

Astérisque

XAVIER BUFF

Ensembles de Julia de mesure positive

Astérisque, tome 245 (1997), Séminaire Bourbaki, exp. n° 820, p. 7-39

http://www.numdam.org/item?id=SB_1996-1997__39__7_0

© Société mathématique de France, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ENSEMBLES DE JULIA DE MESURE POSITIVE
[d'après van Strien et Nowicki]

par **Xavier BUFF**

CORRIGENDUM

Nous avons malheureusement découvert après l'exposé, que le dernier lemme 11, est faux. La seule majoration qu'on puisse y obtenir est en C/n . Ce lemme est crucial, et nous n'avons pas réussi à le contourner. Le problème ne semble pas insurmontable, mais le théorème principal 1 n'est donc toujours pas démontré à ce jour.

Cependant tous les autres résultats restent valables, et consistent une avancée considérable dans l'étude des ensembles de Julia, et en particulier dans la recherche d'ensembles de Julia de mesure strictement positive.

1. INTRODUCTION

Comme l'a remarqué Sullivan, il existe une forte analogie entre les ensembles limites de groupes kleinien de type fini, et les ensembles de Julia des applications rationnelles de $\overline{\mathbb{C}}$. Une conjecture attribuée à Ahlfors exprime que les ensembles limites de groupes kleinien de type fini sont toute la sphère $\overline{\mathbb{C}}$ ou ont une aire nulle. Cette conjecture a été démontrée dans de nombreux cas (cf [T], [C], ou [Bo]). Par analogie, on conjecturait que les ensembles de Julia des polynômes avaient une aire nulle. Ceci a été démontré en particulier dans le cas hyperbolique et le cas "géométriquement fini". Pour les polynômes cubiques ayant un point critique qui s'échappe et non renormalisables (tableau non périodique dans [BH]), McMullen a fait une démonstration qui est une variante du résultat de Branner et Hubbard: l'ensemble de Julia est un Cantor. Pour les polynômes quadratiques finiment renormalisables, Lyubich a montré que l'ensemble de Julia était de mesure nulle [L3], en adaptant la démonstration de connexité locale de Yoccoz. Les techniques utilisées pour ces deux derniers résultats ne s'étendent pas en degré supérieur: la méthode repose sur la divergence d'une série définie de façon combinatoire et il se trouve qu'en degré supérieur, ladite série converge.

En fait, la conjecture est fautive: van Strien et Nowicki ont exhibé des polynômes ayant

un ensemble de Julia de mesure de Lebesgue strictement positive. Ce sont des polynômes définis de manière combinatoire et appelés “polynômes de Fibonacci”.

THÉORÈME 1.—*Il existe un entier ℓ_0 tel que pour tout entier pair $\ell \geq \ell_0$,*

- *il existe un unique polynôme de Fibonacci de la forme $P(z) = z^\ell + c$, avec $c \in \mathbb{R}$, et*
- *la mesure de Lebesgue de son ensemble de Julia $J(P)$, est strictement positive.*

L'intérêt des polynômes de Fibonacci a été souligné par Branner et Hubbard [BH] pour les polynômes complexes cubiques, par Yoccoz [Y] pour les polynômes quadratiques, et par Hofbauer et Keller [HK] pour les fonctions unimodales. Dans [LM], Lyubich et Milnor étudient la restriction à l'axe réel dans le cas d'un polynôme de Fibonacci quadratique, et Lyubich élargit cette étude au plan complexe dans [L1] et [L2]. L'existence d'un polynôme de Fibonacci réel en degré $\ell > 2$ est démontrée par Hoffbauer et Keller. Elle découle d'un argument combinatoire de Milnor et de Thurston. Dans [BKNS], Bruin, Keller, Nowicki et van Strien ont montré un résultat analogue au Théorème 1, dans le cadre réel, ce qui a été un point de départ pour l'étude complexe.

Enfin, remarquons que le théorème affirme que si le degré est suffisamment grand, alors il existe des polynômes ayant un ensemble de Julia de mesure strictement positive. Cependant, la démonstration ne donne pas une valeur explicite pour ℓ_0 , et pour en obtenir une, il reste un travail considérable. Signalons simplement que des expériences numériques de Lyubich et Sutherland suggèrent $\ell_0 = 32$.

Nous nous proposons d'exposer les grandes lignes de la démonstration de van Strien et Nowicki concernant la mesure positive, telle que nous la comprenons. Nous ne donnerons que l'énoncé des lemmes et propositions qui interviendront. Pour les démonstrations, le lecteur pourra consulter [SN] ou [Bu].

Nous aimerions remercier Adrien Douady et Marguerite Flexor pour l'aide qu'ils nous ont apportée tout au long de la préparation de cet exposé, et Sebastian van Strien pour les fructueuses discussions que nous avons eues avec lui.

2. IDÉE PRINCIPALE

Commençons par rappeler la définition des ensembles de Julia. Soit $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un polynôme. L'ensemble de Julia rempli $K(P)$ de P est l'ensemble des points dont l'orbite sous l'action de P est bornée. Dans la suite, $P^{(n)}$ désignera le n -ième itéré de P , par opposition à P^ℓ qui désignera la puissance ℓ -ième de P . L'ensemble de Julia rempli est un compact. On peut également le définir par :

$$K(P) = \{z \in \mathbb{C} \mid P^{(n)}(z) \not\rightarrow \infty\}.$$

L'ensemble de Julia $J(P)$ de P , est le bord de $K(P)$:

$$J(P) = \partial K(P).$$

Dans le cas qui nous intéresse, P sera un polynôme de Fibonacci réel. En particulier, il aura un unique point critique récurrent. En utilisant la classification de Fatou-Sullivan des composantes de l'intérieur de $K(P)$, nous montrerons que

$$J(P) = K(P).$$

L'idée de van Strien et Nowicki pour montrer que $K(P)$ est de mesure de Lebesgue positive est d'utiliser un argument de marche aléatoire.

DÉFINITION 1.—Un jeu (X, μ, ψ, g) est la donnée de :

- un espace X muni d'une mesure de probabilité μ ,
- une application jeu, $\psi : X \rightarrow X$,
- une fonction gain, $g : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Pour tout $x \in X$ nous pouvons définir :

- la position après le n -ième coup : $x_n = \psi^{(n)}(x)$,
- le gain au n -ième coup : $g_n(x) = g(x_{n-1})$, et
- le capital amassé après le n -ième coup : $G_n(x) = g_1(x) + \dots + g_n(x)$.

Soit S l'ensemble des positions gagnantes, c'est-à-dire

$$S = \{x \in X \mid (\forall n \geq 1) G_n(x) > 0\}.$$

Nous dirons qu'un jeu est **gagnant** si et seulement si $\mu(S) > 0$. Il existe des critères probabilistes que nous mentionnerons plus loin, pour montrer qu'un jeu est gagnant.

Pour utiliser cet argument de marche aléatoire, le principe développé par van Strien et Nowicki est de construire un jeu gagnant, associé au polynôme de Fibonacci P , et dont l'ensemble S des positions gagnantes est inclus dans l'ensemble de Julia rempli $K(P)$. Pour cela ils commencent par définir une partition du plan complexe en anneaux emboîtés, A_k , $k \in \mathbb{Z}$.

- L'espace $X = \bigcup_{k \geq 0} A_k$ est muni d'une mesure proportionnelle à la mesure de Lebesgue.
- L'application ψ est l'identité sur $A_0 \cup A_1$, et coïncide pour $k \geq 2$ avec un itéré $P^{(S_k)}$ de P sur A_k (où $S_k \in \mathbb{N}$). Remarquons que si l'orbite d'un point rentre dans A_0 ou dans A_1 , le jeu est arrêté.
- Le gain $g(z)$ est déterminé par les positions respectives de z et de $\psi(z)$: si $z \in A_k$ et $\psi(z) \in A_m$, on pose $g(z) = m - k$.

Dans ces conditions, si $z \in S$ est une position gagnante, alors $G_n(z) > 0$ pour tout $n \geq 1$. Par conséquent $S \subset \bigcup_{k \geq 2} A_k$. D'autre part, si $z \in A_k \cap S$, alors pour tout $n \geq 1$, $\psi^{(n)}(z) \in A_m$

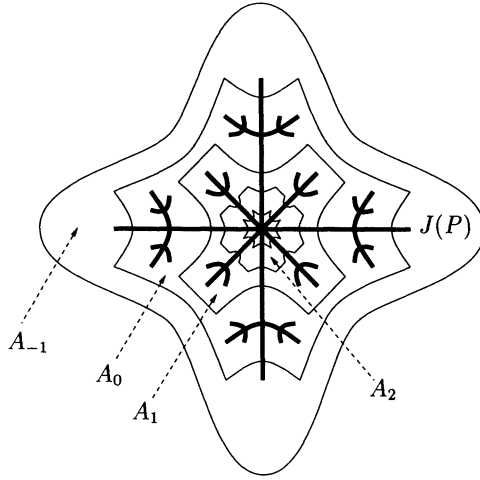


FIG. 1 - $\psi|_{A_k} = P^{(S_k)}$; $G|_{A_k} = k$; $g = G \circ \psi - G$.

avec $m > k$. Par suite, l'orbite sous ψ de z reste dans la composante bornée de $\mathbb{C} \setminus A_k$, et l'orbite de z sous l'action de P ne peut pas diverger vers l'infini. Par conséquent $S \subset K(P) = J(P)$. Ainsi, si nous montrons que le jeu est gagnant, la démonstration sera achevée. Toute la difficulté du travail de van Strien et Nowicki réside dans la construction d'un jeu gagnant du type précédent.

3. POLYNÔMES DE FIBONACCI

Dans cette partie, nous allons donner la définition réelle des polynômes de Fibonacci que van Strien et Nowicki utilisent. Nous exposerons ensuite quelques propriétés qui nous permettront de construire le jeu de Fibonacci.

3.1. Définition

Van Strien et Nowicki abordent le problème avec des techniques réelles. Ils utilisent la définition de Lyubich et Milnor [LM], §4.

DÉFINITION 2.—Soit $P(x) = x^\ell + c$ un polynôme réel ($c \in \mathbb{R}$) de degré ℓ pair. Soit S_k la suite de Fibonacci définie par

$$\begin{cases} S_{k+1} &= S_k + S_{k-1} \\ S_0 &= 1 \\ S_1 &= 2. \end{cases}$$

Soient $c_0 = 0$ le point critique de P et $c_n = P^{(n)}(c_0)$. Nous dirons que P est un **polynôme**

de Fibonacci, si

- pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|c_{S_{k+1}}| < |c_{S_k}|$, et
- $|c_3| < |c_4|$.

Les propriétés réelles de ces polynômes ont été étudiées par Lyubich et Milnor dans [LM], dans le cas quadratique. Les propriétés combinatoires se généralisent aisément pour les degrés supérieurs. L'existence de polynômes de Fibonacci ne pose donc aucun problème : il suffit de reprendre les arguments de Lyubich et Milnor. En revanche, ce genre d'arguments ne permet plus de montrer qu'il existe un unique polynôme de Fibonacci pour chaque degré ℓ pair, car les estimées géométriques qu'ils obtiennent ne sont plus valides. Nous ne reprendrons pas la démonstration de van Strien et Nowicki concernant l'unicité du polynôme de Fibonacci pour chaque degré ℓ pair, qui repose sur des estimées obtenues dans [BKNS]. Nous allons maintenant exposer des résultats complexes concernant les polynômes de Fibonacci.

3.2. Propriétés complexes

Tout d'abord, la classification de Fatou-Sullivan des composantes de l'intérieur de $K(P)$ permet de montrer que $\overset{\circ}{K}(P) = \emptyset$.

LEMME 1.—Soit $P(z) = z^\ell + c$ un polynôme réel ($c \in \mathbb{R}$). Si l'intérieur de $K(P)$ n'est pas vide, alors l'orbite du point critique 0 est attirée par un cycle périodique.

