SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES

ANDRÉ WEIL

Définition de l'espace de Hilbert

Séminaire de Mathématiques (Julia), tome 2 (1934-1935), exp. n° 2, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SMJ_1934-1935__2__A2_0>

© École normale supérieure, Paris, 1934-1935, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de mathématiques implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

INSTITUT HENRI POINCARE

(Cet exemplaire ne peut quitter la salle de lecture)

Exemplaire n° 4

INSTITUT H. POINCARE
1, Rue Pierre-Curie
PARIS-5e

SEMINAIRE DE MATHEMATIQUES

Deuxième année 1934-35

ESPACE DE HILBERT

B.- Définition de l'espace de Hilbert

Exposé fait par M. André WEIL, le 26 Novembre 1934

I.- Historique.- L'espace hilbertien peut être considéré ,d'une part, comme espace à une infinité dénombrable de coordonnées, $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ la distance étant définie par la forme quadratique $\sum x_i^2$, et d'autre part comme espace des fonctions de carré sommable. C'est sous la première forme qu'il fut introduit pour la première fois par Hilbert en 1906 (Grundzüge, 4 Mitteilung), en vue de son application a la théorie des équations intégrales . Hilbert ne se servait pas, il est vrai, du langage géométrique; la théorie géométrique des espaces abstraits fut fondée par Fréchet, dans sa thèse, en 1906, mais les espaces particuliers qu'il donnait en exemple de sa théorie différaient essentiellement de l'espace hilbertien. Dans les années suivantes, les élèves de Hilbert (Hellinger, Toeplitz, Schmidt) développèrent sa théorie, et Schmidt en particulier, donna de l'espace hilbertien, considéré comme espace à une infinité dénombrable de coordonnées, une théorie essentiellement équivalente à la théorie moderne (Rendiconti di Palermo, t.25, p.53 -1908). D'autre part, dans une série de notes des C.R. (t.144-1907), Riesz et Fischer, par l'emploi de l'intégrale de Lebesgue, et employant (pour la première fois, semble-t-il, dans cette théorie) le langage géométrique de Fréchet, établirent l'identité abstraite de l'espace hilbertien avec l'espace des fonctions de carré sommable sur un intervalle. Un premier essai d'axiomatique; ainsi qu'une géométrie de l'espace hilbertien qui cherchait surtout à développer l'analogie avec la géométrie élémentaire, fut donné par Fréchet en 1908 (Nouvelles

Annales p.97 et 289).

Depuis lors, le développement de la science n'a fait que justifier et mettre en valeur la création de Hilbert, en montrant que parmi tous les espaces fonctionnels possibles, l'espace hilbertien occupe une place privilégiée ou pour mieux dire unique, et qu'il constitue (jusque dans les questions auxquelles on aurait pu le croire autrefois mal adapté) dans tout ce qui touche , de près ou de loin, aux équations intégrales, l'outil essentiel .

2.- Espaces hermitiens.- Pour des raisons de commodité, on définit aujourd'hui l'espace de Hilbert comme généralisation, non des espaces euclidiens, mais des espaces hermitiens à un nombre fini de dimensions. On entend par là un espace vectoriel $(x_1, x_2 \ldots x_n)$, les x_i étant n coordonnées complexes, dont la structure est définie par la forme d'Hermite :

$$(x,x) = x_1\overline{x}_1 + x_2\overline{x}_2 + \ldots + x_n\overline{x}_n$$

ou encore par la forme bilinéaire :

$$(x,y) = x_1\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 + \ldots + x_n\overline{y}_n$$

Deux vecteurs x,y sont dits orthogonaux si $(x,y) = 0$. La forme $(x,x) = x^2$ définit la longueur $|x|$ du vecteur x; $|x-y|$ est la distance des points x,y . On a l'inégalité de Schwarz :

$$|(x,y)| \leq \sqrt{(x,x).(y,y)}$$

On dit que des vecteurs $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ forment un système orthogonal normé si $(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij}$ ($\delta_{ij} = 0$ ou 1 suivant que $i \neq j$ ou $i=j$). Un tel système définit une transformation orthogonale de coordonnées ; tout vecteur x peut être écrit sous la forme

$$x = \sum_{i=1}^{n} (x,\varphi_i).\varphi_i$$

et l'on a :

$$(x,x) = \sum_i \left|(x,\varphi_i)\right|^2 \quad ; \quad (x,y) = \sum_i (x,\varphi_i).(\overline{y,\varphi_i}) .$$

