Séminaire de Mathématiques

André Weil

Application des invariants d'homologie à la caractérisation des classes de représentations

Séminaire de Mathématiques (Julia), tome 3 (1935-1936), exp. n° 6, p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=SMJ_1935-1936__3__A6_0>

SEMINAIRE DE MATHEMATIQUES

Troisième année 1935-1936

TOPOLOGIE

Application des invariants d'homologie à la caractérisation des classes de représentations

Exposé fait par M. André WEIL, le 17 Février 1936

Exemplaire n° 187

On a déjà eu l'occasion de parler de la distinction entre homologie et homotopie (v.exposé B) . On rappelle la définition :

Deux complexes singuliers C^n ,C'^n images continues d'un même complexe simplicial c^n dans un espace topologique donné quelconque, sont dits <u>homotopes</u> si l'on peut les déduire l'un de l'autre par déformation continue . Au moyen du produit topologique d^{n+1} de c^n par le segment $0 \leq t \leq 1$ on peut encore dire que $C^n = f(c^n)$ et $C'^n = f'(c^n)$ sont homotopes si l'on peut définir une fonction continue f sur d^{n+1} , prenant ses valeurs dans l'espace donné (c'est-à-dire une image continue de d^{n+1} dans cet espace) se réduisant à f pour $t = 0$ et à f' pour $t = 1$. Si C'^n se réduit à un point, on dit que C^n est <u>homotope à zéro</u> .

On a vu (ibid.) que deux complexes homotopes sont nécessairement homologues . La réciproque n'est pas vraie, comme on sait (voir par ex. l'exposé de Marty sur le groupe de Poincaré).Mais on doit à H.Hopf d'avoir démontré cette réciproque dans certains cas particuliers très intéressants . C'est à l'exposé de ces résultats (dont une partie avait d'ailleurs été pressentie par Brouwer) que va être consacrée la présente conférence .

Quand deux représentations $C^n = f(c^n)$, $C'^n = f'(c^n)$ d'un même complexe c^n dans un même espace définissent des complexes homotopes , il est d'usage de dire aussi que les deux représentations appartiennent à la même classe ("Abbildungsklasse"). De plus, on a vu que, pour savoir si deux complexes singuliers sont homotopes (ou si deux représentations appartiennent à la même classe) on a à résoudre un problème du type suivant : K étant un complexe donné, K_0 un complexe partiel composé d'éléments de K, déterminer une fonction continue sur K , prenant ses valeurs dans un espace donné (c'est à-dire une représentation de K dans cet espace), qui prenne sur K_0 des valeurs données ; ou, autrement dit, prolonger à K d'une manière continue, une fonction donnée sur K_0 . Un tel problème s'appelle un "problème de prolongement" ("Erweiterungsaufgabe"); nous donnerons aussi les résultats de Hopf sur certains problèmes de ce type .

On a déjà dit (v.exposé Leray) qu'on peut toujours prolonger dans un espace topologique normal quelconque, une fonction continue, à valeurs numériques, donnée sur un sous-ensemble fermé quelconque de l'espace ; d'où il résulte qu'on peut toujours prolonger aussi une fonction prenant ses valeurs dans un espace euclidien à p dimensions x_1 , x_2 ,.... ..x_p (il suffit de faire le prolongement pour chacune des coordonnées x_i séparément).

On désignera par S^n la sphère à n dimensions ; on sait qu'elle est topologiquement identique à la frontière $|\dot{X}^{n+1}|$ d'un simplexe X^{n+1} à n+1 dimensions ; on sait aussi que la sphère S^n pointée (c'est-à-dire où l'on a enlevé un point p) est topologiquement identique à un espace euclidien R^n à n dimensions, et par suite que la sphère S^n deux fois pointée (c'est-à-dire d'où l'on a enlevé deux points p et q) est topologiquement identique à $R^n - o$ (espace R^n d'où l'on a enlevé un point o) .