Comme l'orbite du point critique d'un polynôme de Fibonacci se rapproche de 0 aux itérés de Fibonacci, elle ne peut pas être attirée par un cycle périodique. Par conséquent $K(P)$ est d'intérieur vide, et

$$J(P) = K(P).$$

En ce qui concerne les propriétés complexes des polynômes de Fibonacci, Branner et Hubbard donnent des informations topologiques à l'aide de tableaux ([BH], page 131). Le résultat principal qui intéresse van Strien et Nowicki est traduit sur les figures 2 et 3. Le lecteur pourra trouver une démonstration complète dans [SN], Théorème 8.1, ou dans [Bu]. Il peut être énoncé de la manière suivante.

PROPOSITION 1.—Soit $P(z) = z^\ell + c$ un polynôme de Fibonacci réel. Il existe des disques topologiques D_k , D_k^0 et D_k^1 pour $k \geq 0$, définis par récurrence à partir de D_0 et D_1 , tels que

- $c_0 \in \overline{D_{k+2}} \subset D_k^0$,
- $\overline{D_{k+1}^1} \subset D_k^0$,
- $\overline{D_k^0} \subset D_k$,
- $P^{(S_{k-1})}$ envoie D_k^1 sur D_k de manière isomorphe, et

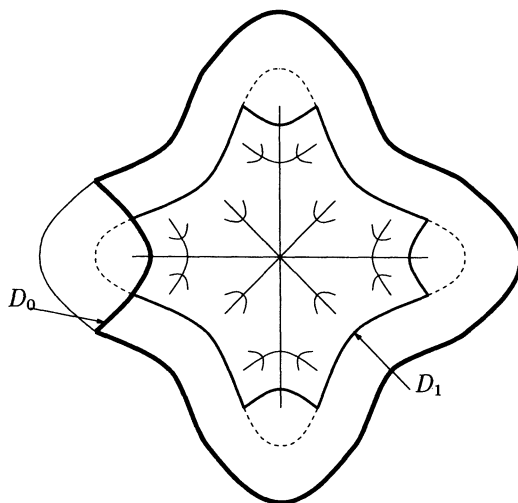


FIG. 2 – Les pièces D_0 et D_1 délimitées par des équipotentielles et des rayons externes.

- $P^{(S_k)}$ est un revêtement de degré ℓ , ramifié en c_0 de D_k^0 , D_{k+1} et D_{k+2} dans respectivement D_k et D_{k-1} et D_k^1 .

Ces disques topologiques sont des pièces du puzzle de Yoccoz, délimitées par des équipotentielles et des rayons externes. Comme le polynôme est de la forme $P(z) = z^\ell + c$, les pièces qui contiennent c_0 sont invariantes par rotation d'angle $2\pi/\ell$. Pour plus de renseignements concernant les puzzles de Yoccoz, le lecteur peut consulter [B], [BH], [H] ou [M]. Nous allons maintenant construire le jeu de Fibonacci que van Strien et Nowicki utilisent ([SN], §VI).

3.3. Jeu de Fibonacci

DÉFINITION 3.—Soit P un polynôme de Fibonacci, et soient D_k les disques de la proposition 1. Pour $k \geq 0$, nous pouvons définir les anneaux

$$A_k = D_{k+1} \setminus D_{k+2}.$$

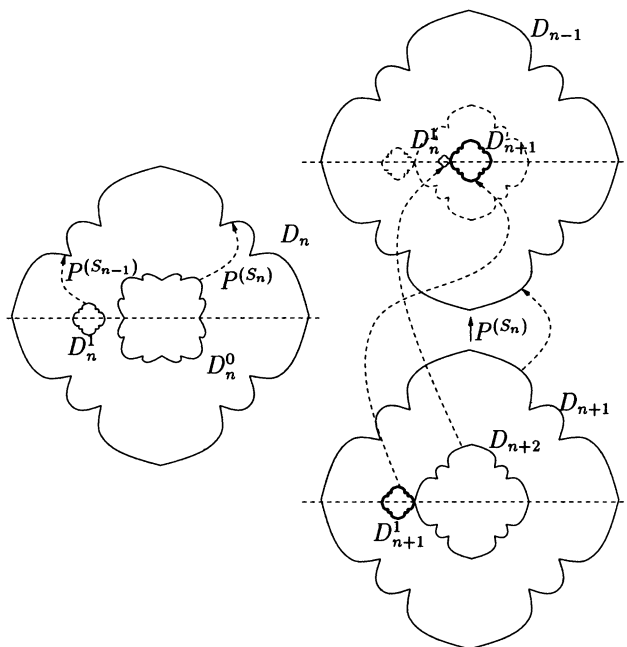
Le jeu de Fibonacci est défini par :

- l'espace $X = D_1$ est la réunion des anneaux A_k , $k \geq 0$;
- la mesure de probabilité μ est proportionnelle à la mesure de Lebesgue m :

$$\mu(\cdot) = \frac{m(\cdot)}{m(D_1)} ;$$

- l'application jeu ψ est définie par

$$\begin{aligned} \psi|_{A_k} &= P^{(S_k)} & \text{si } k \geq 2, \\ \psi|_{A_k} &= \text{Id} & \text{si } k = 0 \text{ ou } 1 ; \end{aligned}$$

FIG. 3 – Schémas de Fibonacci associés aux pièces D_k .

- le gain g est défini par $g(z) = l - k$, pour $z \in A_k$ et $\psi(z) \in A_l$.

Pour se faire une idée de ce jeu, nous avons représenté topologiquement la situation sur la figure 4. Les anneaux A_k sont représentés comme des anneaux euclidiens. Les petits cercles concentriques délimitent les régions où le gain est constant et positif. Nous pouvons remarquer que le jeu dans l'anneau A_{k+1} ressemble au jeu dans l'anneau A_k . Nous précisons cette idée dans la partie 5. Pour le moment il nous faut montrer que le jeu de Fibonacci est un jeu gagnant. Pour cela, van Strien et Nowicki utilisent une version quantitative de la loi des grands nombres.

4. L'ARGUMENT DE MARCHE ALÉATOIRE

Dans cette partie, nous allons exposer un argument de marche aléatoire qui permet de montrer que le jeu de Fibonacci est gagnant. Pour une démonstration complète des propositions, le lecteur pourra consulter [Bu].

4.1. Jeu de pile ou face (équilibré)

Si nous jouons à un jeu équitable, le gain au bout de n coups est négligeable devant n^β pour tout $\beta > 1/2$.

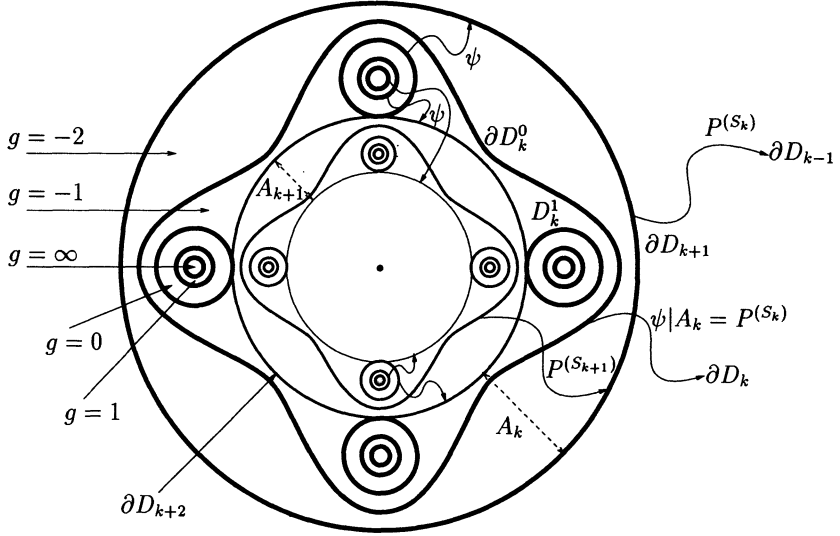


FIG. 4 – Le jeu de Fibonacci et les régions où le gain est constant.

Ici, l'espace X sera l'ensemble des suites de -1 et de 1 :

$$X = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}.$$

La mesure de probabilité μ est la mesure équilibrée. Dans un premier temps, nous allons jouer avec un jeu équilibré. Pour tout $x = x_1 \dots x_n \dots \in X$, le gain g vaut

$$g(x) = x_1,$$

et l'application de jeu n'est rien d'autre que le décalage (shift) :

$$\psi(x_1 x_2 \dots x_n \dots) = x_2 \dots x_n \dots,$$

de sorte que le gain au n -ième coup vaut $g_n(x) = x_n$. Un théorème classique de probabilité affirme que

PROPOSITION 2.—*Pour tout $\beta > 1/2$ et pour presque tout $x \in X$, la fonction qui à n associe le capital amassé en n coups, est un $o(n^\beta)$:*

$$G_n(x) = \sum_{k=1}^n g_k(x) = o(n^\beta).$$

Remarquons que dans cette situation l'espérance de gain, $E(g)$, est nulle. Il existe une variante de ce théorème lorsque l'espérance n'est plus nulle.

4.2. Jeu faussé

Si nous jouons avec un jeu faussé en notre faveur, et que nous bénéficions d'un crédit illimité, nous avons toutes les chances de devenir infiniment riches.

Supposons que le jeu n'est plus équilibré. C'est-à-dire que le gain g_n est défini de la manière suivante :

$$\begin{aligned} g_n(x) &= \alpha & \text{si } x_n &= +1 \\ g_n(x) &= \beta & \text{si } x_n &= -1 \end{aligned}$$

avec $\alpha + \beta = 2E > 0$.

COROLLAIRE 1.—Pour presque tout $x \in X$, $G_n(x) \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$.

En effet $g_n = E + g'_n$, où g'_n est associé à un jeu d'espérance nulle. Alors le capital est $G_n = nE + G'_n = nE + o(n^\beta)$ presque sûrement. Par conséquent $G_n(x) \rightarrow +\infty$.

4.3. Modification du jeu (jeu avec crédit illimité)

Nous avons rappelé des résultats valides pour des jeux dont les coups sont indépendants. Dans le cas qui nous intéresse, les coups ne le sont pas. Cependant, nous pouvons adapter les résultats.

Soit X un espace, muni d'une mesure de probabilité μ , soit ψ une application jeu et g une application gain. On suppose qu'il existe une partition $\mathcal{A}_1 = (A_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de X telle que g est constante sur chaque partie de \mathcal{A}_1 . Définissons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la partition \mathcal{A}_n de X en parties

$$A_{i_0, \dots, i_{n-1}} = \{x \mid \psi^{(j)}(x) \in A_{i_j}, j = 0, \dots, n-1\},$$

ainsi que les fonctions "gain au n -ième coup", (g_n) , $n \in \mathbb{N}$, constantes sur chaque partie de \mathcal{A}_{n+1} . Posons $G_n = g_1 + \dots + g_n$, le capital accumulé après n coups, et écrivons $g_n = E_n + H_n$, où E_n est constante sur chaque partie de \mathcal{A}_n et H_n est de moyenne nulle sur chaque partie de \mathcal{A}_n . Remarquons que si $A \in \mathcal{A}_n$, alors

$$E_n|A = \frac{1}{\mu(A)} \int_A g_n d\mu(x)$$

est une espérance conditionnelle.

Pour un jeu dont les coups ne sont pas indépendants, l'analogie de la proposition 1 peut être énoncé de la manière suivante

PROPOSITION 3.—S'il existe un réel $V \in \mathbb{R}$ tel que $\int_X H_n^2 \leq V$, alors pour presque tout $x \in X$, et pour tout $\beta < 1/2$

$$\sum_{k=1}^n H_k(x) = o(n^\beta).$$

Nous en déduisons alors immédiatement l'analogie du corollaire 1.

