d}{2}$ ,  $e_3 = \frac{l}{2}$ , les vecteurs de  $C_3$  sont tous les vecteurs :

$$\pm 2 e_i \quad \text{et} \quad \pm e_i \pm e_j$$

Extension de  $A_2$

L'angle minimum du système étant  $60^\circ$ , nous ne pourrions avoir ici que des angles de  $60^\circ$  ou  $90^\circ$ . On a  $(a a) = 1$ ,  $(b b) = 1$  et nécessairement  $(c c) = 1$ . Si, comme on peut toujours le supposer,  $c$  n'est perpendiculaire ni à  $a$  ni à  $b$ , il forme avec ces vecteurs un tétraèdre régulier et il est perpendiculaire à  $c$  (fig.3). En associant  $c$  à  $a$  et à  $b$  on obtient les nouveaux vecteurs  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$ . Avec les vecteurs opposés, on a un système  $A_3$  qui est re-

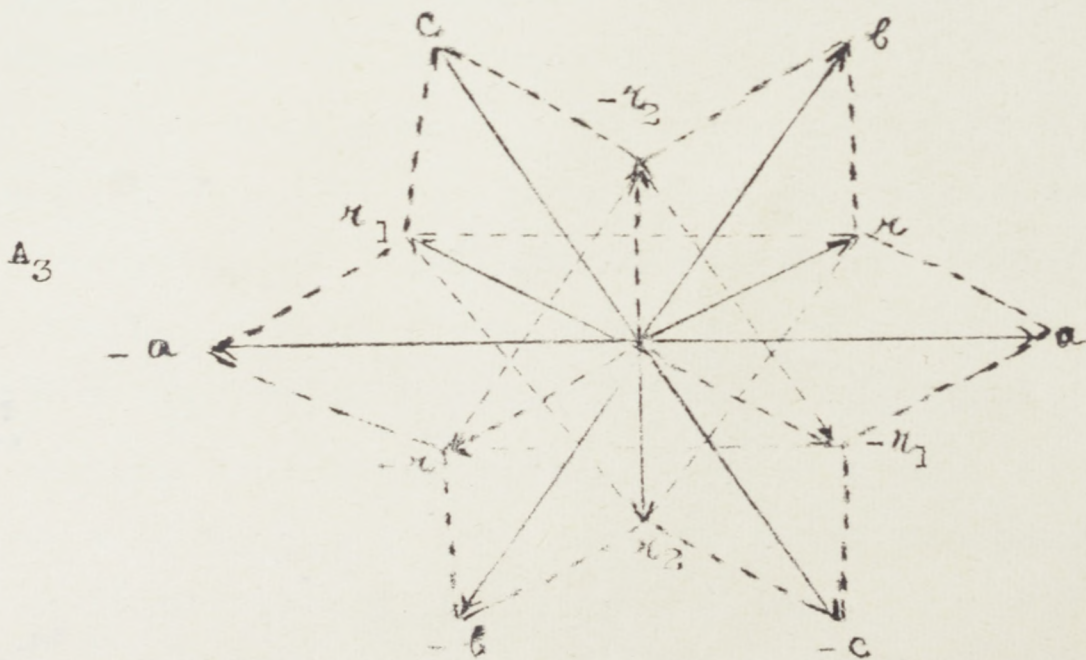


fig.3

présentée ci-contre par sa projection sur le plan de  $A_2$  ( et non plus en perspective). Comme autres vecteurs possibles, nous ne pourrions avoir que les symétriques des précédents par rapport au plan de  $A_2$ ; à eux seuls ces vecteurs constituent un système équivalent à  $A_3$ . Mais si l'on remarque que le symétrique de  $-r$  par exemple, fait avec  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  des angles inférieurs à  $\kappa_1 \wedge \kappa_2 = 60^\circ$ , on voit qu'il est impossible de combiner les deux systèmes.

Pour avoir rencontré toutes les circonstances remarquables qui se présentent dans la construction des systèmes  $\sum_n$ , il nous reste à mettre en évidence l'existence de suites infinies de systèmes d'un même type : c'est ce que nous ferons pour les systèmes  $B_n$ .

