M.-L. Dubreil-Jacotin

Algèbres de Lie

Séminaire de Mathématiques (Julia), tome 4 (1936-1937), exp. nº 8, p. 1-37
<http://www.numdam.org/item?id=SMJ_1936-1937__4__A11_0>

SEMINAIRE DE MATHEMATIQUES

Quatrième année 1936-1937

Les TRAVAUX de M. Elie CARTAN

ALGEBRES DE LIE

Exposé fait par Mme DUBREIL, le lundi 12 Avril 1937

Exemplaire n° 3

I.- INTRODUCTION

Nous rappelons qu'un espace vectoriel sur un corps K ou K-module fini est un ensemble d'éléments u, v, ... formant un groupe abélien par rapport à l'addition , groupe admettant de plus les éléments du corps K comme domaine d'opérateurs :

$$\alpha . \beta u = \alpha\beta . u \qquad \alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v \qquad (\alpha + \beta)u = \alpha u+\beta u$$

En outre cet ensemble admet une base finie , c'est-à-dire que tout élément u est de la forme

$$u = \alpha^1 u_1 + \ldots + \alpha^r u_r = \alpha^i u_i$$

où les u_i sont des éléments fixes indépendants et les α^i des éléments de K. r est la dimension de l'espace vectoriel.

On appelle algèbre de Lie d'ordre r un espace vectoriel à r dimensions dans lequel on a défini de plus une opération appelée crochet , faisant correspondre à tout couple ordonné u, v d'éléments un élément

$$[u\ v] = \gamma^i u_i$$

cette opération possédant les trois propriétés suivantes :

1) $$[u, v'+v''] = [u, v'] + [u, v'']$$

$$[u, \alpha v] = \alpha [uv]$$

le crochet est une opération linéaire .

2) le crochet n'est pas commutatif, mais antisymétrique

$$[u.v] = - [v.u]$$

3) l'opération crochet satisfait à l'identité de Jacobi

$$\left[u\ [v\ w]\right] + \left[v\ [w\ u]\right] + \left[w\ [u\ v]\right] = 0$$

Une algèbre de Lie se distingue donc essentiellement des algèbres ordinaires par le fait que le crochet, qui remplace le produit, n'est pas associatif , mais satisfait à l'identité de Jacobi.

Comme pour les algèbres associatives, on peut considérer le "tableau de multiplication", c'est-à-dire l'ensemble des relations donnant les crochets des éléments de base pris deux à deux :

$$[u_\alpha\ u_\beta] = C^{\gamma}_{\alpha\beta}\ u_\gamma$$

les constantes $C^{\gamma}_{\alpha\beta}$, éléments du corps K, sont appelées constantes de structure . D'après les propriétés 2) et 3) elles satisfont aux relations

$$C^{\gamma}_{\alpha\beta} = - C^{\gamma}_{\beta\alpha}$$

$$C^{\rho}_{\alpha\beta}\ C^{\delta}_{\rho\gamma} + C^{\rho}_{\beta\gamma}\ C^{\delta}_{\rho\alpha} + C^{\rho}_{\gamma\alpha}\ C^{\delta}_{\rho\beta} = 0$$

Ce tableau de multiplication et la propriété 1) permettent d'écrire le crochet de deux éléments quelconques .

Il faut remarquer que, vis-à-vis de l'opération crochet, on ne suppose ni l'existence d'un élément unité, ni celle d'un inverse . Une algèbre de Lie n'est pas un groupe vis-à-vis de l'opération crochet . On utilise cependant très fréquemment le terme de <u>groupe infinitésimal</u> pour désigner une algèbre de Lie, terminologie qui se justifie par les analogies que nous verrons entre les groupes et les groupes infinitésimaux et par les exemples d'algèbres de Lie que nous allons donner .

Considérons d'abord un groupe de transformations continu G à r paramètres . Soient S et T deux transformations voisines de l'unité, u et v les vecteurs représentant les transformations infinitésimales correspondantes . Au commutateur $STS^{-1}T^{-1}$, transformation encore voisine de l'unité, correspond comme transformation infinitésimale le vecteur

$$\frac{\partial v}{\partial x^k} u^k - \frac{\partial u}{\partial x^k} v^k$$

Si on appelle $[u\ v]$ ce vecteur, on constate que cette opération crochet satisfait aux trois propriétés fondamentales et par conséquent :

<u>Les transformations infinitésimales d'un groupe continu constituent un premier exemple d'algèbres de Lie</u> .

Considérons maintenant le groupe adjoint du groupe G . Il fait correspondre à l'élément T la transformation

$$X \longrightarrow X' = T X T^{-1}$$

Cette transformation réalise sur les transformations infinitésimales x, x', a correspondant à des éléments X X' T voisins de l'unité, puisque l'on peut encore écrire

$$X' = (T\,X\,T^{-1}X^{-1})\,X$$

la transformation

$$x' = [a\;x] + x$$

ou encore x subit l'accroissement

$$x \longrightarrow dx = [a\;x]$$

Cette transformation, d'après les propriétés du crochet, est linéaire et peut s'écrire

$$dx = A\,x$$

Le théorème de Jacobi

$$[[vw]\;u] = [v\;[wu]] - [w\;[uu]]$$

montre que la matrice correspondant au crochet des éléments v et w, $[vw]$ est $VW - WV$. Il est donc naturel de poser

$$[V\;W] = V\,W - W\,V$$

Mais un ensemble de matrices dans lequel on a défini l'opération crochet par $[V\;W] = V\,W - W\,V$ est comme on le vérifie sans peine, un deuxième exemple d'algèbre de Lie.

L'algèbre de matrices que nous avons ainsi obtenue à l'aide du groupe adjoint est homomorphe à l'algèbre des transformations infinitésimales du groupe G. Elle est appelée sa <u>représentation adjointe</u>.

D'une façon générale, on appelle <u>représentation</u> d'une algèbre de Lie abstraite, une algèbre de Lie de matrices

(ou de transformations linéaires) qui lui est homomorphe.
La représentation adjointe est celle donnée par la correspondance

$$à \quad a \longrightarrow A \quad \text{défini par} \quad dx = [a\ x] = A\ x$$

En ce qui concerne les algèbres de Lie de matrices il y a lieu de remarquer que le produit de deux éléments A et B a un sens puisque c'est le produit de deux matrices, mais que si en même temps que A et B, AB - BA appartient à l'algèbre, il n'en est pas nécessairement de même du produit AB . S'il s'agit d'une représentation et si AB = C est un élément de l'algèbre , les éléments c dont il est l'image dans l'homomorphisme ne sont donnés par aucune opération définie dans l'algèbre abstraite , au moyen de a et b . Si à une algèbre de matrices d'ordre g , on adjoint les produits d'un nombre fini de ses éléments et leurs combinaisons linéaires, on obtient par rapport à la multiplication une <u>algèbre associative</u> d'ordre au plus égal à g^2 , qui contient l'algèbre de Lie comme sous-ensemble et est appelée <u>algèbre enveloppante</u>.