D'autre part, soit R^{n+1} un espace euclidien à n+1 dimensions, S^n la sphère de centre o et de rayon 1 dans R^{n+1} ; à tout point x de $R^{n+1} - o$, faisons correspondre l'intersection $z = \varphi(x)$ de la demi-droite ox avec S^n ; et soit $\rho = \log(ox)$; tout point x de $R^{n+1} - o$ est ainsi représenté par ses coordonnées polaires (z, ρ) d'une manière et d'une seule ; autrement dit, $R^{n+1} - o$ est le produit topologique de S^n par la droite $-\infty < \rho < +\infty$.

Ces préliminaires posés, nous diviserons (d'après Hopf) notre exposé en trois parties .

<u>1ère partie</u> . - <u>Représentations de degré 0 de S^n dans S^n</u> .

<u>Dans toute cette partie (mais non dans les suivantes)</u> le degré topologique sera pris par rapport à <u>l'anneau des entiers rationnels</u> . On désignera par S^n à la fois la

sphère à n dimensions et le cycle algébrique à n dimensions qu'elle définit au signe près (c'est-à-dire, dans une triangulation quelconque de S^n, la base du groupe d'homologie à n dimensions sur S^n, défini par rapport à l'anneau des entiers). Si l'on a une représentation $f(S_o^n) \subset S^n$ d'une sphère S_o^n dans une sphère S^n, le degré de la représentation n'est pas autre chose que le nombre d défini par

$f(S_o^n) \sim d.S^n$ (voir conférence précédente).

Si $f(S_o^n)$ est homotope à zéro, on aura $d=0$. Réciproquement, nous nous proposons de démontrer le théorème suivant :

Théorème I. - Une représentation $f(S_o^n)$ d'une sphère S_o^n dans une sphère S^n, de degré topologique 0 (par rapport à l'anneau des entiers) est homotope à zéro.

Ce théorème se démontre directement pour $n=1$. Dans ce cas, en effet, on a deux cercles C_o, C ; soient α, β, les arces sur ces deux cercles ; la représentation f s'exprimera par une fonction $\beta = f(\alpha)$, et si d est le degré, on aura :

$$f(\alpha + 2\pi) = f(\alpha) + 2d\pi$$

Si $d=0$, f sera périodique, et la formule $f_t(\alpha) = t.f(\alpha)$ définira une représentation de C_o sur C, se réduisant à la représentation donnée pour $t=1$, et à zéro pour $t=0$.

c.q.f.d.

Pour $n > 1$, on démontrera le théorème par récurrence sur

n. Mais il est utile d'abord d'en donner plusieurs énoncés tous équivalents .

Soit d'abord B_0^{n+1} la "boule" ("Vollkugel") à n+1 dimensions ayant pour frontière S_0^n dans un espace R^{n+1} où l'on aurait plongé S_0^n (c'est-à-dire , dans un tel espace l'ensemble des points intérieurs à S_0^n , ou situés sur S_0^n). Dire qu'une représentation de S_0^n, dans un espace quelconque est homotope à zéro, c'est dire qu'on peut trouver $f_t(S_0^n)$ se réduisant à la représentation donnée pour $t=1$, à un point pour $t=0$; si nous considérons $f_t(S_0^n)$ comme une représentation de la sphère concentrique à S_0^n et de rayon t (S_0^n étant supposée de rayon 1) , on voit que cette fonction définit une représentation de la boule B_0^{n+1} ; réciproquement si l'on peut trouver une représentation donnée, il est clair que celle-ci sera homotope à zéro . Le théorème I peut donc être formulé comme suit :

I^a : une représentation de S_0^n sur S^n , de degré zéro, peut être prolongé à B_0^{n+1} .

Sous cette forme, on peut encore transformer le théorème dans l'énoncé suivant :

I^b : une représentation de S_0^n dans $R^{n+1}-o$, d'ordre zéro par rapport à o, peut être prolongé à B_0^{n+1} .