Soit donc  $B_n$  le système constitué par les vecteurs  $\pm e_i$ ,  $\pm e_i \pm e_j$  dans un espace euclidien à  $n$  dimensions rapporté à  $n$  vecteurs unitaires rectangulaires  $e_i$ . Nous adjoignons dans l'espace à  $n+1$  dimensions, un vecteur  $r = (r_1, r_2, \dots, r_{n+1})$  non perpendiculaire à  $B_n$ , et non contenu dans l'hyperplan  $B_n$ . On a  $(r r) = 1$  ou  $2$ . Prenons  $(r r) = 2$ . On peut toujours supposer que  $r$  fait un angle aigu avec  $e_1$ ; on a alors  $(r e_1) = r_1 = +1$ ,  $r \wedge e_1 = 45^\circ$ . On a ensuite  $(r e_i) = r_i = 0$  pour  $i = 2, \dots, n$ , car autrement  $r$  ferait avec  $e_1$  et  $e_i$ , qui

sont perpendiculaires, des angles de  $45^\circ$  ou  $135^\circ$ , donc seraient dans leur plan. Par suite, on a  $r_{n+1}^2 = 2 - \kappa_1^2 = 1$  d'où, par exemple,  $\kappa = (1, 0, \dots, +1)$ . De  $\kappa$  et  $e_1$ , on déduit

$$\kappa - e_1 = e_{n+1} = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

et

$$\kappa - 2e_1 = (-1, 0, \dots, 0, 1)$$

Enfin,  $\eta = e_1 \pm e_i$  est un vecteur de  $\sum_n$  pour lequel  $(\eta \eta) = 2$ ;  $\kappa$ , qui ne lui est pas perpendiculaire, fait avec  $\eta$  un angle de  $60^\circ$ , d'où le vecteur

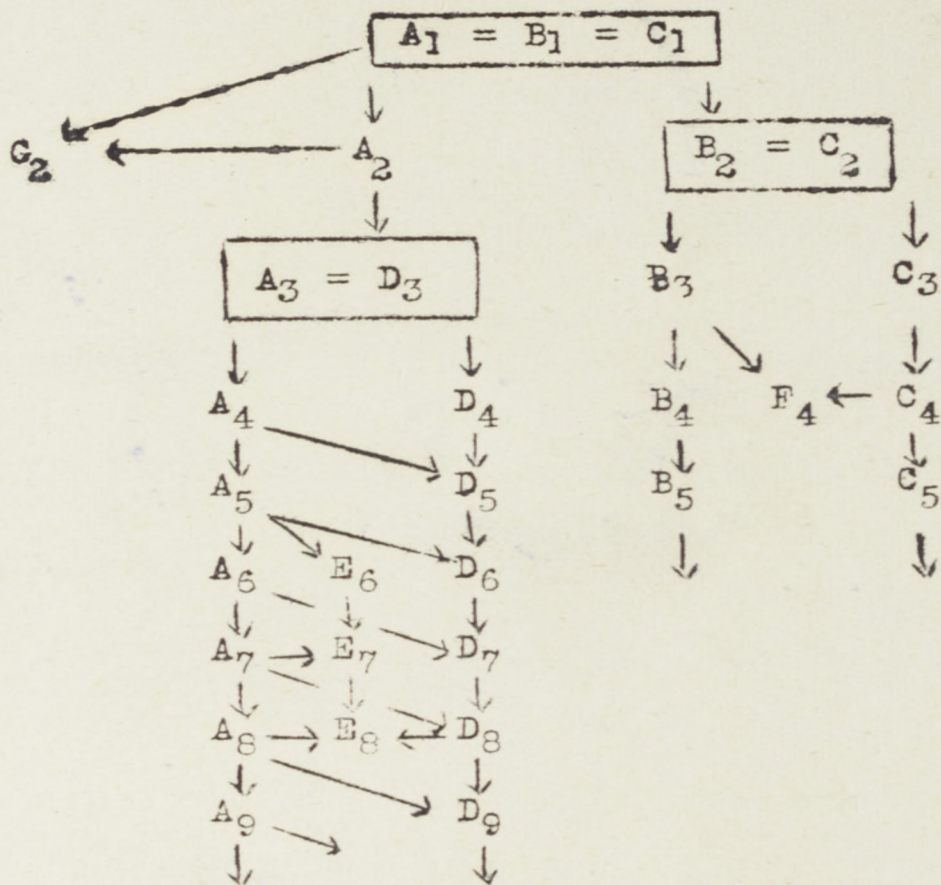
$$\kappa - \eta = (0, \dots, \pm 1, 0, \dots, 0, 1)$$

C'est le vecteur construit à partir de  $e_i$  comme  $\kappa$  à partir de  $e_1$ : toutes les possibilités sont donc épuisées pour les vecteurs de carré 2, et le système  $B_{n+1}$  obtenu se compose lui aussi des vecteurs  $\pm e_i$ ,  $\pm e_i \pm e_j$ .

