

# *Astérisque*

ALAIN CHENCINER

## **À l'infini en temps fini**

*Astérisque*, tome 245 (1997), Séminaire Bourbaki,  
exp. n° 832, p. 323-353

[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1996-1997\\_\\_39\\_\\_323\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1996-1997__39__323_0)

© Société mathématique de France, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## À L'INFINI EN TEMPS FINI

par Alain CHENCINER

Je donne une idée de la démonstration du théorème suivant, qui affirme l'existence de singularités sans collision du problème des cinq corps dans l'espace [24] :

**Théorème (Z.Xia).** *Pour des valeurs convenablement choisies des masses dans le problème isocèle spatial des cinq corps, il existe un ensemble de Cantor de données initiales engendrant des solutions sans collision dans lesquelles quatre des masses partent à l'infini en temps fini.*

Il ne s'agit pas, bien entendu, de physique : si on sait depuis Newton [17] que le potentiel newtonien engendré à l'extérieur d'elle-même par une boule massive à symétrie sphérique est celui que produirait la totalité de la masse concentrée en son centre, le *Problème des  $n$  corps* – étude des mouvements de  $n$  masses ponctuelles soumises à l'attraction newtonienne – ne donne une bonne description du mouvement des corps célestes supposés approximativement sphériques, qu'à la condition que les distances entre ceux-ci soient supérieures à la somme de leurs rayons.

Posé par Painlevé à la fin du siècle dernier dans ses célèbres *Leçons de Stockholm* [18], le problème des “singularités”, obstacles au prolongement dans le temps d'une solution, a donné lieu à plusieurs travaux importants : ceux de Painlevé lui-même, qui montre d'une part que la *lim inf* de la distance minimale de deux particules d'un système tendant vers une singularité doit tendre vers zéro, d'autre part que les singularités du Problème des trois corps sont toutes dues à des collisions; ceux de Von Zeipel [25, 15], qui montre que la taille d'un système tendant vers une singularité ne correspondant pas à une collision tend nécessairement vers l'infini; ceux de Mc Gehee [13, 14] enfin dont l'analyse des solutions évitant de peu une collision triple a mis en lumière la possibilité que l'un des corps soit éjecté à une vitesse arbitrairement grande (voir 3.3), ce qui lui a permis d'en déduire avec Mather [12] l'existence de solutions du problème des quatre corps sur la droite qui, après régularisation par rebond élastique des collisions doubles, partent à l'infini en temps fini. Les solutions de Xia étant

directement inspirées de celles de Mather et McGehee, je commence par décrire ces dernières ainsi que les problèmes nouveaux qu'a du résoudre Xia. Ensuite, avant d'en venir aux preuves, il est nécessaire de familiariser Bourbaki avec les rudiments de la Mécanique Céleste, ce que je fais en m'inspirant d'une présentation développée avec Alain Albouy [2]. D'autres solutions dans lesquelles un polygone plan régulier, dont les  $N$  (grand) sommets sont les centre de gravité de  $N$  couples de corps tous de même masse, explose en temps fini sous l'influence de  $N$  messagers légers et véloces visitant tout à tour chaque couple de façon synchronisée, ont été découvertes par J.L. Gerver [6]. Je ne les décrirai pas.

*N.B. Une partie du texte est reprise quasi-littéralement de celui écrit par l'auteur à l'occasion de la journée de la Société Mathématique de France de juin 1996 consacrée à la Mécanique Céleste. Quelques légèretés ont été corrigées et l'exposé a été recentré sur les démonstrations de Mather-McGehee et de Xia. Merci à ladite Société d'avoir accepté cet autoplagiat et à Bourbaki de s'en être accomodé. Merci enfin à John Mather et Carlès Simo pour d'amicales discussions sur la dernière partie de la preuve.*

## 1. LES SOLUTIONS DE MATHER-McGEHEE ET CELLES DE XIA

**1.1.** Dans les solutions de Mather et McGehee, les quatre corps se déplacent sur une droite en conservant un ordre fixé, disons  $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$ , ordre qui n'est pas détruit par la régularisation des collisions doubles. Après fixation du centre de gravité la dimension de l'espace des phases est égale à 6. Deux amas – le couple  $m_1, m_2$  d'une part, la masse  $m_4$  d'autre part, s'éloignent l'un de l'autre à une vitesse de plus en plus grande sous l'influence d'un léger messenger  $m_3$  qui rebondit indéfiniment sur chacun d'eux. A chaque retour du messenger sur le couple, les trois masses passent de plus en plus près d'une collision triple. En dehors de ces instants le couple a un mouvement de type elliptique aplati (chaque collision est suivie d'un rebondissement élastique) de plus en plus rapide et de demi-grand axe de plus en plus petit. Les principales étapes de la preuve de l'existence de telles solutions sont les suivantes (figure 1) :

1) *L'ensemble  $\Sigma$  des données initiales conduisant à une collision triple des masses  $m_1, m_2, m_3$  est une sous-variété immergée de codimension 1. Un énoncé analogue vaut à énergie fixée.*

Ceci découlera de l'analyse de la variété de collision triple faite en 3.1. Soit  $z_0 \in \Sigma$ .

2) *Il existe un ouvert de valeurs de masses telles que tout arc  $\Gamma$  transverse en  $z_0$  à  $\Sigma$  contienne un sous arc  $\Gamma_0$  d'origine  $z_0$  ayant la propriété suivante : dans les mouvements dont la donnée initiale  $z$  appartient à  $\Gamma_0 \setminus \{z_0\}$ , la masse  $m_3$  passe à un*

instant donné  $\tau_- = \tau_-(z)$ , que l'on peut choisir continu en  $z$  et tendant vers l'instant  $\tau_0$  de la collision triple lorsque  $z$  tend vers  $z_0$ , par le centre de gravité du système en se dirigeant vers  $m_1$  avec une vitesse  $V_-$  qui tend vers  $+\infty$  lorsque  $z$  tend vers  $z_0$ .

C'est le point crucial, prouvé en 3.3, mais qui peut se comprendre intuitivement : la conservation de l'énergie implique qu'au voisinage d'une collision double, la vitesse des deux corps par rapport à leur centre de gravité tend vers l'infini; si  $m_3$  manque de peu la collision triple avec  $m_1$  et  $m_2$ , et rencontre  $m_2$  immédiatement après la collision de cette dernière avec  $m_1$ , elle profite de la vitesse acquise par  $m_2$  et rebondit avec une vitesse augmentée d'autant.

3) Provenant d'une collision avec  $m_2$  à un instant  $\tau^*$  immédiatement antérieur à  $\tau_-$ , la masse  $m_3$  entre en collision à un instant  $\hat{\tau}$  légèrement supérieur à  $\tau_-$  avec la masse  $m_4$  sur laquelle elle rebondit, repasse à un instant  $\tau_+$  par le centre de gravité du système avec une vitesse  $V_+$  dirigée vers le couple  $m_1, m_2$  et entre à nouveau en collision avec  $m_2$  à un instant  $\tau'$  qui, comme  $\tau^*, \tau_-$  et  $\tau_+$ , tend vers  $\tau_0$  lorsque  $z$  tend vers  $z_0$ .

Il faut ici choisir les masses telles que  $\frac{m_4 - m_3}{m_3 + m_4} > \frac{m_3}{m_1 + m_2}$  (et vérifier que les conclusions du 2) sont compatibles avec un tel choix) pour que  $m_3$  rattrape effectivement  $m_2$ . En effet, des estimations élémentaires d'impulsion et d'énergie montrent qu'entre les instants  $\tau_-$  et  $\tau_+$ , les couples  $(m_1, m_2)$  et  $(m_3, m_4)$  influent très peu l'un sur l'autre, ce qui autorise des estimations de type "deux corps". Négligeant la vitesse de  $m_4$  par rapport à  $V_-$ , on obtient comme termes dominants  $\frac{m_3}{m_3 + m_4} V_-$  pour la vitesse du centre de gravité  $g_{34}$  de  $m_3$  et  $m_4$  aux instants  $\tau_-$  et  $\tau_+$ ,  $\frac{m_4}{m_3 + m_4} V_-$  pour la vitesse à l'instant  $\tau_-$  de  $m_3$  par rapport à  $g_{34}$ ,  $\frac{-m_4}{m_3 + m_4} V_-$  pour la vitesse de  $m_3$  par rapport à  $g_{34}$  à l'instant  $\tau_+$ , et  $\frac{m_3 - m_4}{m_3 + m_4} V_-$  pour  $V_+$ . Mais alors, le centre de gravité du système étant fixé, les vitesses  $W_-$  et  $W_+$  aux instants  $\tau_-$  et  $\tau_+$  du centre de gravité de  $m_1$  et  $m_2$  ont toutes deux  $\frac{-m_3}{m_1 + m_2} V_-$  pour terme dominant, d'où la condition sur les masses qui assure que  $|V_+| > |W_+|$ . La petitesse des intervalles de temps  $[\tau_-, \tau_+]$  et  $[\tau_+, \tau']$ , et donc l'assertion sur le comportement limite des fonctions  $\tau^*, \hat{\tau}, \tau_+, \tau'$ , se déduisent de ce que  $V_-$ , et donc également l'énergie interne du couple  $m_3, m_4$ , tend vers l'infini lorsque  $z$  tend vers  $z_0$ . Notons qu'on peut choisir les instants  $\tau^*$  et  $\tau_-$  suffisamment proches pour que le centre de gravité de  $m_1, m_2, m_3$  se déplace arbitrairement peu entre ces instants. On en déduit que  $|x_1(\tau_-)| \geq K|x_1(\tau^*)|$ , où  $K$  peut être choisi arbitrairement proche de  $\frac{2m_1 + m_3}{2m_1}$ , et en particulier strictement supérieur à 1.

4) Le nombre  $N$  de collisions entre  $m_1$  et  $m_2$  pendant l'intervalle de temps  $[\tau^*, \tau']$  tend vers l'infini lorsque  $z$  tend vers  $z_0$ , d'où suit par continuité que le point  $z_0$  est un point d'accumulation de  $\Gamma_0 \cap \Sigma$  puisqu'un tel point d'intersection se rencontre à chaque saut de la fonction  $N$ .