En effet, soit, comme plus haut, $z = \varphi(x)$ le point de la sphère S^n de centre o et de rayon 1 qui se trouve sur ox , et ρ le logarithme du rayon vecteur du point x ; se donner une représentation $f(K)$ d'un complexe quelconque K dans $R^{n+1}-o$ équivaut à se donner une représentation $\varphi[f(K)]$ de K dans S^n , et une représentation $\rho[f(K)]$ de K dans la droite $-\infty < \rho < +\infty$. L'ordre de $f(S_o^n)$ par rapport à o dans $R^{n+1} - o$ n'est pas autre chose (v.conférence précédente) que le degré topologique de $\varphi[f(S_o^n)]$ dans S^n . Donc si le théorème I^a est vrai, et si l'hypothèse de I^b est satisfaite, on peut prolonger à B_o^{n+1} la fonction $\varphi[f(S_o^n)]$; quant à la fonction $\rho[f(S_o^n)]$ on peut surement la prolonger aussi à B_o^{n+1} , puisque c'est une fonction à valeurs numériques : ce qui démontre I^b . D'autre part, I^a suit aussi I^b , car si $f(S_o^n)$ est une représentation de de S_o^n dans S^n , de degré zéro, on peut aussi la considérer comme une représentation dans $R^{n+1} - o$, d'ordre 0 , donc (si I^b est vrai) la prolonger en une représentation $f(B_o^{n+1})$ dans $R^{n+1} - o$: mais alors $\varphi[f(B_o^{n+1})]$ sera une représentation de B_o^{n+1} dans S^n qui prolonge $f(S_o^n)$ et I^a est démontré . On voit donc bien que I^a et I^b sont entièrement équivalents .

D'après les remarques faites plus haut, I^b peut encore s'énohcer comme suit :

I^c : une représentation de S_o^n dans $R^{n+1} - o$, d'ordre zéro, par rapport à o , est homotope à zéro .

Enfin, observons que, puisque $R^{n+1} - o$ est topologiquement identique à une sphère deux fois pointée $S^{n+1} - p - q$, on peut énoncer I^b et I^c pour une telle sphère, l'ordre par rapport à o devant être remplacé alors par l'ordre par rapport au couple de points (p,q) .

Démontrons maintenant d'après Hopf les deux lemmes :

<u>Lemme I</u>.- Soient f, g, deux représentations d'un même espace compact F dans S^n ; supposons qu'il y ait un point p sur S^n , et un sous-ensemble fermé F' de F , tels que f et g coincident sur F - F' , et que les images f(F') , g(F') de F' par f et g ne contiennent pas p . Alors f et g sont homotopes .

En effet, faisons une projection stéréographique de S^n sur R^n de façon que p aille à l'infini . Soit x un point de F' ; soit $f_t(x)$ le point de S^n tel que sa projection stéréographique divise le segment de droite déterminé dans R^n par les projections stéréographiques de f(x) , g(x) dans le rapport t/1-t : avec les hypothèses du lemme , ce point est bien déterminé . Pour $x \subset F - F'$, on prendra $f_t(x) = g(x) = f(x)$. On vérifie immédiatement que $f_t(x)$ est continue en x , t , et se réduit à f pour

$t=0$, à g pour $t=1$.

<u>Lemme II</u>. - Soit f une représentation de S_0^n dans S^n et <u>$n \geq 2$</u> ; soient p, q, deux points sur S^n ; A , B , deux hémisphères sur S_0^n (de façon que S_0^n soit la réunion de A et B); alors on peut déformer f en une représentation g pour laquelle $g(A) \not\ni q$, $g(B) \not\ni p$.

(On voit facilement que ce n'est pas exact pour $n=1$). Tout d'abord, on remplace f par une approximation simpliciale (assez fine pour qu'elle soit homotope à f , cf. conférence d'Ehresmann) , de façon que pour cette approximation qu'on désignera de nouveau par f , $f^{-1}(p)$, et $f^{-1}(q)$ ne comprennent qu'un nombre fini de points ; on peut supposer évidemment aussi, par une déformation convenable de S_0^n en elle-même, que A n'a aucun point commun avec $f^{-1}(q)$. Soit alors x un point de $f^{-1}(p)$ qui ne soit pas dans A , x' un point intérieur à A ; joignons x à x' par une ligne L (image d'un segment) sans point commun avec $f^{-1}(q)$, ni (sauf x) avec $f^{-1}(p)$; soit V un voisinage de la ligne L , sans point commun avec $f^{-1}(q)$, et homéomorphe à un simplexe à n dimensions X^n ; d'après le lemme I, une représentation $g(S_0^n)$ dans S^n sera homotope à f pourvu qu'elle coincide avec f en dehors de $\overline{V}$, et que dans $\overline{V}$ elle ne prenne pas la valeur