II.- <u>ENONCE DES PROBLEMES FONDAMENTAUX</u>

Etant donné une algèbre de Lie abstraite $\mathfrak{g}$; nous pouvons nous poser à son sujet :

1) le problème de sa <u>réalisation</u>, c'est-à-dire de savoir

s'il existe une algèbre de transformations infinitésimales d'un groupe continu qui lui soit isomorphe . La solution de ce problème est fournie par le troisième théorème de Lie et a été donnée par Ehresmann .

2) le problème de la <u>représentation</u>, c'est-à-dire de la détermination des algèbres de Lie de transformations linéaires homomorphes à l'algèbre de Lie abstraite , il s'agit en particulier de montrer qu'il y a toujours une <u>représentation distincte</u>, c'est-à-dire une algèbre de matrices isomorphe . Ce problème sera étudié par Chevalley . Nous ferons usage cependant de la représentation adjointe que nous avons rappelée et de certaines propriétés des algèbres de transformations linéaires que nous établirons .

3) le problème de la <u>classification</u> des algèbres de Lie qui fera l'objet de cette conférence et de la suivante .

Nous supposerons dans cette conférence que le corps K <u>est algébriquement fermé</u>. Le cas où il n'en est pas ainsi sera envisagé dans la prochaine conférence . Il y a lieu cependant de signaler dès maintenant que bien des résultats auxquels nous arriverons sont indépendants de la nature du corps , l'hypothèse d'un corps algébriquement fermé ou l'extension du corps donné à un corps algébriquement fermé ne servant que comme moyen de démonstration .

III.- Définitions .

Une algèbre de Lie est dite <u>abélienne</u> si le crochet de deux éléments quelconques est nul, définition toute naturelle puisque, dans un groupe de transformations infinitésimales , $[u\ v]$ est nul dès que le commutateur $STS^{-1}T^{-1}$ des transformations du groupe continu dont elles proviennent est l'unité, c'est-à-dire dès que S et T sont échangeables . On peut encore dire que $[u\ v] = [v\ u]$ entraine $[u\ v] = 0$ d'après l'antisymétrie si le corps n'est pas de caractéristique 2 .

Une <u>sous-algèbre</u> ou sous-groupe d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est un sous-espace vectoriel $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ tel que le crochet de deux éléments de $\mathfrak{h}$ soit encore un élément de $\mathfrak{h}$.

$\mathfrak{h}$ est dite <u>invariante</u> si $x \in \mathfrak{h}$ $a \in \mathfrak{g}$ entrainent $[a\ x] \in \mathfrak{h}$. C'est l'analogue d'une sous-algèbre invariante (ou idéal bilatère) dans la théorie des algèbres associatives. L'antisymétrie fait que, pour une algèbre de Lie, il n'y a pas lieu de distinguer sous algèbre invariante à droite, à gauche ou bilatère, alors que pour une algèbre associative il faut distinguer idéaux à droite, à gauche et bilatère .

Soit $\mathfrak{h}$ un sous-groupe d'ordre ~~B~~ h, invariant ou non d'un groupe infinitésimal $\mathfrak{g}$ d'ordre g ; on peut prendre pour $\mathfrak{g}$ une base $u_1, \dots u_h \dots u_g$ dont les h premiers éléments constituent une base de $\mathfrak{h}$: une telle base est dite <u>adaptée</u>.

Quand $\mathfrak{h}$ est invariant, l'<u>espace-projection</u> $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ (c'est-à-dire le groupe facteur en regardant $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ simplement comme des espaces vectoriels) est une algèbre de Lie appelée souvent <u>groupe facteur</u> ; en effet :

$$x_1 \equiv x_2 \qquad \text{mod } \mathfrak{h}$$
$$y_1 \equiv y_2 \qquad \text{mod } \mathfrak{h}$$

entrainent

$$[x_1\, y_1] \equiv [x_2\, y_2] \qquad \text{mod } \mathfrak{h}$$

ce qui permet de définir le crochet dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Si le sous-espace complémentaire de $\mathfrak{h}$ est un sous-groupe de $\mathfrak{g}$ alors

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{h} \simeq (u_{h+1} \ldots u_g)$$

$\mathfrak{g}$ étant un groupe infinitésimal (ou algèbre de Lie) le sous-espace vectoriel $\mathfrak{g}'$ engendré par les crochets des éléments de $\mathfrak{g}$ est un sous-groupe invariant de $\mathfrak{g}$ appelé <u>dérivé</u> de $\mathfrak{g}$. On définit de même de proche en proche les dérivés d'ûn ordre quelconque ; $\mathfrak{g}^{(p+1)} = (\mathfrak{g}^{(p)})'$; chacune de ces algèbres est invariante non seulement dans la précédente mais dans $\mathfrak{g}$, car si $\mathfrak{h}$ est un sous-groupe invariant de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}'$ est invariant dans $\mathfrak{g}$. Soit en effet,

$[xy]$ un élément générateur quelconque de $\mathfrak{J}'$. $x \subset \mathfrak{J}$ $y \subset \mathfrak{J}$ et soit $a \subset \mathfrak{G}$:

$$[a\ [xy]] = -[x\ [ya]] - [y\ [ax]] \subset \mathfrak{J}'$$

car

$$[ya] \subset \mathfrak{J} \qquad [ax] \subset \mathfrak{J} .$$

Enfin, on appelle <u>polynome caractéristique</u> ou <u>équation caractéristique</u> d'un élément a d'une algèbre de Lie, le polynome ou l'équation caractéristique de la matrice A correspondant à a dans une représentation de l'algèbre de Lie

$$f(\lambda / a) = f(\lambda / A) = |\lambda E - A| = \lambda^{g} - \psi_1(a)\lambda^{g-1} + \psi_2(a)\lambda^{g-2} + \ldots\ldots$$

On sait que le polynome caractéristique d'une matrice est invariant par les changements de coordonnées dans l'espace R sur lequel elle opère. S'il s'agit de la représentation adjointe, l'équation caractéristique sera dite <u>équation caractéristique propre</u> de a, et elle a λ en facteur, car a peut toujours être pris comme vecteur de base, et puisque $[a\ a] = 0$, la matrice A a alors une colonne de zéros.

Soit $\mathfrak{J}$ une sous-algèbre invariante de $\mathfrak{G}$ d'ordre h et soit a un élément de $\mathfrak{J}$; on voit immédiatement en formant la matrice A relative à a dans la représentation adjointe (c'est-à-dire la matrice qui a pour i-ème colonne les composantes du vecteur $[a\, u_i]$) que :

$$f_{\mathfrak{g}}(\lambda / a) = \lambda^{g-h} f_{\mathfrak{f}}(\lambda / a)$$

Nous ferons très souvent usage de cette propriété dans la suite . Si $\mathfrak{f}$ n'était pas invariant, $f_{\mathfrak{f}}$ diviserait encore $f_{\mathfrak{g}}$, mais on n'aurait plus cette relation .