Ce point, qui implique la possibilité d'itérer la construction en se rapprochant de la collision triple, se montre de la manière suivante : au temps  $\tau_-$ , l'énergie interne du couple  $m_1, m_2$  est majorée par un nombre négatif très grand de la forme  $-C_1 V_-^2$  lorsque  $z$  est proche de  $z_0$ , car les masses  $m_3$  et  $m_4$  sont à une distance finie l'une de l'autre ainsi que du centre de gravité de  $m_1, m_2$  (ces trois positions ont des limites distinctes lorsque  $z$  tend vers  $z_0$ ). Une majoration de ce type vaut donc sur tout l'intervalle de temps  $[\tau_-, \tau_+]$ . On en déduit que les masses  $m_1, m_2$  doivent rester pendant cet intervalle à une distance inférieure à un nombre très petit de la forme  $C_2 V_-^{-2}$ , ce qui donne une minoration du type Kepler  $C_3 (V_-^{-2})^{-3/2}$  pour la fréquence, donc une majoration par  $C_4 V_-^{-3}$  du temps séparant deux collisions, donc enfin une minoration du nombre  $N$  par  $C_5 V_-^2$  pendant l'intervalle de temps  $[\tau_-, \tau_+]$ . Ce dernier admet en effet une minoration de la forme  $CV_-^{-1}$ .

5) Pour les valeurs des masses compatibles avec 2) et 3), il existe un ensemble de Cantor de données initiales conduisant à une explosion du système en un temps arbitrairement proche de  $\tau_0$  (que l'on peut lui-même choisir arbitrairement petit).

On remplace  $\Gamma$  par  $\Gamma_0$  et on recommence en choisissant un arc  $\Gamma_1 \subset \Gamma_0$  d'origine  $z_1 \in \Sigma$  assez proche de  $z_0$  pour que l'instant de la collision triple  $\tau_1$  de donnée initiale  $z_1$  soit arbitrairement proche de  $\tau_0$ . Itérant cette construction en choisissant deux arcs disjoints plutôt qu'un seul à chaque étape, on obtient en faisant l'intersection de tous ces arcs l'ensemble de Cantor cherché de données initiales.

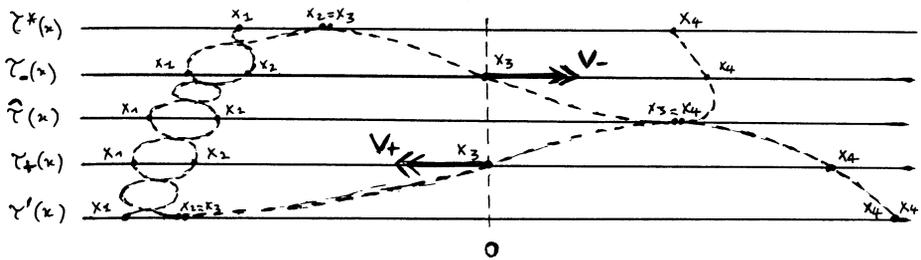


Figure 1

1.2. Afin d'éliminer les collisions, il semblerait naturel de considérer des solutions du problème des quatre corps dans le plan proches de celles de Mather-McGehee. Jusqu'ici personne n'a pu construire de telles solutions sans collision. Dans les solutions spatiales de Xia il y a également deux amas, mais la masse isolée  $m_4$  est rem-

placée par un couple  $m_4, m_5$  et dans chaque couple  $m_1, m_2$  et  $m_4, m_5$  les masses sont égales. Le messenger  $m_3$  se déplace encore sur une droite fixe qui est un axe de symétrie du système, chacun des triplets  $(m_1, m_2, m_3)$  et  $(m_3, m_4, m_5)$  étant isocèle à chaque instant. La symétrie permet d'abaisser la dimension de l'espace des phases mais, le mouvement se passant dans l'espace à trois dimensions, celle-ci est quand même égale à 12 après fixation du centre de gravité. Lorsqu'il n'interagit pas étroitement avec  $m_3$ , chaque couple a autour de son centre de gravité un mouvement de type elliptique dont l'excentricité est de plus en plus grande et le demi-grand axe de plus en plus petit (figure 2). Sous l'influence des aller-retours de plus en plus rapides du messenger, les centres de gravité des deux couples s'éloignent à l'infini en temps fini. Plus précisément, il s'agit de montrer qu'il existe un choix des masses admettant des mouvements du type suivant, permettant d'itérer la construction : la masse  $m_3$  est éjectée à une vitesse arbitrairement grande d'une presque collision triple avec  $m_1$  et  $m_2$  au moment où  $m_4$  et  $m_5$  sont elles-mêmes en presque collision double. Au bout d'un temps arbitrairement court,  $m_3, m_4, m_5$  sont à leur tour en presque collision triple alors que  $m_1$  et  $m_2$  sont en presque collision double, la taille du système a augmenté d'un facteur qui ne dépend que des masses et  $m_3$  revient encore plus vite; on recommence alors en échangeant indéfiniment les rôles des paires  $m_1, m_2$  et  $m_4, m_5$ . Bien entendu, si la synchronisation n'est pas bonne,  $m_3$  peut traverser le couple  $m_4, m_5$  et s'éloigner définitivement !

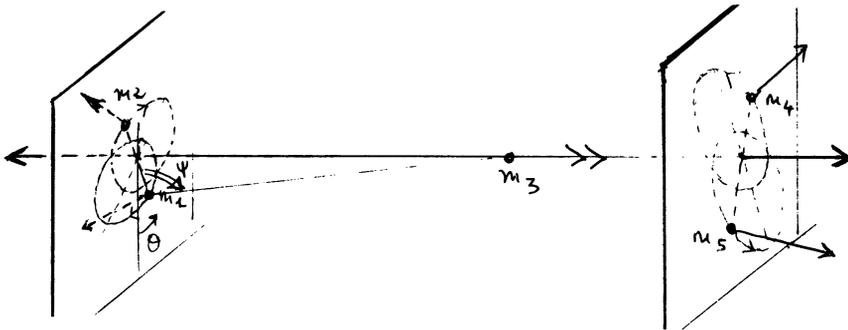


Figure 2

Si l'on permet chez Mather-McGehee des collisions doubles régularisées en rebonds élastiques – mais pas des collisions doubles simultanées – il faut chez Xia éviter toute collision et ce bien qu'un théorème célèbre de Sundman, rappelé en 2.2, implique que les dites solutions soient de moment cinétique nul. Nous verrons en 4.2 que ceci est garanti dès que les directions limites des axes des deux couples ne sont ni parallèles

ni orthogonales. De plus, il ne suffit plus qu'après son expulsion du premier amas le messenger rattrape le second; il faut encore qu'il manque de très peu la collision triple avec ce dernier au moment où le premier sera presque en collision double : alors que les solutions de Mather-McGehee exigent la compréhension de mouvements passant très près d'une collision triple, il faut dans celles de Xia *comprendre des mouvements passant très près de collisions triple et double simultanées*.

En caricaturant à peine, on peut dire que chacune des solutions est une petite perturbation d'une "solution singulière" dans laquelle le messenger fait une infinité d'aller-retours à vitesse infinie entre des amas eux-mêmes en collision infiniment rapide : dans la "solution singulière" de Mather et McGehee on passe ainsi infiniment rapidement et une infinité de fois de la collision triple  $m_1, m_2, m_3$  à la collision double  $m_3, m_4$  et retour alors que dans celle de Xia on passe infiniment rapidement et une infinité de fois des collisions simultanées triple  $m_1, m_2, m_3$  et double  $m_4, m_5$  aux collisions simultanées double  $m_1, m_2$  et triple  $m_3, m_4, m_5$  et retour.

## 2. LE PROBLÈME DES N CORPS

### 2.1. Équations, intégrales premières

Depuis Lagrange [9], les équations différentielles qui régissent le mouvement dans l'espace  $R^3$  de  $n$  masses ponctuelles  $m_i$  soumises à l'attraction newtonienne s'écrivent  $m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i}$ , où le vecteur  $\vec{r}_i \in R^3$  décrit la position de la masse  $m_i$ ,  $\ddot{\vec{r}}_i$  sa dérivée seconde par rapport au temps, et où la fonction de force  $U$ , opposée à l'énergie potentielle, est définie par

$$U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) = \sum_{i < j} m_i m_j |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^{-1}.$$

Soit  $\mathcal{X} = \{(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) \in (R^3)^n, \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = 0\}$ . La fonction  $U$  est bien définie sur l'espace des configurations  $\hat{\mathcal{X}}$ , ouvert de  $\mathcal{X}$  défini par la condition que quels que soient les indices  $i$  et  $j$  distincts, on ait  $\vec{r}_i \neq \vec{r}_j$  (absence de collision). Une *configuration* est un élément  $x$  de cet ouvert. On l'interprétera comme la donnée des positions de  $n$  masses ponctuelles  $m_i$  dans  $R^3$  dont le centre de gravité est à l'origine. C'est l'invariance par translation uniforme des équations qui justifie ce choix; elle implique en effet l'existence d'un repère galiléen dans lequel le centre de gravité du système reste fixe. L'espace des phases (ou espace des "états" ou espace des "positions-vitesses") est l'espace tangent à l'espace des configurations. Nous l'identifierons à l'ouvert  $\hat{\mathcal{X}} \times \mathcal{X}$  du produit  $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ . Nous noterons  $(x, y)$  les éléments de  $\hat{\mathcal{X}} \times \mathcal{X}$ . L'espace des configurations

est muni du *produit scalaire des masses* : si  $x = (\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n)$ ,  $y = (\dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_n)$ , et si  $\langle, \rangle_{R^3}$  désigne le produit scalaire dans  $R^3$ , on pose  $x \cdot y = \sum_{i=1}^n m_i \langle \vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i \rangle_{R^3}$ . Notant  $\nabla U(x)$  le gradient du potentiel pour la métrique sur  $\mathcal{X}$  définie par ce produit scalaire, on écrit les équations de Lagrange sous la forme

