CLAUDE CHEVALLEY

Les théories de dualité

Séminaire de Mathématiques (Julia), tome 3 (1935-1936), exp. nº 4, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=SMJ_1935-1936__3__A4_0>

SEMINAIRE DE MATHEMATIQUES

Troisième année 1935-1936

TOPOLOGIE

Les théorèmes de dualité

Exposé fait par M. Claude CHEVALLEY, le lundi 6 Janvier 1936

Exemplaire n° 187

A.- DUALITE ENTRE GROUPES ABELIENS

Soit $\mathfrak{A}$ un groupe abélien. On appelle en général caractère de $\mathfrak{A}$ une fonction $\chi(\alpha)$, définie sur $\mathfrak{A}$, dont la valeur est un nombre complexe de module 1, et qui satisfait à l'égalité

$$\chi(\alpha\,\alpha'^{-1}) = \chi(\alpha)\;\chi^{-1}(\alpha')$$

où α, α' sont des éléments quelconques de $\mathfrak{A}$. Comme nous aurons exclusivement affaire à des groupes additifs, il nous sera commode de remplacer ces caractères multiplicatifs par des caractères additifs. Les valeurs de ces caractères seront des nombres réels pris (mod.1), c'est-à-dire des éléments du groupe quotient du groupe additif des nombres réels par le groupe additif des entiers. Nous appellerons donc dans ce qui suit caractère du groupe $\mathfrak{A}$ une fonction $\chi(\alpha)$ définie sur $\mathfrak{A}$, dont la valeur est un nombre réel (mod.1) et qui satisfait à l'égalité

$$\chi(\alpha - \alpha') = \chi(\alpha) - \chi(\alpha')$$

Si χ, χ', sont des caractères, il en est encore de même de $\chi \pm \chi'$. Il en résulte tout de suite que les caractères de $\mathfrak{A}$ forment un groupe abélien additif. Soit $\mathfrak{L}$ ce groupe. Nous introduirons une topologie dans $\mathfrak{L}$ de la manière suivante : on prend un nombre fini d'éléments α_1 $\alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n$ de $\mathfrak{A}$ et on leur fait correspondre des voisinages $V_1, V_2, \ldots\ldots, V_n$ dans le groupe des nombres réels (mod.1) ; on définit ensuite un voisinage dans $\mathcal{L}$ comme étant l'ensemble des χ tels que l'on ait

$$\chi(\alpha_i) \in V_i \qquad (i=1,2,\ldots\ldots,n)$$

La topologie définie dans $\mathcal{L}$ par cette famille de voisinages est bicompacte .

Chaque élément α de $\mathfrak{A}$ définit un caractère $\psi_\alpha(\chi)$ du groupe $\mathcal{L}$ par la formule

$$\psi_\alpha(\chi) = \chi(\alpha)$$

et de plus, la fonction $\psi_\alpha(\chi)$ est continue sur $\mathcal{L}$. On démontre que : <u>le groupe isomorphe à $\mathfrak{A}$ constitué par les caractères $\psi_\alpha(\chi)$ est identique au groupe de tous les caractères continus de $\mathcal{L}$</u> . Inversement , si $\mathcal{L}$ est un groupe abélien bicompact , et si $\mathfrak{A}$ est le groupe des caractères continus de $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}$ est le groupe de tous les caractères de $\mathfrak{A}$.

Désignant par α un élément de $\mathfrak{A}$, par β un élément de $\mathcal{L}$, chacun des éléments α , β , est un caractère de celui des groupes $\mathfrak{A}$, $\mathcal{L}$, autre que celui dans lequel il est pris, et on $\beta(\alpha) = \alpha(\beta)$. Nous désignerons ce nombre par $\varphi(\alpha,\beta)$. Ce nombre jouit des propriétés suivantes :

I.- $\varphi(\alpha - \alpha', \beta) = \varphi(\alpha,\beta) - \varphi(\alpha',\beta)$;
$\varphi(\alpha, \beta - \beta') = \varphi(\alpha,\beta) - \varphi(\alpha,\beta')$

II.- Si, α étant fixe, on a $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ quel que soit β, on a $\alpha = 0$; si, β étant fixe, on a $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ quel que soit α, on a $\beta = 0$.

III.- Pour chaque α, $\varphi(\alpha, \beta)$ est une fonction continue sur le groupe $\mathfrak{B}$.