q ; on obtiendra une telle fonction g à partir de f, par une déformation continue de $\overline{V}$ en lui-même qui laisse fixes tous les points frontières de $\overline{V}$ et qui amène x en x' .
Cela fait, on a g homotope à f et telle que les points de $g^{-1}(q)$ et $g^{-1}(p)$ coincident avec les points correspondants pour f à l'exception de l'un des points de $f^{-1}(p)$ qui a été remplacé par un point x' dans A . En continuant ainsi, on amènera un à un tous les points de $f^{-1}(p)$ dans A sans toucher à ceux de $f^{-1}(q)$, et le lemme est démontré .(Onremarquera que l'existence de la ligne L tenait à l'hypothèse $n \geq 2$) .

On peut maintenant démontrer le théorème I : on le démontrera pour $n+1$ en supposant le théorème I^b vrai pour n . Soit f une représentation de S_0^{n+1} dans S^{n+1} , de degré zéro; on peut supposer que f a été remplacée par une représentation homotope (qu'on appellera de nouveau f) satisfaisant aux conditions du lemme II : c'est-à-dire qu'on aura sur S^{n+1} deux points p , q , et que S_0^{n+1} sera partagée par son "équateur" S_0^n en deux hémisphères A , B , de façon que $f(A) \not\ni q$, $f(B) \not\ni p$. Cela étant, on sait (voir conférence précédente) que le degré de f est égal au degré local de f en un point quelconque de S^{n+1} , par exemple en p : celui-ci étant la somme des degrés, en ce point, de $f(A)$ et $f(B)$; ce dernier étant nul, puisque $f(B) \not\ni p$,il en est de même de f(A) ; par définition de l'ordre, le degré de f(A) en p est égal à l'ordre de $f(S_o^n)$ par rapport au couple de points p, q ; celui-ci est donc nul ; mais alors on peut appliquer le théorème I^b pour la dimension n (dans sa forme relative à la sphère deux fois pointée $S^{n+1} - p - q$) : d'après ce théorème, la fonction $f(S_o^n)$ qui représente S_o^n dans $S^{n+1} - p - q$, avec l'ordre 0 par rapport à (p,q) peut être prolongée en une représentation g de la boule $B_o^{n+1} = A$ dans $S^{n+1} - p - q$; autrement dit, on peut définir une représentation g de A dans $S^{n+1} - p - q$, coincidant avec f sur S_o^n ; prenons , de plus, g = f dans B ; alors , d'après le lemme I g est homotope à f . D'autre part, g est alors une représentation de S_o^{n+1} dans $S^{n+1} - p$, ou autrement dit dans un espace euclidien R^{n+1} , et est donc homotope à zéro ; il en est donc de même de f . c.q.f.d.

2ème partie . Problèmes de prolongement relatifs aux représentations dans S^n

Soit K^{n+1} un complexe à n+1 dimensions , $K_o \subset K^{n+1}$ un complexe partiel composé d'éléments de K^{n+1} ; soit f une représentation de K_o dans S^n , on va donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que f puisse être prolongée au complexe K^{n+1} .

(On observera comme plus haut, que si, au lieu des représentations dans S^n, on étudiait les représentations dans $R^{n+1} - o$, on aurait un problème complètement équivalent à celui qui nous occupe. On remarquera, d'autre part, que si au lieu d'un complexe K^{n+1}, on avait un complexe K^m à m dimensions, avec $m \leq n$, le problème serait trivial, le prolongement étant toujours possible ; il suffit, en effet, de considérer le problème relatif aux représentations dans $R^{n+1} - o$; faisons le prolongement dans R^{n+1} d'une manière quelconque, ce qui est toujours possible ; cela fait, une déformation infiniment petite nous permettra toujours d'éviter le point o).