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \nabla U(x).$$

Nous noterons  $X_H(x, y) = (y, \nabla U(x))$  le champ de vecteurs sur l'espace des états engendrant ces équations. Les fonctions suivantes, définies également sur l'espace des états, jouent un rôle fondamental dans la description du comportement global des solutions :

$$I = x \cdot x, \quad J = x \cdot y, \quad K = y \cdot y, \quad H = \frac{1}{2}K - U.$$

La première,  $I = \sum_i m_i |\vec{r}_i|^2 = \frac{1}{\sum_i m_i} \sum_{i < j} m_i m_j |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2$ , est l'*inertie par rapport au centre de gravité*. Sa racine carrée  $r = I^{\frac{1}{2}}$  est une mesure de la *taille* d'une configuration, c'est-à-dire du sup des distances mutuelles;  $2J = \dot{I}$  est la dérivée de Lie de  $I$  suivant  $X_H$ , c'est-à-dire la dérivée de  $I$  par rapport au temps; la deuxième,  $K = \sum_i m_i |\dot{\vec{r}}_i|^2 = \frac{1}{\sum_i m_i} \sum_{i < j} m_i m_j |\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_j|^2$ , est le double de l'énergie cinétique dans un repère fixant le centre de gravité; enfin  $H$  est l'énergie totale du système représenté par  $(x, y)$ . On déduit de la conservation de l'énergie  $H$  que, comme  $U$ ,  $K$  est une mesure de l'inf des distances mutuelles, c'est-à-dire de la distance aux collisions.

Les intégrales premières classiques du système, conservées au cours du temps le long de n'importe quelle solution, se déduisent par le théorème de Noether des symétries des équations : alors que l'indépendance de  $X_H$  par rapport au temps implique la conservation de l'énergie  $H$ , déjà évoquée, son invariance par les rotations de  $R^3$  implique la conservation du moment cinétique  $\mathcal{C}$ , bivecteur de  $R^3$  défini par  $\mathcal{C}((\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n), (\dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_n)) = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \wedge \dot{\vec{r}}_i$ , qu'on identifie à un vecteur  $\vec{C}$  une fois fixée l'orientation. La formule  $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}((\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n)) = (\frac{\vec{C}}{|\vec{C}|} \wedge \vec{r}_1, \dots, \frac{\vec{C}}{|\vec{C}|} \wedge \vec{r}_n)$  définit une structure complexe, c'est-à-dire un opérateur  $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$  de carré  $-Id$  sur le sous-espace de  $\mathcal{X}$  formé des  $n$ -uples  $(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n)$  dont chaque composante appartient au plan orthogonal à  $\vec{C}$ , donc sur  $\mathcal{X}$  si le mouvement a lieu dans un plan. Dans le cas général, on a l'inégalité  $\|\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(x)\| \leq \|x\|$ . On se permettra dans tous les cas de parler de  $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$  comme d'une structure complexe et d'appeler *droite complexe engendrée par  $x$*  l'ensemble des éléments de  $\mathcal{X}$  de la forme  $\lambda x + \mu \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(x)$ , avec  $\lambda$  et  $\mu$  réels.

## 2.2. Relation de Lagrange-Jacobi, inégalité de Sundman

Calculons la dérivée  $\dot{J} = \dot{I}/2$  de  $J$  le long d'une solution des équations de Newton en tenant compte de l'homogénéité de degré  $-1$  de  $U(x)$  :

$$\frac{1}{2}\dot{I} = \dot{x} \cdot y + x \cdot \dot{y} = \dot{y} \cdot y + x \cdot \nabla U(x) = K - U = 2H + U = \frac{1}{2}K + H.$$

C'est la relation de Lagrange-Jacobi (ou relation du viriel) [7, 8], base de notre compréhension du comportement global des solutions du Problème des  $n$  corps. La fonction  $U$  étant toujours positive, la fonction  $J$  est croissante le long de chaque solution d'énergie totale  $H$  positive ou nulle. L'existence d'une telle *fonction de Liapunov* interdit toute récurrence non triviale, en particulier tout mouvement périodique. En énergie négative, il est bien connu que les choses sont plus compliquées. L'outil de base, en sus de l'équation de Lagrange-Jacobi, est l'*inégalité de Sundman* [22].

Commençons par examiner le cas de deux corps, pour lequel cette inégalité est une égalité. Le mouvement a lieu sur une droite fixe si le moment cinétique est nul, dans un plan fixe sinon. Dans le premier cas,  $x$  et  $y$  sont proportionnels, et l'inégalité de Cauchy-Schwarz  $IK - J^2 \geq 0$  devient une égalité. Dans le deuxième, notons  $c = \|\vec{C}\|$  la norme du vecteur moment cinétique. La configuration  $y$  des vitesses est dans tous les cas un multiple complexe de la configuration  $x$ . On en déduit facilement (égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz complexe) que  $IK - J^2 = c^2$ . Dès que le nombre de corps est supérieur à deux, cette égalité devient l'*inégalité de Sundman*

$$IK - J^2 \geq c^2,$$

qu'on obtient en minorant la norme  $\|y\|$  de  $y$  (configuration des vitesses) par celle de sa projection orthogonale sur la droite complexe engendrée par  $x$ . Éliminant  $K$  à l'aide de l'équation de Lagrange-Jacobi, on transforme l'inégalité de Sundman en l'inéquation différentielle  $I\ddot{I} - 2IH - \frac{1}{4}\dot{I}^2 - c^2 \geq 0$  qui exprime que la dérivée seconde de  $I$  est toujours supérieure ou égale à la valeur qu'elle aurait pour un Problème de deux corps dans le plan de même énergie, de même moment cinétique, et ayant mêmes valeurs de  $I$  et  $\dot{I}$ . Une fois fixées les valeurs de  $H$  et  $c$ , les courbes intégrales de l'équation différentielle obtenue en remplaçant l'inégalité par une égalité dans l'inéquation ci-dessus, sont les courbes de niveau dans le plan de coordonnées  $(I, J = \dot{I}/2)$  de la *fonction S de Sundman*, définie sur l'espace des états par

$$S = I^{-\frac{1}{2}}(J^2 + c^2) - 2I^{\frac{1}{2}}H,$$

et l'inéquation différentielle, c'est-à-dire l'inégalité de Sundman, équivaut à ce que la dérivée

$$\dot{S} = I^{-\frac{3}{2}}J(IK - J^2 - c^2)$$

de  $S$  le long d'une solution soit du signe de  $J$  : les fonctions  $I$  et  $S$  sont en même temps croissantes ou décroissantes. Dans le cas de deux corps, la fonction de Sundman est une constante ne dépendant que des deux masses; plus généralement, on constate sur l'expression de  $\dot{S}$  que les mouvements de  $n$  corps dans  $R^3$  au cours desquels  $S$  reste constante sont d'une part les mouvements à inertie  $I$  constante, d'autre part les mouvements tels que  $IK - J^2 = c^2$ . On peut montrer que les derniers sont les mouvements *homothétiques complexes*, tels qu'à chaque instant  $y$  soit complexe-proportionnel à  $x$  (en particulier  $x$  ne change que par homothétie et rotation : on dit que le mouvement est *homographique*). Les configurations, très particulières, admettant un tel mouvement sont exactement celles qui admettent un mouvement *homothétique* (réel), c'est-à-dire un mouvement dans lequel la configuration des vitesses  $y$  est à chaque instant proportionnelle à la configuration  $x$ , les corps s'effondrant sur leur centre de gravité suivant le segment qui les joint à celui-ci et formant à tout instant une figure homothétique. Appelées *configurations centrales*, les figures correspondant à de telles solutions sont les seules que puissent asymptotiquement former les corps au voisinage d'une collision multiple (voir 2.3); elles ont été déterminées dans le cas de trois corps : ce sont les célèbres solutions d'Euler [5] (trois corps alignés avec des distances relatives dépendant de leurs masses) et Lagrange [8] (triangle équilatéral quelles que soient les masses). La détermination des configurations centrales de plus de trois corps est un problème extrêmement difficile [1].

**Remarque.** Un peu d'algèbre linéaire montre qu'en chaque point  $(x, y)$ , la configuration des vitesses  $y$  est la somme orthogonale d'une composante  $y_h$ , proportionnelle à  $x$ , qui induit une variation homothétique de la configuration, d'une composante  $y_r$  de rotation pure (i.e. telle qu'il existe un opérateur antisymétrique  $\Omega$  de l'espace euclidien  $R^3$  vérifiant pour chaque  $i$ ,  $\dot{r}_i = \Omega \vec{r}_i$ ), et d'une composante  $y_d$  qui correspond à une déformation de la configuration normalisée  $r^{-1}x = I^{-\frac{1}{2}}x$ . Nous appellerons *décomposition de Saari* cette écriture de  $y$ . On déduit de l'orthogonalité des composantes que  $K = \|y\|^2 = \|y_h\|^2 + \|y_r\|^2 + \|y_d\|^2$ . Calculant  $x \cdot y = x \cdot y_h$ , on voit que  $y_h = I^{-1}Jx$ , donc  $\|y_h\|^2 = I^{-1}J^2 = (\dot{r})^2$ . Enfin, on vérifie que  $y_d$  est orthogonale à la droite complexe engendrée par  $x$ . L'inégalité de Sundman revient donc à minorer le terme de rotation  $\|y_r\|^2$ , en fait le carré de la norme de sa projection sur cette droite complexe, par  $I^{-1}c^2$ , et ignorer le terme de déformation  $\|y_d\|^2$ . L'égalité de  $IK - J^2 - c^2$  à  $\|y_d\|^2$  n'a lieu à un instant donné que si d'une part  $y_r$  appartient à la droite complexe engendrée par  $x$ , d'autre part si  $\|\mathcal{I}_C(x)\| = \|x\|$ , c'est-à-dire si le mouvement a lieu dans un plan.

