

SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES

PAUL DUBREIL

Représentations des systèmes hypercomplexes

Séminaire de Mathématiques (Julia), tome 1 (1933-1934), exp. n° 5, p. 1-22

http://www.numdam.org/item?id=SMJ_1933-1934__1__A5_0

© École normale supérieure, Paris, 1933-1934, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de mathématiques implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Exemplaire N° 4
Institut Henri Poincaré
Ne peut quitter la salle de travail

Bibliographie :

Van der Waerden : II 101, 102, 120 & 123.
K. Hecker : Hyperkomplexe Darstellungstheorie,
Math. Zeit. 34, 30 (1930) ab. III, & IV.
Première année 1933-1934

A.- DEFINITIONS- REPRESENTATIONS

1.- Systèmes hypercomplexes
Théorie des Groupes et des Algèbres

appel de la définition : P est un corps commutatif,
on appelle système hypercomplexes sur P , un anneau σ qui est
un P -module fini, et dont tous les éléments sont permutables

B.- REPRESENTATION DES SYSTEMES HYPERCOMPLEXES

$$\sigma = P \cdot u_1 + \dots + P \cdot u_n$$

Exposé fait par M. Paul DUBREIL, le 29 Janvier 1934.

rang de système
Et on peut écrire :

$$\sigma = u_1 P + u_2 P + \dots + u_n P$$

Le système est défini par la connaissance :
de P ;
des éléments de base u_1, \dots, u_n ;
de la loi de multiplication des éléments de base :

$$u_i u_j = \sum_k c_{ij}^k u_k$$

loi qui doit être associative

Bibliographie :

Van der Waerden , T. II , pag. 104, 108, 120 à 123.

E. Neether : Hyperkomplexe Grössen und Darstellungstheorie,
Math. Zeit. Bd. 30 (1929) ch. III, & IV .

ExemplesA. - DEFINITIONS - REPRESENTATIONS .1. - Systèmes hypercomplexes .

Rappel de la définition : \mathcal{P} étant un corps commutatif, on appelle système hypercomplexe sur \mathcal{P} , un anneau σ qui est un \mathcal{P} -module fini, et dont tous les éléments sont permutables avec ceux de \mathcal{P} . Tout élément est donc de la forme :

$$\begin{aligned} a &= p_1 u_1 + \dots + p_r u_r \\ &= u_1 p_1 + \dots + u_r p_r \end{aligned}$$

les u_i étant linéairement indépendants. On appelle r le rang du système .

Et on peut écrire :

$$\sigma = u_1 \mathcal{P} + u_2 \mathcal{P} + \dots + u_r \mathcal{P}$$

Le système est défini par la connaissance :

de \mathcal{P} ;

des éléments de base $u_1 \dots u_r$;

de la loi de multiplication des éléments de base :

$$u_i u_k = \sum_{j=1}^r c_{ik}^j u_j$$

loi qui doit être associative .

Tout système hypercomplexe satisfait aux conditions maximale et minimale, ce qui permet d'appliquer aux systèmes hypercomplexes la théorie générale des anneaux (telle qu'elle a été exposée par M. de Possel, dans C.).

Exemples

- 1.- L'anneau de matrices complet sur \mathcal{P} à rang n^2 , si n est l'ordre des matrices .
- 2.- L'anneau de groupe d'un groupe fini G ; les éléments de G sont pris comme éléments de base du système, la loi de multiplication est celle du groupe . La considération des anneaux de groupes permet de faire rentrer la théorie des groupes finis dans celle des systèmes hypercomplexes .

2.- Transformations linéaires .

Soit K un anneau, avec élément unité ε , et soit M un K -module fini à droite de rang m . Désignons par (x_1, \dots, x_m) une base de M . Tout élément de M est de la forme :

$$y = \sum_{k=1}^m x_k \alpha_k \quad \alpha_k \in K$$

de sorte que, après avoir choisi une base de ce K -module de M , on peut considérer comme un module de formes linéaires .