Si, pour tout élément a de $\mathfrak{g}$, le polynome caractéristique se réduit à λ^g , $\mathfrak{g}$ est dit <u>nilpotent</u> .

Nous dirons qu'une fonction $\varphi(x) = \varphi(\xi^1 \ldots \xi^g)$ d'un élément $x = \xi^i u_i$ quelconque de $\mathfrak{g}$ est <u>invariante par le groupe adjoint</u> si $d\varphi = 0$ pour $dx = [ax]$ quel que soit a , c'est-à-dire si

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi^i} [a\, x]^i = 0$$

Pour exprimer commodément cette invariance, qui est une propriété du premier ordre, on peut poser $dx = [ax]\, t$ et écrire que

$$\varphi(x+dx) \equiv \varphi(x) \quad \text{mod. } t^2$$

Cela étant soit

$$X_t = X + t\,[A\, X]$$

la matrice correspondant à $x + dx$; on a :

$$X_t\,(E + tA) \equiv (E + tA)\, X \quad \text{mod. } t^2$$

d'où

$$(\lambda E - X_t)(E + tA) \equiv (E + tA)(\lambda E - X) \quad (\text{mod.}\, t^2)$$

or

$$|E + tA| \not\equiv 0 \mod t$$

On a donc

$$|\lambda E - X_t| \equiv |\lambda E - X| \mod t^2$$

d'où

$$f(\lambda \mid x+dx) \equiv f(\lambda \mid x) \mod. t^2$$

donc <u>le polynome caractéristique propre est un invariant du groupe adjoint</u> (et de même chacun de ses coefficients).

Parmi ces invariants ceux qui joueront le rôle le plus important sont :

la trace $\psi_1 = \sum a_{ii}$ $\qquad A = |a_{ik}|$

$$\psi_2 = \frac{1}{2} \sum_{ik} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ik} \\ a_{ki} & a_{kk} \end{vmatrix}$$

et enfin la forme σ_2, somme des carrés des racines de l'équation caractéristique, liée aux deux autres par

$$\sigma_2 = \psi_1^2 - 2 \psi_2$$

σ_2 est d'ailleurs égale à la trace (A^2) .

Si une forme $\varphi(x) = \varphi(\xi^1 \dots \xi^g) = \sum \alpha_{ij\dots\ell} \xi^i \eta^j \dots \zeta^\ell$ est invariante par le groupe adjoint, il en est de même de la forme multilinéaire symétrique associée

$$\varphi(x,y\dots z) = \varphi(\xi,\eta\dots\zeta) = \sum \alpha'_{ij\dots l}\,\xi^i\,\eta^j\dots\zeta^l$$

En effet dire que cette forme est invariante par le groupe adjoint, c'est dire que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi^i}\,[ax]^i + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta^i}\,[ay]^i + \dots + \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta^i}\,[az]^i = 0$$

quel que soit a dans $\mathfrak{g}$. Or ceci s'écrit, chaque terme étant linéaire en chacun des vecteurs x, y, ...

$$\varphi([ax], y\dots z) + \dots + \varphi(x, y, \dots [az]) = 0$$

Or par hypothèse $\varphi(x)$ étant invariante, on a quelque soit a :

$$\varphi([ax]\,x\dots x) + \dots + \varphi(x,\dots [ax]) = 0$$

et il en est de même de la forme multilinéaire associée.

Une telle forme invariante donne un procédé pour définir de nouvelles sous-algèbres invariantes de $\mathfrak{g}$ à partir de sous-algèbres invariantes $\mathfrak{f}_1 \dots\dots \mathfrak{f}_k$.

L'ensemble des éléments $a \subset \mathfrak{g}$ tels que

$$\varphi(a, y, \dots z) = 0 \quad \text{quels que soient} \quad y \subset \mathfrak{f}_1 \dots\dots z \subset \mathfrak{f}_k$$

forme un espace linéaire, sous-espace de $\mathfrak{g}$. Soit c un élément quelconque de $\mathfrak{g}$; à cause de l'invariance de φ, on a :

$$\varphi([ca]\,y\dots z) + \varphi(a\,[cy]\dots z) + \varphi(ay\dots [cz]) = 0$$

Mais

$$[cy] \subset \mathfrak{f}_1 \quad \dots\dots \quad [cz] \subset \mathfrak{f}_k$$

l'équation précédente se réduit donc à :

$$\varphi([ca]\, y\ldots z) = 0$$

qui exprime que $[ca]$ appartient au sous-ensemble considéré; celui-ci est donc une sous-algèbre invariante .

En particulier, les éléments de $\mathfrak{g}$ tels que $\psi_1(a)=0$ forment une sous-algèbre invariante qui contient le groupe dérivé car, la matrice AB - BA a une trace nulle . Mais ce sont principalement les formes ψ_2 et $\sigma_2(xy)$ = trace XY qui nous seront utiles .

IV.- Groupes infinitésimaux intégrables .

Nous sommes maintenant en mesure d'aborder notre problème fondamental de la classification des algèbres de Lie . Nous les classerons d'abord en deux grandes classes introduites par Lie : les groupes intégrables et les groupes non intégrables .

On appelle intégrable une algèbre de Lie dont la ~~dont la~~ suite des dérivées se termine par zéro :

$$\mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}' \supset \mathfrak{g}'' \supset \ldots\ldots \supset \mathfrak{g}^{(n)} \supset \mathfrak{g}^{(n+1)} = 0$$

S'il n'en est pas ainsi, à partir d'un certain rang, tous les dérivés sont égaux . Il résulte de la définition précédente :

que toute sous-algèbre d'une algèbre intégrable est aussi intégrable ;

que tout groupe infinitésimal homomorphe à un groupe intégrable (en particulier toute représentation , distincte ou non) est intégrable ;

que tout groupe abélien est intégrable .

Les groupes intégrables ont la propriété suivante qui pourrait aussi être prise comme définition :

Une algèbre de Lie intégrable a une suite de composition du type :

$$(1) \qquad \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_g \supset \mathfrak{g}_{g-1} \supset \mathfrak{g}_{g-2} \supset \cdots\cdots \supset \quad \mathfrak{g}_1 \supset 0$$

où $\mathfrak{g}_k$ est d'ordre k , -suite de composition pour laquelle les groupes facteurs sont d'ordre 1, et ont par suite la structure la plus simple possible .