Définition : $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, étant des groupes abéliens additifs, dont le premier est discret et le second bicompact, s'il existe une fonction $\varphi(\alpha, \beta)$ dont la valeur est un nombre réel (mod. 1), définie pour $\alpha \in \mathfrak{A}$, $\beta \in \mathfrak{B}$ et satisfaisant aux conditions I, II, III, on dit que la fonction définit entre ces deux groupes une relation de dualité.

S'il en est ainsi, on montre que tout caractère de $\mathfrak{A}$ se met sous la forme $\varphi(\alpha, \beta)$, pour un β convenable, et que tout caractère continu de $\mathfrak{B}$ se met sous la forme $\varphi(\alpha, \beta)$, pour un α convenable.

On démontre, de plus, dans ce cas, les faits suivants:

Si $\mathfrak{A}_1$ est un sous-groupe de $\mathfrak{A}$, le groupe des β tels que $\varphi(\mathfrak{A}_1, \beta) = 0$ (c'est-à-dire tels que $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ pour $\alpha \in \mathfrak{A}_1$) est un sous-groupe fermé $\mathfrak{B}_1$ de $\mathfrak{B}$, et $\mathfrak{A}_1$ est identique au groupe de tous les α tels que $\varphi(\alpha, \mathfrak{B}_1) = 0$. Tout sous-groupe fermé de $\mathfrak{B}$ se trouve être de cette manière le correspondant d'un sous-groupe de $\mathfrak{A}$. Si $\bar{\alpha}$ est une classe de $\mathfrak{A}$ (mod. $\mathfrak{A}_1$) et

<u>si</u> $\beta \in \mathcal{L}_1$, <u>la fonction</u> $\bar{\varphi}(\bar{\alpha}, \beta) = \varphi(\alpha, \beta)$ <u>pour</u> $\alpha \in \bar{\alpha}$, <u>définit une relation de dualité entre</u> $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}_1$ <u>et</u> $\mathcal{L}_1$. <u>De même</u> $\mathfrak{A}_1$ <u>et</u> $\mathcal{L}/\mathcal{L}_1$ <u>sont en dualité</u>.

Si $\mathfrak{A}$ est le groupe des entiers, son groupe des caractères est le groupe $\mathcal{R}$ des nombres réels (mod.1) . Si $\mathfrak{A}$ est fini, il en est de même de $\mathcal{L}$, et $\mathcal{L}$ est le produit direct des groupes $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ des caractères de $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$.

Il en résulte que si $\mathfrak{A}$ est produit direct de p groupes cycliques infinis et d'un groupe fini d'ordre t, $\mathcal{L}$ est produit direct de p groupes isomorphes à $\mathcal{R}$ et d'un groupe fini d'ordre t .

Enfin, si $\mathfrak{A}$ est dénombrable, $\mathcal{L}$ est séparable (donc compact).

B.- <u>COMPLEXES ABSTRAITS</u>

Dans l'étude topologique des figures polyèdrales, il est souvent commode de les décomposer en éléments qui ne soient pas des simplexes , mais en des figures un peu plus compliquées, dites cellules, qu'on obtient généralement en groupant des simplexes entre eux . D'autre part, les moyens que fournit la théorie de l'homologie peuvent être appliqués dans des cas où la géométrie ne fournit pas directement les simplexes dont on a besoin. C'est pourquoi il est avantageux d'introduire la notion de complexe abstrait .

On appelle complexe abstrait un ensemble fini K d'éléments E , E',..... appelés cellules , muni d'une relation d'incidence, c'ést-à-dire d'une relation $\mathcal{J}$ (E,E') entre deux cellules , qui se lit : "E est incidente à E' " , et qui jouit des propriétés suivantes :

a) Si E est incidente à E', et E' à E", E est incidente à E"

b) E n'est pas incidente à E .

Un type important de complexes abstraits est donné par les complexes simpliciaux . On obtient un complexe simplicial de la manière suivante : on se donne un ensemble fini $\mathcal{V}$ d'éléments, qui seront appelés les sommets du complexe; les cellules du complexe sont les éléments d'une famille de parties non vides de $\mathcal{V}$, qui jouit de la propriété suivante : toute partie de $\mathcal{V}$ non vide et contenue dans une partie de la famille appartient à la famille; - tout sommet appartient au moins à une partie de la famille ; la relation d'incidence est la suivante : la cellule (ou simplexe abstrait) S est incidente à S' si tous les sommets de S appartiennent aussi à S'.