Considérons une transformation linéaire C . Elle est définie, quand on connaît les formes Cx_1, \dots, Cx_m , en lesquelles elle transforme x_1, \dots, x_m :

$$C x_k = \sum_{j=1}^m x_j \gamma_{jk} \quad (1)$$

donc par la matrice d'ordre m .

$C = (\gamma_{jk})$. (Il est commode de représenter la

transformation et la matrice correspondante par la même lettre) .

La transformation linéaire considérée transforme y en :

$$C y = \sum_{k=1}^m (C x_k) \alpha_k = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^m x_i \gamma_{ik} \alpha_k = \quad (1')$$

On a visiblement :

$$C (y + z) = C y + C z \quad (2)$$

$$C \cdot y \cdot \alpha = C y \cdot \alpha$$

La somme de deux transformations linéaires définies par les matrices C et C' est par définition la transformation définie par la matrice $C + C'$, et on a :

$$(C + C') x_k = C x_k + C' x_k \quad (3)$$

$$(C + C') y = C y + C' y \quad (3')$$

Le produit de deux transformations linéaires définies par les matrices C, C' est la transformation définie par la matrice $C C'$ et on a :

$$(C C') x_k = C (C' x_k) \quad (4)$$

$$(C C') y = C (C' y) \quad (4')$$

Les relations (2) montrent qu'on peut regarder une matrice C comme un opérateur à gauche sur les éléments de M (qui est déjà K -module à droite) et si on considère toutes les transformations linéaires de M définies par les matrices C d'un anneau de matrices Ω , les relations (3) et (4) montrent que M est un Ω -module (à gauche).

3.- Représentation .- Cela étant, considérons d'abord un

anneau quelconque.

Définition : On appelle représentation de degré m de \mathcal{J} dans K , toute homomorphie (d'anneau)

de \mathcal{J} vers Ω (\mathcal{J} étant représenté par C)

c'est à dire $c + c' \rightarrow C + C'$

$cc' \rightarrow CC'$

faissant correspondre à \mathcal{J} un anneau de matrices Ω d'ordre m dont les éléments appartiennent à K . Si l'homomorphie est un isomorphisme, la représentation est dite fidèle.

4.- Module de représentation. - Etant donné une représentation de degré m , considérons un module M , K -module de rang m à droite, et les transformations linéaires sur ce module correspondant aux matrices C de l'anneau Ω : M est un Ω -module à gauche, mais en raison de l'homomorphisme entre \mathcal{J} et Ω nous pouvons aussi définir les éléments c de \mathcal{J} comme opérateurs à gauche sur les éléments de M , en posant :

$$c y = C y$$

et remplacer dans les relations (2), (3) et (4) les lettres C, C' par les lettres c, c' correspondantes : M est donc aussi un \mathcal{J} -module à gauche.

Définition. - Un tel module M , K -module à droite de rang fini n ,

$$M = x_1 K + \dots + x_n K$$

et \mathcal{J} -module à gauche, s'appelle module de représentation de \mathcal{J} par rapport à K . (notion introduite par Krull, Théo-

rie und *Anv.* der versallg. Abelsch. Gruppen, Sitzungsber. Heidelb. Akad. 1926).

D'après ce qui précède, la connaissance d'une représentation de degré m de \mathcal{J} dans K , permet de définir un module de représentation de \mathcal{J} dans K , module de rang m par rapport à K .

Inversement, si l'on se donne un module de représentation, et si on en précise la base, on en déduit une représentation.

Soit $M = x_1 K + \dots + x_n K$, un module de représentation de base (x_1, \dots, x_n) , M étant un \mathcal{J} -module à gauche, on a, pour c dans \mathcal{J} :

$$c x_k = \sum_i x_i \gamma_{ik} \quad \gamma_{ik} \in K$$

et les formules (2), (3), (4) avec des lettres c sont valables. Si donc, on fait correspondre à c de \mathcal{J} ^{l'élément} la matrice

$$C = (\gamma_{ik})$$

d'ordre n , il y a homomorphisme entre \mathcal{J} et l'anneau Ω des matrices C . On a donc bien une représentation de \mathcal{J} .