COROLLAIRE 2.—*Supposons que :*

$$(1) \exists C_1 > 0 / (\forall n \in \mathbb{N}) (\forall x \in X) E_n(x) > C_1$$

$$(2) \exists C_2 < \infty / (\forall n \in \mathbb{N}) \int_X H_n^2 \leq C_2$$

Alors pour presque tout $x \in X$, et pour tout $\beta > 1/2$,

$$G_n(x) > nC_1 + o(n^\beta).$$

Par conséquent, pour presque tout $x \in X$, $G_n(x) \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$.

La condition (1) exprime que l'espérance du jeu est positive, autrement dit que le jeu est faussé en notre faveur. La condition (2) signifie que la variance du jeu est finie.

4.4. Jeu gagnant

Un jeu déséquilibré en notre faveur est un jeu gagnant.

PROPOSITION 4.—*Soit Y un espace, muni d'une mesure μ , et Z une partie de Y : le cimetière. Soit ψ une application de Y dans Y , telle que $\psi|Z = \text{Id}$. Posons $X = \psi(Y \setminus Z)$, et supposons que $\mu(X) = 1$. Soit $G : Y \rightarrow \mathbb{R}$ un capital majoré sur Z . Soit $\Psi : Y \rightarrow Y$ une application telle que*

- pour tout $y \in Y \setminus Z$, tel que $\psi^{(n-1)}(y) \in Y \setminus Z$, les applications ψ et Ψ définissent le même gain au n -ième coup :

$$G \circ \Psi^{(n)}(y) - G \circ \Psi^{(n-1)}(y) = G \circ \psi^{(n)}(y) - G \circ \psi^{(n-1)}(y) = g_n(y),$$

- la préimage par Ψ d'un ensemble de mesure nulle est de mesure nulle.

Si pour μ -presque tout $y \in Y$, $G(\Psi^{(n)}(y)) \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$, alors le jeu (X, μ, ψ, g) est un jeu gagnant.

La première condition est satisfaite si $\Psi = \psi$ sur $Y \setminus Z$, mais nous la présentons ainsi car par la suite nous serons amenés à modifier légèrement l'application ψ sur $Y \setminus Z$.

PREUVE. Pour presque tout $y \in Y$, $G(\Psi^{(n)}(y)) \rightarrow +\infty$. Comme G est majorée sur Z , pour presque tout $y \in Y$, il existe un entier n_y tel que

$$\begin{cases} \forall k \geq 0, \Psi^{(n_y+k)}(y) \in Y \setminus Z \\ \forall k > 0, G(\Psi^{(n_y)}(y)) < G(\Psi^{(n_y+k)}(y)). \end{cases}$$

Autrement dit, si S désigne l'ensemble des positions gagnantes du jeu (X, μ, ψ, g) , pour presque tout $y \in Y$, il existe un entier n_y tel que $\psi^{(n_y)}(y) \in S$. Par conséquent,

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Psi^{(-n)}(S)\right) > 0.$$

Par hypothèse, si S était de mesure nulle, alors toutes ses préimages par Ψ seraient de mesure nulle. Or toute réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle est toujours de mesure nulle, ce qui est impossible. Par conséquent $\mu(S) > 0$, et le jeu est gagnant. ■

5. VARIANTES DU JEU DE FIBONACCI

Pour appliquer la proposition 4, le problème est de bien prolonger le jeu de Fibonacci, (X, μ, ψ, g) , construit dans la partie 3. Nous allons voir qu'il existe une manière naturelle de le prolonger, mais auparavant nous devons nous ramener à une situation invariante par homothétie. Nous savons déjà que les suites de gains $g_n(z) = g(\psi^{(n)}(z))$, et $g_n(e^{2i\pi k/\ell}z)$, $n \in \mathbb{N}$, sont égales terme à terme à cause de l'invariance par rotation d'angle $2i\pi/\ell$. Nous allons construire un jeu, $(\tilde{X}, \tilde{\mu}, \tilde{\psi}, \tilde{g})$, conjugué au jeu de Fibonacci par une application quasi-conforme, tel que pour un réel $\lambda \in]0, 1[$, les suites de gains $\tilde{g}_n(z)$ et $\tilde{g}_n(\lambda z)$ soient égales.

5.1. Jeu homothétique

Le travail de van Strien et Nowicki sur la limite des renormalisées des polynômes de Fibonacci permet de montrer la proposition suivante.

PROPOSITION 5.—*Soit P un polynôme de Fibonacci réel de degré ℓ pair au moins égal à 4, et soient D_k les disques topologiques définis plus haut. Il existe*

- un réel $\lambda \in]0, 1[$,
- des disques topologiques \tilde{D}_k , $k \geq 1$,
- des applications $\tilde{f}_k : \tilde{D}_{k+1} \rightarrow \tilde{D}_{k-1}$, $k \geq 2$,
- une fonction $\tilde{g} : \tilde{D}_2 \rightarrow \mathbb{R}$, et
- un homéomorphisme quasi-conforme $\phi : D_1 \rightarrow \tilde{D}_1$,

tels que

- ϕ est de la forme $\phi(z) = \Phi(z^\ell)$,
- $(\forall k \geq 1) \phi(D_k) = \tilde{D}_k$,
- $(\forall k \geq 2) \tilde{f}_k = \phi \circ P^{(S_k)} \circ \phi^{-1}$,
- $\tilde{g} = g \circ \phi^{-1}$,
- $(\forall k \geq 1) \tilde{D}_{k+1} = \lambda \tilde{D}_k$, et
- $(\forall k \geq 2) \tilde{f}_{k+1}(z) = (-1)^k \lambda \circ f_k \circ \lambda^{-1}$.

En d'autres termes, il existe un homéomorphisme quasi-conforme ϕ , qui preserve l'invariance par rotation d'angle $2\pi/\ell$, et qui conjugue le jeu (ψ, g) à un jeu $(\tilde{\psi}, \tilde{g})$, invariant par homothétie de rapport λ . Nous donnerons les idées de la démonstration dans la section suivante.

L'intérêt de nous être ramenés à une situation homothétique, c'est que nous pouvons prolonger le jeu à \mathbb{C} tout entier de manière naturelle. Pour cela il nous suffit de définir :

- $\tilde{A}_0 = \tilde{D}_1 \setminus \tilde{D}_2$,
- $\tilde{A}_k = \lambda^k \tilde{A}_0$, $k \in \mathbb{Z}$,
- le jeu $\tilde{\Psi} |_{\tilde{A}_k} = \lambda^k \circ f_0 \circ \lambda^{-k}$, $k \in \mathbb{Z}$,

- le capital $\tilde{G}|_{\tilde{A}_k} = k$.

Remarquons que nous avons légèrement modifié l'application de jeu sur A_k pour $k \geq 0$. Cependant, comme

- $\tilde{\Psi}(z) = \pm\tilde{\psi}(z)$,
- $\tilde{\psi}(-z) = \tilde{\psi}(z)$, et
- $\tilde{G}(-z) = \tilde{G}(z)$.

le gain au n -ième coup reste inchangé :

$$\tilde{G} \circ \tilde{\Psi}^{(n)} - \tilde{G} \circ \tilde{\Psi}^{(n-1)} = \tilde{G} \circ \tilde{\psi}^{(n)} - \tilde{G} \circ \tilde{\psi}^{(n-1)}.$$

Par conséquent, il suffit de montrer le lemme suivant.

LEMME 2.—Pour presque tout $z \in \mathbb{C}$, $\tilde{G}(\tilde{\Psi}^{(n)}(z)) \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Nous pourrons alors appliquer la proposition 4 pour en déduire que le jeu homothétique est gagnant. Ceci signifie que si S désigne l'ensemble des positions gagnantes du jeu de Fibonacci, alors $\phi(S)$ est de mesure strictement positive. Le lemme suivant permet alors de conclure que le jeu de Fibonacci est gagnant.

LEMME 3.—Soit $\phi : U \rightarrow V$ un homéomorphisme quasi-conforme, et soit $S \subset U$. Alors $\phi(S)$ est de mesure de Lebesgue nulle si et seulement si S est de mesure de Lebesgue nulle.

5.2. Jeu quotient

Etant donnée l'invariance de la situation par homothétie de rapport λ , nous pouvons quotienter par la relation d'équivalence $z \sim \lambda z$. Nous allons introduire une nouvelle mesure ν sur \mathbb{C} telle que

$$d\nu(z) = \frac{dzd\bar{z}}{|z|^2}.$$

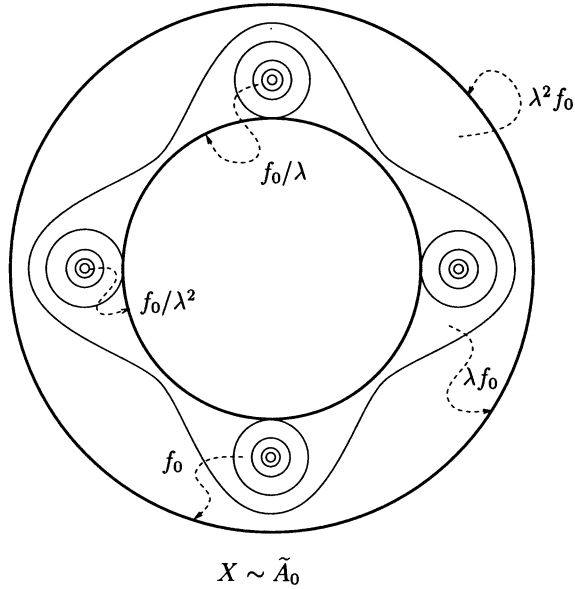
Cette mesure est préservée par la transformation $z \mapsto \lambda z$, et elle est multipliée par ℓ par la transformation $z \mapsto z^\ell$. Remarquons par ailleurs qu'elle est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Le problème est donc réduit à l'étude du jeu défini par

- l'espace $\widehat{X} = \mathbb{C}/\sim$, dont un représentant est l'anneau \tilde{A}_0 ,
- la projection $\hat{\mu}$ sur \widehat{X} , de la mesure ν ,
- la fonction gain : $\hat{g} = \tilde{G} \circ \tilde{\Psi} - \tilde{G}$, et
- l'application jeu : la projection sur \widehat{X} de l'application $\tilde{\Psi}$, qui peut être représentée par l'application $\widehat{\Psi} : \tilde{A}_0 \rightarrow \tilde{A}_0$ définie par

$$\widehat{\Psi}(z) = \lambda^{-\hat{g}(z)} \tilde{f}_0(z).$$

Nous avons représenté topologiquement ce jeu sur la figure 5.

FIG. 5 – Le jeu une fois quotienté par la relation $z \sim \lambda z$.

Nous appliquerons alors la proposition 3 au jeu quotient $(\widehat{X}, \hat{\mu}, \hat{g}, \widehat{\Psi})$ pour montrer que pour $\hat{\mu}$ -presque tout point x de \widehat{X} , $\hat{g}(x) + \dots + \hat{g}(\widehat{\Psi}^{(n)}(x)) \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$. Nous en déduirons donc que pour ν -presque tout point $z \in \mathbb{C}$, $\tilde{G}(\tilde{\Psi}^{(n)}(z)) \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$, ce qui démontre le lemme 2. En effet, ν est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

6. LIMITE DES RENORMALISÉES

Dans cette section nous allons expliquer dans les grandes lignes pourquoi il existe un modèle de jeu homothétique, et nous allons donner des premières informations le concernant. Les démonstrations se trouvent dans [Bu] et sont calquées sur le travail de van Strien et Nowicki. Quant aux premiers résultats concernant ce jeu homothétique, ils sont démontrés par Eckmann, Wittwer et Epstein dans [EW], [E1] et [E2].

6.1. La famille des L-applications

Lyubich [L3] introduit la notion d'application à allure polynomiale généralisée, qui étend celle introduite par Douady et Hubbard dans [DH]. Nous les appellerons L-applications. Les applications $(P^{(S_k)} \cup P^{(S_{k-1})}) : (D_k^0 \cup D_k^1) \rightarrow D_k$ sont de telles applications.