Plus généralement, étant donnée une variété linéaire V à r dimensions (ensemble des combinaisons linéaires, à coefficients complexes, de r vecteurs indépendants) la forme (x,x) y définit une géométrie hermitienne; la variété V' des vecteurs orthogonaux à V (c'est-à-dire à tous les vecteurs de V) est à n-r dimensions, et tout vecteur x peut s'écrire, d'une manière unique, comme somme d'un vecteur de V et d'un vecteur de V' (ses <u>projections</u> sur V et V').

3.- <u>Définition axiomatique de l'espace hilbertien</u>

H sera un espace hilbertien s'il satisfait aux axiomes suivants (v.Neumann, Allgemeine Eigenwerttheorie....) :

A) H est un <u>espace vectoriel</u>, ensemble d'éléments x,y.... où est définie l'<u>addition</u> x+y et la <u>multiplication</u> α.x par un nombre complexe α , avec les propriétés habituelles d'associativité, commutativité, distributivité.

Plus brièvement, H est un module par rapport au corps des nombres complexes .

B) L'espace H est <u>hermitien</u>, c'est-à-dire que l'on y a défini une fonction (x,y) des couples de vecteurs, qui :

1° soit linéaire en x : $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 , y) = \alpha_1 (x_1 , y) + \alpha_2 (x_2 , y)$

2° possède la symétrie hermitienne : $(x,y) = (\overline{y,x})$

3° engendre une forme hermitienne (x,x) positive définie :
$(x,x) > 0$, sauf si $x = 0$.

(Il résulte de I° et 2° que

$(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \bar{\alpha}_1 (x,y_1) + \bar{\alpha}_2 (x,y_2)$

D'autre part, il résulte de A et B que l'ensemble des combinaisons linéaires de n vecteurs indépendants dans H constitue une variété V_n qui est un espace hermitien à n dimensions).

La forme $(x,x) = |x|^2$ définit une <u>métrique</u> dans l'espace H, $|x-y|$ étant défini comme la distance de x et y.

C) H est <u>complet</u> au sens de la métrique, c'est-à-dire que toute suite de points convergente au sens du critère de Cauchy y possède un point limite : $\lim_{m,n \to \infty} |x_m - x_n|^2 = 0$ entraine l'existence de x tel que $\lim_{n \to \infty} |x_n - x|^2 = 0$.

D) H est à une infinité <u>dénombrable</u> de dimensions, c'est-à-dire que d'une part, il contient un nombre aussi grand qu'on veut de vecteurs indépendants, et que d'autre part, il contient une suite dénombrable partout dense (il est <u>séparable</u>).

4.- <u>Variétés linéaires</u> .- Une variété linéaire fermée ~~X~~ dans H sera un ensemble V qui :

I° en même temps que les vecteurs $x_1, x_2 \ldots\ldots, x_n$ contienne toute combinaison linéaire de ces vecteurs;

2° en même temps qu'une suite convergente, contienne la limite de cette suite .

Si un espace H' satisfait aux axiomes A,B,C toute variété linéaire fermée y satisfait aussi . Dans H, toute variété linéaire fermée est séparable: car H peut être recouvert par une suite de voisinages arbitrairement petits extraits d'un ensemble dénombrable de voisinages, et il en est donc de même de tout sous-ensemble ; une telle variété est donc un espace hilbertien , ou bien un espace hermitien, à un nombre fini de dimensions .