On appelle dimension d'un simplexe le nombre de ses sommets diminué de 1 . On appelle dimension d'un complexe simplicial la dimension maxima des simplexes de ce complexe .

On démontre qu'un complexe simplicial de dimension n peut toujours être réalisé géométriquement dans l'espace euclidien à 2n+1 dimensions, c'est-à-dire qu'on peut fabriquer dans cet espace une figure polyédrale dont les simplexes aient exactement les mêmes relations d'incidence que le complexe donné .

Rangeons dans un certain ordre les sommets d'un complexe simplicial, et supposons que les sommets de chaque simplexe seront toujours rangés dans cet ordre . On peut alors définir une <u>fonction frontière</u> dans le complexe simplicial par la formule classique : la frontière du simplexe $\{A_0, A_1, \ldots, A_r\}$ sera la chaine

$$\{A_1, A_2, \ldots, A_r\} - \{A_0, A_2, \ldots, A_r\} + \ldots + (-1)^r \{A_0, A_1, \ldots, A_{r-1}\}$$

Si nous nous donnons un groupe abélien additif , nous pourrons construire, avec notre fonction frontière et le groupe les groupes d'homologie du complexe simplicial . Ces groupes sont indépendants de l'ordre adopté au début pour les sommets.

Soit maintenant K un complexe abstrait quelconque . Il est possible d'associer à K un complexe simplicial K' de la manière suivante : les sommets de K' seront en correspondance biunivoque avec les cellules de K; on rangera ces sommets dans un ordre tel que si les sommets A , A', correspondent aux cellules E, E', de K , et si E est incidente à E', A soit avant A'; un ensemble $\{A_0, A_1, \ldots, A_r\}$ de sommets constituera un simplexe de K' si, et seulement si, les sommets étant rangés dans l'ordre indiqué, les cellules E_0, E_1,..,E_r de K qui leur correspondent, sont telles que E_{i-1} soit incidente à E_i ($i = 1,2,\ldots,r$) . Le complexe simplicial ainsi obtenu est appelé la subdivision régulière de K. Si le dernier sommet d'un simplexe S de K' correspond à la cellule E de K, on dira que S est sur E . La dimension maxima des simplexes de K' qui sont sur une E donnée sera appelée la dimension de E. On notera en général une cellule de dimension r par le symbole E^r, affecté au besoin d'indices. La dimension de K sera la dimension maxima des cellules de K. Ce sera aussi celle de K'.

On appellera groupes d'homologie de K (construits avec un groupe abélien additif $\mathfrak{A}$) les groupes d'homologie de K' construits avec ce groupe.

Si L est un sous-complexe de K, il est clair que les cellules de K' qui sont sur des cellules de L forment un complexe L'qui n'est autre que la subdivision régulière de L .

Définition . - Le complexe K sera dit normal si les caractères d'homologie du complexe frontière d'une E^r de K (c'est-à-dire du complexe formé par les cellules de K incidentes à E^r) sont les mêmes que ceux d'une sphère de dimension r-1 . (La sphère de dimension 0 se composant de deux points).

L'intérêt de la notion de complexe normal provient des faits suivants :

Dans un complexe normal, on peut associer au couple formé par une E_j^{r-1} et une E_i^r un coefficient d'incidence η_{ij}^r qui est un nombre entier satisfaisant aux conditions suivantes :

a) Si E_j^{r-1} n'est pas incidente à E_i^r on a $\eta_{ij}^r = 0$

b) On a $\sum_j \eta_{ij}^r \eta_{jk}^{r-1} = 0$, ce qui signifie que si on définit une fonction frontière $\mathcal{F}$ par les formules

$$\mathcal{F}(E_i^r) = \sum \eta_{ij}^r E_j^{r-1} \qquad \mathcal{F}(E^0_i) = 0$$

on a $\mathcal{F}(\mathcal{F}) = 0$.

c) Si au moyen de la fonction frontière précédente et d'un groupe abélien additif $\mathfrak{A}$, on définit à la manière habituelle les cycles et l'homologie, les groupes d'homologie que l'on trouvera sont ceux de K (c'est-à-dire ceux de K').