DÉFINITION 4.—Une **L-application** est un revêtement ramifié

$$f : \bigcup_{i=0}^{k-1} U^i \rightarrow V$$

tel que :

- il y a un unique point critique $c_0 \in U^0$,
- l'orbite de c_0 est contenue dans la réunion des U^i , et si $i < j$, l'orbite de c_0 visite U^i avant U^j ,
- chaque U^i contient au moins un point de l'orbite de c_0 ,
- chaque U^i , $i = 0, \dots, k-1$ est un disque topologique ouvert relativement compact dans V ,
- les U^i sont deux à deux disjoints.

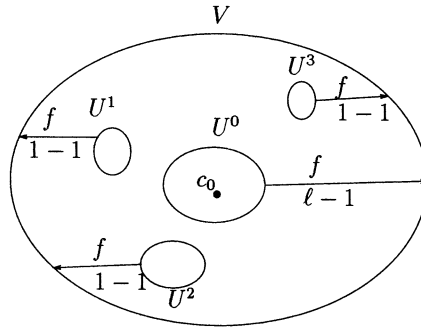


FIG. 6 – Une L-application $f : \bigcup_{i=0}^3 U^i \rightarrow V$ ramifiée en c_0 .

Nous avons tenu ici à ordonner les ouverts U^i , ce que ne fait pas Lyubich dans la définition qu'il donne des applications à allure polynômiale généralisées. Nous pouvons définir

$$K(f) = \{z \mid (\forall n \in \mathbb{N}) f^{(n)}(z) \in \bigcup_{i=0}^{k-1} U^i\}.$$

Remarquons que c_0 est un élément de $K(f)$.

6.2. Applications de Fibonacci

Il est possible de définir une notion de L-application de Fibonacci. Cette définition est beaucoup plus proche de la définition des polynômes de Fibonacci donnée par Branner et Hubbard [BH] ou par Yoccoz [Y].

Nous allons commencer par définir le puzzle associé à une L-application f , en suivant la procédure exposée par Branner et Hubbard dans [BH]. Le puzzle de profondeur 0, $\mathcal{P}_0(f)$ est constitué par les pièces U^i . Les pièces du puzzle de profondeur n , $\mathcal{P}_n(f)$, sont les composantes connexes de $f^{(-n)}(\mathcal{P}_0)$. Pour chaque $z \in K(f)$, $P_n(z)$ désigne la pièce de

$\mathcal{P}_n(f)$ qui contient z . Nous nous intéressons particulièrement aux pièces qui contiennent c_0 . Si $n \geq 0$, $C_n = P_n(c_0)$ est la **pièce critique** de profondeur n , et $C_{-1} = V$. Associée à ce puzzle, nous pouvons définir une notion de descendance : pour tout $n \geq -1$, les enfants de C_n sont les pièces critiques C_l , avec $l > n$, telles que $f^{(l-n)}(C_l) = C_n$ et $f^{(k)}(C_l)$ ne contient pas le point critique c_0 pour $0 < k < l - n$. De plus, si $m < n$, nous dirons que la pièce critique C_m est plus vieille que la pièce C_n , ce qui revient à dire que $C_n \subset C_m$.

Nous pouvons maintenant définir les applications de Fibonacci.

DÉFINITION 5.—Une application de Fibonacci est une L -application

$$f : U^0 \cup U^1 \rightarrow V,$$

telle que

- chaque pièce critique C_n a exactement deux enfants ;
- les oncles sont plus vieux que leurs neveux ;
- les enfants d'un fils aîné sont tous les deux plus vieux que ceux du fils cadet.

PROPOSITION 6.—Si P est un polynôme de Fibonacci, alors les L -applications $(P^{(S_k)} \cup P^{(S_{k-1})}) : (D_k^0 \cup D_k^1) \rightarrow D_k$ sont des applications de Fibonacci.

6.3. Renormalisation pour les L -applications

Dans [L3], Lyubich introduit une notion de renormalisation généralisée pour les L -applications.

DÉFINITION 6.—Nous dirons qu'une L -application f est renormalisable, si nous pouvons trouver

- une collection de pièces de puzzle U_1^i , $i = 0, \dots, l - 1$, une pièce V_1 et
- des entiers n_i , $i = 0, \dots, l - 1$, avec au moins un $n_i > 1$,

tels que l'application $g : \bigcup_{i=0}^{l-1} U_1^i \rightarrow V_1$ définie par $g|U_1^i = f^{(n_i)}$ soit une L -application. Nous dirons alors que g est une renormalisée de f .

La proposition suivante s'obtient en examinant la figure 7, en utilisant la définition des applications de Fibonacci, et en remarquant que les relations généalogiques sont préservées par la renormalisation.

PROPOSITION 7.—Soit f une application de Fibonacci. Alors f est renormalisable et la renormalisée $g : U_1^0 \cup U_1^1 \rightarrow V_1$ définie par

$$\begin{aligned} U_1^0 &= P_2(\omega), \\ U_1^1 &= P_1(f^2(\omega)), \\ V_1 &= P_0(\omega), \\ g|U_1^0 &= f \circ f \\ g|U_1^1 &= f \end{aligned}$$

est une application de Fibonacci.

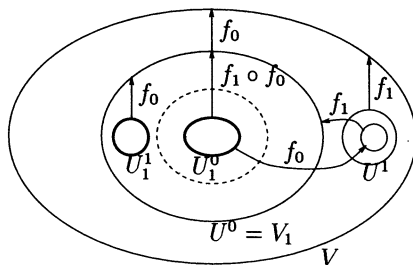


FIG. 7 – Renormalisation d’une application de Fibonacci.

Nous pouvons donc définir un opérateur de renormalisation \mathcal{R} , qui à une application de Fibonacci f associe l’application de Fibonacci $\mathcal{R}(f) = \lambda^{-1} \circ g \circ \lambda$, où $\lambda = g(0) = f^{(2)}(0)$. L’application $\mathcal{R}(f)$ est normalisée de sorte que la valeur critique soit en 1.

6.4. Agencement de l’orbite critique sur l’axe réel

Dans [LM], Lyubich et Milnor montrent que la suite de pétrissage (kneading sequence) d’un polynôme de Fibonacci réel P , est entièrement déterminée.

PROPOSITION 8 [LM].—*Soit P un polynôme de Fibonacci ayant un point critique c_0 . Soit $c_n = P^{(n)}(c_0)$. Alors :*

$$\begin{aligned} c_{S_k} &< 0 \text{ pour } k \equiv 0, 1 \pmod{4}, \\ c_{S_k} &> 0 \text{ pour } k \equiv 2, 3 \pmod{4}, \\ \text{sgn}(c_n) &= \text{sgn}(c_{n-S_k}) \text{ pour } S_k < n < S_{k+1}. \end{aligned}$$

Les applications de Fibonacci que nous considérerons par la suite seront réelles ($f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$), et symétriques ($f(z) = F(z^\ell)$, où F est une application holomorphe, et où ℓ est le degré du point critique de f). Dans [Bu], nous utilisons les techniques de tableaux pour montrer la proposition suivante.

PROPOSITION 9.—*L’agencement, sur l’axe réel, de l’orbite critique d’une application de Fibonacci réelle, f , ne dépend que des positions relatives de c_0, c_1 et c_2 . D’autre part $c_{S_{k-1}}$ et $c_{S_{k+1}}$ sont toujours de signes opposés.*

Nous pouvons remarquer que f et $\mathcal{R}(f)$ ont un point critique en 0 et une valeur critique en 1. Par conséquent les agencements de leurs orbites critiques sur \mathbb{R} ne dépendent que du signe de $f^{(2)}(0)$ et $[\mathcal{R}(f)]^{(2)}(0) = f^{(3)}(0)/f^{(2)}(0)$ qui sont justement de signes opposés. C’est pour cette raison que nous introduisons un opérateur de retournement qui à une application de Fibonacci f associe l’application $\tilde{f} : U^0 \cup U^1 \rightarrow V$ définie par $\tilde{f}|_{U^0} = f$ et $\tilde{f}|_{U^1} = -f$.

PROPOSITION 10.—*Si f est une application de Fibonacci, alors \tilde{f} est encore une application de Fibonacci.*

L'opérateur $\tilde{\mathcal{R}}$ qui consiste à renormaliser puis à retourner, transforme donc une application de Fibonacci f en une application de Fibonacci $\tilde{\mathcal{R}}(f)$. L'utilité de cette opération de retournement est :

PROPOSITION 11.—*Soit f une application de Fibonacci normalisée, c'est-à-dire telle que le point critique soit 0 et la valeur critique 1. L'agencement des orbites critiques de f et de $\tilde{\mathcal{R}}(f)$, sur l'axe réel, sont identiques.*

6.5. Germes de L-applications

Nous dirons que deux L-applications f_1 et f_2 sont équivalentes si $K(f_1) = K(f_2)$ et si les deux applications coïncident sur leur ensemble de Julia. Les classes d'équivalence, que nous noterons $[f]$, seront appelées les germes de L-applications. Nous pouvons munir cet espace de la topologie de Carathéodory ([McM]). Nous pouvons également projeter l'opérateur $\tilde{\mathcal{R}}$ sur l'espace des germes de L-applications. À un germe d'application de Fibonacci $[f]$, nous associons un germe $\tilde{\mathcal{R}}([f])$, qui est un germe d'application de Fibonacci. Nous pouvons donc itérer ce procédé et construire ainsi une suite de germes de Fibonacci : $\tilde{\mathcal{R}}^{(n)}([f])$, $n \in \mathbb{N}$.

PROPOSITION 12.—*Soit P_k l'application de Fibonacci $(P^{(S_k)} \cup P^{(S_{k-1})}) : (D_k^0 \cup D_k^1) \rightarrow D_k$. Alors*

$$\mathcal{R}([P_{k-1}]) = [\lambda_k^{-1} \circ P_k \circ \lambda_k],$$

où $\lambda_k = P_k(0)$.

Dans [SN], van Strien et Nowicki montrent que deux applications de Fibonacci de même degré $\ell > 2$, dont les orbites critiques sont ordonnées identiquement sur l'axe réel, sont quasi-conformément conjuguées. La proposition 11 dit que c'est le cas des applications $\tilde{\mathcal{R}}^{(n)}(P_1)$. En reprenant les arguments de van Strien et Nowicki ([SN] Théorème 7.2), et les estimées réelles de [BKNS], nous pouvons montrer la proposition suivante.

PROPOSITION 13.—*Pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, les applications $\tilde{\mathcal{R}}^{(m)}(P_1)$ et $\tilde{\mathcal{R}}^{(n)}(P_1)$ sont quasi-conformément conjuguées. De plus, il existe des représentants des germes $\tilde{\mathcal{R}}^{(m)}([P_1])$ et $\tilde{\mathcal{R}}^{(n)}([P_1])$, K -quasi-conformément conjugués, avec K indépendant de m et n .*

Van Strien et Nowicki adaptent alors les techniques de tours de McMullen développées dans [McM], pour montrer la proposition suivante.

PROPOSITION 14 ([SN] Théorème 7.1).—*La suite $\tilde{\mathcal{R}}^{(n)}([P_1])$ a une limite quand n tend vers l'infini. C'est un germe d'application de Fibonacci, point fixe de $\tilde{\mathcal{R}}$, dont tous les représentants sont quasi-conformément conjugués à P_1 .*

Nous allons maintenant montrer que nous pouvons utiliser ce point fixe de renormalisation pour construire le jeu homothétique de la partie précédente.

7. ÉQUATION DE CVITANOVIĆ-FIBONACCI

7.1. L'équation fonctionnelle

Remarquons dans un premier temps que les points fixes de $\widetilde{\mathcal{R}}$ sont associés à une équation fonctionnelle.