En effet, entre $\mathfrak{g}^{(i)}$ supposé d'ordre $h+k$ et $\mathfrak{g}^{(i+1)}$ supposé d'ordre k, intercalons par exemple, en prenant des coordonnées adaptées, les sous-espaces :

$$\mathfrak{g}^{(i)} \supset \mathfrak{g}_{k+h-1} \supset \cdots\cdots \supset \mathfrak{g}_{k+2} \supset \mathfrak{g}_{k+1} \supset \mathfrak{g}^{(i+1)}$$

Soit $x \in \mathfrak{g}_{k+j}$, $a \in \mathfrak{g}^{(i)}$, on a : $[xa] \in \mathfrak{g}^{(i+1)} \subset \mathfrak{g}_{k+j}$ donc $\mathfrak{g}_{k+j}$ est sous-algèbre invariante dans $\mathfrak{g}^{(i)}$ et on a bien une suite de composition du type voulu . Inversement, une algèbre qui a une suite de composition du type (1) est intégrable car on voit immédiatement que

$$\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}_{g-1} \qquad \mathfrak{g}'' \subset \mathfrak{g}'_{g-1} \subset \mathfrak{g}_{g-2} \qquad \text{etc...}$$

Pour reconnaitre si un groupe infinitésimal est intégrable ou non, on peut utiliser la propriété suivante (théorème de Engel) :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un groupe soit intégrable est que son dérivé soit nilpotent.

Pour démontrer ce théorème, nous utilisons le théorème de Lie sur les groupes infinitésimaux intégrables de transformations linéaires, opérant sur un espace R, à savoir

Il existe un vecteur u non nul de R tel que $Au = \alpha u$ pour tout $A \subset \mathfrak{g}$.

Pour démontrer ceci, on utilise le fait que $\mathfrak{g}$, étant intégrable, admet la suite de composition

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_g \supset \mathfrak{g}_{g-1} \supset \cdots\cdots \supset \mathfrak{g}_{k+1} \supset \mathfrak{g}_k \supset \cdots \supset \mathfrak{g}_1 \supset \mathfrak{g}_0 = 0$$

Or le théorème est vrai si $\mathfrak{g}$ se réduit à une matrice unique A
α est une racine de l'équation caractéristique de A, racine qui existe bien puisque nous supposons le corps algébriquement fermé. Cela étant, on démontre le théorème par récurrence sur k.

Soit u_o un vecteur de R tel que $Bu_o = \beta u_o$ pour tout B de $\mathfrak{g}_k$.

On a $\mathcal{G}_{k+1} = (\mathcal{G}_k , E_{k+1})$. Appelons $u_1 . u_2 \ldots ,$ les vecteurs de R définis par :

$$u_1 = E_{k+1} u_o \ . \qquad u_2 = E_{k+1}\, u_1 . \ \ldots .$$

n étant la dimension de R, il y a $\chi \leq n$ de ces vecteurs qui sont indépendants et χ seulement ; on a donc

$\varphi_\chi (E_{k+1})\, u_o = 0$ où φ_χ est un polynome minimum de degré χ .

L'espace $R_\chi = (u_o , u_1 , \ldots\ldots , u_{\chi - 1})$ est invariant par $\mathcal{G}_{k+1}$. Il est en effet invariant par E_{k+1} . Je dis qu'il l'est aussi par $\mathcal{G}_k$. En effet, soit $B \subset \mathcal{G}_k$; on a :

$$B\, u_o = \beta\, u_o$$

$$B\, u_1 = B\, E_{k+1}\, u_o = \left[B\, E_{k+1} \right] u_o + E_{k+1}\, B\, u_o$$

$$= \beta'\, u_o + \beta\, u_1$$

car $B' = \left[B\, E_{k+1} \right]$ est un élément de $\mathcal{G}_k$ puisque celui ci est sous-groupe invariant de $\mathcal{G}_{k+1}$; d'une façon générale si on a $B u_i = \gamma_0 u_0 + \gamma_1 u_1 + \ldots + \gamma_{i-1} u_{i-1} + \beta u_i$ on en déduit

$$B\, u_{i+1} = B\, E_{k+1}\, u_i = B' u_i + E_{k+1} B\, u_i =$$

$$= \gamma'_o u_o + \gamma'_1 u_1 + \ldots + \gamma'_{i-1}\, u_{i-1} + \gamma'_i u_i + \gamma_o u_1$$

$$+ \gamma_1 u_2 + \ldots + \gamma_{i-1} u_i + \beta\, u_{i+1}$$

$$= \delta_o u_o + \delta_1 u_1 + \ldots + \delta_i u_i + \beta\, u_{i+1} \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

On a de plus, dans R_χ . trace $B = \chi\beta$. Or, pour toute matrice B^* de $\mathcal{G}_k$ se présentant sous la forme d'un crochet de deux matrices laissant R_χ invariant, la trace de B^* est nulle dans R_χ , et on a = $\beta^* = 0$.

On a donc :

$$B\ u_0 = \beta\ u_0$$

$$B\ u_1 = \beta\ u_1$$

Supposons que

$$B\ u_i = \beta\ u_i$$

On a :

$$B\ u_{i+1} = \left[B\ E_{k+1}\right]\ u_i + E_{k+1}\ B\ u_i = \beta\ u_{i+1}$$

Donc <u>tout vecteur</u> de R_χ est invariant par <u>toute transformation</u> de $\mathcal{G}_k$. Montrons maintenant que parmi ces vecteurs, on peut en trouver au moins un invariant par E_{k+1} , donc par $\mathcal{G}_{k+1}$. En effet,

$$\varphi_\chi\ (E_{k+1})\ u_0 = 0$$

Soit

$$\varphi_\chi\ (\lambda) = (\lambda - \alpha)\ \varphi_{\chi-1}\ (\lambda)$$

$\varphi_{\chi-1}\ (E_{k+1})u_0$ est un vecteur $\overline{u}$ non nul de R_χ , et on a

$E_{k+1}\overline{u} = \alpha\ \overline{u}$ C.Q.F.D.

Il y a donc dans R au moins un vecteur u non nul tel que $Au = \alpha u$.

Si A est un élément de $\mathcal{G}$ on a évidemment $Au = 0$.

Choisissons alors pour R une base adaptée de la façon suivante :

Pour u_1 prenons le vecteur u dont la ligne d'action est invariante par toutes les transformations de $\mathcal{G}$. Appliquons alors le théorème de Lie au groupe de transformations $\mathcal{G}$ opérant linéairement dans l'espace projection R/u_1, il existe u_2 ($u_2 \not\equiv 0 \pmod{u_1}$) tel que $A\,u_2 \equiv \alpha_2 u_2 \pmod{u_1}$; prenons u_2 comme deuxième vecteur de base, etc.... On voit ainsi que par un choix convenable des coordonnées dans R, toutes les matrices de $\mathcal{G}$ peuvent être amenées simultanément à la forme :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & \alpha_{1n} \\ & \alpha_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ 0 & & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

où les α_i sont des fonctions linéaires et homogènes des ξ^i, coordonnées contravariantes d'une matrice générale $A = \xi^i A_i$.

On appelle <u>poids</u> pour un groupe de transformations linéaires une forme linéaire des ξ, Λ, telle qu'il existe dans R un vecteur $u \neq 0$ pour lequel

$$A u = \Lambda u$$

Le théorème de Lie établit donc pour un groupe intégrable l'existence d'un poids $\Lambda_1 = \alpha_1$, racine de l'équation caractéristique .