C.- THEOREMES DE STOKES DANS UN COMPLEXE

Soit K un complexe normal. Prenons un groupe abélien discret $\mathfrak{A}$, et appelons différentielle d'ordre r dans K, une fonction $f(r)$, qui, à chaque E^r de K associe un élément $f(E^r)$ de $\mathfrak{A}$. Il est clair que les différentielles d'ordre r forment un groupe additif $\mathfrak{J}^r$. Soit maintenant $\mathcal{L}$ le groupe des caractères de $\mathfrak{A}$. Formons le groupe additif $\mathscr{L}^r$ des chaines de K de dimension r construites avec $\mathcal{L}$. Si k_r est le nombre des cellules de dimension r de K , $\mathscr{L}^r$ est le produit direct de k_r groupes isomorphes à $\mathcal{L}$: on peut donc le considérer comme un groupe topologique bicompact .

Soit $\psi(\alpha, \beta)$ la fonction qui définit la dualité entre $\mathfrak{A}$ et $\mathcal{L}$; f_r étant un élément de $\mathscr{L}^r$, $C^r = \sum \beta_i E_i^r$ un élément de $\mathscr{L}^r$, appelons <u>intégrale</u> de f_r sur C^r , et désignons par $\Phi(f_r, C^r)$ ou par $\int_{C^r} f_r$ le nombre (mod.1) défini par

$$\Phi(f_r, C^r) = \int_{C^r} f_r = \sum_i \varphi\left(f_r(E_i^r), \beta_i\right)$$

Il est clair que la fonction Φ définit une relation de dualité entre $\mathcal{G}^r$ et $\mathscr{L}^r$.

Appelons maintenant <u>dérivée</u> de la différentielle f_r et désignons par δf_r la différentielle d'ordre r+1 définie par la formule

$$\delta f_r(E_k^{r+1}) = \sum_i \eta_{ki}^{r+1} f_r(E_i^r)$$

où les η_{ij}^r sont les coefficients d'incidence du complexe K. Il résulte tout de suite de cette formule que l'on a :

$$(1) \qquad \int_{\mathcal{F}(C^{r+1})} f_r = \int_{(C^{r+1})} \delta f_r$$

égalité qui a la forme d'un théorème de Stokes .

Nous dirons que f_r est une différentielle exacte si $\delta f_r = 0$; les différentielles exactes forment un sous-groupe $\mathcal{E}^r$ de $\mathcal{U}^r$; les différentielles d'ordre r qui sont des dérivées de différentielles d'ordre r-1 forment un sous-groupe $\mathcal{J}^r$ de $\mathcal{E}^r$. La formule (1) montre tout de suite que, dans la dualité entre $\mathcal{U}^r$ et $\mathcal{L}^r$, le groupe $\mathcal{E}^r$ correspond au groupe $\mathcal{H}^r$ des cycles ~ 0, et que $\mathcal{J}^r$ correspond au groupe $\mathcal{Z}^r$ de tous les cycles. Par suite ;

Le groupe $\mathcal{E}^r / \mathcal{J}^r$ <u>est en dualité avec le groupe d'homologie pour la dimension r, construit avec $\mathcal{L}$</u> .

D.- <u>VARIETES</u>

K étant un complexe, nous allons d'abord lui associer un nouveau complexe $\overset{*}{K}$, son dual. Pour cela, nous ferons correspondre biunivoquement à chaque cellule E de K, un nouvel objet $\overset{*}{E}$, qui sera appelée la cellule duale de ~~K~~ E. Les $\overset{*}{E}$ seront les cellules de $\overset{*}{K}$; la relation d'incidence dans $\overset{*}{K}$ sera la suivante : la cellule $\overset{*}{E}$ sera incidente à $\overset{*}{E'}$ si, et seulement si, E' est incidente à E. Il est clair que K a la même subdivision régulière que $\overset{*}{K}$.

Le complexe K étant supposé normal, nous dirons qu'il définit une <u>variété combinatoire</u> si le complexe dual de la subdivision régulière de K est un complexe normal, et si K est connexe (le nombre de Betti pour la dimension 0 est

1). Dans ce cas , on démontre les faits suivants :

a) chaque cellule de K est incidente à une cellule de dimension maxima n ; une cellule de dimension n-1 de K est incidente à deux cellules de dimension n .

b) le complexe frontière de chaque cellule de K est une variété combinatoire .

c) le dual $\overset{*}{K}$ de K est aussi normal . La duale d'une E^r de K est une $\overset{*}{E}{}^{n-r}$.

d) La notion de variété combinatoire est invariante, c'est-à-dire que si deux complexes réalisés géométriquement sont homéomorphes, et si l'un définit une variété combinatoire , il en est de même de l'autre. Si, dans un complexe simplicial géométrique, chaque point possède un voisinage homéomorphe à l'intérieur d'une sphère à n dimensions, ce complexe définit une variété. Mais on ne sait pas si la réciproque est vraie .