Remarque :

A une représentation correspond un module de représentation bien déterminé, tandis qu'à un module de représentation correspondent une infinité de représentations, dépendant du choix de la base du module.

Un changement de base de M est une transformation li-

néaire, définie par une matrice P :

$$(\xi_1, \dots, \xi_n) = (x_1, \dots, x_n) P$$

Ce changement de base remplace la représentation $c \rightarrow C$ par la représentation $c \rightarrow P^{-1} C P$ qui est dite

équivalente à la première. Il en est de même si on passe de M à un module isomorphe M' , les bases étant quelconques.

On appelle classe de représentations l'ensemble des représentations équivalentes à une représentation donnée.

A des modules de représentation isomorphes, correspond une classe de représentations et inversement.

B.- REDUCTION D'UNE REPRESENTATION

5.- Définition :

Une représentation d'un anneau \mathcal{J} est dite réductible si le module de représentation correspondant M admet un sous-module permis N (N , K -module à droite, et \mathcal{J} -module à gauche), irréductible dans le cas contraire (c'est-à-dire, si M est simple).

Dire que la représentation est réductible, revient à dire que les transformations linéaires correspondantes laissent invariant un sous-espace linéaire, différent de M et de zéro.

6.- Représentations réductibles. - Nous allons supposer

maintenant que K est un corps (ce qui permet notamment d'affirmer que tout K -module fini admet une base minima).

(Voir l'exposé de M. Chevalley, B. et Van der Waerden, Bd. II prg. 105)

Si M admet un sous-module (permis)

$$N = x_1 K + \dots + x_n K$$

on peut toujours prendre pour M une base comprenant x_1, \dots, x_n et $m-n=l$ autres éléments y_1, \dots, y_l

$$M = x_1 K + \dots + x_n K + y_1 K + \dots + y_l K$$

Comme N est $\sqrt{}$ -module, les x sont transformés en éléments de N par les transformations linéaires de la représentation :

$$\begin{aligned} x'_k &= \sum x_i \gamma_{ik} \\ y'_k &= \sum z_i \alpha_{ik} + \sum y_i \beta_{ik} \end{aligned} \quad (6)$$

Posons $R = (\gamma_{ik})$, $S = (\alpha_{ik})$, $T = (\beta_{ik})$

R et T sont deux matrices carrées d'ordres respectifs n et l
 S est une matrice rectangulaire.

Nous voyons que les matrices C de la représentation ont la forme :

$$C = \begin{pmatrix} R & S \\ 0 & T \end{pmatrix} \quad (7)$$

et la condition nécessaire et suffisante pour qu'un anneau de matrices dans K soit réductible, est que : au moyen d'une transformation convenable $C' = P^{-1} C P$ (correspondant au choix d'une base convenable pour M) toutes les matrices de l'anneau puissent être mises sous la forme (7) .

Les relations (6) peuvent encore s'écrire :

$$\begin{aligned} (x'_1 \dots x'_n) &= (x_1 \dots x_n) R \\ (y'_1 \dots y'_e) &= (y_1 \dots y_e) T \quad (\text{module } N) \end{aligned} \quad (6')$$

D'où il résulte que, non seulement N, mais le module-facteur M/N, peuvent être regardés comme modules de représentation, et que les représentations correspondantes sont fournies par les matrices R et T.

Cela étant, considérons une série de composition du module M :

$$M = M_\lambda, M_{\lambda-1}, \dots, M_0 = (0) \quad (M_i \text{ sous-modules permis})$$

Puis, prenons $N = M_{\lambda-1}$. De même, dans $M_{\lambda-1}$, considérons le sous-module $M_{\lambda-2}$ qui est maximum, etc En choisissant convenablement les bases (de manière que la base d'un module comprenne celle du suivant) on voit que les matrices de la représentation correspondant à M, prennent la forme :

$$C = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1\lambda} \\ 0 & R_{22} & \dots & R_{2\lambda} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & R_{\lambda\lambda} \end{pmatrix} \quad (8)$$

Les matrices R_{ii} de la diagonale correspondent aux facteurs de composition M_i / M_{i-1} . Ceux-ci étant simples, les représentations correspondantes sont irréductibles. On dit qu'on a opéré la réduction de la représentation correspondant

(Voir exposé A sur la théorie des groupes).

au module M . Il résulte du théorème de Jordan-Hölder sur les séries de composition que les parties irréductibles R_i sont déterminées à l'ordre et à l'équivalence près.