Voici une conséquence simple de l'inégalité de Sundman : dans le cas de deux corps,

l'inspection des solutions montre qu'une collision ne peut se produire que si le mouvement a lieu sur une droite, c'est-à-dire si le moment cinétique s'annule. Disons qu'un mouvement de  $n$  corps présente une *collision totale* au temps  $t_0$  si  $\lim_{t \rightarrow t_0} I(t) = 0$ .

**Lemme (Sundman).** *Une collision totale des  $n$  corps ne peut se produire que si le moment cinétique  $\mathcal{C}$  est nul.*

**Démonstration.** Supposons par exemple que  $t$  atteigne sa limite  $t_0$  en croissant. Il existe alors un réel positif  $\theta$  tel que, dans l'intervalle  $[t_0 - \theta, t_0[$ , les fonctions  $I, J, K$  se comportent de la façon suivante :  $I > 0$  décroît,  $J < 0$  croît,  $K > 0$  tend vers l'infini. En effet,  $U$  tend vers  $+\infty$  ainsi que  $\dot{I} = 4H + 2U$  (formule de Lagrange-Jacobi) et  $K = 2H + 2U$ . Si  $\dot{I} = 2J$  devient positive ou nulle, elle le reste et  $I$  ne peut décroître, d'où la conclusion. Puisqu'au voisinage de  $t_0$  la fonction  $I$  finit par décroître, il en est de même de la fonction de Sundman  $S$ . Mais si  $\mathcal{C}$  n'est pas nul, le terme  $I^{-\frac{1}{2}}c^2$  la fait tendre vers  $+\infty$ .

### 2.3 Symétrie d'homothétie et collision totale

C'est l'homogénéité du potentiel newtonien qui permet une analyse approfondie des mouvements conduisant à une collision totale et de ceux qui évitent de peu une telle collision. D'une part, elle implique l'existence des *mouvements homothétiques* qui tendent vers la collision totale en ne modifiant leur configuration que par une homothétie de rapport de l'ordre de  $|t - t_0|^{\frac{2}{3}}$  si  $t_0$  est l'instant de la collision (penser au problème des deux corps sur la droite). D'autre part, elle implique que *tout mouvement se terminant en collision totale est asymptotiquement homothétique*. Considérons le champ de vecteurs  $Y$  sur l'espace des états défini par

$$Y(x, y) = \left(x, -\frac{1}{2}y\right)$$

(comparer au paragraphe 93 du beau livre d'Elie Cartan [3]). Le long d'une courbe intégrale de ce champ, la configuration  $x$  formée par les corps subit une expansion homothétique d'un facteur  $e^t$  alors que la configuration  $y$  des vitesses subit une contraction homothétique d'un facteur  $e^{-\frac{t}{2}}$ , les taux d'expansion et de contraction étant dans un rapport habilement choisi en fonction de l'homogénéité de degré  $-1$  en  $x$  du potentiel et de celle de degré  $2$  en  $y$  de l'énergie cinétique. On obtient sans peine les dérivées de Lie par rapport à  $Y$  du champ de vecteurs  $X_H$  décrivant les équations de Newton et de ses intégrales premières :

$$\mathcal{L}_Y X_H = [Y, X_H] = -\frac{3}{2}X_H, \quad \mathcal{L}_Y H = \partial_Y H = -H, \quad \mathcal{L}_Y \mathcal{C} = \partial_Y \mathcal{C} = \frac{1}{2}\mathcal{C}.$$

La première est une condition de Frobenius, qui assure l'existence d'un feuilletage singulier de dimension deux de l'espace des états dont les feuilles sont les variétés intégrales du champ de plans engendré par  $Y$  et  $X_H$ . Les feuilles singulières de ce feuilletage sont les courbes intégrales de  $X_H$  qui, au paramétrage près, sont des courbes intégrales de  $Y$ , c'est-à-dire les *mouvements homothétiques*. Il sera plus agréable d'engendrer ce feuilletage à l'aide du champ  $Y$  et d'un champ  $\tilde{X}_H = \phi X_H$  commutant avec lui, où le "facteur intégrant"  $\phi$  est n'importe quelle fonction  $\phi$  définie sur l'espace des états et vérifiant  $\mathcal{L}_Y \phi = \frac{3}{2} \phi$ . Le choix le plus simple, celui que l'on fera dans la suite du paragraphe, est  $\phi = I^{\frac{3}{4}}$ , mais d'autres peuvent avoir un intérêt, par exemple  $\phi = U^{-\frac{3}{2}}$ . Le champ  $\tilde{X}_H$  possède les mêmes courbes intégrales que  $X_H$ , paramétrées autrement : multiplier le champ par la fonction  $\phi$  revient à dériver suivant un nouveau "temps"  $\tau$  tel que  $dt/d\tau = \phi(x, y)$ . On étire le temps au voisinage de la collision de telle façon qu'un mouvement se terminant au temps  $t_0$  dans le temps initial continue indéfiniment dans l'autre. Le champ  $\tilde{X}_H$  possédant la symétrie définie par  $Y$ , on peut définir un champ de vecteur sur l'espace quotient. Mais cette "réduction" ne simplifie la situation que lorsque les intégrales premières classiques  $H$  et (les composantes de)  $\mathcal{C}$  sont nulles puisque seuls les deux niveaux  $H = 0$  et  $\mathcal{C} = 0$  sont invariants par  $Y$  (Euler [5] a le premier utilisé cette symétrie d'homothétie pour réduire le problème des trois corps sur la droite en énergie nulle); dans le cas contraire, le passage au quotient sacrifie l'une de ces intégrales premières : seul le moment cinétique "normalisé"  $|H|^{\frac{1}{2}} \mathcal{C}$  passe au quotient. Il sera commode d'introduire les fonctions suivantes, invariantes par  $Y$  :

$$\tilde{U} = I^{\frac{1}{2}} U, \quad \tilde{K} = I^{\frac{1}{2}} K, \quad \tilde{H} = I^{\frac{1}{2}} H, \quad \tilde{J} = I^{-\frac{1}{4}} J, \quad \tilde{c} = I^{-\frac{1}{4}} c, \quad \tilde{\mathcal{C}} = I^{-\frac{1}{4}} \mathcal{C}.$$

On vérifie que

$$\partial_{\tilde{X}_H} \tilde{H} = \tilde{J} \tilde{H}, \quad \partial_{\tilde{X}_H} \tilde{\mathcal{C}} = -\frac{1}{2} \tilde{J} \tilde{\mathcal{C}},$$

et on constate que la fonction de Sundman  $S = \tilde{J}^2 + \tilde{c}^2 - 2\tilde{H} = 2\tilde{U} - (\tilde{K} - \tilde{J}^2 - \tilde{c}^2)$ , est également invariante par  $Y$ . Les hypersurfaces de niveau de la fonction  $I$  sont transverses aux courbes intégrales de  $Y$  et chacune d'elles rencontre chacune des courbes intégrales en un et un seul point. *L'hypersurface d'équation  $I = 1$  est donc un bon représentant du quotient de l'espace des états  $\tilde{\mathcal{X}} \times \mathcal{X}$  par le flot de  $Y$ .* Appelons  $\tilde{Z}$  l'unique champ de vecteurs sur ce dernier tel que  $[Y, \tilde{Z}] = 0$  et  $\partial_{\tilde{Z}} I = 0$ , qui ait même image directe que  $\tilde{X}_H$  dans ce quotient :

$$\tilde{Z} = \tilde{X}_H - \tilde{J} Y = I^{\frac{3}{4}} X_H - I^{-\frac{1}{4}} J Y.$$

Le passage au quotient peut donc être réalisé en remplaçant le champ de vecteurs  $\tilde{X}_H$  par le *champ réduit*  $Z$ , restriction de  $\tilde{Z}$  à la sous-variété d'équation  $I = 1$ . La région définie par  $I = 1, H < 0$  (resp.  $I = 1, H > 0$ , resp.  $I = 1, H = 0$ ) représente n'importe laquelle des sous-variétés d'énergie constante négative (resp. n'importe laquelle des sous-variétés d'énergie constante positive, resp. le quotient par le flot de  $Y$  de la sous-variété d'énergie nulle).

**Définition.** La variété de collision ou variété de McGehee est l'intersection avec la sous-variété  $I = 1$ , de l'ensemble des états d'énergie et moment cinétique nuls. Plus intrinsèquement, c'est le quotient par le flot de  $Y$  de cet ensemble d'états.

Cette terminologie vient de ce que le difféomorphisme  $(x, y) \mapsto (s, \zeta)$  défini en suivant les courbes intégrales de  $Y$  d'une hypersurface d'équation  $H = h$  à l'hypersurface d'équation  $I = 1$  conduit naturellement aux *coordonnées de McGehee* [13] :

$$r = I^{\frac{1}{2}}, \quad s = r^{-1}x, \quad \zeta = r^{\frac{1}{2}}y,$$

assorties du changement de temps  $dt/dr = r^{\frac{3}{2}}$  (passage de  $X_H$  à  $\tilde{X}_H$ ), et que dans cette représentation la *variété de collision*  $r = 0$  s'identifie à la sous-variété d'équations  $I = 1, H = 0, C = 0$ .