PROPOSITION 15.—*Soit $f : U^0 \cup U^1 \rightarrow V$ une application de Fibonacci telle que $\widetilde{\mathcal{R}}([f]) = [f]$. Notons $f_0 = f|_{U^0}$, $f_1 = f|_{U^1}$ et $\lambda = f^{(2)}(0)$. Alors*

$$\begin{cases} f_0(z) = -1/\lambda^2 f_0(\lambda f_0(\lambda z)) \text{ et} \\ f_1(z) = -\lambda^{-1} f_0(\lambda z), \end{cases}$$

partout où les deux membres des inégalités sont simultanément définis.

Il s'agit juste ici d'écrire que f est un point fixe de $\widetilde{\mathcal{R}}$.

DÉFINITION 7.—*Ce que nous appellerons l'équation de Cvitanović-Fibonacci est le système de conditions suivant :*

$$\begin{cases} f(z) = -1/\lambda^2 f(\lambda f(\lambda z)), \\ 0 < \lambda < 1, \\ f(0) = 1 \text{ et} \\ f(z) = F(z^\ell), \text{ avec } F \text{ univalente et } \ell > 2 \text{ pair.} \end{cases}$$

7.2. Solutions de l'équation

Dans [E1], Epstein expose une théorie permettant d'interpréter l'équation de Cvitanović-Fibonacci. Dans un premier temps, nous désirons étudier les solutions de l'équation de Cvitanović-Fibonacci, telles que f et F soient des applications analytiques réelles sur un intervalle ouvert J contenant 0, et leur extension complexe. Par conséquent, soit J un intervalle ouvert de \mathbb{R} . Définissons alors

$$\mathcal{C}(J) = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) \neq 0 \text{ ou } z \in J\} = \mathbb{H}_+ \cup \mathbb{H}_- \cup J,$$

où

$$\mathbb{H}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\} = -\mathbb{H}_-.$$

Les applications h holomorphes dans $\mathcal{C}(J)$ telles que $h(\bar{z}) = \overline{h(z)}$ et $h(\mathbb{H}_+) \subset \mathbb{H}_+$ sont appelées applications Herglotz (et $-h$ est une application anti-Herglotz). Nous allons étudier

les solutions de l'équation de Cvitanović-Fibonacci, telles que F soit univalente dans un voisinage de 0, et que son inverse, F^{-1} , soit anti-Herglotz. Comme la limite des renormalisées est obtenue comme limite de polynômes ayant toutes leurs valeurs critiques dans \mathbb{R} , cette condition est automatiquement vérifiée.

Nous pouvons alors étudier le graphe de f sur l'axe réel. Il est dessiné sur la figure 8. Soit x_0 la préimage positive de 0. En utilisant l'équation fonctionnelle, nous montrons :

- $f(\lambda x_0) = x_0/\lambda$,
- $f(\lambda) = -\lambda^2$, et
- le premier point critique sur \mathbb{R}^+ est x_0/λ , et $f(x_0/\lambda) = -1/\lambda^2$.

En particulier, nous obtenons ainsi la position relative de plusieurs points sur l'axe réel.

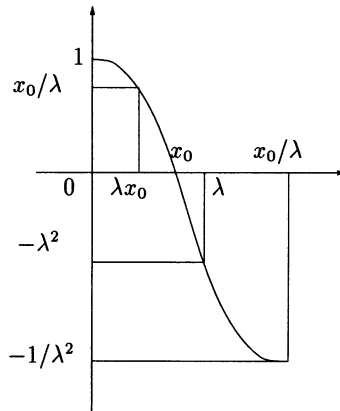


FIG. 8 – Le graphe de f sur \mathbb{R}^+ .

Epstein étudie alors jusqu'où il peut étendre F^{-1} . Ses résultats sont les suivants (voir figure 9) :

- $F^{-1} \in -\mathbb{P}(] - 1/\lambda^2, 1/\lambda^4[)$,
- nous pouvons étendre F^{-1} continûment au bord de \mathbb{H}_+ , et au bord de \mathbb{H}_- , et même analytiquement en dehors des points $(-1/\lambda^2)^n$, $n \geq 1$, qui sont des points de branchements de type $z^{1/\ell}$,
- les valeurs au bord ne sont jamais réelles en dehors de $-1/\lambda^2$ et de $1/\lambda^4$,
- l'extension de F^{-1} à la fermeture de \mathbb{H}_+ (resp. \mathbb{H}_-) est injective, et
- quand z tend vers l'infini dans \mathbb{H}_+ (resp. \mathbb{H}_-), $F^{-1}(z)$ tend vers un point $F^{-1}(i\infty) \in \mathbb{H}_-$ (resp. $F^{-1}(-i\infty) \in \mathbb{H}_+$).

Maintenant, soit $W = f^{-1}(\mathbb{C}(] - 1/\lambda^2, 1/\lambda^4[))$. Par construction,

$$f : W \rightarrow \mathbb{C}(] - 1/\lambda^2, 1/\lambda^4[)$$

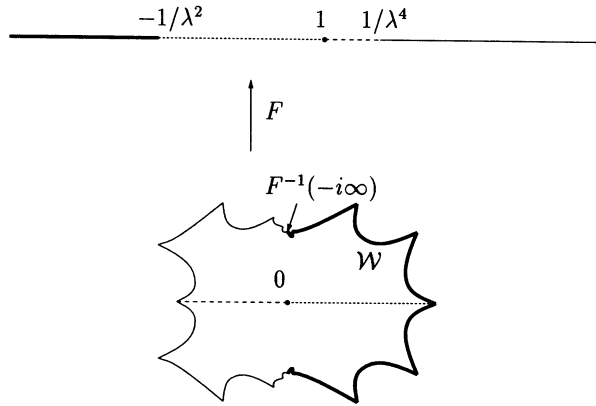


FIG. 9 - $W = F^{-1}(\mathbb{C}[-1/\lambda^2, 1/\lambda^4])$.

est un revêtement ramifié ayant un seul point critique en 0, de degré ℓ , et W est invariant par rotation d'angle $2i\pi/\ell$. Nous avons dessiné un domaine possible pour un degré $\ell = 4$ sur la figure 10.

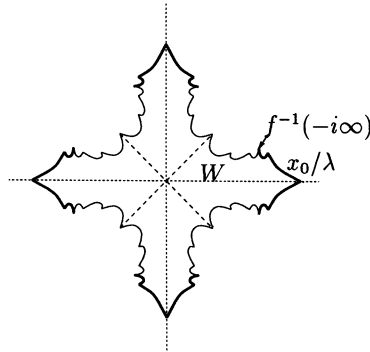


FIG. 10 - Un domaine W pour un degré $\ell = 4$.

Maintenant que nous connaissons le domaine de f ainsi que la position relative de certains points, nous pouvons en déduire la proposition suivante.

PROPOSITION 16.—*Soient*

- $f : W \rightarrow \mathbb{C}[-1/\lambda^2, 1/\lambda^4]$, une solution réelle de l'équation de Cvitanović-Fibonacci,
- $f_\lambda(z) = f(\lambda z)$, et
- $f_{\lambda^2}(z) = f(\lambda^2 z)$.

Alors $f_{\lambda^2} : W/\lambda^2 \rightarrow \mathbb{C}[-1/\lambda^2, 1/\lambda^4]$ est une application à allure polynômiale ayant un point fixe attractif de multiplicateur $-\lambda^2$, et f_λ est un linéarisateur de f_{λ^2} .

PREUVE. Le fait que f_{λ^2} soit une application à allure polynômiale (voir [DH]) découle directement du fait que

$$\overline{W}/\lambda^2 \subset \mathbb{C}[-1/\lambda^2, 1/\lambda^2] \subset \mathbb{C}[-1/\lambda^2, 1/\lambda^4].$$

D'autre part, nous pouvons réécrire l'équation de Cvitanović-Fibonacci de la manière suivante: $f_{\lambda}(z) = -1/\lambda^2 f_{\lambda}(f_{\lambda^2}(z))$, ce qui signifie que f_{λ} semi-conjugué f_{λ^2} à $z \mapsto -\lambda^2 z$ (c'est une conjugaison au voisinage de α). Le reste de la proposition vient aussitôt. De plus, si x_0 désigne la préimage positive de 0 par f , alors le point fixe, α , de f_{λ^2} vérifie $x_0 = \lambda\alpha$.

$$\begin{array}{ccc} \alpha = x_0/\lambda & \xrightarrow{f_{\lambda^2}} & \alpha = x_0/\lambda \\ f_{\lambda} \downarrow & & \downarrow f_{\lambda} \\ 0 & \xrightarrow{-\lambda^2 z} & 0 \end{array}$$

L'ensemble de Julia de f_{λ^2} , $K(f_{\lambda^2})$ est donc un disque topologique fermé, bordé par une courbe de Jordan. Revenons maintenant au point fixe de $\widetilde{\mathcal{R}}$. ■

PROPOSITION 17.—*Soit f_0 une solution de l'équation de Cvitanović-Fibonacci. Posons*

$$\begin{aligned} V &= \lambda \overset{\circ}{K}(f_{\lambda^2}), \\ U^0 &= f_0^{-1}(V), \\ U^1 &= f_0(\lambda^2 V). \end{aligned}$$

Définissons par ailleurs f , par $f|U^0 = f_0$ et $f|U^1 = -\lambda^{-1} \circ f_0 \circ \lambda$. Alors $f : U^0 \cup U^1 \rightarrow V$ est une application de Fibonacci telle que $\widetilde{\mathcal{R}}([f]) = [f]$.

Cette proposition traduit le fait qu'il existe une manière canonique de construire un représentant des points fixes de $\widetilde{\mathcal{R}}$, en utilisant l'équation de Cvitanović-Fibonacci. Le résultat n'est pas immédiat. La partie technique consiste à montrer que les ouverts U^0 et U^1 sont bien relativement compacts et disjoints dans V .

7.3. Retour sur le jeu homothétique

Toute la construction du jeu de Fibonacci réalisée par van Strien et Nowicki pour le polynôme de Fibonacci P peut être faite à partir de l'application de Fibonacci construite dans la proposition 17. Ce travail est détaillé dans [Bu]. Le jeu ainsi construit est le jeu homothétique de la partie 5.1. En effet, d'après la proposition 14, il existe un homéomorphisme quasi-conforme, $\phi : D_1 \rightarrow V$ qui conjugue $P_1 = (P^{(2)} \cup P) : D_1^0 \cup D_1^1 \rightarrow D_1$ à $f : U^0 \cup U^1 \rightarrow V$. La proposition 5 (voir §5.1) découle directement de cette conjugaison et du fait que f est un point fixe de $\widetilde{\mathcal{R}}$. Les disques $\widetilde{D}_1 = V$ et \widetilde{D}_k sont des homothétiques de l'ensemble de Julia $K(f_{\lambda^2}^k)$, et les applications \tilde{f}_k des conjuguées de la solution f_0 de l'équation de Cvitanović-Fibonacci.

8. ESPÉRANCE ET VARIANCE DU JEU DE FIBONACCI.

L'idée initiale de van Strien et de Nowicki était d'utiliser le corollaire 2 (§4.3) pour achever la démonstration du lemme 2 (§5.1). Pour cela, ils comptaient montrer les trois lemmes suivants :

LEMME 4.—Il existe une constante $K_1 > 0$, telle que pour tout $k > 0$, il existe un degré $\ell(k)$ tel que pour tout degré pair $\ell \geq \ell(k)$,

$$\frac{\hat{\mu}(\{z \in \tilde{A}_0 \mid \hat{g}(z) = k\})}{\hat{\mu}(\tilde{A}_0)} \geq \frac{K_1}{k^2}.$$

LEMME 5.—Pour chaque degré ℓ ,

$$\frac{\hat{\mu}(\{z \in \tilde{A}_0 \mid \hat{g}(z) = k\})}{\hat{\mu}(\tilde{A}_0)} = \mathcal{O}(\lambda^{2k}),$$

où λ est le rapport du jeu en degré ℓ .