L'application que nous venons de faire du théorème de Lie donne une suite de n poids $\Lambda_1 = \alpha_1$. $\Lambda_2 = \alpha_2$ ..... relatifs à $\mathfrak{g}$ et aux espaces R , R/u_1 , $R/(u_1 u_2)$ ......

Les α_i sont tous nuls pour A dans $\mathfrak{g}'$. Par conséquent <u>l'équation caractéristique des éléments du groupe dérivé d'un groupe intégrable est $\lambda^n = 0$</u> .

Appliquons ceci à la représentation adjointe d'un groupe infinitésimal abstrait: l'équation caractéristique propre d'un élément de $\mathfrak{g}'$ considéré comme élément de $\mathfrak{g}$ est $f_g(\lambda/u) = \lambda^g$, mais $\mathfrak{g}'$ étant sous-groupe invariant de $\mathfrak{g}$, on a vu que $f_g(\lambda/u) = \lambda^{g-g'} f_{g'}(\lambda/u)$ où $f_{g'}$ est le polynome caractéristique de a dans $\mathfrak{g}'$.

On a donc $f_{g'} = \lambda^{g'}$, et la condition de Engel est nécessaire . Il reste à montrer qu'elle est suffisante . Il suffit pour cela de montrer qu'une algèbre nilpotente est intégrable . car si le dérivé d'une algèbre est intégrable, il en est évidemment de même de l'algèbre elle-même .

Soit $\mathfrak{G}$ tel que $f(\lambda/a) = \lambda^{g}$ pour tout $a \subset \mathfrak{G}$. Montrons qu'on peut construire pour $\mathfrak{G}$ une suite de composition, dont tous les groupes facteurs sont d'ordre 1. Prenons une sous-algèbre quelconque $\mathfrak{G}_1$ de $\mathfrak{G}$ à une dimension ; elle est intégrable puisqu'abélienne, et nilpotente comme tout sous-groupe d'un groupe nilpotent ; on peut continuer la construction grâce aux deux propriétés suivantes :

I.- Soit $\mathfrak{f}$ un sous-groupe intégrable d'ordre h de $\mathfrak{G}$; on peut trouver un sous-groupe $\mathfrak{f}^*$ d'ordre h+1 de $\mathfrak{G}$ contenant $\mathfrak{f}$: $\mathfrak{G} \supset \mathfrak{f}^* \supset \mathfrak{f}$.

En effet, à tout élément $b \subset \mathfrak{f}$ correspond dans la représentation adjointe une matrice B laissant invariant l'espace $\mathfrak{f}$ et également l'espace facteur $\mathfrak{G}/\mathfrak{f}$. En appliquant le théorème de Lie à cet espace, on voit qu'il existe un vecteur $u \not\equiv 0$ (mod. $\mathfrak{f}$) tel que $Bu \equiv \beta u$ (mod. $\mathfrak{f}$) pour tout B correspondant à $b^{\in \mathfrak{f}}$. Par suite , $\mathfrak{f}^* = (\mathfrak{f}, u)$ est le groupe cherché .

On peut donc construire $\mathfrak{G}_2$. Si on montre que $\mathfrak{G}_1$ est invariant dans $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}_2$ sera intégrable et on pourra recommencer ; cette invariance résulte de la propriété

II.- Toute sous-algèbre $\mathfrak{g}_{g-1}$ d'une algèbre nipotente $\mathfrak{g}_g$ est invariante . On a $\mathfrak{g}_g = (\mathfrak{g}_{g-1}, u)$, $u \not\equiv 0 \mod. \mathfrak{g}_{g-1}$

Il s'agit de montrer que $[bu] \subset \mathfrak{g}_{g-1}$ pour $b \subset \mathfrak{g}_{g-1}$; puisque $\mathfrak{g}_g$ est une algèbre , $[bu] \equiv \beta u \mod \mathfrak{g}_{g-1}$; mais alors $(\lambda - \beta)$ est un facteur de l'équation caractéristique propre de b et puisque $\mathfrak{g}_g$ est nilpotent on a $\beta = 0$.

Ainsi donc, si tous les coefficients de l'équation caractéristique sont nuls pour les éléments du groupe dérivé, le groupe est intégrable . M. Cartan a donné un critère remarquable qui est le suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un groupe soit intégrable est que le coefficient $\psi_2(a)$ de l'équation caractéristique soit nul pour les éléments du groupe dérivé, ou encore, ce qui revient au même puisque ψ_1 est nul pour les éléments du groupe dérivé, que la forme σ_2 soit nulle .

La condition est nécessaire d'après le théorème d'Engel.

Pourdémontrer qu'elle est suffisante, nous devons au préalable introduire une décomposition de l'espace vectoriel de l'algèbre $\mathfrak{g}$ en sous-espaces, qui est fondamentale .

Pour cela, revenons d'abord au cas d'une matrice unique **A** d'équation caractéristique

$$f\,(\lambda/A) = (\lambda - \alpha_1)^{h_1} \;\ldots\; (\lambda - \alpha_t)^{h_t}$$

opérant sur un espace R . A chaque racine α_i d'ordre h_i , on peut faire correspondre dans R un vecteur u_1 invariant par A . Dans l'espace R / u_1 l'équation caractéristique de A est $(\lambda - \alpha_1)^{h_1 - 1} \;\ldots\; (\lambda - \alpha_t)^{h_t}$ et à la racine α_1 correspond encore un vecteur u_2 invariant par A , c'est-à-dire dans R invariant mod.u_1 , et on obtient ainsi des vecteurs $u_1 , \ldots\ldots , u_{h_1}$ qui définissent un sous-espace R_1 invariant par A . On a $A\,u_1 = \alpha\,u_1$, ou $(A - \alpha_1)\,u_1 = 0$;

$$A\,u_2 = \alpha_1 u_2 + \beta\,u_1$$

d'où

$$(A - \alpha_1)^2\,u_2 = 0$$

et d'une manière générale

$$(A - \alpha_1)^i\,u_i = 0$$

et pour tout vecteur x_1 de R_1 , on a :

$$(A - \alpha_1)^{h_1} x_1 = 0$$

On obtient par ce procédé une décomposition de R en sous-espaces R_1 , R_2 ..... invariants par A . Ces espaces n'ont aucun élément commun non nul et, la somme de leurs dimensions étant la dimension de R, on a :

$$R = R_1 \oplus R_2 \oplus \ldots\ldots \oplus R_t$$

De plus, la matrice A se met sous la forme :

(I)
$$A = \begin{pmatrix} \begin{matrix}\alpha_1 & X \\ 0 & \alpha_1\end{matrix} & & 0 \\ & \begin{matrix}\alpha_2 & X \\ 0 & \alpha_2\end{matrix} & \\ 0 & & \ddots \quad \begin{matrix}\alpha_t & X \\ 0 & \alpha_t\end{matrix} \end{pmatrix}$$

Si en effet ces espaces n'étaient pas indépendants, on aurait une relation de la forme