Le cas  $(\kappa \kappa) = 1$  ne peut se présenter que pour  $n = 4$  et conduit à un système exceptionnel  $F_4$ , non prolongeable, (comme  $G_2$ ).

Bornons-nous maintenant à indiquer les résultats complets au moyen du tableau suivant :





On a, en outre, les relations d'inclusion :

$$D_4 \longrightarrow F_4$$

$$D_n \longrightarrow B_n$$

$$D_n \longrightarrow C_n$$

} faciles à vérifier sur  
les figures pour  $n = 3$

Les cinq groupes exceptionnels correspondant à  $G_2$ ,  $F_4$ ,  $E_6$ ,  $E_7$ ,  $E_8$ , ont respectivement 14, 52, 78, 133 et 248 paramètres. Les groupes correspondant à  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$

$D_n$ , ont respectivement  $n(n+2)$ ,  $n(2n+1)$ ,  $n(2n+1)$ ,  $n(2n-1)$  paramètres, et on peut les réaliser de la manière suivante : pour  $A_n$ , on a le groupe projectif à  $n$  variables ; pour  $B_n$  et  $D_n$ , les groupes projectifs d'une surface du second degré à  $2n$  et  $2n-1$  variables ; pour  $D_n^{C_n}$ , le groupe projectif d'un complexe linéaire à  $2n-1$  variables.

### 3.- Propriétés concernant la nature du corps.

Les résultats obtenus jusqu'à présent sur les algèbres de Lie supposent, comme il a été dit, le corps  $K$  algébriquement fermé, ce qui a permis de faire intervenir toutes les racines de l'équation caractéristique. Mais certains des théorèmes établis dans la précédente conférence, dont l'énoncé ne fait pas intervenir ces racines, s'étendent facilement au cas d'un corps quelconque.

Soient :  $\mathfrak{G}$  une algèbre de Lie sur un corps  $K$  quelconque,  $\Omega$  l'extension algébriquement fermée de  $K$ ,  $\mathfrak{G}^*$  l'algèbre de Lie, extension de  $\mathfrak{G}$  dans  $\Omega$ , c'est-à-dire l'algèbre engendrée par les éléments de la forme  $\alpha a$ ,  $\alpha \in \Omega$ ,  $a \in \mathfrak{G}$ .  $\mathfrak{G}$  et  $\mathfrak{G}^*$  sont intégrables en même temps, car  $(\mathfrak{G}^*)' = (\mathfrak{G}')^*$ . On voit aussi qu'elles sont nilpotentes en même temps. Donc le théorème de Engel est valable pour un corps quelconque. Le premier critère de Cartan s'étend d'une manière analogue, tout au moins dans le cas d'un

corps infini .

Le second critère de Cartan résulte du premier par des raisonnements rationnels : donc, il est valable aussi pour un corps quelconque (infini).

Le second critère de Cartan étant valable, la semi-simplicité est indépendante du corps :  $G_f$  et  $G_f^*$  sont semi-simples en même temps . On ne peut pas en dire autant pour les groupes simples : il est évident que si  $G_f$  admet un sous-groupe invariant  $L_f$ ,  $G_f^*$  admet le sous-groupe invariant  $L_f^*$  : donc si  $G_f^*$  est simple, il en est de même de  $G_f$ . Mais si  $G_f$  est simple,  $G_f^*$  est soit simple, soit semi-simple.

Cette seconde circonstance peut effectivement se produire : si, par exemple,  $G_f$  est un groupe simple à paramètres réels,  $G_f^*$  s'il n'est pas simple, peut être et peut seulement être la somme directe de deux groupes simples imaginaires conjugués :

$$G_f^* = G_{f_1}^* \oplus \overline{G_{f_1}^*}$$

Si le groupe simple  $G_{f_1}^*$  est à  $s$  paramètres,  $G_f^*$  est à  $2s$  paramètres, et il se déduit de  $G_{f_1}^*$  d'une manière triviale .