7.- Décomposition d'une représentation

Il y a un cas où les matrices C prennent une forme encore plus simple. Il peut se faire que dans (6) tous les α_{ik} soient nuls : alors le sous-module :

$$N_1 = y_1 K + \dots + y_\rho K$$

est lui-même sous-module permis, et $M = N \oplus N_1$ (somme directe). Les matrices S sont alors nulles et C prend la forme :

$$C = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} \quad (9)$$

On dit que la représentation $c \rightarrow C$ se décompose en $c \rightarrow R, c \rightarrow T$.

8.- Représentation complètement réductible.

Supposons le module de représentation M complètement réductible, c'est-à-dire somme directe de doubles-modules ~~modules~~ modules permis simples.

$$M = N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_\lambda$$

On en déduit la série de composition

$$M = M_\lambda, \quad M_{\lambda-1} = N_1 \oplus \dots \oplus N_{\lambda-1},$$

$$M_1 = N_1, \quad M_0 = (0)$$

(Voir exposé A sur la théorie des groupes).

et les matrices (8) prennent la forme :

$$C = \begin{pmatrix} R_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & R_{\lambda\lambda} \end{pmatrix} \quad (10)$$

où les R_{ii} définissent des représentations irréductibles ; plusieurs R_{ii} peuvent d'ailleurs être identiques . La représentation $c \rightarrow C$ est dite alors complètement réductible

9.- Cas d'un système hypercomplexe .

Preons maintenant comme anneau \mathcal{J} un système hypercomplexe sur \mathcal{P} , \mathcal{P} étant un corps commutatif :

$$\mathcal{J} = u_1 \mathcal{P} + u_2 \mathcal{P} + \dots + u_r \mathcal{P}$$

Alors on considère pour la représentation un anneau K (en général un corps) dont le centre contient \mathcal{P} et on exige que l'homomorphisme d'anneau

$$\mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}$$

soit aussi homomorphisme vis à vis des opérateurs ρ de \mathcal{P} en d'autres termes, que si :

$$c \rightarrow C$$

on ait aussi

$$c\rho \rightarrow C\rho \quad (11)$$

quel que soit $\rho \in \mathcal{P}$. Par conséquent, la représentation est entièrement définie dès qu'on connaît les matrices U_1, \dots, U_r représentant les éléments de base u_1, \dots, u_r du système hypercomplexe .

Pour le module de représentation M , dans lequel on a
(puisqu'il s'agit d'un module double :

$$c m . \rho = c . m \rho,$$

(11) entraîne :

$$c \rho . m = c m . \rho \quad (11')$$

10.- Cas particuliers

Le plus simple est : $K = \rho$

On passe de ce cas à celui de K commutatif quelconque
en considérant K comme une extension de ρ , c'est à dire en
introduisant le système σ_K . Si dans la représentation de σ
dans K , u_1, \dots, u_k sont représentées par des matrices U_1, \dots, U_k
on peut représenter un élément $\sum \mathcal{X}_i u_i$ ($\mathcal{X}_i \in K$) de σ_K par
la matrice $\sum \mathcal{X}_i U_i$, ce qui définit une représentation de
 σ_K : donc, inversement, toute représentation de σ dans
un corps commutatif K s'obtient à partir d'une représentation
de σ_K .

Une autre hypothèse restreignant le problème est celle
de l'existence d'une unité e dans σ . On peut alors suppo-
ser que cette unité est opérateur unité pour le module de
représentation M : $e m = m$. Il n'en est pas forcément
ainsi car on pourrait poser par exemple : $c m = 0$ quel que
soit c dans σ . Mais on montre que tout module de représen-
tation M est somme directe de deux modules de représentation

$$M = M_1 \oplus M_2 \quad (m = em + (m - em))$$

où M_1 admet l'unité e de σ comme opérateur unité et où M_2

est annulé par σ (c'est à dire $c m_0 = 0$ quels que soient $c \in \sigma$ et $m_0 \in M_0$).