(*LEMME 6.*)—Soit \mathcal{A}_1 la partition de \widehat{X} en régions où le gain est constant (figure 5). Rappelons que si $A \in \mathcal{A}_n$, alors $\widehat{\Psi}^{(n)}(A) = \tilde{A}_0$. Il existe un réel K_2 , qui ne dépend pas du degré ℓ , telle que

- pour tout $n \geq 1$,
- pour toute partie $A \in \mathcal{A}_n$, et
- pour toute partie $B \in \mathcal{A}_{n+1}$ contenue dans A ,

$$\frac{1}{K_2} \frac{\hat{\mu}(\widehat{\Psi}^{(n)}(B))}{\hat{\mu}(\widehat{\Psi}^{(n)}(A))} < \frac{\hat{\mu}(B)}{\hat{\mu}(A)} < K_2 \frac{\hat{\mu}(\widehat{\Psi}^{(n)}(B))}{\hat{\mu}(\widehat{\Psi}^{(n)}(A))}.$$

Le lemme 4 n'est pas très dur à démontrer une fois que nous avons compris le comportement asymptotique des solutions de l'équation de Cvitanović-Fibonacci quand le degré ℓ tend vers l'infini. Le lecteur pourra trouver une démonstration complète dans [SN], sous la désignation de *Big Jump Property*. Il permet de montrer que l'espérance au premier coup, E_1 , tend vers l'infini quand le degré ℓ tend vers l'infini.

Le lemme 5, quant à lui, est une conséquence directe du fait que

$$\{z \in \tilde{A}_0 \mid \hat{g}(z) = k\} = f^{-1}(\lambda^k \tilde{A}_0),$$

où f est la solution de l'équation de Cvitanović-Fibonacci de degré ℓ ; son jacobien au sens réel en $x_0 = f^{-1}(0)$ est $|f'(x_0)|^2$. Il traduit le fait que pour chaque degré ℓ , la variance du jeu quotient est finie.

Le (lemme 6) traduit une quasi-indépendance des coups. Il aurait permis de montrer directement que le jeu quotient vérifie les hypothèses du corollaire 2 (voir §4.3) si le degré ℓ était suffisamment grand. Cependant il n'est pas juste tel quel, et nous serons amenés à travailler dans la partie suivante, de manière à récupérer l'indépendance des coups.

8.1. Espérance

Dans cette partie nous travaillons avec le jeu quotient, $(\widehat{X}, \widehat{\mu}, \widehat{g}, \widehat{\Psi})$ (voir §5.2). Nous allons commencer par montrer que le lemme 4 entraîne la proposition suivante.

PROPOSITION 18.—*L'espérance du jeu quotient tend vers l'infini quand le degré ℓ du polynôme de Fibonacci tend vers l'infini.*

PREUVE. Rappelons la définition de l'espérance :

$$\begin{aligned} E &= \int_{\widehat{X}} \widehat{g}(x) d\widehat{\mu}(x) \\ &= \frac{1}{\widehat{\mu}(\widetilde{A}_0)} \int_{\widetilde{A}_0} \widehat{g}(x) d\widehat{\mu}(x) \\ &= \frac{1}{\widehat{\mu}(\widetilde{A}_0)} \sum_{k=-2}^{+\infty} k \widehat{\mu}(\{z \in \widetilde{A}_0 \mid \widehat{g}(z) = k\}). \end{aligned}$$

Il nous faut donc avoir une estimation de

$$\widehat{\mu}(\{z \in \widetilde{A}_0 \mid \widehat{g}(z) = k\}) / \widehat{\mu}(\widetilde{A}_0).$$

Pour tout $C \in \mathbb{R}$, commençons par choisir un $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{k=1}^N K_1/k \geq C + 2.$$

et posons

$$\ell_0 = \sup_{k \leq N} \ell(k).$$

Alors, pour tout $\ell \geq \ell_0$,

$$\begin{aligned} E &= \sum_{k=-2}^{+\infty} k \frac{\widehat{\mu}(\{z \in \widetilde{A}_0 \mid \widehat{g}(z) = k\})}{\widehat{\mu}(\widetilde{A}_0)} \\ &\geq -2 + \sum_{k=1}^N k \frac{K_1}{k^2} > C. \end{aligned}$$

8.2. Comportement asymptotique des solutions

Ce que nous allons exposer dans cette partie a été démontré par Epstein. Il s'agit d'adapter les résultats d'Eckmann et Wittwer [EW] et d'Epstein [E2] concernant l'équation

de Feigenbaum-Cvitanović au cas de l'équation de Cvitanović-Fibonacci. Van Strien et Nowicki ont obtenu indépendamment des résultats équivalents ([SN], §V).

PROPOSITION 19.—*Soit $f : W \rightarrow \mathbb{C}([-\lambda^{-2}, \lambda^{-4}])$ la solution de l'équation de Cvitanović-Fibonacci en degré ℓ . $f(z)$ est de la forme $F(z^\ell)$, où F est univalente sur*

$$\mathcal{W} = \{z \in \mathbb{C} \mid z^{1/\ell} \in W\}.$$

De toute suite de degrés pairs ℓ_k qui tend vers l'infini quand k tend vers l'infini, nous pouvons extraire une sous-suite que nous noterons encore ℓ_k , telle que,

- λ^{ℓ_k} a une limite $\tau \in]0, 1[$,
- $x_0^{\ell_k}$ a une limite ω ,
- les régions pointées $(\mathcal{W}, 0)$ et $(\mathcal{W}, \lambda^{\ell_k})$ ont des limites $(\mathcal{W}_0, 0)$ et (\mathcal{W}_1, τ) , avec $\overline{\mathcal{W}_0} \cap \overline{\mathcal{W}_1} = \{\omega\}$, et
- F^{ℓ_k} converge uniformément sur tout compact de \mathcal{W}_0 et de \mathcal{W}_1 vers une application \mathcal{F} .

La topologie sur les régions pointées est la topologie de Carathéodory utilisée par McMullen [McM].

La proposition dit que lorsque ℓ tend vers l'infini, l'ouvert \mathcal{W} se pince en ω . Nous obtenons ainsi deux composantes connexes : \mathcal{W}_0 et \mathcal{W}_1 sur lesquelles F^ℓ a une limite.

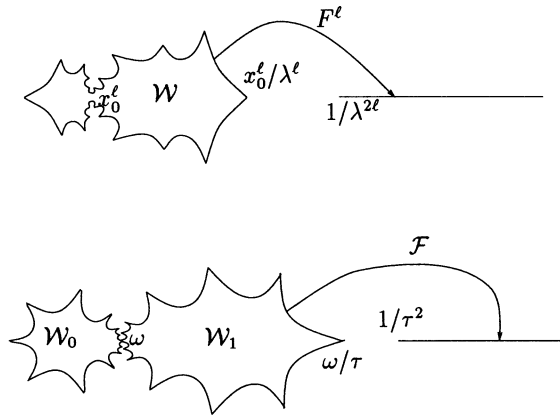


FIG. 11 – La limite \mathcal{F} de F^ℓ , quand ℓ tend vers l'infini

8.3. Les applications associées \mathcal{F}_τ et \mathcal{F}_{τ^2}

De même que nous avons défini les applications f_λ et f_{λ^2} , il est naturel maintenant de prendre en compte les applications $\mathcal{F}_\tau(z) = \mathcal{F}(\tau z)$ et $\mathcal{F}_{\tau^2}(z) = \mathcal{F}(\tau^2 z)$. Nous nous intéresserons également à l'ensemble de Julia rempli de \mathcal{F}_{τ^2} :

$$\mathcal{K}(\mathcal{F}_{\tau^2}) = \{z \in \mathbb{C} \mid (\forall n \in \mathbb{N}) \mathcal{F}_{\tau^2}^{(n)}(z) \in \mathcal{W}_0 \cup \mathcal{W}_1 \cup \{\omega\}\}.$$

Remarquons alors que F^ℓ ne s'annule qu'en x_0^ℓ . En passant à la limite, comme ω n'est pas dans le domaine limite $\mathcal{W}_0 \cup \mathcal{W}_1$, la fonction \mathcal{F} ne s'annule pas. D'autre part $\mathcal{F}(0) = 1$. Par conséquent, nous pouvons donc définir le logarithme $\log(\mathcal{F})$ de sorte que $\log(\mathcal{F})(0) = 0$.

PROPOSITION 20 (cf [EW] ou [SN], §9.1).— \mathcal{F}_{τ^2} a un point fixe, $\omega/\tau = \beta$, parabolique de multiplicateur -1 . La coordonnée de Fatou, Φ , de $\mathcal{F}_{\tau^2} \circ \mathcal{F}_{\tau^2}$, qui s'annule en 0, est $\log(\mathcal{F}(\tau z))/\log(\tau^4)$.

Nous pouvons donc décrire le comportement de \mathcal{F} au voisinage de sa singularité, ω .

COROLLAIRE 3.—Il existe une constante $C > 0$ et des ouverts V_0 et V_1 tels que,

- $V_i \subset \mathcal{W}_i$, $i = 0, 1$,
- $\omega \subset \partial V_i$, $i = 0, 1$,
- l'image de chaque V_i par l'application $z \mapsto -C/(z-\omega)^2$ contient un demi-plan gauche, et
- sur $V_0 \cup V_1$,

$$\log(\mathcal{F})(z) = -C/(z-\omega)^2 + \mathcal{O}(1).$$

PREUVE. Il suffit pour cela de remarquer que la seule valeur asymptotique de \mathcal{F}_{τ^2} est 0. Par conséquent, $\mathcal{F}_{\tau^2} \circ \mathcal{F}_{\tau^2}$ a un cycle de deux pétales paraboliques attachés en β . La coordonnée de Fatou, Φ , est donc de la forme $K/(z-\beta)^2 + \mathcal{O}(1)$ dans des voisinages à gauche et à droite de β . ■

PREUVE DU LEMME 4. La démonstration découle des propriétés de continuité des ensembles de Julia, et du corollaire 3. En effet, nous pouvons alors en déduire que $\{z \in \mathbb{C} \mid z^{1/\ell} \in \tilde{A}_0\}$ converge vers un ouvert

$$\mathcal{A} = \overset{\circ}{\mathcal{K}}(\mathcal{F}_{\tau^2}) \setminus \tau \mathcal{K}(\mathcal{F}_{\tau^2}).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \{z \in \tilde{A}_0 \mid \hat{g}(z) = k\} &= \{z \in \tilde{A}_0 \mid f(z) \in \lambda^k \tilde{A}_0\} \\ &= f^{-1}(\lambda^k \tilde{A}_0). \end{aligned}$$

Il suffit alors d'utiliser le fait que $\hat{\mu}$ est seulement multipliée par ℓ quand on élève à la puissance ℓ . Par conséquent, pour chaque $k \geq 1$,

$$\frac{\hat{\mu}(\{z \in \tilde{A}_0 \mid \hat{g}(z) = k\})}{\hat{\mu}(\tilde{A}_0)} \xrightarrow{\ell \rightarrow +\infty} \frac{\hat{\mu}(\mathcal{F}^{-1}(\tau^k \mathcal{A}))}{\hat{\mu}(\mathcal{A})}.$$

Nous connaissons le comportement de \mathcal{F} au voisinage de ω . Un calcul simple nous permet alors de montrer que la quantité $\hat{\mu}(\mathcal{F}^{-1}(\tau^k \mathcal{A})) / \hat{\mu}(\mathcal{A})$ est de l'ordre de K_1/k^2 . \square

9. INDÉPENDANCE DES COUPS

Comme nous l'avons signalé dans la section précédente, le (lemme 6) traduit une certaine indépendance des coups, et nous permettrait de montrer que le jeu quotient vérifie les hypothèses du corollaire 2 (§4.3). Cependant certaines corrélations peuvent apparaître, et il nous faut donc étudier de plus près ce qui se passe. Nous pouvons définir des régions dites de **guigne** (jinx), telles que

- si l'orbite d'un point sort d'une de ces régions, l'indépendance est retrouvée,
- tant que l'orbite reste dans la même région de guigne, la corrélation peut augmenter, mais
- le temps moyen mis pour sortir d'une région de guigne est majoré par une constante T , indépendamment du degré ℓ .