Les remarques précédentes conduisent à examiner deux catégories de problèmes bien distinctes . En premier lieu, il semble désirable, au point de vue algébrique, d'a-

voir pour les théorèmes fondamentaux des démonstrations rationnelles, c'est-à-dire ne faisant pas sortir du corps  $K$  : nous indiquerons à ce sujet comment on peut établir rationnellement le théorème de Engel, en utilisant la notion d'algèbre enveloppante. En second lieu, on peut chercher à obtenir, à partir des classes de groupes simples complexes précédemment déterminées, les différents types possibles de groupes simples réels.

### 1. Démonstrations rationnelles.

On a la propriété fondamentale suivante : si  $\mathcal{O}_f$  est une algèbre de matrices nilpotente il en est de même de l'algèbre enveloppante  $\mathcal{O}$  et inversement.

Par définition, une algèbre associative  $\mathcal{O}$  est dite nilpotente s'il existe un entier  $N$  tel que  $\mathcal{O}^N = 0$ , c'est-à-dire si le produit de  $N$  éléments quelconques de  $\mathcal{O}$  est nul. Il faut évidemment pour qu'il en soit ainsi que tous ses éléments soient nilpotents - c'est également suffisant car une algèbre non nilpotente contient, d'après un théorème de Wedderburn, un élément idempotent.

Cela étant, si  $\mathcal{O}$  est nilpotente, toutes les racines de l'équation caractéristique d'une matrice  $A$  quelconque de  $\mathcal{O}$  sont nulles et  $\mathcal{O}_f$  est nilpotent.



matrices  $\sum A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_p}$  où  $\sum$  indique la somme étendue à toutes les permutations des indices  $i_1, i_2, \dots, i_p$ , car c'est la forme multilinéaire associée à  $\text{tr} A^p$ .

Pour calculer  $\text{tr}.A_1 A_2 \dots A_p$ , on remarque que :

$$\begin{aligned} & \text{tr}(A_1 A_2 \dots A_{k-1} A_{k+1} A_k A_{k+2} \dots A_p - A_1 A_2 \dots A_p) \\ &= \text{tr}.A_1 \dots A_{k-1} \begin{bmatrix} A_{k+1} & A_k \end{bmatrix} A_{k+2} \dots A_p \end{aligned}$$

Mais  $\begin{bmatrix} A_{k+1} & A_k \end{bmatrix}$  est un élément de  $\mathcal{O}_\gamma$ . On a donc au second membre la trace d'un produit de  $p-1$  facteurs seulement. On arrive ainsi à une relation de la forme :

$$(10) \quad \text{tr}.A_1 A_2 \dots A_p = \frac{1}{p!} \text{tr}. \sum A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_p} + \mu$$

où  $\mu$  est une somme de traces de produits de moins de  $p$  facteurs. Si  $\mathcal{O}_\gamma$  est nilpotent,  $\text{tr}.A^p = 0$ , donc  $\text{tr}. \sum A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_p} = 0$  et comme  $\text{tr}.A_1 = 0$ , la formule (10) montre par récurrence que la trace de toute matrice de  $\mathcal{A}$  est nulle, donc que  $\mathcal{A}$  est nilpotente.

On peut donner d'autre part pour une algèbre de Lie une deuxième définition de nilpotent, équivalente à celle de la précédente conférence, et qui, étant analogue à celle des algèbres associatives, se trouve plus maniable dans les dé-

monstrations faisant intervenir l'algèbre enveloppante .

Appelons  $[f_1, f_2]$  l'algèbre de Lie engendrée par les crochets d'un élément de  $f_1$  avec un élément de  $f_2$  ,  $f_1$  et  $f_2$  étant sous-groupes invariants d'un même groupe  $G$ . On peut définir les puissances d'une algèbre de Lie par les formules suivantes :

$$G^2 = [G, G] = G'$$

$$G^3 = [G, G^2] \supset G''$$

.....

$$G^k = [G, G^{k+1}] \supset G^{(k)}$$

Une algèbre de Lie  $G$  sera alors dite nilpotente si une puissance de  $G$  est nulle :  $G^k = 0$  : une telle algèbre est visiblement intégrable .