11.- Représentation régulière.

Pour $K = \rho$, σ est lui-même module de représentation (σ -module à gauche, ρ -module à droite). La représentation correspondante s'appelle la représentation régulière. Les sous-modules (doubles) ne sont autres que les idéaux à gauche, (les modules de représentation, irréductibles, sont les idéaux à gauche simples), et la forme réduite de la représentation est donnée par une série de composition des idéaux à gauche. La représentation régulière est complètement réductible, si l'anneau σ l'est lui-même (à gauche).

C.- THEOREMES FONDAMENTAUX

(Van der Waerden Bd. II, p. 121).

12.- Rappel de résultats connus (Voir l'exposé I.C de M. de Possel, Grandeurs Idempotentes)

On a considéré différentes conditions générales auxquelles un anneau est susceptible de satisfaire et étudié la manière dont ces conditions dépendent les unes des autres. Ces conditions sont :

- 1- Condition maximale pour idéaux à gauche (T.K.S.)
- 2- Condition minimale pour idéaux à gauche (V.K.S.)
- 3- Absence de radical . (c'est-à-dire (o) seul idéal nil-

potent)

(Quand les conditions 2 et 3 sont vérifiées, on dit l'anneau semi-simple).

4- Existence d'une unité.

5- Réductibilité complète à gauche (anneau somme directe d'un nombre fini d'idéaux à gauche simples).

Alors, le théorème fondamental s'énonce :

$$2 + 3 \iff 4 + 5$$

Pour les systèmes hypercomplexes, il faut se rappeler que (en raison de l'existence d'une base) 1 et 2 sont toujours remplies . Donc le théorème fondamental devient :

$\left. \begin{array}{l} \text{sans radical} \\ \text{(donc semi-simple) } \end{array} \right\} \text{ entraîne } \left\{ \begin{array}{l} \text{existence d'une} \\ \text{unité} \\ \text{et réductibilité} \\ \text{complète .} \end{array} \right.$

et réciproquement .

Rappelons enfin, qu'à partir d'un anneau σ possédant un radical \mathfrak{r} on peut déduire un anneau ne possédant plus de radical : l'anneau des classes de restes σ / \mathfrak{r} .

Soit donc σ un système hypercomplexe, semi-simple :

$$\sigma = u_1 \rho + \dots + u_r \rho$$

Utilisons les deux propriétés caractéristiques :

existence de l'unité e, et

$$\sigma = l_1 + \dots + l_s \quad (I2)$$

Considérons une représentation dans ρ , le module de représentation M admettant l'unité e de σ comme opérateur

unité .
 13.- Théorème I . - M est complètement réductible et les modules simples dont M est la somme directe sont isomorphes aux idéaux à gauche simples de $\sigma : l_1 \dots l_s$.

Démonstration: a) On montre d'abord que M est un module fini par rapport à σ en utilisant l'existence de l'unité e de σ . En effet, M est par définition, module fini par rapport à ρ :

$$M = m_1 \rho + \dots + m_s \rho$$

or d'après (11') :

$$m_k = e m_k \cdot \rho = e \rho \cdot m_k = \omega m_k \text{ où } \omega \text{ élément de } \sigma$$

Donc, $m_k \rho \subset m_k$

et par suite $M = (\sigma m_1 \dots \sigma m_s)$

b) Tenons compte maintenant de (12) , il vient :

$$M = (\dots \lim_k \dots) \tag{13}$$

On vérifie sans peine qu'un σ -module \lim_k est :
 ou bien nul,

ou bien isomorphe à l_i et par conséquent simple

(En effet, si l'on fait correspondre à x de l_i , $x m_k$ dans \lim_k , cette correspondance est un homomorphisme . L'ensemble des éléments de l_i auxquels correspond 0 dans $l_i m_k$ est un idéal à gauche, donc (0) ou l_i puisque l_i est simple . Dans le premier cas, $\lim_k \cong l_i$, dans le deuxième cas, $\lim_k = 0$).