Soit V une telle variété , f_1 ,f_2 ,.....,f_n .... une suite partout dense sur V : supprimons au besoin dans cette suite les vecteurs qui seraient linéairement dependants des precédents, et soit alors V_n l'ensemble des combinaisons linéaires de f_1 ,f_2 , ..., f_n; les V_n forment , dans V, une suite croissante, et tout point de V est limite de points des V_n. Montrons que l'on peut déterminer une suite orthogonale normée $\varphi_1, \varphi_2 \ldots$ telle que $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$, soit dant V_n . Pour n=1 on prend $\varphi_1 = \dfrac{f_1}{\sqrt{(f_1, f_1)}}$. Admettons que l'on ait déjà formé φ_1 $\varphi_2, \ldots \varphi_n$, ; ils satisferont à $(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{i,j}$, seront donc linéairement indépendants , et V_n est l'ensemble de leurs combinaisons linéaires . Soit x un vecteur quelconque; cherchons à écrire x sous la forme $x = \xi_n + \eta_n$, ξ_n étant dans V_n et η_n orthogonal à V_n . L'on devra avoir $\xi_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i$, d'où $(x, \varphi_i) = c_i$. Réciproquement, si l'on pose:

$$(1) \quad \xi_n = \sum_{i=1}^{n} (x, \varphi_i) . \varphi_i \qquad \eta_n = x - \xi_n$$

on aura $(\eta_n, \varphi_i) = 0$: ξ_n et η_n satisfont aux conditions voulues .

En particulier, soit $f_{n+1} = \psi + \vartheta$. ψ étant dans V_n et ϑ

orthogonal à V_n : $\vartheta \neq 0$, sinon f_{n+1} serait dépendant de f_1 f_2 .....,f_n ; on posera $\varphi_{n+1} = \frac{\vartheta}{\sqrt{(\vartheta,\vartheta)}}$, qui satisfait aux conditions voulues .

Ce qui précède permet d'appliquer à toute variété V_n à un nombre fini de dimensions les résultats du paragraphe 2 . En particulier, deux vecteurs x et y seront dans une variété V_n $(n \geq 2)$, d'où l'inégalité de Schwarz :

$$|(x,y)| \leq \sqrt{(x,x).(y,y)}$$

Il en résulte que (x,y), pour y constant, est une fonction de x continue à l'origine, donc, en tout point, en vertu de la linéarité.

Celà posé, à tout x correspondent, par (1); des suites ξ_n, η_n et l'on a :

$$(2) \qquad (x,x) = \sum_{i=1}^{n} |(x,\varphi_i)|^2 + (\eta_n,\eta_n)$$

D'autre part $\xi_n - \xi_m = \sum_{m+1}^{n} (x,\varphi_i).\varphi_i$, d'où

$$|\xi_n - \xi_m|^2 = \sum_{m+1}^{n} |(x,\varphi_i)|^2 \qquad (m < n)$$

Il résulte de (2) que la série $\sum_{1}^{\infty} |(x,\varphi_i)|^2$ est convergente; la suite ξ_n est donc convergente, et d'après C, possède une limite ξ ; les η_n ont donc une limite $\eta = x - \xi$.

ξ est dans V comme limite de points des V_n ; d'autre part, l'on a, pour i fixe et $n > i$, $(\eta_n,\varphi_i) = 0$, donc en vertu de la continuité, $(\eta,\varphi_i) = 0$: η est orthogonal à tous les φ_i, donc à tous les V_n , donc à V .

Soit V' la variété des vecteurs orthogonaux à V: d'après ce qui précède, V' ne se réduit à 0 que si V se confond avec H . Tout vecteur x se trouve ainsi décomposé en un vecteur ξ de V (sa projection sur V) et un vecteur η de V'. V et V' n'ayant évidemment que 0 en commun, cette décomposition est unique .