(1) $$x_1 + x_2 + \ldots + x_t = 0 \qquad\qquad x_i \subset R_i$$

avec des x_i non tous nuls . Mais la décomposition

$$\frac{1}{f(\lambda/A)} = \frac{g_{h_1}(\lambda)}{(\lambda - \alpha_1)^{h_1}} + \ldots\ldots + \frac{g_{h_t}(\lambda)}{(\lambda - \alpha_t)^{h_t}}$$

où g_{h_i} est de degré moindre que h_i et premier avec $(\lambda - \alpha_i)$ conduit à l'identité

$$1 = \varphi_{h_1}(\lambda) + \ldots\ldots + \varphi_{h_t}(\lambda)$$

où $\varphi_{h_i}(\lambda)$ est divisible par

$$(\lambda - \alpha_1)^{h_1} \ldots (\lambda - \alpha_{i-1})^{h_{i-1}} (\lambda - \alpha_{i+1})^{h_{i+1}} \ldots (\lambda - \alpha_t)^{h_t}$$

et est premier à $(\lambda - \alpha_i)$; d'où

$$E = \varphi_{h_1}(A) + \ldots + \varphi_{h_t}(A)$$

et

$$E x_i = x_i = \varphi_{h_i}(A)\, x_i \quad \text{puisque } \varphi_{h_i}(A)\, x_k = 0$$

pour $k \neq i$

Alors en transformant par $\varphi_{h_i}(A)$ l'identité (1) on a :

$$x_i = 0$$

et on montre ainsi que tous les x_i sont nuls .

En outre, <u>la condition nécessaire et suffisante pour qu'un vecteur x de R appartienne au sous-espace R_k est qu'il existe un entier N tel que</u> $(A - \alpha_k)^N x = 0$.

Cette condition est nécessaire , comme nous l'avons vu , avec $N \geq h_k$.

Elle est suffisante, pour N quelconque. En effet, supposons que

$$x = x_1 + \ldots + x_k + \ldots + x_t$$

On a par hypothèse

$$(A - \alpha_k)^N x = 0 = (A - \alpha_k)^N x_1 + \ldots + (A - \alpha_k)^N x_2 + \ldots + (A - \alpha_k)^N x_t$$

$$= x'_1 + \dots + x'_k + \dots + x'_t \qquad x'_i \subset R_i$$

et comme les espaces R_k sont indépendants, on a :

$$(A - \alpha_k)^N x_i = 0 \qquad \text{pour} \quad i = 1, 2, \dots, t .$$

Je dis qu'il en résulte $x_i = 0$ pour $i \neq k$. En effet, $(\lambda - \alpha_k)^N$ et $\varphi_{h_k}(\lambda)$ étant premiers entre eux, on a une identité de la forme :

$$P(A)\ (A - \alpha_k)^N + Q(A)\ \varphi_{h_k}(A) = E$$

Pour $i \neq k$ on a $\varphi_{h_k}(A)\, x_i = 0$, et quelque soit i : $(A - \alpha_k)^N x_i = 0$

d'où

$$x_i = 0 \qquad\qquad \text{pour } i \neq k$$

C.Q.F.D.

Nous allons appliquer ce qui précède à notre algèbre de Lie abstraite . Nous allons considérer un élément a particulier ; il lui correspond dans la représentation adjointe une matrice A opérant sur le groupe infinitésimal lui-même comme espace R et nous décomposons ainsi $\mathfrak{g}$ par rapport à a en somme directe de sous-espaces sans éléments communs :

$$\mathfrak{g} = \sum \mathfrak{g}_{\alpha_i}$$

Ces sous-espaces sont invariants par la matrice A , mais ce ne sont pas en général des sous-groupes ; la matrice A se met sous la forme (I) .

Nous avons déjà dit que l'équation caractéristique propre d'un élément de $\mathcal{G}$ avait λ en facteur, donc admet la racine 0 . D'autre part, pour un élément quelconque $a = \xi^i u_i$ de $\mathcal{G}$, les racines de l'équation caractéristique sont des fonctions algébriques de ξ^1 ..... ξ^r . Parmi les r racines de l'équation caractéristique, supposons qu'il y en ait d identiquement nulles , h_1 identiquement égales à $\alpha_1(\xi)$ ..... h_t identiquement égales à $\alpha_t(\xi)$. Pour des valeurs particulières de a , il peut arriver que des racines non identiquement égales deviennent égales , ou que des racines supplémentaires s'annulent . Mais si nous prenons pour a un élément "général", c'est-à-dire tel qu'il n'en soit pas ainsi, la décomposition de $\mathcal{G}$ ainsi obtenue, sera la plus fine possible .

Soit

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 + \mathcal{G}_{\alpha_1} + \dots + \mathcal{G}_{\alpha_t}$$

Nous allons étudier cette décomposition et pour cela utiliser la propriété fondamentale suivante :

<u>Si</u> $x_\alpha \subset \mathcal{G}_\alpha$, $x_\beta \subset \mathcal{G}_\beta$, <u>alors</u> :

$$[x_\alpha\, x_\beta] \begin{cases} \underline{=0 \text{ si } \alpha+\beta=\gamma \text{ n'est pas racine}} \\ C\,\mathfrak{g}_\gamma \ \underline{\text{si } \gamma \text{ est racine}}\ . \end{cases}$$

La relation de Jacobi permet en effet d'écrire :

$$\big[a\,[x_\alpha\, x_\beta]\big] = \big[x_\alpha\,[a\, x_\beta]\big] + \big[[a\, x_\alpha]\, x_\beta\big]$$

ou

$$A\,[x_\alpha\, x_\beta] = [x_\alpha\, , A\, x_\beta] + [A\, x_\alpha\, , x_\beta]$$

d'où

$$(A-\gamma)\,[x_\alpha\, x_\beta] = [x_\alpha\, , (A-\beta)x_\beta] + [(A-\alpha)x_\alpha\, , x_\beta]$$

et en appliquant à plusieurs reprises cette formule, on a d'une façon générale :

$$(A-\gamma)^N\,[x_\alpha\, x_\beta] = \sum_r C_N^r\,\big[(A-\alpha)^r x_\alpha\, , (A-\beta)^{N-r} x_\beta\big]$$

Si donc on prend

$$N = h_\alpha + h_\beta - 1$$

l'un des deux vecteurs des crochets du second membre est toujours nul, et on a :

$$(A-\gamma)^N\,[x_\alpha\, x_\beta] = 0$$

qui est, comme nous l'avons vu, la condition nécessaire et suffisante, si γ est racine, pour que $[x_\alpha\, x_\beta]$ appartienne à R_γ .

Si γ n'est pas racine, il n'y a pas de vecteur

$u \neq 0$ tel que $(A - \gamma)\, u = 0$. Il en résulte sans peine que $[x_\alpha\, x_\beta] = 0$.

De cette propriété fondamentale résulte que :

1°) $\mathfrak{g}_0$ <u>est sous-algèbre</u> de $\mathfrak{g}$, d'ailleurs non invariante.