Chacun des modules $l_i m_k$ étant simple \mathfrak{a} , avec la somme de ceux qui le précèdent, seulement zéro en commun, ou y est contenu entièrement. Donc, si on supprime ceux qui sont contenus dans la somme des précédents, M est la somme directe de ceux qui restent. C.Q.F.D.

Remarque :

Le théorème précédent est valable pour un anneau \mathcal{V} semi-simple et un \mathcal{V} -module fini M .

14.-Application du théorème .

On peut obtenir les idéaux à gauche simples l_1, \dots, l_s dont \mathcal{V} est la somme directe en décomposant d'abord \mathcal{V} en idéaux bilatères :

$$\mathcal{V} = \mathfrak{a}_1 + \dots + \mathfrak{a}_s \quad (1)$$

puis chaque anneau simple \mathfrak{a}_μ en idéaux à gauche simples. Les l_i contenus dans un \mathfrak{a}_μ sont annulés par tout autre \mathfrak{a} (relations d'orthogonalité). Tous les idéaux à gauche simples d'un même \mathfrak{a} sont isomorphes (isomorphisme avec opérateurs les opérateurs étant les éléments de \mathcal{V} puisque tout idéal à gauche dans \mathfrak{a} est idéal à gauche dans \mathcal{V}); deux idéaux à gauche simples provenant de \mathfrak{a}_μ différents, ne sont pas isomorphes.

Cela étant, soit l_i un des idéaux à gauche simples provenant de \mathfrak{a}_μ . ^{tous les \mathfrak{a}} à l'exception de \mathfrak{a}_μ , sont représentés par zéro

\mathcal{A}/\mathcal{I} -module. \mathcal{A}/\mathcal{I} étant sans radical, possède une unité dans la représentation irréductible définie par l_i . De plus, l'anneau simple \mathcal{A}/\mathcal{I} ne possède qu'une représentation irréductible, (à l'équivalence près). Et cette représentation est fidèle, car \mathcal{A}/\mathcal{I} est idéal bilatère simple (l'ensemble des éléments de \mathcal{A}/\mathcal{I} représentés par la matrice 0 est un idéal bilatère, donc 0).

Nous construirons dans un instant, explicitement, cette représentation irréductible d'un système simple.

Étudions, auparavant, le cas d'un système avec radical.

15.- Théorème II

Si \mathcal{S} est un système hypercomplexe avec radical \mathcal{I} tout \mathcal{S} -module de représentation simple M (qui n'est pas annihilé par \mathcal{I}) est isomorphe à un idéal à gauche simple de l'anneau sans radical \mathcal{A}/\mathcal{I} .

Démonstration : (Voir Van der Waerden, Ed. II, p. 181)

$$\mathcal{I}M \subset M, \text{ donc } \mathcal{I}M = (0) \text{ ou } M$$

Si on avait $M = \mathcal{I}M$

$$\text{On en déduirait } M = \mathcal{I}M = \mathcal{I}^2M = \dots = (0)$$

$$0 = \alpha_1 \Lambda + \alpha_2 \Lambda + \dots \quad (\mathcal{I} \text{ nilpotent})$$

Impossible.

$$\text{Donc : } \mathcal{I}M = 0$$

et par suite, tous les éléments de \mathcal{S} appartenant à une même classe par rapport à \mathcal{I} donnent, multipliés par un élément de M , le même produit. On peut donc regarder M comme

\mathcal{V}/\mathcal{E} -module . \mathcal{V}/\mathcal{E} étant sans radical, possède une unité et est complètement réductible ; il suffit maintenant d'appliquer le théorème I .

On peut encore exprimer le théorème II de la manière suivante :

Toutes les représentations irréductibles de \mathcal{V} sont contenues dans la représentation régulière de \mathcal{V}/\mathcal{E} (puisque, précisément les modules de représentations irréductibles sont les idéaux à gauche simples) .