F.Riesz a donné de ce théorème (Acta Szeged t.7, 1934) l'élégante démonstration suivante , qui ne fait pas usage de l'axiome D ni des suites orthogonales . Soit un vecteur x hors de V, soit d la borne inférieure de ses distances aux points de V : V étant fermée, d > 0 . Soit ξ_1, ξ_2 ...... une"suite minimisante"dans V, telle que la distance $|\xi_n - x|$ tende vers d. Cette suite est convergente au sens du critère de Cauchy. En effet, pour m et n assez grands, on aura

$$|\xi_m - x|^2 < d^2 + \varepsilon \, , \, |\xi_n - x|^2 < d^2 + \varepsilon$$

d'autre part : $\left|\dfrac{\xi_m + \xi_n}{2} - x\right|^2 \geqslant d$

posons : $\alpha = \dfrac{\xi_m + \xi_n}{2} - x \qquad \beta = \dfrac{\xi_m - \xi_n}{2}$

on aura donc $(\alpha, \alpha) \geq d^2$ et :

$$(\alpha \pm \beta, \alpha \pm \beta) = (\alpha, \alpha) + (\beta, \beta) \pm \left[(\alpha, \beta) + (\beta, \alpha) \right] < d^2 + \varepsilon$$

le crochet est réel; en choisissant le signe convenablement il vient $(\beta, \beta) < \varepsilon$, ce qui démontre la convergence des ξ_n. Soit ξ leur limite, qui est dans V, et soit $x = \xi + \eta$ l'on a $(\eta, \eta) = d^2$; et, φ étant un vecteur quelconque de V, $|\eta - \varphi|^2 \geq d^2$; $|\eta - u\varphi|^2$, en tant que fonction de u, atteint donc son minimum pour u = 0, ce qui exige que $(\eta, \varphi)=0$ η est bien orthogonal à V.

En particulier, si un espace H' satisfaisant à A,B,C n'est pas séparable, il existe, pour toute suite de vecteurs dans H', au moins un vecteur orthogonal à la suite.

5.- Coordonnées dans H . Unicité de H.

Si, dans ce qui précède, V est H lui-même, V'=0 $x = \xi$. Tout x est donc la somme d'une série convergente;

$$x = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu \tag{3}$$

et l'on a : $c_\nu = (x, \varphi_\nu)$ et $(x,x) = \sum_\nu c_\nu \overline{c}_\nu$

Réciproquement, la série (3) est convergente en même temps que la série $\sum c_\nu \overline{c}_\nu$. Si $y = \sum d_\nu \varphi_\nu$, l'on a :

$$(x,y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \overline{d}_\nu \tag{4}$$

Si inversement, l'on définit un espace H_0 comme ensemble des suites $(c_1, c_2 \ldots.)$ telles que la série $\sum c_\nu \overline{c}_\nu$ soit convergente la fonction (x,y) étant définie par (4) , on vérifie sans difficulté les axiomes A,B,C ; D résulte du fait qu'il n'y a pas de vecteur $\neq 0$ orthogonal à tous les vecteurs $(0,\ldots.0,1,0,\ldots)$ H_0 est un espace hilbertien, et tout espace hilbertien est isomorphe à H . L'espace hilbertien est donc parfaitement défini par les axiomes A,B,C,D.

6.- Fonctions linéaires .- Nous avons vu que (x,y) est une fonction linéaire continue de x. Soit réciproquement, F(x) une telle fonction; si elle n'est pas partout nulle, F(x) = 0 définit une variété linéaire fermée V. Soit φ normé orthogonal à V; déterminons λ par l'équation $F(x-\lambda\varphi) = 0$; F étant linéaire, cette équation équivaut à $\lambda = \frac{F(x)}{F(\varphi)}$. D'autre part, $x-\lambda\varphi$ est dans V, donc orthogonal à φ : $(x-\lambda\varphi, \varphi) = 0$, d'où φ étant normé $\lambda = (x,\varphi)$. Posons $f = \overline{F(\varphi)}.\varphi$; l'on aura $F(x) = (x,f)$.

Il y a plus : toute suite partout convergente de fonctions linéaires continues a pour limite une fonction de même nature .

Soit en effet $F_n(x)$ une telle suite . Applons sphère tout ensemble de points $|x - a|^2 < r^2$. Montrons que la suite F_n est uniformément bornée dans une certaine sphère. Sinon, en effet, elle ne serait pas uniformément bornée dans la sphère $|x|^2 < 1$, et il y aurait dans cette sphère un point x_1 où une fonction F_{n_1} serait (en module) > 20 , donc une sphère S_1 entourant x_1 où $|F_{n_1}| > 10$; on trouverait de même dans S_1 une sphère S_2 où une certaine fonction F_{n_2} reste (en module) > 100, etc... H étant complet (ax.C) les sphères S_i auront un point commun, où la suite F_n ne pourrait être convergente, contrairement à l'hypothèse .