2°) <u>les $\mathfrak{g}_\alpha$ ne sont des sous-algèbres que si 2α n'est pas racine, mais que ce sont des sous-espaces invariants non seulement par a mais par tous les éléments de $\mathfrak{g}_0$.</u>

(a est évidemment un élément de $\mathfrak{g}_0$ puisque $[a\ a] = Aa = 0$)

Donc toutes les matrices A correspondant aux éléments de $\mathfrak{g}_0$ sont de la forme :

$$A = \left| \begin{array}{cccc} \boxed{X} & & & 0 \\ & \boxed{X} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{X} \end{array} \right|$$

Au contraire, d'après la propriété fondamentale, les matrices relatives aux éléments de $\mathfrak{g}_{\alpha_1}$, $\alpha_1 \neq 0$, n'ont que des zéros dans les carrés situés sur la diagonale principale.

En ce qui concerne $\mathfrak{g}_0$, c'est de plus un sous-groupe intégrable, car on voit sans peine qu'il est nilpotent.

Mais alors, nous avons dans chaque espace $\mathfrak{g}_{\alpha_1}$ une une représentation du groupe <u>intégrable</u> $\mathfrak{g}_0$ faisant correspondre à chaque élément de $\mathfrak{g}_o$ la matrice carrée de A opérant dans $\mathfrak{g}_{\alpha_i}$. On peut donc choisir une base dans $\mathfrak{g}$ telle que pour tous les éléments a de $\mathfrak{g}_o$ les matrices A correspondantes aient la forme :

$$
A = \left|\begin{array}{cccc}
\boxed{\begin{array}{ccc} o & & X \\ & o & \\ o & & o \end{array}} & & & 0 \\
& \boxed{\begin{array}{ccc} \alpha_1 & & X \\ & \alpha_1 & \\ o & & \alpha_1 \end{array}} & & \\
& & \ddots & \\
0 & & & \boxed{\begin{array}{ccc} \alpha_t & & X \\ & \alpha_t & \\ o & & \alpha_t \end{array}}
\end{array}\right|
$$

les éléments de la diagonale principale de chaque matrice carrée étant égaux sans quoi la décomposition ne serait pas la plus fine possible, et <u>les</u> α_i <u>sont des formes linéaires et homogènes par rapport aux coordonnées contravariantes</u> ξ^1 .... ξ^d des éléments de $\mathfrak{g}_o$: ce sont les poids pour le groupe intégrable $\mathfrak{g}_o$ dans la représentation adjointe.

Revenons aux éléments de $\mathfrak{g}_o$ qui donnent tous la même décomposition de $\mathfrak{g}$ en sous-espaces, mais les valeurs numériques des racines correspondant à chacun de ces sous-ensembles sont différentes d'un élément à l'autre. On a en particulier la propriété suivante :

Pour les éléments C de $\mathfrak{g}_0$ qui sont de la forme $[x_{\alpha_i} x_{-\alpha_i}]$ les valeurs $\gamma_1 \ldots\ldots \gamma_t$ des racines $\alpha_1(\xi) \ldots\ldots \alpha_t(\xi)$ sont toutes sur la droite du plan complexe joignant O à γ_i.

En effet, soit γ_j l'une quelconque des racines relatives à C autre que γ_i. Supposons que

$$\gamma_j - m\gamma_i, \ldots\ldots, \gamma_j - \gamma_i, \gamma_j + \gamma_i, \ldots\ldots, \gamma_j + n\gamma_i$$

soient racines (m, n entiers ≥ 0), mais que $\gamma_j - (m+1)\gamma_i$ et $\gamma_j + (n+1)\gamma_i$ ne le soient pas. Alors le sous-espace de $\mathfrak{g}$: $\mathfrak{g}_{\gamma_j - m\gamma_i} + \ldots + \mathfrak{g}_{\gamma_j} + \ldots + \mathfrak{g}_{\gamma_j + n\gamma_i} = \mathfrak{g}_1$ est invariant par C, élément de $\mathfrak{g}_0$, et, dans cet espace :

$$\text{trace } C = h_{\gamma_j - m\gamma_i}(\gamma_j - m\gamma_i) + \ldots + h_{\gamma_j}\gamma_j + \ldots + h_{\gamma_j + n\gamma_i}(\gamma_j + n\gamma_i)$$

$$= P\gamma_j + Q\gamma_i$$

Mais c étant de la forme $[x_\alpha x_{-\alpha}]$, on a $C = X_\alpha X_{-\alpha} - X_{-\alpha} X_\alpha$ et puisque $\gamma_j - (m+1)\gamma_i$ et $\gamma_j + (n+1)\gamma_i$ ne sont pas racines, les matrices X_α et $X_{-\alpha}$ laissent invariant le sous-espace $\mathfrak{g}_i$ et la trace de C dans ce sous-espace est nulle . On a donc :

$$\gamma_j = - \frac{Q}{P} \gamma_s$$

C.Q.F.D.

Le même raisonnement montre que <u>toutes les racines</u> $\gamma_1 \dots \gamma_t$ <u>relatives aux éléments de</u> $\mathfrak{G}_0$ <u>situés dans</u> $\mathfrak{G}'_0$ <u>sont nulles</u> .

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le <u>critère de Cartan</u> .

Nous supposons que pour tout élément c' de $\mathfrak{G}'$ on ait $\sigma_2(c') = 0$. Pour tout élément de $\mathfrak{G}'$ de la forme $[x_{\alpha_i} \, x_{-\alpha_i}]$, les racines étant sur une même droite et ayant la somme de leurs carrés nulle, sont nulles . De là résulte que pour tout élément de l'intersection $\mathfrak{G}' \cap \mathfrak{G}_0$ les racines sont identiquement nulles .

Si alors on avait $\mathfrak{G}' = \mathfrak{G}$, toutes les racines relatives à tous les éléments de $\mathfrak{G}_0$ seraient nulles ; on aurait $\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'_0 = \mathfrak{G}_0$, d'où contradiction puisque $\mathfrak{G}_0$ est intégrable . On a donc $\mathfrak{G}' \subset \mathfrak{G}$ et on recommence le raisonnement sur $\mathfrak{G}'$, car $\sigma(a)$ étant nulle dans $\mathfrak{G}$ on a $\sigma'(a) = 0$ dans $\mathfrak{G}'$.

V. Il s'agit maintenant d'étudier les algèbres non intégrables.

Parmi les algèbres non intégrables, les algèbres simples et semi-simples jouent un rôle particulier.

Une algèbre de Lie est dite <u>simple</u> si elle n'admet pas de sous-groupe invariant autre qu'elle-même et zéro. le dérivé $\mathfrak{g}'$ d'une algèbre simple $\mathfrak{g}$ est donc égal à $\mathfrak{g}$, car si $\mathfrak{g}'$ était nul, $\mathfrak{g}$ serait abélien ; or, tout sous-espace déun groupe abélien en est sous-groupe invariant. Un groupe abélien ne peut donc être simple que s'il est d'ordre 1, et il est alors intégrable. Nous exclurons toujours ce cas lorsque nous parlerons de groupes simples.