16.- Construction d'une représentation irréductible d'un système simple .

Les théories précédentes ont montré l'intérêt de ces représentations .

On sait que le système simple \mathcal{V} est isomorphe à un anneau complet de matrices dans un corps Λ :

$$\mathcal{V} = c_{11} \Lambda + c_{12} \Lambda + \dots + c_{nn} \Lambda$$

(ce qui est une représentation de \mathcal{V})

et qu'un idéal simple \mathcal{V}_i est donné par :

$$l_i = c_{1i} \Lambda + c_{2i} \Lambda + \dots + c_{ni} \Lambda$$

Nous prendrons :

$$l = l_1 = c_{11} \Lambda + c_{21} \Lambda + \dots + c_{n1} \Lambda$$

On considère la représentation de \mathcal{V} dans son corps fondamental \mathcal{P} , qui est contenu dans Λ : le degré de Λ par rapport à \mathcal{P} est fini, car le rang de \mathcal{V} est égal à n^2 x degré de Λ . Si ce degré est d et si :

On a ,

$$\Lambda = \lambda_1 \rho + \dots + \lambda_d \rho$$

$$\mathcal{J} = c_{11} \lambda_1 \rho + \dots + c_{1d} \lambda_d \rho + \dots + c_{n1} \lambda_1 \rho + \dots + c_{nd} \lambda_d \rho$$

Considérons d'abord le cas $\Lambda = \rho$: qui se produira notamment si ρ est algébriquement fermé. Alors les matrices de la représentation définie par ρ s'obtiennent immédiatement (voir pag. 2)

Soit $a = \sum_{ik=1}^n c_{ik} \alpha_{ik}$ un élément de \mathcal{J} .

On a

$$a c_k = \sum_{i=1}^n c_i \alpha_{ik} \text{ donc } a \rightarrow (\alpha_{ik})$$

Et par suite, la représentation irréductible cherchée est constituée par l'anneau complet de matrices auquel \mathcal{J} est isomorphe : c'est naturel puisqu'on sait qu'à l'équivalence près il n'y a qu'une représentation irréductible.

Supposons maintenant Λ surcorps de ρ :

$$\Lambda = \lambda_1 \rho + \dots + \lambda_d \rho$$

Λ a la forme d'un système hypercomplexe sur ρ . Cherchons d'abord sa représentation régulière. Soit :

$$\beta \lambda_j = \sum_{i=1}^d \lambda_i \beta_{ij} \quad \beta \rightarrow B = (\beta_{ij})$$

Cela étant, cherchons la représentation dans ρ définie par ℓ . On a :

$$\ell = c_{11} \Lambda + c_{21} \Lambda + \dots + c_{n1} \Lambda$$

$$= (c_{11} \lambda_1 \rho + \dots + c_{1d} \lambda_d \rho) + \dots + (c_{n1} \lambda_1 \rho + \dots + c_{nd} \lambda_d \rho)$$

Cherchons d'abord la représentation d'un élément de \mathcal{J} de la

forme βc_{ik} . Pour cela, on le multiplie par les éléments de base

$$c_{11} \lambda_1, \dots, c_{1d} \lambda_d, \dots, c_{n1} \lambda_1, \dots, c_{nd} \lambda_d$$

de \mathcal{L}_1 , qui se répartissent en groupes de α éléments. On trouve zéro, sauf pour le même groupe. Pour ce groupe, on a :

$$\beta c_{ik} \cdot c_{k,j} \lambda_j = \beta c_{ij} \lambda_j = c_{ij} \sum_{i'=1}^d \lambda_{i'} \beta_{i'j} = \sum_{i'=1}^{\alpha} c_{i'i} \lambda_{i'} \beta_{i'j}$$

où seuls les éléments de base du même groupe ont des coefficients différents de zéro, ces coefficients étant d'ailleurs les $\beta_{i'j}$. On peut alors, en groupant les lignes et les colonnes, par α , écrire la matrice correspondant à βc_{ik} sous la forme :

$$\beta c_{ik} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \underline{1} & \underline{k} & \underline{n} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & B & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ n) \end{array} \end{array}$$