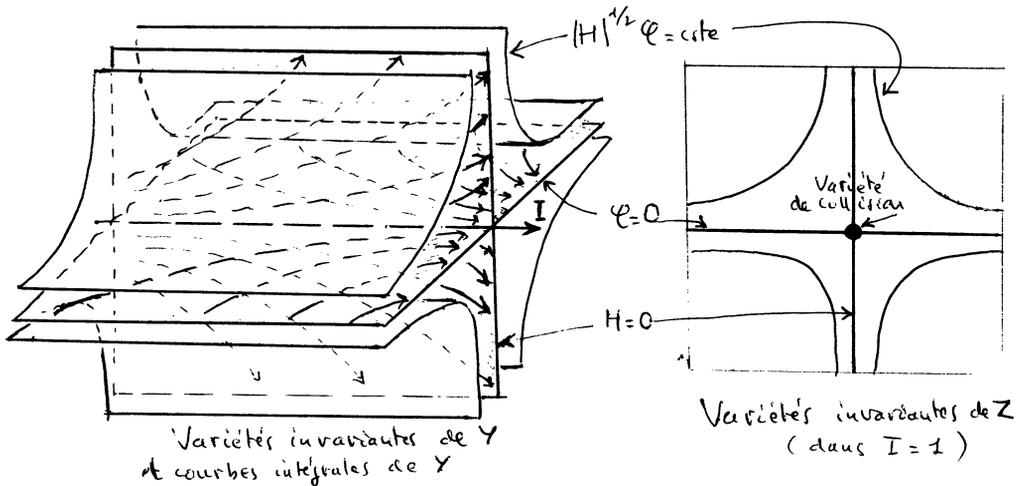


Figure 3

La restriction de  $S$  à la variété de collision coïncide avec celle de  $\tilde{J}^2$ . On en déduit que  $\tilde{J}$  est une fonction de Liapunov pour la restriction de  $Z$  à cette variété.

**Lemme.** *Les singularités de  $Z$  appartiennent à la variété de collision : ce sont les états  $(x_0, y_0)$  définissant un mouvement homothétique d'énergie nulle. Ils vérifient  $J_0 = x_0 \cdot y_0 \neq 0$ . Les courbes intégrales qui leur sont positivement ou négativement asymptotes sont contenues dans la réunion des sous-ensembles  $C = 0$  et  $H = 0$ . Elles correspondent à des mouvements des  $n$  corps au long desquels ou bien  $I \rightarrow 0$ ,  $K \rightarrow \infty$  (collision totale en temps fini), ou bien  $K \rightarrow 0$ ,  $I \rightarrow \infty$  (mouvement complètement parabolique en temps infini). De plus, si  $C = 0$  et  $H \neq 0$  (resp.  $H = 0$  et  $C \neq 0$ ) c'est  $I$  (resp.  $K$ ) qui tend vers zéro.*

**Démonstration.** Le mouvement correspondant à une singularité de  $Z$  doit se faire le long d'une courbe intégrale de  $Y$  et est donc homothétique. L'énergie et le moment cinétique, étant invariants, doivent alors s'annuler. Enfin, l'invariance de  $|H|^{\frac{1}{2}}C$  par  $Z$  force toute courbe intégrale de  $Z$  positivement ou négativement asymptote à une singularité à vérifier  $C = 0$  ou  $H = 0$ . L'absence de singularité du champ  $X_H$  implique la non-annulation de  $J_0 = x_0 \cdot y_0$  puisque  $Z$  et  $X_H$  se confondent en un point où  $J = 0$ . Le long d'une solution des équations de Newton correspondant à une courbe intégrale de  $Z$  asymptote à une singularité, la fonction invariante  $\tilde{J} = I^{-\frac{1}{4}}J$ , qui s'écrit encore  $\frac{2}{3}\partial_{X_H}I^{\frac{3}{4}}$ , a donc une limite non nulle  $J_0$ . On en déduit que, suivant que  $J_0$  est négatif ou positif, la fonction  $I^{\frac{3}{4}}$  (et donc également la fonction  $I$ ) tend vers 0 en temps fini ou vers l'infini en temps infini. Un raisonnement analogue vaut bien entendu lorsqu'au lieu de croître, le temps décroît. D'autre part, on déduit de  $0 \leq IK - J^2 = I^{\frac{1}{2}}(\tilde{K} - \tilde{J}^2)$  que  $\tilde{K} = I^{\frac{1}{2}}K > \frac{1}{2}J_0^2 > 0$  au voisinage de la singularité. Le long d'une telle solution, les conditions  $I \rightarrow 0$  et  $I \rightarrow \infty$  équivalent donc respectivement aux conditions  $\tilde{K} \rightarrow \infty$  et  $\tilde{K} \rightarrow 0$ . Considérons enfin une courbe intégrale de  $Z$  qui vérifie  $H \neq 0$  (et donc  $C = 0$ ), et est positivement (resp. négativement) asymptote à une singularité  $(x_0, y_0)$ . Le long d'une solution correspondante des équations de Newton, la fonction invariante  $\tilde{H} = I^{\frac{1}{2}}H$  tend vers 0, donc  $I \rightarrow 0$ . De même, si une courbe intégrale du champ  $Z$  vérifie  $C \neq 0$  (et donc  $H = 0$ ) et est asymptote à une singularité  $(x_0, y_0)$ , le long d'une solution correspondante des équations de Newton, l'application invariante  $\tilde{C} = I^{-\frac{1}{4}}C$  tend vers 0, donc  $I \rightarrow \infty$ , c.q.f.d. Précisant le lemme de Sundman, la réciproque suivante rassemble des résultats de Sundman, McGehee, Saari [22,13,19].

**Théorème fondamental.** *Un mouvement de collision totale (resp. complètement parabolique) ne peut exister que si le moment cinétique (resp. l'énergie) s'annule. Dans les deux cas, la courbe intégrale du champ  $Z$  qui lui correspond tend vers l'ensemble des singularités de ce champ. En particulier, la configuration normalisée  $s = I^{-\frac{1}{2}}x$  tend vers l'ensemble des configurations centrales.*

Je renvoie à [2] pour une démonstration unifiée de ce théorème. Les deux types de mouvement se traitent de façons pratiquement parallèles. Dans les deux cas, les points techniques fondamentaux sont d'une part l'existence d'une limite finie non nulle  $J_0$  de  $\tilde{J}$ , ce qui fournit les estimations de temps, d'autre part l'existence d'une limite finie non nulle  $U_0$  de  $\tilde{U}$ , résultat de compacité qui assure qu'on reste loin des collisions partielles et permet de prouver l'existence d'un ensemble limite vers lequel converge l'orbite de  $Z$ . Ces deux points équivalent aux estimations asymptotiques classiques de  $\dot{I}$  et  $\ddot{I}$  qu'on trouvera dans [23] : dans le cas d'une collision totale au temps  $t_0$ ,  $I$  est de l'ordre de  $|t - t_0|^{\frac{4}{3}}$ , puisque la dérivée temporelle de  $I^{\frac{3}{2}}$ , qui est égale à  $\frac{3}{2}\tilde{J}$  tend vers la quantité non nulle  $\frac{3}{2}J_0$ ; quant aux estimations sur  $\dot{I}$  et  $\ddot{I}$ , ce sont celles qu'on obtiendrait en dérivant formellement celle donnée pour  $I$ , mais aucun théorème Taubérien n'est requis. La seule différence notable entre les deux situations est la nécessité dans le cas complètement parabolique de recourir à un argument de décomposition en amas pour estimer a priori le comportement asymptotique de  $I$ . Cet argument, emprunté à Marchal et Saari [11], se ramène à une comparaison du problème considéré à un problème des deux corps d'énergie positive sur une droite. C'est avec la fonction de Sundman, qui compare à un problème des deux corps dans le plan de même énergie, le seul outil global dont on dispose en général.

**Remarque importante.** Les fonctions  $I, J, K, U, H, c$  sont invariantes par l'action naturelle  $(x, y) \rightarrow (Ax, Ay)$  des isométries  $A$  de l'espace ambiant  $R^3$  sur l'espace des phases, et le flot du champ de vecteurs  $Y$  commute avec cette action. *Le champ  $Z$  et la variété de collision passent donc au quotient par cette action. On se permettra dans la suite d'effectuer ce quotient sans changer de notations.*

Nous terminons ce paragraphe en explicitant le champ quotient  $Z$  dans le cas du Problème des deux corps dans le plan et en faisant le lien de ce qui précède avec la régularisation de Levi Civita [10]. L'espace des configurations  $\hat{\mathcal{X}}$  est difféomorphe à  $R^2 \setminus \{0\}$ , donc à  $S^1 \times R$  (il y a une seule configuration à homothétie et rotation près), et l'espace des phases à  $(R^2 \setminus \{0\}) \times R^2$ , c'est-à-dire à  $S^1 \times R^3$ . La restriction à  $I = 1$ , c'est-à-dire le quotient par le champ d'homothéties  $Y$ , nous ramène à  $S^1 \times R^2$ , et celui par les rotations du plan à  $R^2$ . On peut prendre dans ce plan les coordonnées  $\tilde{C}$  (qu'on peut identifier à un nombre réel de module  $\tilde{c}$ ), et  $\tilde{J}$  (figure 4). Les sous-variétés d'énergie nulle et de moment cinétique nul s'identifient respectivement au cercle d'équation  $\tilde{J}^2 + \tilde{C}^2 = 2\tilde{U} = S = 2 \frac{(m_1 m_2)^{\frac{3}{2}}}{(m_1 + m_2)^{\frac{1}{2}}}$  et à la droite d'équation  $\tilde{C} = 0$ . Leur intersection, la variété de collision, est une sphère de dimension zéro, c'est-à-dire deux points caractérisés par le signe de  $\tilde{J}$ . L'intérieur du disque bordé par le cercle

d'énergie nulle correspond à n'importe laquelle des sous-variétés d'énergie négative, l'extérieur à n'importe laquelle des sous-variétés d'énergie positive. On a indiqué sur la figure les lignes de niveau de la fonction  $|H|^{\frac{1}{2}}C$  qui, de dimension un, coïncident avec les courbes intégrales du champ quotient  $Z$ .