Une variété de dimension n est dite orientale si son nombre de Betti pour la dimension n est 1 .

On montre que si un complexe normal K dans lequel la fonction frontière est donnée par les formules

$$\mathcal{F}\,(E_i^{\,r}) = \sum_j \eta_{ij}^{\,r}\; E_j^{\,r-1}$$

définit une variété orientale, la fonction frontière dans K est donnée par les formules

$$\mathcal{F}\,(\overset{*}{E}{}_i^{\,n-r}) = \sum_k \eta_{ki}^{\,r+1}\; \overset{*}{E}{}_k^{\,n-r-1}$$

Nous supposerons désormais que K est une variété orientale.

Prenons un groupe abélien additif $\mathfrak{A}$ et formons le groupe $\overset{*}{\mathcal{L}}{}^{n-r}$ des chaines de dimension n-r de K construites avec $\mathfrak{A}$. A chacune de ces chaines $\sum \alpha_i E_i^{n-r}$ faisons correspondre la différentielle f_r d'ordre r de K définie par les formules

$$f_r(E_i^{\ r}) = \alpha_i$$

Nous obtenons une isomorphie du groupe $\overset{*}{\mathcal{L}}{}^{n-r}$ avec le groupe $\mathcal{G}^r$ introduit plus haut. Dans cette isomorphie, on voit tout de suite que le groupe $\mathcal{Z}^{n-r}$ des cycles correspond à $\mathcal{E}^r$, et que le groupe $\mathcal{L}_{\mathcal{Z}}^{n-r}$ des cycles ~ 0 correspond à $\mathcal{J}^r$. Donc : *le groupe d'homologie de K pour la dimension n-r, construit avec $\mathfrak{A}$, est isomorphe à $\mathcal{E}^r / \mathcal{J}^r$.*
Or, si $\mathcal{L}$ est le groupe des caractères de $\mathfrak{A}$, ce dernier groupe est en dualité avec le groupe d'homologie de K, construit avec $\mathcal{L}$. En se rappelant que les groupes d'homologie de K et de K sont les mêmes, puisque ces complexes ont une même subdivision régulière, on obtient le *théorème de dualité de Poincaré-Pontjargin* :

Le groupe d'homologie pour la dimension n-r d'une variété, construit avec un groupe $\mathfrak{A}$, est en dualité avec le groupe d'homologie pour la dimension r de cette variété, construit avec le groupe des caractères de $\mathfrak{A}$.

D'autre part, on constate facilement que le groupe d'homologie pour la dimension r d'un complexe, construit avec le groupe $\mathcal{R}$ des nombres réels (mod.1) est produit direct de B_r groupes isomorphes à $\mathcal{R}$, B_r étant le nombre de Betti pour la dimension r, et du groupe de torsion pour la dimension $r-1$. Donc :

Les nombres de Betti d'une variété de dimension n pour les dimensions r et $n-r$ sont égaux. Les coefficients de torsion pour les dimensions r et $n-r-1$ sont égaux.

Soit maintenant L un sous-complexe de K. Les duales des cellules de L forment un sous-ensemble $\overset{*}{L}$ du dual $\overset{*}{K}$ de K. Les cellules de $\overset{*}{K}$ qui ne sont pas dans L forment un sous-complexe de $\overset{*}{K}$; les groupes d'homologie de ce sous-complexe seront appelés groupes d'homologie de K-L (si K est réalisé géométriquement, on montre que toute chaine singulière sur K qui ne rencontre pas L peut être déformée, sans jamais rencontrer L, en une chaine de la subdivision régulière de $\overset{*}{K} - \overset{*}{L}$, ce qui justifie la définition).

Ceci posé, en raisonnant exactement comme dans la démonstration du théorème de Poincaré, on démontre le théorème de Lefschetz :

Le groupe d'homologie de K-L pour la dimension r, construit avec $\mathcal{A}$, est en dualité avec le groupe d'homologie pour la dimension $n-r$ de K (mod.1) construit avec $\mathcal{L}$.