Mais un élément générateur quelconque de  $G^k$  s'écrit :

$$[a_1 [a_2 [ \dots [a_{k-1} a_k] \dots ]]] \quad a_i \text{ éléments quelconques de } G$$

et cette quantité est précisément égale à

$$A_1 A_2 \dots A_{k-1} a_k$$

où  $A_i$  est la matrice de la représentation adjointe correspondant à  $a_i$  ; ceci montre que si une puissance de l'al-

gèbre de Lie est nulle. l'algèbre enveloppante est nilpotente et inversement. De ceci résulte que nous avons montré rationnellement : 1) l'équivalence des deux définitions de nilpotent, 2) qu'une algèbre nilpotente est intégrable.

Pour démontrer rationnellement qu'inversement le premier dérivé d'un groupe intégrable est nilpotent, on s'appuie sur le théorème suivant dont nous ne donnerons pas la démonstration :

Je rappelle d'abord qu'une algèbre associative est dite semi-simple si elle ne contient aucune sous-algèbre nilpotente invariante  $\neq 0$ . Soit alors  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie de matrices,  $\Gamma$  son sous-groupe intégrable invariant maximum de l'algèbre enveloppante de  $\mathfrak{g}$ . Si  $\mathcal{A}$  est semi-simple

$$\mathfrak{g} = \Gamma \oplus \mathfrak{g}_1$$

où  $\Gamma$  est abélien.

Supposons alors  $\mathfrak{g}$  intégrable :  $\mathfrak{g} = \Gamma$ . Soit  $\mathcal{N}$  le radical, c'est-à-dire la sous-algèbre invariante nilpotente maximale de l'algèbre enveloppante  $\mathcal{A}$  de  $\mathfrak{g}$ . Les congruences  $g_1 \equiv h_1 \pmod{\mathcal{N}}$ ,  $g_2 \equiv h_2 \pmod{\mathcal{N}}$  entraînent  $[g_1 \ g_2] \equiv [h_1 \ h_2] \pmod{\mathcal{N}}$ . Les éléments de  $\mathfrak{g}$  pris modulo  $\mathcal{N}$  forment donc une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  homo-



morphe à  $\mathcal{O}_f$ , donc intégrable, dont l'algèbre enveloppante est  $\mathcal{O}_f/\mathcal{R}$ . Celle-ci est semi-simple, donc d'après le théorème précédent,  $\mathcal{Y}$  est abélien. On a donc pour tout couple d'éléments  $g_1$  et  $g_2$  de  $\mathcal{O}_f$  :

$$[g_1 \ g_2] \equiv 0 \pmod{\mathcal{R}} \quad \text{c'est-à-dire } \mathcal{O}_f' \subset \mathcal{R}$$

donc  $\mathcal{O}_f'$  est nilpotent.

Le théorème s'étend sans peine à une algèbre de Lie abstraite. Si  $\mathcal{O}_f$  est intégrable, la représentation adjointe, est en effet une algèbre de Lie de matrices dont le dérivé est contenu dans une algèbre nilpotente. Il existe donc  $t$  tel que  $A_1 A_2 \dots A_t = 0$  pour tous  $A_i$  dans  $\mathcal{O}_f'$ ; donc pour tout  $x$  de  $\mathcal{O}_f$ , on a  $A_1 A_2 \dots A_t x = 0$ ; or ceci s'écrit en revenant aux éléments de l'algèbre abstraite:

$$[a_1 [a_2 \dots [a_t x] \dots]] = 0, \text{ ou, en prenant } x \text{ dans } \mathcal{O}_f' :$$

$$(\mathcal{O}_f')^{t+1} = 0$$

C.Q.F.D.

## 2. Détermination des groupes simples réels.

D'après ce qui a été vu précédemment, le problème consiste à trouver tous les groupes réels d'ordre  $r$  correspondant à chacun des groupes simples complexes  $\mathcal{O}_f^*$  d'ordre  $r$  déterminés ci-dessus. Or la méthode que nous avons utilisée

dans cette détermination nous e permis, en normant convenablement les vecteurs de base de  $\mathcal{O}_f^*$  de donner à ce groupe une structure réelle . ( $N_{\alpha\beta}$  réels) et de mettre la forme quadratique  $\mathcal{G}_2$  sous la forme :

$$\mathcal{G}_2 = \Phi(\lambda) - \sum_{\alpha} \xi^{\alpha} \xi^{-\alpha}$$

où  $\Phi(\lambda) = g_{ik} \lambda^i \lambda^k$  est définie positive .