Comme le gain est minoré par -2 , la perte moyenne entre deux coups indépendants (c'est-à-dire entre deux coups où l'orbite d'un point sort d'une des régions) est majorée par $2T$. Nous pouvons alors choisir le degré ℓ de sorte que l'espérance de gain, à chaque fois que l'orbite sort d'une région de guigne, soit supérieure à $E > 2T$ (Prop. 18, §8.1). La proposition 3 (§4.3) permettra alors de montrer que le jeu homothétique est ultimement gagnant : pour $\hat{\mu}$ presque tout $x \in \widehat{X}$, $\hat{g}(x) + \dots + \hat{g}(\widehat{\Psi}^{(n)}(x)) \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$.

9.1. Lemme de distorsion

DÉFINITION 8.—*Nous dirons que $f : U \rightarrow V$ a une distorsion bornée par K si et seulement s'il existe une constante K telle que pour tous sous-ensembles U_1 et U_2 de U ,*

$$\frac{1}{K} \frac{\mu(U_1)}{\mu(U_2)} < \frac{\mu(f(U_1))}{\mu(f(U_2))} < K \frac{\mu(U_1)}{\mu(U_2)},$$

où μ désigne la mesure de Lebesgue.

Le lemme crucial qui nous permet de contrôler l'indépendance des coups est le lemme de distorsion de Koebe.

LEMME 7.—*Soit $f : U \rightarrow V$ une application univalente, où U est un domaine simplement connexe de \mathbb{C} . Soit $U' \subset U$ un domaine simplement connexe relativement compact dans U . Il existe une constante K qui ne dépend que du module de l'anneau $A = U \setminus \overline{U'}$, telle que la distorsion sur U' est bornée par K .*

Nous pouvons adapter ce lemme de distorsion comme le font van Strien et Nowicki.

LEMME 8.—Soit $f : U \rightarrow V$ un revêtement non ramifié. Soit V' un ouvert simplement connexe relativement compact dans V et U' sa préimage par f . Soit d la distance de V' au bord de V et δ le diamètre de V' . Il existe une constante K qui ne dépend que du rapport δ/d telle que la distorsion sur U' est bornée par K .

Supposons qu'il existe une constante $K_2 \in \mathbb{R}$ telle que pour toute partie $A \in \mathcal{A}_n$, $\widehat{\Psi}^{(n)} : A \rightarrow \widehat{\Psi}^{(n)}(A)$ ait une distorsion bornée par K_2 , Alors

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A \hat{g}(\widehat{\Psi}^{(n)}(z)) d\mu(z) \geq \frac{1}{K_2 \mu(\widehat{\Psi}^{(n)}(A))} \int_{\widehat{\Psi}^{(n)}(A)} \hat{g}(z) d\mu(z) - 2,$$

car le gain est minoré par 2. La deuxième moitié de l'inégalité est l'espérance de gain sur $\widehat{\Psi}^{(n)}(A)$. Si cette espérance de gain est supérieure à $3K_2$, alors l'espérance conditionnelle

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A \hat{g}(\widehat{\Psi}^{(n)}(z)) d\mu(z)$$

est supérieure à 1. De plus nous pourrions également montrer que la condition (2) de variance du corollaire 2 (§4.3) serait vérifiée. Nous aurions alors terminé la démonstration.

Il nous faut donc connaître la distorsion de $\widehat{\Psi}^{(n)} : A \rightarrow \widehat{\Psi}^{(n)}(A)$.

9.2. Extension maximale de $\widehat{\Psi}^{(n)}$

Rappelons que sur chaque partie de \tilde{A}_0 , où le gain \hat{g} vaut k , $\widehat{\Psi}$ est égale à $\lambda^{-k} \tilde{f}_0$, où f_0 est la solution de l'équation de Fibonacci. Or f_0 est un revêtement ramifié de W dans $\mathbb{C}(-1/\lambda^2, 1/\lambda^4]$, la seule valeur critique étant 1. Par récurrence nous pouvons montrer le lemme suivant, illustré sur la figure 12.

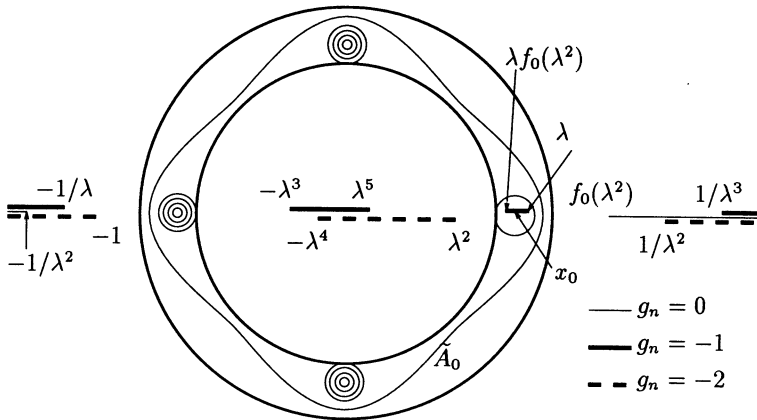


FIG. 12 – Les coupures en continu correspondent à une perte de 1, et celle en pointillés à une perte de 2.

LEMME 9 (cf [SN], Théorème 11.1).—Soit A une partie de \mathcal{A}_n . Le gain au n -ième coup,

$g_n = \hat{g} \circ \hat{\Psi}^{(n-1)}$, est constant sur A . Il existe un ouvert U contenant A et tel que $\hat{\Psi}^{(n)} : U \rightarrow \hat{\Psi}^{(n)}(U)$ est un revêtement non ramifié au dessus de

- si $g_n \geq 0$,

$$\hat{\Psi}^{(n)}(U) = \mathbb{C} \left(] - 1/\lambda^{2+g_n}, f_0(\lambda^2)/\lambda^{g_n}[\right),$$

- si $g_n = -1$,

$$\hat{\Psi}^{(n)}(U) = \mathbb{C} \left(] - 1/\lambda, 1/\lambda^3[\right) \setminus \left([-\lambda^3, \lambda^5] \cup [\lambda f_0(\lambda^2), \lambda] \right),$$

- si $g_n = -2$,

$$\hat{\Psi}^{(n)}(U) = \mathbb{C} \left(] - 1, 1/\lambda^2[\right) \setminus [-\lambda^4, \lambda^2].$$

Pour pouvoir appliquer le lemme 8, il ne nous reste plus qu'à avoir une estimation de la géométrie de l'anneau \tilde{A}_0 .

9.3. Estimation géométrique sur l'anneau \tilde{A}_0 , partition raffinée

Nous pouvons obtenir des estimées sur la géométrie de l'anneau \tilde{A}_0 , en utilisant le comportement asymptotique des solutions de l'équation de Fibonacci quand le degré ℓ tend vers l'infini. En effet, nous savons alors que, quitte à conjuguer par $z \mapsto z^\ell$, cet anneau tend vers

$$\mathcal{A} = \mathring{\mathcal{K}}(\mathcal{F}_{\tau^2}) \setminus \tau\mathcal{K}(\mathcal{F}_{\tau^2}).$$

Or \mathcal{F}_{τ^2} a un point fixe parabolique $\beta = \omega/\tau$ (Prop. 20). Nous pouvons donc constater que les anneaux \tilde{A}_0 se pincent au voisinage de x_0 , λx_0 et de $-\lambda x_0$ quand ℓ tend vers l'infini. Or nous avons vu que si nous essayons de prolonger $\hat{\Psi}^{(n)}$, nous rencontrons des valeurs critiques au voisinage de ces points (voir figure 13). C'est pour cette raison que $\hat{\Psi}^{(n)}$ n'a pas une distorsion bornée indépendamment de ℓ .

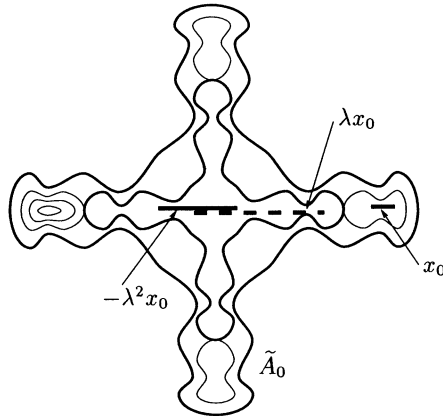


FIG. 13 – Les anneaux \tilde{A}_0 se pincent au voisinage de certaines valeurs critiques de $\hat{\Psi}^{(n)}$.

Comme toutes les valeurs critiques de $\widehat{\Psi}^{(n)}$ sont sur l'axe réel, c'est lorsque l'orbite d'un point reste près de l'axe réel que nous verrons des corrélations apparaître. Pour préciser cette idée, nous serons amenés à considérer une partition raffinée de \tilde{A}_0 .

Commençons par définir la partition de \mathbb{C} en secteurs S_k , de sommet 0 et d'angle $2\pi/\ell$:

$$S_k = \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi/\ell + 2k\pi/\ell < \text{Arg}(z) \leq \pi/\ell + 2k\pi/\ell\}.$$

Les deux secteurs centrés sur l'axe réel sont S_0 et S_ℓ .

La partition \mathcal{A}_0^* est la partition de \tilde{A}_0 induite par la partition $(S_0, \dots, S_{2\ell-1})$ de \mathbb{C} . Nous allons maintenant montrer que le seul moyen d'augmenter la distorsion est de rester dans des régions que nous appelons des régions de guigne.

9.4. Régions de guigne

DÉFINITION 9.—*Les régions de guigne sont des éléments de la partition $\mathcal{A}_1^* = \widehat{\Psi}^{-1}(\mathcal{A}_0^*)$.*

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ z \in \tilde{A}_0 \mid \hat{g}(z) = -1; \begin{array}{l} z \in S_0 \text{ et } \widehat{\Psi}(z) \in S_\ell, \text{ ou} \\ z \in S_\ell \text{ et } \widehat{\Psi}(z) \in S_0 \end{array} \right\},$$

$$\mathcal{B}_2 = \{z \in \tilde{A}_0 \mid \hat{g}(z) = -2; z \in S_0; \widehat{\Psi}(z) \in S_0\}.$$

Elles sont hachurées sur la figure 14.

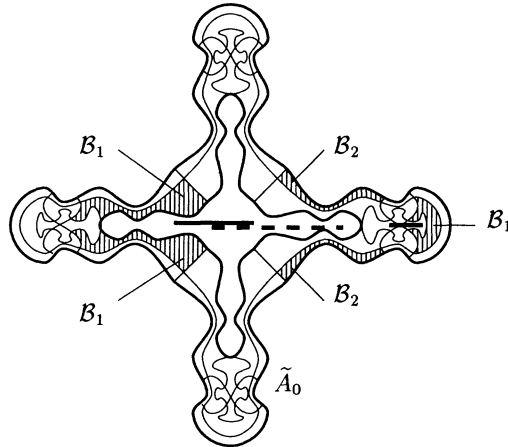


FIG. 14 – Les régions de guigne : \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 .

Ces régions sont appelées régions de guigne, car le seul moyen d'accroître la distorsion, est d'y rester suffisamment longtemps. Autrement dit, dès que l'orbite d'un point sort d'une de ces régions, nous contrôlons la distorsion. Cette idée est traduite dans le lemme suivant.