Soit C^n un cycle à n dimensions sur K_o (s'il en existe) formé en prenant pour domaine de coefficients un groupe abélien quelconque G ; supposons qu'il soit homologue à zéro <u>sur K^{n+1}</u> ; alors, quelle que soit la représentation f de K^{n+1} dans S^n, on aura $f(C^n) \sim 0$ dans S^n avec le degré zéro ; c'est donc là une condition nécessaire à laquelle doit satisfaire la fonction f, supposée donnée sur K_o, pour pouvoir être prolongée à K^{n+1} ; si d'ailleurs C^n est déjà ~ 0 sur K_o, la condition est identiquement satisfaite. Nous allons démontrer la réciproque, d'après Hopf, sous la forme suivante :

Théorème II. - Pour que la représentation f de K_o dans S^n puisse être prolongée à K^{n+1}, il suffit que $f(C^n) \sim 0$ sur S^n quel que soit le cycle C^n sur K_o, formé soit avec l'anneau des entiers ordinaires, soit avec l'anneau des entiers mod. m, non homologue à zéro sur K_o, mais homologue à zéro sur K^{n+1}.

On va s'appuyer sur le lemme suivant, qui vaut pour tous les problèmes de prolongement :

Lemme. Soit $f(K_o)$ uhe représentation de K_o dans un espace quelconque Q ; si l'on peut prolonger f en une représentation $f(K^{n+1})$ dans Q, l'on peut prolonger aussi à K^{n+1} toute représentation $g(K_o)$ homotope à $f(K_o)$.

En effet, soit K^m le complexe formé par tous les éléments de K^{n+1} qui sont au plus à m dimensions ; on va démontrer qu'on peut prolonger g à K^m successivement pour $m = 0, 1, 2, \ldots\ldots$ d'où il résultera le théorème pour $m=n+1$. C'est évident pour $m=0$, il suffit de définir arbitrairement g en tous les sommets de K^{n+1} qui n'appartiennent pas déjà à K_o. Supposons donc qu'on ait défini g sur K^m de façon que $g(K^m + K_o)$ soit homotope à $f(K^m + K_o)$; soit X^{m+1} un simplexe de K^{n+1}, à $m+1$ dimensions, n'appartenant pas à K_o ; on définira g dans X^{m+1} comme suit. Soit o un point intérieur à X^{m+1}, X'^{m+1} l'homothétique de X^{m+1} dans l'homothétie de centre o et de rapport $1/2$:

soit x' le point de X'^{m+1} correspondant, dans cette homothétie, à un point x de X^{m+1}, on définira g, dans X'^{m+1} par $g(x') = f(x)$; g se trouve ainsi déterminé sur la frontière de $X^{m+1} - X'^{m+1}$; d'ailleurs, g étant homotope à f sur K^m, et en particulier sur la frontière de X^{m+1}, on peut définir sur $X^{m+1} - X'^{m+1}$ (qui est homéomorphe au produit topologique de la frontière de X^{m+1} par un segment) une fonction se réduisant à g sur la frontière de X^{m+1}, à f sur la frontière de X'^{m+1} ; nous prendrons g égal à cette fonction dans $X^{m+1} - X'^{m+1}$, G est ainsi défini dans K^{m+1}, ce qui démontre le lemme par récurrence sur m.

Passons maintenant au théorème II. Au lieu de S^n, nous raisonnerons, ce qui revient au même, sur la frontière $|\dot{X}^{n+1}|$ d'un simplexe X^{n+1} à $n+1$ dimensions ; f étant donnée sur K_0, f est homotope (voir exposé Ehresmann) à la représentation simpliciale, dans $|\dot{X}^{n+1}|$, d'une subdivision suffisamment fine de K_0 ; d'après le lemme, il suffit de raisonner sur celle-ci, qu'on appellera de nouveau f ; autrement dit, nous supposons que f est une représentation simpliciale de K_0 dans $|\dot{X}^{n+1}|$. Soit K^m l'ensemble des éléments à au plus m dimensions de K^{n+1} : nous définirons f sur K^{n+1} en faisant correspondre à tout sommet de K^{n+1} un sommet arbitraire de X^{n+1}, et en prenant f simpliciale sur K^{n+1}. Supposons un instant qu'on ait pu prolonger f