De là résulte déjà qu'à  $\mathcal{O}_f^*$  correspondent deux groupes réels simples évidents :

D'abord le groupe obtenu en remplaçant les paramètres complexes de  $\mathcal{O}_f^*$  par des paramètres réels ; pour ce groupe la forme quadratique  $\mathcal{G}_2$  contient certainement des carrés positifs (provenant de  $\Phi$ ) .

Puis, on peut remarquer que cette forme  $\mathcal{G}_2$  serait définie négative si on donnait aux  $\lambda^i$  des valeurs imaginaires pures et à  $\xi^{\alpha}, \xi^{-\alpha}$ , des valeurs imaginaires conjuguées . Or on vérifie bien aisément que le crochet de deux éléments de  $\mathcal{O}_f^*$  dont les coordonnées sont de cette nature, est encore un élément de ce type . Comme tous ces éléments s'expriment linéairement au moyen de la base  $(ih_1, \dots, ih_n, u_{\alpha} + u_{-\alpha}, i(u_{\alpha} - u_{-\alpha}), \dots)$  avec des paramètres réels , leur ensemble est un nouveau groupe simple réel  $\mathcal{O}_f$  déduit de  $\mathcal{O}_f^*$  et pour lequel la forme quadratique  $\mathcal{G}_2$

est définie négative <sup>(1)</sup>.

Les deux groupes ainsi obtenus se distinguent par leur caractère  $\delta$ , c'est-à-dire par la différence entre le nombre des carrés positif et le nombre des carrés négatifs dans  $G_2$ .

L'existence d'un groupe réel simple pour lequel  $G_2$  est définie négative entraîne des conséquences importantes, mais qui sortent du point de vue algébrique, qui fait l'objet de ces conférences. On peut en effet montrer directement, à partir de cette propriété, que le groupe adjoint  $\Gamma$  du groupe continu  $G$  engendré par le groupe infinitésimal considéré est clos. On en déduit ensuite que  $G$  lui-même est clos en montrant qu'à une transformation de  $\Gamma$  ne correspondent dans  $G$  qu'un nombre fini d'éléments, circonstance due encore au fait que  $G_2$  est définie.

Cela étant, Monsieur Cartan a montré en outre qu'étant donné un groupe simple ouvert à paramètres réels, on peut toujours trouver un groupe clos de même structure. Et

---

(1) Les résultats sur lesquels on s'appuie ici étant valables pour un groupe semi-simple, on voit qu'à tout groupe semi-simple à paramètres complexes correspond un groupe semi-simple à paramètres réels pour lequel la forme  $G_2$  est définie négative.

la recherche des groupes réels ouverts d'une structure simple donnée revient à celle des substitutions isomorphiques involutives du groupe clos de la structure donnée . Les différents types de groupes simples réels ainsi obtenus se distinguent les uns des autres par leur caractère . Enfin c'est à ce problème de la détermination des différentes formes réelles qu'est susceptible de prendre un groupe simple de structure complexe donnée que se ramène la recherche des espaces de Riemann dont la courbure est conservée par le transport parallèle .

---

#### BIBLIOGRAPHIE

- H. WEYL .- Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen II, Math. Zeitsch. 24 . p.328 .  
The structure and representation of continuous groups (Princeton, 1933) .
- B. L. van der WAERDEN .- Die Klassifikation der einfachen Lieschen Gruppen, Math. Zeitsch. 37, p.446 .

E. CARTAN .- Sur la structure des groupes de transformations finis et continus (Thèse Paris , Nony 1894)

Les groupes réels simples finis et continus (Ann. Ec. Normale , sup. 1914, p.261) .

Groupes simples clos et ouverts et géométrie Riemannienne (Journal math. 1939, p.1).

N. JACOBSON .- Rational methods in the theory of Lie algebras (Annals of math. 36 (1935) , p.875 ).

---