Une algèbre est dite <u>semi-simple</u> si elle n'admet pas de sous-groupe invariant intégrable autre que zéro. Une algèbre simple est a fortiori semi-simple, la seule exception est précisément le cas exclu du groupe abélien d'ordre 1 qui est simple sans être semi-simple.

<u>Un groupe infinitésimal semi-simple n'admet pas de sous-groupe invariant abélien autre que zéro</u>, et cette propriété pourrait être prise comme définition des groupes semi-simples.

Un groupe $\mathfrak{g}$ non intégrable et non semi-simple admet au moins un sous-groupe invariant intégrable . Soit $\mathcal{J}_1$ un tel sous-groupe . Si $\mathcal{J}_2$ est un autre sous-groupe invariant intégrable, on voit immédiatement que $\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2$ en est encore un . *Il y a donc un sous-groupe invariant intégrable maximum Γ c'est à dire contenant tout autre sous-groupe invariant intégrable*.

Mais alors le groupe facteur $\bar{\mathcal{G}} = \mathcal{G}/_{\Gamma}$ est semi-simple . L'étude d'un groupe non intégrable se ramène donc en quelque sorte à la recherche du plus grand sous-groupe invariant intégrable et à l'étude des groupes semi-simples.

Mais en ce qui concerne le premier problème, nous nous bornerons à énoncer le résultat suivant dû à M.Cartan : *le plus grand sous-groupe invariant intégrable est le sous-groupe invariant défini à partir de la forme ψ_2 comme ensemble des éléments y de $\mathcal{G}$ tels que* :

$$\psi_2 (x,y) = 0$$

pour tout x appartenant au dérivé $\mathcal{G}'$ de $\mathcal{G}$.

La démonstration utilise des propriétés des groupes semi-simples qui seront vues plus loin .

Bornons-nous donc maintenant à l'étude des groupes semi-simples .

Monsieur Cartan a donné, pour reconnaitre si un groupe est semi-simple, le critère suivant :

Une algèbre de Lie est semi-simple si et seulement si la forme quadratique σ_2 n'est pas dégénérée.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre semi-simple. Si la forme σ_2 était dégénérée, il existerait des éléments a non identiquement nuls tels que

$$\sigma_2(a\ x) = 0 \qquad \text{pour tout } x \text{ dans } \mathfrak{g}.$$

Mais les éléments tels qu'il en soit ainsi forment une sous-algèbre invariante de $\mathfrak{g}$ et on a pour tous ces éléments

$$\sigma_2\ (a, a) = \sigma_2\ (a) = 0$$

donc cette sous-algèbre serait intégrable.

Si maintenant $\mathfrak{g}$ n'est pas semi-simple, soit $\mathfrak{f}$ une sous-algèbre invariante abélienne de $\mathfrak{g}$; prenons pour $\mathfrak{g}$ une base adaptée $(u_1\ , u_2\ \ldots, u_h\ , u_{h+1}\ \ldots\ u_g\ )$

La matrice A d'un élément quelconque de $\mathfrak{g}$, $a = \alpha^i u_i$, se met, comme on le vérifie sans peine, sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

où les sous-matrices A_1 et A_2 ne dépendent que de α^{h+1}...

... α^q. L'équation caractéristique de A et en particulier $\sigma_2(a)$ ne dépend donc pas de $\alpha^1 \ldots\ldots \alpha^h$.

On a pour les groupes semi-simples la propriété fondamentale suivante :

<u>Une algèbre de Lie semi-simple est décomposable d'une manière unique en somme directe de groupes simples</u> (non d'ordre 1).

$\mathfrak{g}$ est dit somme directe de $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$: $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ si l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$ est la somme directe des espaces $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$, et si de plus $[h_1 h_2] = 0$ pour $h_1 \in \mathfrak{g}_1$ $h_2 \in \mathfrak{g}_2$. De là résulte que $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$ sont sous-groupes invariants de $\mathfrak{g}$.

Soit $\mathfrak{h}$ un sous-groupe invariant d'ordre h de $\mathfrak{g}$. $\mathfrak{h}^*$ le sous-groupe associé au moyen de σ_2 ensemble des y tels que

$$\sigma_2(x,y) = 0 \qquad \text{pour tout } x \in \mathfrak{h}$$

σ_2 n'étant pas dégénérée. $\mathfrak{h}^*$ est l'ordre g-h. $\mathfrak{g}$ étant semi-simple, $\mathfrak{h} \wedge \mathfrak{h}^* = 0$ et $[xy] \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^* = 0$. On a donc $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^*$.

Si $\mathfrak{h}$ est un sous-groupe invariant maximal $\mathfrak{h}^* \simeq \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ est simple et d'ordre plus grand que 1, sans quoi $\mathfrak{g}$ ne serait pas semi-simple : et on recommence sur $\mathfrak{h}$ qui est semi-simple

Finalement on obtient

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2 \oplus \ldots\ldots \oplus \mathcal{G}_s$$

<u>Montrons que tout sous-groupe invariant</u> $\mathcal{J}$ <u>de</u> $\mathcal{G}$ <u>est somme directe d'un certain nombre de</u> $\mathcal{G}_i$. Considérons un élément arbitraire de $\mathcal{J}$:

$$x = x_1 + \ldots + x_i + \ldots + x_s \qquad x_i \subset \mathcal{G}_i$$

L'ensemble des éléments x_i est un sous-groupe invariant $\mathcal{J}_i$ de $\mathcal{G}_i$, nul ou égal à $\mathcal{G}_i$: de toutes façon, on a $\mathcal{J}_i' = \mathcal{J}_i$. Mais $\mathcal{J}_i'$ est engendré par les crochets $[a_i\, x_i]$ $(a_i \subset \mathcal{J}_i)$, et on a :

$$[a_i x_i] = [a_i\, x] \subset \mathcal{J}$$

d'où

$$\mathcal{J}_i \subset \mathcal{J}$$

et $$\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 \oplus \mathcal{J}_2 \oplus \ldots\ldots = \mathcal{G}_{i_1} \oplus \mathcal{G}_{i_2} \oplus \ldots$$

(en supprimant ceux des $\mathcal{J}_i$ qui sont nuls).

Par suite une deuxième décomposition de $\mathcal{G}$ en groupes simples est forcément identique à la première .

Enfin, il résulte de la décomposition précédente, que pour un groupe semi-simple, on a , comme pour les groupes simples : $\mathcal{G} = \mathcal{G}'$.

BIBLIOGRAPHIE

E. CARTAN — Sur la structure des groupes de transformations finis et continus (Thèse, Paris , Nony, 1894).

H. WEYL — Theorie des Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen.

I. Math. Zeitsch. 23 , p.271

II. Math. Zeitsch.24 , p.328

The structure and representation of continuous groups . (Princeton , 1933);