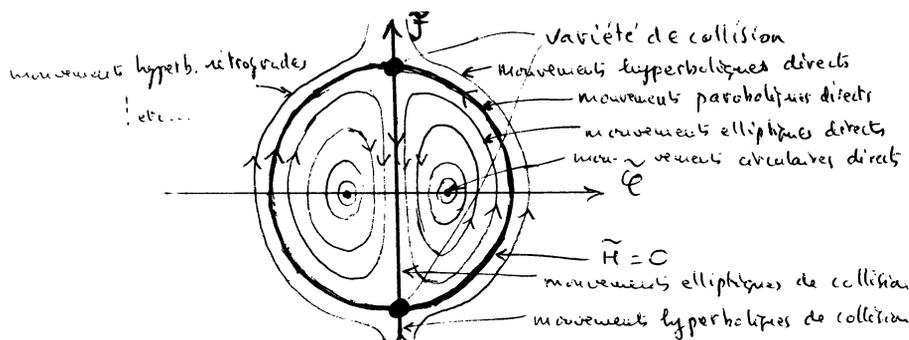


Figure 4

Lorsqu'il n'y a que deux corps, la collision peut être *régularisée* en remarquant que, convenablement ralenti, un mouvement suivant une cône de forte excentricité tend vers un mouvement de collision élastique lorsque l'excentricité tend vers 1 (figure 5 dans le cas elliptique où l'anomalie excentrique  $u$  est encore définie à la limite). C'est la *régularisation de Levi Civita*. Une variété d'énergie négative ainsi régularisée devient la sphère  $S^2$  de la figure 6, chaque mouvement décrivant un cercle horizontal. La latitude, comprise entre  $-1$  et  $+1$ , représente  $\pm\sqrt{1-e^2}$ , où  $e$  est l'excentricité de l'ellipse parcourue et le signe fixe l'orientation; la longitude représente l'anomalie excentrique sur cette ellipse. Ainsi les pôles correspondent aux mouvements circulaires et l'équateur aux mouvements de collision régularisés. Le lecteur se convaincra de ce que cette sphère  $S^2$  n'est autre que le disque d'énergie négative de la figure 4 dont on a identifié le bord à un point. La même opération effectuée sur l'extérieur (énergie positive) conduit à un plan  $R^2$ . Pour en savoir plus, on consultera la référence [16].

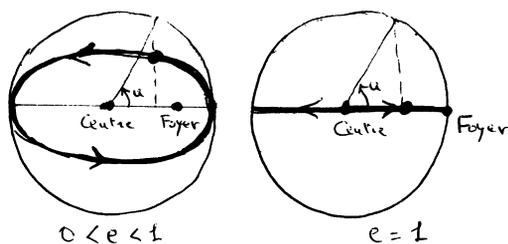


Figure 5

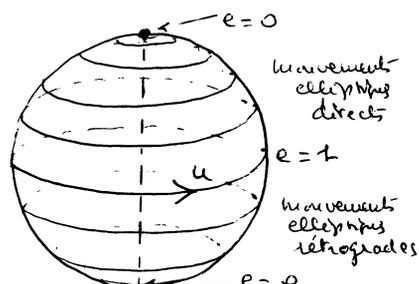


Figure 6

### 2.4 Collisions partielles, collisions simultanées

Lorsque la collision n'est pas totale, le choix de  $\phi = I^{\frac{3}{4}}$  comme facteur de renormalisation du champ  $X_H$  n'est plus adapté. Supposons qu'à l'instant  $t_0$  le système se décompose en un certain nombre  $k$  d'amas (éventuellement réduits à un unique corps) subissant au même instant une collision totale sur leurs centres de gravité respectifs. On sait depuis Jacobi qu'à une telle *décomposition en amas* correspond une décomposition orthogonale de l'espace des phases en  $k+1$  facteurs qui sont respectivement les  $k$  espaces des phases associés à chaque amas et l'espace des phases associé aux  $k$  centres de gravité des amas munis chacun de la somme des masses de l'amas. Bien entendu, un facteur n'existe effectivement que s'il correspond à un amas d'au moins deux corps. Si  $I_0$  désigne l'inertie du système des centres de gravité des amas par rapport au centre de gravité du système et  $I_1, \dots, I_k$  les inerties des amas par rapport à leurs centres de gravité, on a donc  $I = I_0 + I_1 + \dots + I_k$ . Le choix le plus naturel est alors  $\phi = I - I_0 = I_1 + I_2 + \dots + I_k$  puisque cette fonction, partout définie, ne s'annule qu'en cas de collision totale simultanée de chacun des amas. Le champ quotient (analogue de  $Z$ ) se représente naturellement dans la sous-variété d'équation  $I - I_0 = 1$ . Le seul inconvénient est d'envoyer à l'infini le centre de gravité de chaque amas, ce qui traduit simplement le fait qu'au moment de la collision un amas n'est plus influencé par les autres. En projection sur les  $k$  facteurs associés aux amas, le système quotient se comporte donc essentiellement comme  $k$  collisions totales indépendantes synchronisées dans le temps : on peut oublier la composante des centres de gravité pour tout ce qui concerne la dynamique sur et au voisinage de la variété de collision et étudier cette dernière sur le modèle de  $k$  amas en collision au même point n'interagissant pas entre eux. Il est important ici de noter que la synchronisation n'est possible que parce que toutes les collisions se produisent à une vitesse comparable : quel que soit  $j$ , le changement de temps défini par  $dt/d\tau = I - I_0$  est équivalent au voisinage de  $t_0$  à celui défini par  $dt/d\tau = I_j$ . Une manière équivalente de procéder, utilisée en particulier par Mather et McGehee, est de n'effectuer la renormalisation définie par  $\phi = I - I_0$  que sur les composantes associées aux amas; le passage du temps  $t$  au temps  $\tau$  tue alors toute dynamique sur la composante des centres de gravité.

**Exercice.** Etudier la variété de collision associée à la collision simultanée de deux couples de corps sur une droite et la comparer à celles étudiées dans le chapitre 3.

### 3. COLLISIONS TRIPLES

#### 3.1 Le cas aligné

L'ordre des trois masses étant conservé au cours d'un mouvement, et ce même si l'on régularise les collisions doubles, nous prendrons comme espace des configurations l'espace  $\hat{\mathcal{X}} = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid \sum_{i=1}^3 m_i x_i = 0, x_1 < x_2 < x_3\}$ . Une telle configuration étant parfaitement déterminée par un angle  $\varphi \in ]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$  caractérisant le rapport des distances de  $m_2$  à  $m_1$  et  $m_3$  respectivement, et par sa taille, c'est-à-dire par  $I$ ,  $\hat{\mathcal{X}}$  est difféomorphe à  $] -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[ \times R_+$ . L'espace des phases s'identifie donc à  $] -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[ \times R^3$  et l'espace des phases réduit, après quotient par  $Y$ , à  $] -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[ \times R^2$ . On peut prendre comme coordonnées dans ce dernier les fonctions  $\varphi, \tilde{J}$ , et la vitesse de déformation normalisée  $\tilde{y}_d = I^{\frac{1}{2}} y_d$  de la configuration (voir 2.2). Comme il n'y a pas de rotation possible et pas de moment cinétique, la décomposition de Saari fournit l'identité  $\tilde{K} = \tilde{J}^2 + \tilde{y}_d^2$  et la variété de collision a pour équation  $\tilde{J}^2 + \tilde{y}_d^2 = 2\tilde{U}(\varphi)$ . Elle est donc difféomorphe au cylindre  $S^1 \times R$  (figure 7.1).

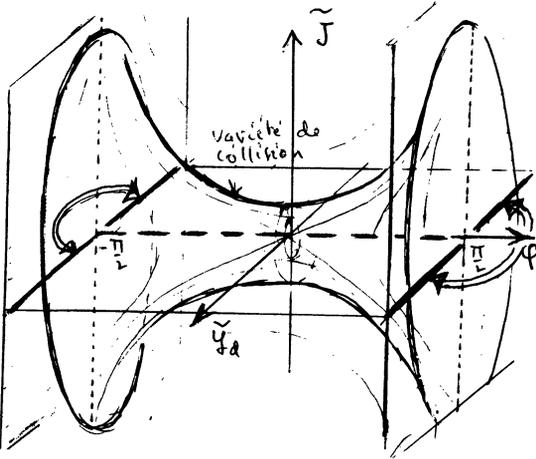


Figure 7.1

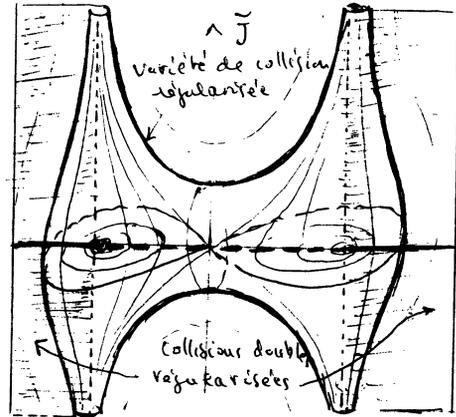


Figure 7.2

Les valeurs  $\pm\frac{\pi}{2}$  de  $\varphi$  correspondent respectivement aux collisions de  $m_2$  avec  $m_1$  et  $m_3$ , qu'on peut régulariser "à la Levi-Civita" en les remplaçant par des collisions élastiques. Le changement de signe des vitesses des deux corps à la collision laisse invariants les coordonnées  $\varphi$  et  $\tilde{J}$  et change le signe de  $\tilde{y}_d$ . La régularisation revient à ajouter à l'espace des phases réduit les deux plans  $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$  privés chacun de la droite

$\tilde{y}_d = 0$ , et à identifier les points  $(\varphi, -\tilde{y}_d, \tilde{J})$  et  $(\varphi, \tilde{y}_d, \tilde{J})$  lorsque  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ . L'espace des phases réduit ainsi régularisé est difféomorphe à  $R^3$  privé de deux droites, et la variété de collision à une sphère de dimension deux privée de quatre points. On a représenté sur la figure 7.2 les surfaces de niveau de  $\tilde{H} = I^{\frac{1}{2}}H$  qui, une fois une énergie  $H$  non nulle fixée, permettent de lire la taille  $r = I^{\frac{1}{2}}$  du système avant le passage au quotient par la symétrie d'homothétie. Les deux droites enlevées sont en pointillé fin; elles correspondraient à une taille infinie. La variété de collision correspond bien entendu à la taille nulle.