On remarquera que l'isomorphie entre $\overset{*}{\mathcal{L}}^{n-r}$ et $\mathcal{G}^r$ définie plus haut, donne une relation de dualité entre $\overset{*}{\mathcal{L}}^{n-r}$ et $\mathcal{G}^r$, le groupe des chaines de dimension r de K construites avec $\mathcal{L}$, $C^{n-r} = \sum \alpha_i E_i^{n-r}$ et $C^r = \sum \beta_i E_i^r$ étant des éléments de $\mathcal{L}^{n-r}$ et de $\mathcal{L}^r$, la dualité est donnée par la fonction

$$I(C^{n-r}, C^r) = \sum_i \varphi(\alpha_i, \beta_i)$$

qu'on appelle indice de Kronecker (mod.1) de ces chaines .

Désignons maintenant par $\mathcal{Z}_L^{r-1}$ le groupe des cycles de L qui sont ~ 0 dans K , par $\mathcal{L}\mathcal{Z}_L^{r-1}$ le groupe de ceux qui sont ~ 0 dans L , par $\mathcal{Z}^r$ (mod.L) le groupe des cycles (mod.L) de dimension r de K, par $\mathcal{G}\mathcal{Z}^r$ (mod.L) le groupe de ceux qui sont homologues (mod.L) à des cycles de K. Chaque élément Z^{r-1} de $\mathcal{Z}^{r-1}$ est frontière d'un élément Z^r de $\mathcal{Z}^r$ (mod.L) qui, quand Z^{r-1} est déterminé à un élément près de $\mathcal{L}\mathcal{Z}_L^{r-1}$, est déterminé à un élément près de $\mathcal{L}\mathcal{Z}^r$ (mod.L) .

Donc : <u>les groupes</u> $\mathcal{Z}_L^{r-1}/\mathcal{L}\mathcal{Z}_L^{r-1}$ et $\mathcal{Z}^r(\text{mod.}L)/\mathcal{L}\mathcal{Z}^r$ (mod.L), <u>construits avec le groupe des coefficients</u> $\mathcal{L}$ <u>sont isomorphes</u> .

D'autre part, dans la dualité entre $\mathcal{L}^r$ et $\overset{*}{\mathcal{L}}^{n-r}$ au groupe $\mathcal{Z}^r$ (mod.L) correspond le groupe des cycles de K-L, construits avec le groupe $\mathcal{M}$ et ~ 0 dans K-L ;

soit $\overset{*}{\mathcal{H}}{}^{n-r}_{K-L}$ ce groupe ; au groupe $\mathcal{H}^{r}$ (mod.L) correspond le groupe des cycles de dimension n-r de K-L qui sont ~ 0 dans K ; soit $\overset{*}{\mathcal{Z}}{}^{n-r}_{K-L}$ ce groupe . Il résulte de ce que nous venons de dire le théorème d'Alexander-Pontjargin :

Les groupes $\mathcal{Z}^{r-1}_{L} / \mathcal{H}^{r-1}_{L}$ et $\overset{*}{\mathcal{Z}}{}^{n-r}_{K-L} / \overset{*}{\mathcal{H}}{}^{n-r}_{K-L}$ sont en dualité l'un avec l'autre .

En supposant que K soit l'espace à n dimensions , complété par un point à l'infini, ou encore une sphère à n dimensions, on déduit de là , en particulier, les propositions suivantes :

Le nombre de Betti pour la dimension r-1 de L est égal au nombre de Betti pour la dimension n-r de K-L , augmenté de 1 si r = 1 , diminué de 1 . si r = n .

Il en résulte, en particulier , que si un sous-complexe de K est homéomorphe à une sphère de dimension n-1 , il partage K en deux domaines : c'est le théorème de Jordan, pour les sous-complexes .

BIBLIOGRAPHIE

Pour la théorie de la dualité entre groupes abéliens, cf. :

PONTRJAGIN , theory of topological commutative groups, Ann.of Math. , 1934, et divers articles de généralisation parus dans les Annals of Math. et Amer.Journ.of Math. en 1934/35 (van Kampen, Alexander)

A.WEIL Méthodes intégrales en théorie des groupes A paraitre prochainement

Pour la théorie des variétés :

LEFSCHETZ Topology (Cambr.Coll.)

TUCKER An abstract approach to manifolds , Ann.of Math.34

PONTRJAGIN Die Algebraische Struktur der Topol.Dualitätssatze, Math.Ann.105, 1931

ALEXANDER On the chains of a complex and their duals Proc.of the Nat.Acad.of Sciences , 1935 .