à K^n , et essayons de faire le prolongement à K^{n+1} . Pour cela, soit x^{n+1} un simplexe à n+1 dimensions de K^{n+1} : il s'agira , f étant donnée sur la frontière de x^{n+1} , de prolonger à x^{n+1} ; ce problème est identique à celui qui consiste à prolonger une fonction, donnée dans une sphère S_o^n , à la boule B_o^{n+1} , et qui a été traité dans la première partie ; il faut et il suffit, pour que ce soit possible, que $f(\dot{x}^{n+1}) \sim 0$ sur $|\dot{X}^{n+1}|$. Le problème est donc ramené au suivant : f étant connue, sur K^{n-1} et sur K_o , définir f sur K^n , de façon que l'on ait $f(\dot{x}^{n+1}) \sim 0$ quel que soit x^{n+1} sur K^{n+1} ; ou encore, z^n désignant n'importe quel complexe algébrique à n dimensions sur K^{n+1} , de façon que $f(z^n) \sim 0$ chaque fois que $z^n \sim 0$. Pour définir une telle fonction f (supposée donnée sur $K^{n-1} + K_o$) choisissons un simplexe Y^n (orienté) sur $|\dot{X}^{n+1}|$; et supposons qu'on sache déterminer une fonction $\chi(x^n)$ des simplexes à n dimensions (orientés) de K^{n+1} , prenant ses valeurs dans l'anneau des entiers ordinaires , et satisfaisant aux deux conditions suivantes :

1° - si x^n appartient à K_o , $\chi(x^n)$ est égal au degré de $f(x^n)$ sur Y^n (c'est-à-dire puisque f est simpliciale sur K_o , $\chi(x^n) = +1$, -1 ou 0 suivant que $f(x^n) = + Y^n$, $- Y^n$ ou $\neq \pm Y^n$).

2°- quel que soit le cycle $z^n = \sum_i c_i x_i^n$ (formé avec l'anneau des entiers) homologue à zéro sur K^{n+1}, on a :

$$\chi(z^n) = \sum_i c_i \chi(x_i^n) = 0$$

Dans ces conditions, soit x^n un simplexe de K^{n+1} à n dimensions, n'appartenant pas à K_0, et soit $\chi(x^n) = \pm k$, k étant entier et ≥ 0 ; marquons, à l'intérieur de x^n, k petits simplexes (sans points communs deux à deux); dans chacun de ceux-ci, définissons f comme une représentation simpliciale de ce simplexe sur Y^n, avec une orientation positive ou négative suivant que $\chi(x^n)$ est $>$ ou $<$ 0 ; dans tout le reste de x^n, définissons f de façon qu'elle n'y prenne que des valeurs appartenant à $\overline{\mathring{X}^{n+1}} - \overline{Y^n}$ (ce qui est toujours possible, ce dernier ensemble étant homéomorphe à l'intérieur de la sphère) . La fonction f ainsi définie satisfait aux conditions requises, car si z^n est un cycle ~ 0 sur K^{n+1}, le degré de $f(z^n)$ dans $|\mathring{X}^{n+1}|$ est égal au degré local en un point intérieur de Y^n, et celui-ci n'est autre chose que $\chi(z^n) = 0$.

Tout se trouve donc ramené à la détermination de la fonction $\chi(x^n)$, et il ne reste plus qu'à faire voir que les hypothèses de l'énoncé permettent de trouver une telle fonction ; ces hypothèses peuvent d'ailleurs se formuler ainsi: quel que soit le cycle z^n sur K_0, ~ 0 (mod.m) sur K^{n+1}

on a $\chi(z^n) = 0 \pmod{m}$: et cela, m étant 0 ou un entier naturel quelconque . On est ainsi ramené à une question purement arithmétique, qui d'ailleurs ne présente pas de difficultés, et au sujet de laquelle nous renvoyons le lecteur à Hopf-Alexandroff .

Il est intéressant d'observer qu'au lieu de faire l'hypothèse de l'énoncé pour le cas de l'anneau des entiers ordinaires et pour le cas de l'anneau des entiers mod.m quel que soit m , il revient au même de faire cette hypothèse pour un seul domaine de coefficients , à savoir le groupe des nombres rationnels (ou des nombres réels) modulo 1 .