Convenablement ralenti au voisinage de  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ , le champ quotient  $Z$  se prolonge en un champ régulier  $\hat{Z}$  dont la restriction à la variété de collision  $a$ , pour des valeurs convenablement choisies (génériques ?) des masses [13], l'allure donnée sur la figure 8. On a également indiqué sur cette figure les variétés stable et instable des singularités de ce champ dont on montre sans peine qu'elles sont hyperboliques. Ces variétés sont donc régulières, ce qui implique que le saturé de l'une d'elles par le flot de  $Y$ , par exemple l'ensemble  $\Sigma$  des points de l'espace des phases conduisant lorsque  $t$  croît à la collision totale est une sous-variété de codimension 1. C'est un cas particulier du *Théorème de Siegel* [20]. La même conclusion vaut d'ailleurs si l'on se restreint à une hypersurface d'énergie  $H$  fixée : si  $H \neq 0$ , une telle hypersurface est transverse aux courbes intégrales de  $Y$ , donc à  $\Sigma$ ; quant à l'hypersurface  $H = 0$ , elle est invariante à la fois par  $Y$  et  $Z$ . Les trajectoires verticales correspondent aux mouvements homothétiques d'énergies non nulles, ceux d'énergie nulle étant, rappelons-le, représentés par les singularités  $C$  et  $C^*$  de  $Z$  (ou  $\hat{Z}$ ) sur la variété de collision.

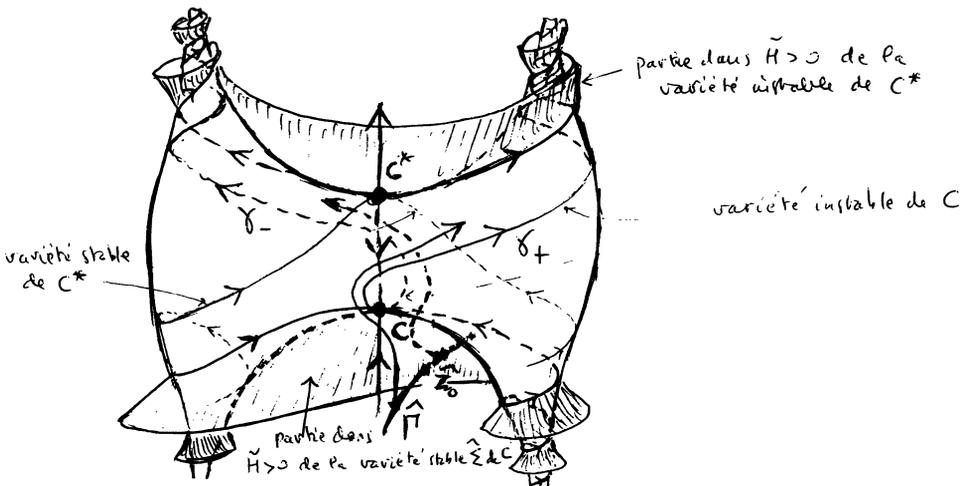


Figure 8

Soit  $z_0 \in \Sigma$  et  $\Gamma$  un petit arc contenant  $z_0$  et transverse à  $\Sigma$ . Suivant que l'on choisit une donnée initiale sur  $\Gamma$  d'un côté ou de l'autre de  $z_0$ , la solution correspondante se projette sur une courbe intégrale de  $\hat{Z}$  qui reste proche de  $\gamma_+$  ou de  $\gamma_-$  pendant un temps d'autant plus long qu'on est parti près de  $z_0$ . Sur la figure,  $\hat{\Sigma}, \hat{\Gamma}, \hat{z}_0$  désignent les projections de  $\Sigma, \Gamma, z_0$  dans le quotient par  $Y$ .

### 3.2 Le cas spatial isocèle

Il s'agit d'un sous-problème invariant du Problème des trois corps. La masse  $m_3$  se déplace sur l'axe de symétrie passant par le centre de gravité, les masses  $m_1$  et  $m_2$  sont égales et symétriques par rapport à cet axe. La configuration  $x$  est parfaitement définie par le donnée des angles  $\theta \in S^1$  et  $\psi \in ]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$  et de sa taille  $I$  (figure 2). L'espace des configurations  $\hat{\mathcal{X}}$  est difféomorphe à  $S^1 \times ]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[ \times R_+$ , et l'espace des phases à  $S^1 \times ]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[ \times R_+ \times R^3$ . Après quotient par  $Y$  et par les rotations autour de l'axe de symétrie (les seules possibles pour ce problème), il reste un espace des phases réduit  $] -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[ \times R^3$ . On peut prendre dans ce dernier les coordonnées  $\tilde{C}$  (qu'on identifie à un nombre réel de module  $\tilde{c}$ ) et  $\tilde{J}$ , comme dans le cas de deux corps, auxquelles on adjoint un angle  $\varphi \in ]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$  caractérisant la configuration, et la vitesse de déformation normalisée  $\tilde{y}_d$ . Plus précisément, calculant la composante de rotation  $y_r$  de la vitesse, on constate que  $\|y_r\|^2 = I_\sigma^{-1} c^2$ , où  $I_\sigma$  est le moment d'inertie de la configuration par rapport à l'axe de symétrie. Au niveau des fonctions invariantes par  $Y$ , la décomposition de Saari de la vitesse fournit donc l'identité  $\tilde{K} = \tilde{J}^2 + I_\sigma^{-1} I \tilde{c}^2 + \tilde{y}_d^2$ , où  $\tilde{y}_d = I^{\frac{1}{2}} y_d$ . On obtient facilement la formule  $I^{-1} I_\sigma = (1 + 2\alpha \cos^2 \psi)^{-1} (1 + 2\alpha) \cos^2 \psi$ , où  $\alpha = m_3^{-1} m_1$  est le rapport des masses. Puisque le rapport  $I^{-1} I_\sigma$  varie entre 1 et 0 lorsque  $\psi$  varie entre 0 et  $\pm \frac{\pi}{2}$ , on peut définir un angle  $\varphi \in ]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$  par la condition que  $\varphi$  soit du signe de  $\psi$  et vérifie  $I^{-1} I_\sigma = \cos^2 \varphi$ . On laisse au lecteur le soin d'interpréter  $\varphi$  comme un angle polaire dans l'espace de configuration. Les sous-variétés d'énergie nulle et de moment cinétique nul ont respectivement pour équation

$$\tilde{J}^2 + \frac{\tilde{c}^2}{\cos^2 \varphi} + \tilde{y}_d^2 = 2\tilde{U}(\varphi) \quad \text{et} \quad \tilde{c} = 0,$$

et sont respectivement difféomorphes à  $S^2 \times R$  et  $R^3$ . Leur intersection, la variété de collision, est représentée sur la figure 9 qu'on comparera à la figure 7.1. Comme précédemment elle est difféomorphe à  $S^1 \times R$  et la régularisation des collisions doubles la transforme en une sphère de dimension deux privée de quatre points (la sous-variété d'énergie nulle devient quant à elle difféomorphe à une sphère de dimension trois

privée de quatre points). Les six points singuliers correspondent aux mouvements homothétiques de trois corps, découverts par Euler et Lagrange il y a deux siècles.

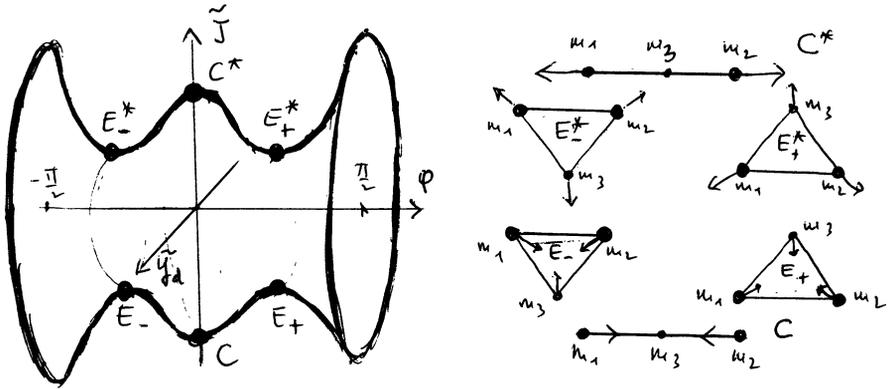
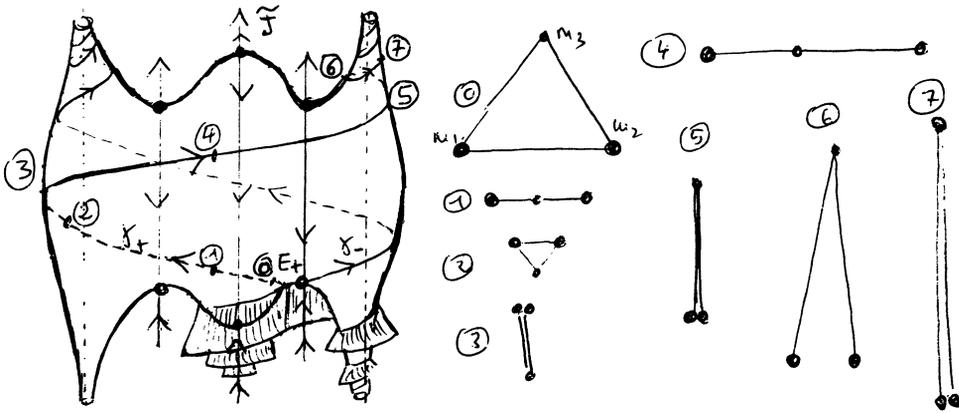


Figure 9 ( $\tilde{C} = 0$ )

La figure 10 (comparer aux figures 7.2 et 8) représente après régularisation le plongement dans  $\tilde{C} = 0$  de la variété de collision, avec un exemple de comportement des courbes intégrales du champ régularisé  $\hat{Z}$  qui se produit, d'après Simó [21], lorsque le rapport  $m_3/m_1$  appartient à l'intervalle  $[0, 378532 \dots, 2, 661993 \dots]$ . On a indiqué un mouvement des trois corps correspondant à la partie  $\gamma_+$  de la variété instable de  $E_+$ . On notera que la taille tend vers l'infini aux deux extrémités et que le mouvement a lieu dans un plan (théorème de Dziobek [23] page 427). On a également représenté la variété stable de  $E_+$ , entièrement contenue dans  $\tilde{C} = 0$ . L'ensemble  $\Sigma$  des points de l'espace des phase conduisant à une collision totale de type  $E_+$  est donc une sous-variété immergée de codimension 2. Soit  $z_0$  un point de  $\Sigma$ , et  $\Gamma$  un petit morceau de surface transverse à  $\Sigma$  en  $z_0$ . Pour les données initiales appartenant à la courbe d'intersection de  $\Gamma$  avec  $\tilde{C} = 0$ , tout se passe comme dans le paragraphe précédent : on suit, après quotient par  $Y$ , l'une des courbes  $\gamma_+$  ou  $\gamma_-$ ; notons qu'en suivant  $\gamma_+$  on décrit bien des mouvements du type cherché où le messenger s'approche d'un couple, interagit avec lui et repart d'où il est venu, alors qu'en suivant  $\gamma_-$  le messenger continue sa route après l'interaction.