LEMME 10 (cf [SN], Théorème 12.1).—Il existe une constante K_2 indépendante de ℓ telle que pour chaque partie $A \in \mathcal{A}_n^*$,

- si $\widehat{\Psi}^{(n-1)}(A) \neq \mathcal{B}_i$, $i = 1, 2$, alors $\widehat{\Psi}^{(n)} : A \rightarrow \widehat{\Psi}^{(n)}(A)$ a une distorsion bornée par K_2 , et
- si $\widehat{\Psi}^{(n-2)}(A) \subset \mathcal{B}_i$ et $\widehat{\Psi}^{(n-1)}(A) = \mathcal{B}_j$, avec $i \neq j$, alors $\widehat{\Psi}^{(n)} : A \rightarrow \widehat{\Psi}^{(n)}(A)$ a une distorsion bornée par K_2 .

PREUVE. La forme limite de l'anneau $\tilde{\mathcal{A}}_0$ est contrôlée grâce au comportement asymptotique des solutions de l'équation de Fibonacci. Rappelons que \mathcal{F}_{τ^2} a un point fixe parabolique, β , et que 0 est la seule valeur asymptotique. Une composante connexe de $\mathring{\mathcal{K}}(\mathcal{F}_{\tau^2})$ est donc un pétale. Ce pétale contient le segment réel $[0, \beta[$, car \mathcal{F}_{τ^2} est une application réelle. Ce résultat nous permet alors de contrôler le rapport entre le diamètre des parties de \mathcal{A}_0^* et leur distance aux coupures indiquées sur la figure 12. Le lemme de distorsion 8 nous permet alors de conclure. \square

9.5. Temps moyen pour sortir des régions de guigne

Il ne reste plus qu'à contrôler la perte entre deux coups successifs où l'orbite de A quitte une région de guigne. Nous allons montrer qu'il existe une constante T , indépendante du degré ℓ , telle que le temps moyen mis pour sortir des régions de guigne soit inférieur à T . Pour cela, il suffit d'estimer l'aire de

$$\mathcal{B}_{i,n} = \{z \in \mathcal{B}_i \mid (\forall k \in [0, n]) \widehat{\Psi}^{(k)}(z) \in \mathcal{B}_i\},$$

c'est-à-dire de l'ensemble des points dont l'orbite reste dans la région \mathcal{B}_i pendant au moins n coups.

En utilisant le comportement asymptotique des solutions de l'équation de Cvitanović-Fibonacci quand le degré ℓ tend vers l'infini, il est possible de montrer le lemme suivant.

LEMME 11.—Il existe une constante C qui ne dépend pas du degré ℓ , telle que

$$\frac{\hat{\mu}(\mathcal{B}_{i,n})}{\hat{\mu}(\tilde{\mathcal{A}}_0)} \leq \frac{C}{n^2}.$$

D'autre part, pour chaque degré ℓ , il existe une constante $0 < \rho < 1$ (qui dépend de ℓ) telle que

$$\frac{\hat{\mu}(\mathcal{B}_{i,n})}{\hat{\mu}(\tilde{\mathcal{A}}_0)} = \mathcal{O}(\rho^{2n}).$$

PREUVE. Nous allons donner une idée de la démonstration pour $i = 2$. La démonstration pour $i = 1$ est analogue. Rappelons que

$$\mathcal{B}_2 = \{z \in \tilde{\mathcal{A}}_0 \cap S_0 \mid \lambda^2 f_0 \in \tilde{\mathcal{A}}_0 \cap S_0\},$$

et que $\widehat{\Psi}|_{\mathcal{B}_2} = \lambda^2 f_0$. Par conséquent

$$\mathcal{B}_{2,n+1} = \mathcal{B}_2 \cap (\lambda^2 f_0)^{-1}(\mathcal{B}_{2,n}).$$

Or l'application $\lambda^2 f_0$ a un point fixe attractif, λx_0 , et un cycle de deux points répulsifs de multiplicateur ρ , dans le bord de son ensemble de Julia. Comme

$$\mathcal{B}_{2,n} = \left(\lambda^2 f_0 | \mathcal{B}_2 \right)^{(-n)} (\mathcal{B}_2),$$

nous pouvons obtenir la seconde estimée

$$\hat{\mu}(\mathcal{B}_{2,n}) \sim \rho^{2n} \hat{\mu}(\mathcal{B}_2).$$

La première partie du lemme 11 provient du comportement asymptotique quand le degré ℓ tend vers l'infini. En effet, quitte à conjuguer par $z \mapsto z^\ell$, ces ensembles ont des limites, x_0^ℓ tend vers ω , et $(\lambda^2 f_0)^\ell(z^{1/\ell})$ converge vers $\tau^2 \mathcal{F}$. Le cycle de deux points répulsifs se transforme en un point parabolique: $\tau\omega$. Il suffit alors d'utiliser les coordonnées de Fatou pour estimer l'aire des $\mathcal{B}_{2,n}$ quand le degré ℓ est suffisamment grand. \square

PREUVE DU THÉORÈME. Pour tout $x \in \widehat{X}$, nous pouvons définir la variable

$$t_k = \inf\{n > t_{k-1} \mid \widehat{\Psi}^{(n)}(x) \text{ quitte une des régions } \mathcal{B}_i\}.$$

La première estimation permet de conclure que le temps moyen mis pour sortir de la région \mathcal{B}_i ,

$$E(t_1) = \frac{1}{\hat{\mu}(\widehat{A}_0)} \sum_{n=1}^{+\infty} \hat{\mu}(\mathcal{B}_{i,n})$$

est majoré par $C\pi^2/6$. La deuxième estimation permet de conclure que la variance de la variable t_1 est finie. Le lemme 10 dit que si l'orbite de A quitte \mathcal{B}_1 ou \mathcal{B}_2 , la distorsion est bornée par K_2 . Par conséquent il existe une constante T qui ne dépend pas du degré ℓ et une constante V qui dépend de ℓ telles que, pour tout k ,

- l'espérance $E(t_k)$ est majorée par T , et
- la variance de t_k est majorée par V .

Nous pouvons alors appliquer le corollaire 2 (§4.3), pour conclure que pour $\hat{\mu}$ -presque tout point $x \in \widehat{X}$, et pour tout $\beta > 1/2$,

$$t_k \leq kT + o(k^\beta).$$

D'autre part, le lemme 10 et la proposition 18 (§8.1) permettent de montrer que pour toute constante E , il existe un degré ℓ_0 tel que pour tout degré pair $\ell \geq \ell_0$ et tout $n \geq 1$, l'espérance conditionnelle de gain au n -ième coup est supérieure à E

$$E_n = \frac{1}{\hat{\mu}(A)} \int_A \hat{g}(\widehat{\Psi}^{(n)}(z)) d\hat{\mu}(z) > E,$$

et qu'il existe une constante V' (qui dépend du degré ℓ), telle que pour tout $n \geq 1$, la variance du gain au n -ième coup soit majorée par V' :

$$\int_{\widehat{X}} (\hat{g} \circ \widehat{\Psi}^{(n)} - E_n)^2 < V'.$$

Par conséquent, pour $\hat{\mu}$ -presque tout $x \in \widehat{X}$,

$$\hat{g}(\widehat{\Psi}^{(t_1)}(x)) + \hat{g}(\widehat{\Psi}^{(t_2)}(x)) + \dots + \hat{g}(\widehat{\Psi}^{(t_k)}(x)) \geq kE + o(k^\beta).$$

En combinant les deux résultats, nous montrons que pour $\hat{\mu}$ -presque tout $x \in \widehat{X}$, et pour tout n compris entre t_k et t_{k+1} ,

$$\hat{g}(x) + \dots + \hat{g}(\widehat{\Psi}^{(n)}(x)) \geq kE - 2(k+1)T + o(k^\beta).$$

Si $E > 2T$, cette somme tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. ■

BIBLIOGRAPHIE

- [B] B. BRANNER - *Puzzles and Parapuzzles of Quadratic and Cubic Polynomials*, Mathematical Institute, Technical University of Denmark, Mat-Report (1994).
- [BKNS] H. BRUIN, G. KELLER, T. NOWICKI & S. VAN STRIEN - *Absorbing Cantor sets in dynamical systems: Fibonacci maps*, Stony Brook IMS preprint 1994/2. To appear in *Annals of Mathematics*.
- [Bo] F. BONAHOON - *Bouts des variétés hyperboliques de dimension 3*, *Annals of Mathematics* **Vol. 124** (1986), 71-158.
- [Bu] X. BUFF - *Points fixes de renormalisation*, Thèse, Orsay (1996).
- [BH] B. BRANNER & J.H. HUBBARD - *The Iteration of Cubic Polynomials, Part II: Patterns and Parapatterns*, *Acta Mathematica* **Vol. 169** (1992), 229-325.
- [C] R. CANARY - *Ends of hyperbolic 3-manifolds*, *J. Amer. Math. Soc.* **Vol. 6** (1993), 1-25.
- [D] A. DOUADY - *Topological Entropy of Unimodal Maps*, *Proceedings of the NATO Adv. Study Inst. on Real and Complex Dynamical Systems*, NATO ASI Series **Vol. 464** (1993).
- [DH] A. DOUADY & J.H. HUBBARD - *On the Dynamics of Polynomial-like Mappings*, *Ann. Scient., Ec. Norm. Sup. 4^e serie* **Vol. 18** (1985) 287-343.
- [E1] H. EPSTEIN - *Notes for lectures in Lausanne* (1992).
- [E2] H. EPSTEIN - *New proofs of the existence of the Feigenbaum functions*, *Commun. Math. Phys.* **Vol. 106** (1986), 395-426.
- [EW] J.P. ECKMANN & P. WITTEWIT - *Computer methods and Borel summability applied to Feigenbaum's equation*, *Lecture Notes in Physics*, Heidelberg, New York : Springer **Vol. 227** (1985).

- [H] J.H. HUBBARD - *Local Connectivity of Julia Sets and Bifurcation Loci: Three Theorems of J.C. Yoccoz*, *Topological methods in Modern Mathematics*, Publish or Perish, (1993), 467-511.
- [HK] F. HOFBAUER & G. KELLER - *Some remarks on recent results about S-unimodal maps*, *Ann. Institut Henri Poincaré* **Vol. 53** (1990), 413-425.
- [L1] M. LYUBICH - *Geometry of Quadratic Polynomials: Moduli, Rigidity, and Local Connectivity*, preprint, Institute for Mathematical Sciences, SUNY at Stony Brook, (1993).
- [L2] M. LYUBICH - *Teichmüller Space of Fibonacci Maps*, Preprint, Institute for Mathematical Sciences, SUNY at Stony Brook, (1993).
- [L3] M. LYUBICH - *On the Lebesgue measure of the Julia set of a quadratic polynomial*, Preprint, Institute for Mathematical Sciences, SUNY at Stony Brook, (1991).
- [LM] M. LYUBICH & J. MILNOR - *The unimodal Fibonacci map*, *Journal of the A.M.S.* **Vol. 6** (1993), 425-457.
- [M] J. MILNOR - *Local Connectivity of Julia Sets: Expository Lectures*, preprint, Institute for Mathematical Sciences, SUNY at Stony Brook, (1992).
- [McM] C.T. McMULLEN - *Renormalization and 3-manifolds which fibers over the circle*, Preprint, Berkeley, (1995).
- [SN] S. VAN STRIEN & T. NOWICKI - *Polynomial maps with a Julia set of positive Lebesgue measure: Fibonacci maps*, Preprint, Institute for Mathematical Sciences, SUNY at Stony Brook, (1994). La version la plus récente peut être obtenue par ftp : anonymous ftp, ftp.fwi.uva.nl, directory: cd pub/mathematics/reports/Geometry_and_Dynamics/Dyn95-1
- [T] W. THURSTON - *Geometry and topology of 3-manifolds*, Princeton Univ. lectures notes (1969).
- [Y] J.C. YOCCOZ - *Sur la Connexité Locale de M*, Manuscrit non publié, (1989).

Xavier BUFF

Université de Paris-Sud

URA 1169 du CNRS

Centre de Mathématiques

Bâtiment 425

F-91405 ORSAY CEDEX

E-mail : buff@topo.math.u-psud.fr