Il y a donc une sphère $|x-a| < r^2$ où les F_n sont uniformément bornées ; d'autre part, elles sont bornées au point a donc aussi (en vertu de la linéarité) dans la sphère $|x|^2 < r^2$ ou encore (pour la même raison) dans la sphère $|x|^2 \leq 1$.

Mais soit $F_n(x) = (x,f_n)$; et soit $(f_n,f_n) = \rho_n^2$ le point $x = \frac{f_n}{\rho_n}$ appartient à la sphère $|x|^2 \leq 1$, et F_n y prend la valeur ρ_n. Les ρ_n, ou encore les (f_n, f_n) sont donc uniformément bornés. Réciproquement, s'il en est ainsi, l'inégalité de Schwarz montre que les F_n sont bornés dans toute sphère.

Introduisons un système de coordonnées $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots)$ et soit $(\varphi_\nu, f_n) = \alpha_\nu^{(n)} = F_n(\varphi_\nu)$

et $\alpha_\nu = \lim\limits_{n\to\infty} F_n(\varphi_\nu) = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_\nu^{(n)}$

L'on aura : $(f_n, f_n) = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \left|\alpha_\nu^{(n)}\right|^2 < C$

donc aussi $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_\nu|^2 < C$; $f = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \bar{\alpha}_\nu$. φ_ν est un point de l'espace hilbertien. Mais alors on voit immédiatement que l'on a, quel que soit $x = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu$ dans le même espace :

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu^{(n)} . c_\nu \right)$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu c_\nu = (x, f)$$

Le théorème est démontré, et l'on voit de plus que la condition nécessaire et suffisante pour que (x, f_n) tende vers une limite quel que soit x est que (φ_ν, f_n) tende vers une limite quel que soit ν, et que les (f_n, f_n) soient uniformément bornés. On convient de dire alors que la suite f_n <u>converge faiblement</u> vers une limite f. (Par opposition, la convergence au sens de la métrique est appelée <u>convergence forte</u>).

Du critère précédent et de l'application du procédé diagonal, on déduit un théorème de Bolzano-Weierstrass : de toute suite de points contenue dans une sphère fixe, on peut extraire une suite faiblement convergente. Autrement dit, l'espace H est <u>localement compact</u> au sens de la convergence faible.

Ce qui précède montre que l'on peut considérer les fonctions linéaires dans H comme formant un espace isomorphe à H : l'espace hilbertien est <u>en dualité avec lui-même</u>. C'est avant tout à cette propriété qu'est due la situation privilégiée de l'espace de Hilbert parmi tous les espaces fonctionnels possibles.

6.- <u>L'espace des fonctions de carré sommable.</u>

Soit un espace fondamental $\mathcal{E}$, où l'on a défini une <u>mesure</u> μ, donc une intégrale $\int_{\mathcal{E}} f(P)\, d\mu$. L'on considère l'ensemble des fonctions f(P) à valeurs complexes, mesurables-μ sur l'ensemble $\mathcal{E}$, et telles que $\int_{\mathcal{E}} |f(P)|^2 d\mu$ ait une valeur finie. L'on pose :

$$(f,g) = \int_{\mathcal{E}} f(P).\overline{g(P)}.d\mu$$

Cette intégrale a une valeur finie, comme il résulte de l'inégalité de Schwarz, ou plus simplement de l'inégalité évidente: $|f\,\overline{g}| \leq \frac{1}{2}(|f|^2 + |g|^2)$. $(f,f) = |f|^2$ définissant la distance, l'on convient de considérer comme identiques deux fonctions f et g si leur distance est nulle, c'est-à-dire si elles ne diffèrent l'une de l'autre que sur un ensemble de mesure nulle.