Soit maintenant $a = \sum_{ik=1}^n \alpha_{ik} c_{ik}$ un élément de \mathcal{J} . Désignons par A_{ik} la matrice d'ordre α représentant dans \mathcal{P} l'élément α_{ik} de Λ . On obtient immédiatement la représentation :

$$a \rightarrow \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

17.- Application . Théorème de Burnside :

Un système S de matrices d'ordre n , absolument irréductible S , et contenant, en même temps que deux matrices, leur

produit ^{et de plus absolument irréductible} (c'est à dire, restent irréductible dans toute extension algébrique du corps commutatif K auquel sont supposés appartenir les coefficients des matrices) contient exactement n^2 matrices linéairement indépendantes .

Démonstration (Voir Van der Waerden , Bd .II , p.183)

On passe à l'extension algébriquement fermée Ω de K : le système S y reste irréductible . Aux matrices A_i de S on ajoute les combinaisons linéaires $\sum A_i \omega_i$ ($\omega_i \in \Omega$) , ce qui donne un système S' , extension de S . Ce système a un rang fini par rapport à Ω puisqu'il n'y a pas plus de n^2 matrices linéairement indépendantes dans S' : c'est donc un système hypercomplexe, qui est une représentation irréductible de lui-même . Mais , d'après les théorèmes fondamentaux une telle représentation est représentation d'un système sans radical et même d'un système simple . Donc, puisqu'on est dans un corps algébriquement fermé, elle contient n^2 matrices linéairement indépendantes .

18.- Représentation du centre

(Van der Waerden, Bd. II, p.122)

Les résultats sont les suivants :

Les matrices constituant la représentation du centre \mathfrak{Z} de \mathcal{J} sont permutables avec toutes les matrices représentant des éléments quelconques de \mathcal{J} . Si le corps fondamental \mathcal{P} est algébriquement fermé, et la représentation irré-

ductible, le centre est représenté par des matrices permutable avec toutes les matrices de l'anneau complet, donc par les matrices de la forme λE_n (E_n matrice unité d'ordre n)
De même, dans un corps quelconque, pour des représentations absolument irréductibles.

On en déduit, immédiatement, ^{que} si \mathcal{V} est commutatif, toute représentation absolument irréductible est du premier degré.

On sait que si \mathcal{V} , non commutatif, est semi-simple, donc somme de systèmes simples

$$\mathcal{V} = \alpha_1 + \dots + \alpha_s$$

son centre \mathcal{Z} est somme directe d'autant de corps :

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_1 + \dots + \mathcal{Z}_s$$

\mathcal{Z}_i étant le centre de α_i (de Possel) ^{exposé C}. Le nombre de représentations irréductibles de \mathcal{V} non équivalentes est égal à s
De même pour \mathcal{Z} . Donc, un système hypercomplexe et son centre possèdent le même nombre de représentations irréductibles distinctes.

191- Traces. (Van der Waerden, Bd. II, par. 123)

Par définition, la trace de a dans la représentation D est égale à la trace de la matrice A représentant a .

Si $A = (\alpha_{ik})$, $S_{p_D}(a) = \sum \alpha_{ii}$

Dans des représentations équivalentes, les traces d'un

Exemple n° 6

Institut Henri Poincaré

même élément sont identiques.

Les traces sont des fonctions linéaires :

$$s(a + b) = s(a) + s(b) \quad s(a \lambda) = s(a) \cdot \lambda$$

La trace dans une représentation réductible est somme des traces dans les représentations irréductibles correspondantes.

20. - Caractères.

On appelle caractères, les traces dans les représentations absolument irréductibles (ou irréductibles dans un corps algébriquement fermé Ω). Dans la ν ème représentation irréductible \mathcal{D}_ν , on désigne le caractère par $\chi_\nu(a)$

Théorème : - Une représentation complètement réductible d'un système hypercomplexe \mathcal{V} dans un corps Ω de caractéristique nulle, est déterminée, à une équivalence près, par les traces des matrices correspondantes.