3ème partie . Application aux classes de représentations

Puisque, pour décider si deux représentations $f(K^n)$ $f'(K^n)$ d'un complexe K^n dans la sphère S^n appartiennent à une même classe , il suffit de résoudre un problème de prolongement dans le produit topologique de K^n par un segment, les résultats précédents sont applicables . Soit donc K^{n+1} le produit de K^n par le segment $0 \leq t \leq 1$; soient K^n , K'^n les complexes partiels de K^{n+1} correspondant respectivement à $t=0$ et à $t=1$; il s'agit de savoir si l'on peut déterminer une représentation de K^{n+1} dans S^n , se réduisant à f sur K^n et à f' sur K'^n . Soit z^n un cycle sur $K^n + K'^n$; il sera somme d'un complexe algébrique $-x'^n$ sur K'^n ; on doit avoir $\dot{x}^n - \dot{x}'^n = 0$, d'où puisque K^n et K'^n sont sans point commun, $\dot{x}^n = \dot{x}'^n = 0$, c'est-à-dire que x^n et x'^n sont des cycles ; on vérifie immédiatement que pour que $z^n = x^n - x'^n \sim 0$ sur K^{n+1} , il faut et il ~~suffit que~~ suffit que x'^n , sur K'^n , appartienne à la classe d'homologie qui correspond à celle à laquelle appartient x^n sur K^n . L'application du théorème II donne alors :

Théorème III . - *Pour que deux représentations f, f' de K^n dans S^n appartiennent à la même classe , il faut et il suffit que l'on ait , quel que soit le cycle x^n pris sur K^n par rapport à l'anneau des entiers ordinaires ou à celui des entiers mod.m , $f(x^n) \sim f'(x^n)$ sur S^n ; ou, autrement dit que tout cycle x^n soit représenté, par f et par f', avec le même degré topologique sur S^n* .

On exprime ce théorème en disant que, lorsqu'il s'agit de représentations d'un complexe K^n à n dimensions dans S^n, la classe d'une représentation est entièrement déterminée par son type homologique .

En particulier, la classe d'une représentation de S^n dans S^n est complètement déterminée par son degré .

En revanche, le type homologique ne suffit nullement en général pour déterminer la classe d'une représentation, et Hopf a montré que les résultats de la première partie ne peuvent être étendus au cas de deux sphères de dimensions quelconques ; plus précisément, il existe une représentation non homotope à zéro , de S^{4n-1} sur S^{2n} , quel que soit n : or, dans une telle représentation tout cycle à $2n$ dimensions sur S^{4n-1} est homologue à zéro sur S^{4n-1} et est donc a fortiori représenté sur S^{2n} avec le degré zéro , de sorte que la représentation a même type homologique qu'une représentation homotope à zéro . Dans le cas $n = 1$, la représentation de Hopf peut se définir d'une manière très simple : comme on sait, S^3 est un espace de groupe, et à tout point s de S^3 il est possible de faire correspondre une rotation autour de o dans l'espace ordinaire R^3 ; soit A un point fixe sur la sphère S^2 de centre o dans R^3 , P son transformé par la rotation s : la transformation $(s \longrightarrow P)$ constitue une représentation de S^3 dans S^2 , et Hopf démontre qu'elle n'est pas homotope à zéro (cela résulte d'ailleurs aussi d'un théorème très général de Hurowicz , provenant de sa théorie des groupes d'homotopie d'ordre supérieur).

BIBLIOGRAPHIE

L'exposé ci-dessus a été fait d'après Hopf-Alexandroff .

Sur la représentation de S^{4n-1} dans S^{2n} (et le très intéressant problème lié à celui-là , des représentations de S^n S^n dans S^n) v. H.HOPF , Fundam.Math. t.25 .

Cf. aussi FREUDENTHAL, Die Hopfsche Gruppe , Compos.Math. vol.2 ; et d'autre part les notes de Hurewicz sur sa théorie des groupes d'homotopie (Proc.Acad. Amsterdam 1935-36) .