Dans ces conditions, l'ensemble des f(P) satisfait aux axiomes A et B. C'est un espace à une infinité de dimensions si l'on peut trouver, dans $\mathcal{E}$, un nombre arbitrairement grand d'ensembles disjoints, de mesure finie > 0 : car les fonctions caractéristiques de ces ensembles (fonctions prenant la valeur 1 sur un ensemble et 0 partout ailleurs) sont bien des $f(P)$ linéairement indépendantes. L'espace est <u>séparable</u> si la mesure μ peut être obtenue par le prolongement d'une fonction d'ensemble additive définie sur une famille $\boxed{\mathcal{J}}$ <u>dénombrable</u>. Soient en effet $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ les fonctions caractéristiques des ensembles $\mathcal{J}$, et soit $f(P)$ orthogonale à tous les φ_ν ; l'intégrale indéfinie $\int_E f(P)\, d\mu$ est une fonction complètement additive de E, de base μ, qui s'annule sur tous les ensembles $\mathcal{J}$: en vertu du théorème de prolongement, elle s'annule identiquement donc $f(P) = 0$ sauf sur un ensemble de mesure nulle. L'axiome D est satisfait. Il en est ainsi, bien entendu, dans tous les cas usuels : sur la droite, par exemple, on prendra pour famille $\boxed{\mathcal{J}}$ l'ensemble des intervalles (demi-ouverts) à extrémités rationnelles.

Enfin, pour vérifier C, soit une suite f_n convergente au sens de la distance : nous devons montrer qu'elle tend vers une limite f. Il suffit de le démontrer pour une sous-suite quelconque : nous choisirons celle-ci (que nous appellerons encore $f_1, f_2, \ldots f_n \ldots$) de manière que l'on ait :

$$(5) \qquad \int \left| f_{n+1}(P) - f_n(P) \right|^2 d\mu < \frac{1}{2^{4n}}$$

Soit $g_0(P) = f_1(P)$, et $g_n(P) = f_{n+1}(P) - f_n(P)$. D'après (5) l'on aura $\left| g_n(P) \right| < 1$, sauf sur un ensemble de mesure $\leq 2^{-4n}$; $\left| g_{n+1}(P) \right| < \frac{1}{2}$ sauf sur un ensemble de mesure $\leq 2^{-4n-2\nu}$; etc...

Toutes ces inégalités seront donc vérifiées simultanément, et la série $\sum_0^\infty g_\nu(P)$ sera absolument convergente, sauf sur un ensemble de mesure $\leq 2^{-4n+1}$. n étant aussi grand qu'on veut, la série $\sum_0^\infty g_\nu(P)$, donc la suite $f_n(P)$, est convergente sauf sur un ensemble E de mesure nulle ; posons $f(P) = 0$ sur E, $= \lim_{n\to\infty} f_n(P)$ partout ailleurs. De plus, la série $\sum_0^\infty |g_\nu(P)|$ est convergente dans les mêmes conditions; soit F(P) sa somme (sauf sur E où $F(P) = 0$), et $F_n(P) = \sum_0^{n-1} |g_\nu(P)|$. On a :

$$\sqrt{\int |F_n(P)|^2 d\mu} \leq \sum_0^{n-1} \sqrt{\int |g_\nu(P)|^2 d\mu} < \sqrt{\int |f_1(P)|^2 d\mu} + 1$$

F(P) est donc de carré sommable, donc aussi f(P); de plus comme $|f_m(P) - f_n(P)| \leq F(P)$ sauf sur E, on peut passer à la limite en faisant n infini dans l'intégralité inégalité $\int |f(P) - f_n(P)|^2 d\mu < \varepsilon$ et le théorème est démontré.

BIBLIOGRAPHIE. v.Neumann, Allgemeine Eigenwerttheorie .... Math.Ann. I02.

Sur les espaces plus généraux et le rôle privilégié que joue parmi eux l'espace de Hilbert, on consultera : Toeplitz (Journal de Crelle, t.I7I).

Voir également le livre de Banach, Théorie des opérations linéaires, et Fréchet, Espaces abstraits.