Aux données initiales dans  $\Gamma$  n'appartenant pas à  $\tilde{C} = 0$ , correspondent après quotient par  $Y$ , des solutions de  $\hat{Z}$  qui, pendant un temps d'autant plus long qu'on est partis près de  $z_0$ , suivent une courbe intégrale appartenant à la variété instable de  $E_+$

Figure 10 ( $\tilde{C} = 0$ )

mais pas à la variété de collision, c'est-à-dire une courbe intégrale de  $\hat{Z}$  dans  $\tilde{H} = 0$  n'appartenant pas à la variété de collision et tendant vers l'un des points à l'infini (rappelons qu'après régularisation  $\tilde{H} = 0$  est diffeomorphe à une sphère  $S^3$  privée de quatre points). A une telle courbe intégrale correspond, suivant la terminologie de Chazy [4], un mouvement de type hyperbolique-elliptique dans lequel  $m_3$  se sépare du centre de gravité du couple  $m_1, m_2$  à une vitesse, donc aussi une énergie  $h > 0$ , arbitrairement grande (on le montrera en 3.3) mais asymptotiquement constante (comme un problème de deux corps hyperbolique sur la droite), alors que ce dernier a asymptotiquement un mouvement elliptique dont l'excentricité  $e_{12}$  tend vers une constante strictement inférieure à 1. Cette dernière affirmation vient de ce que la fonction invariante par homothétie  $|\tilde{h}_{12}|^{\frac{1}{2}} \tilde{c}_{12} = |h_{12}|^{\frac{1}{2}} c_{12}$ , qui est proportionnelle à  $\sqrt{1 - e_{12}^2}$ , tend vers une limite non nulle. En effet, l'énergie totale étant nulle, l'énergie  $h_{12}$  de la paire (dont l'inverse est une mesure du demi-grand axe) est asymptotiquement égale à l'opposé  $-h$  de l'énergie des centres de gravité alors que son moment cinétique  $c_{12}$  est égal au moment cinétique total  $c$ , supposé non nul. A la décomposition en courbes intégrales de  $\hat{Z}$  de la variété instable de  $E_+$  correspond une décomposition de la surface  $\Gamma$  en courbes issues du point  $z_0$ . Ce qui précède montre que chacune de ces courbes peut être caractérisée par une excentricité limite  $e_{12}$ , qui n'est atteinte asymptotiquement que lorsque la donnée initiale tend vers  $z_0$  sur la courbe considérée (figure 11).

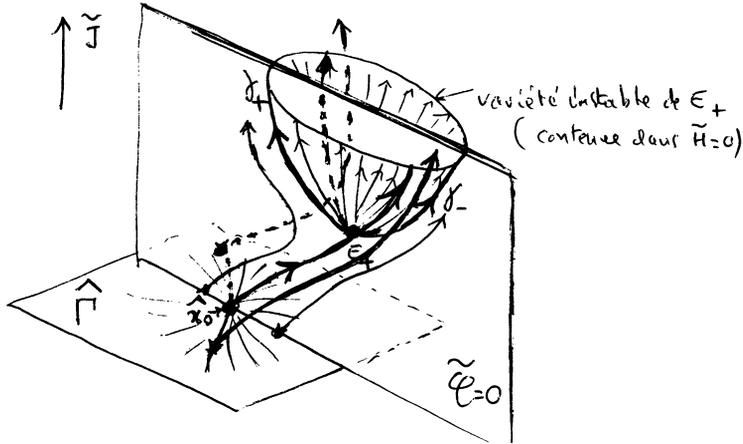


Figure 11

### 3.3 Éjection sauvage d'une "presque" collision triple

Nous en arrivons à la *propriété fondamentale des mouvements évitant de peu une collision au moins triple*, la possibilité évoquée en 1.1 d'éjecter un corps à une vitesse arbitrairement grande. Pour tout nombre réel positif  $\epsilon$ , appelons  $\mathcal{U}_\epsilon$  le sous-espace de l'espace des phases défini par l'équation  $r \leq \epsilon$ , c'est-à-dire  $I \leq \epsilon^2$ . Dans le cas de deux corps, le potentiel ne dépend que de la taille  $r$ , et l'énergie cinétique d'une solution rencontrant  $\mathcal{U}_\epsilon$  est donc la même au moment où celle-ci pénètre dans ce domaine et au moment où elle le quitte. Dès qu'il y a plus de deux corps, au contraire, certaines solutions peuvent acquérir une énergie cinétique arbitrairement grande en traversant  $\mathcal{U}_\epsilon$ . L'énergie totale restant constante, cet accroissement de l'énergie cinétique doit être compensé par un accroissement de  $U$  qui ne peut provenir que de la formation d'un sous-amas proche d'une collision. *Les raisonnements qui suivent peuvent être indifféremment effectués sur le cas aligné ou le cas spatial isocèle pourvu que dans chaque cas les masses soient choisies de façon que le flot de  $\hat{Z}$  soit du type représenté sur les figures 8 ou 10.* Remarquons que ce choix des masses est a priori plus difficile dans le cas isocèle car contrairement au cas aligné on peut aller se perdre dans la bosse de la variété de collision au lieu d'aller dans une des branches infinies.

Considérons tout d'abord les mouvements contenus dans la sous-variété  $H = 0, C = 0$ . Les courbes intégrales du champ quotient régularisé  $\hat{Z}$  qui leur correspondent appartiennent à la variété de collision. Soit à l'instant  $t_0$  un état  $(x_0, y_0)$  qui vérifie  $I_0 = \|x_0\|^2 = \epsilon^2$ , et est proche d'un état  $(\xi_0, \eta_0)$  conduisant à une collision totale. Lorsque  $t$  augmente, la courbe intégrale issue de  $(x_0, y_0)$  rentre dans l'intérieur de  $\mathcal{U}_\epsilon$ . La courbe intégrale  $\gamma$  du champ  $\hat{Z}$  qu'elle définit reste d'abord proche d'une branche  $\Sigma$

de la variété stable de la singularité correspondant à la collision, passe au voisinage de cette singularité, puis suit de près une branche  $\gamma$  de la variété instable de cette singularité, et ce d'autant plus longtemps que  $(x_0, y_0)$  est proche de  $(\xi_0, \eta_0)$ . Pour les valeurs des masses que nous avons considérées, on peut choisir une branche de cette variété instable sur laquelle la fonction  $\tilde{J}$  tend vers  $+\infty$ . De plus, le flot de  $Y$ , qui transforme  $r$  en  $re^\theta$  et fixe  $\tilde{J}$ , transforme les unes dans les autres les courbes intégrales de  $\tilde{X}_H$  se projetant sur une même courbe intégrale de  $\hat{Z}$ . On en déduit que si  $(x_0, y_0)$  est assez proche de  $(\xi_0, \eta_0)$ ,  $\tilde{J}$ , ainsi donc que  $r^{-1}\tilde{J}^2 = (\dot{r})^2$  et  $K \geq r^{-1}\tilde{J}^2$ , atteint toute valeur fixée à l'avance avant que  $r$  n'ait atteint la valeur  $\epsilon$  (figure 12, réaliste dans la mesure où la croissance de  $\tilde{J}$  implique la convexité de  $t \mapsto I^{\frac{3}{4}}(t) = r^{\frac{3}{2}}(t)$ ).

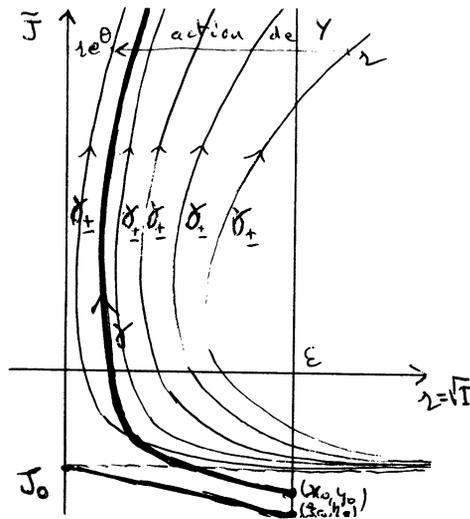


Figure 12

**Remarques.** 1) Le minimum de  $r$  au cours du mouvement sera d'autant plus petit qu'une plus grande valeur de  $\tilde{J}$  sera atteinte au bord de  $\mathcal{U}_\epsilon$ .

2) La traversée de  $\mathcal{U}_\epsilon$  se fait en un temps  $\tau$  borné indépendamment de la valeur atteinte par  $\tilde{J}$ , et donc en un temps  $t$  qui tend vers 0 avec  $\epsilon$ . En effet, on a les estimations  $\tau \leq \int_{t_0}^{+\infty} \frac{dt}{r^{\frac{3}{2}}} \leq \text{cste} \int_{t_0}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}} < \infty$ , car le mouvement des centres de gravité des deux amas étant hyperbolique ( $K$  grand),  $r$  est de l'ordre de  $kt$

3) Le nombre de collisions doubles entre 1 et 2 tend vers l'infini avec  $\tilde{J}$  (voir 4.1).

Dans le cas général, la courbe intégrale du champ  $\hat{Z}$  reste proche d'une courbe

intégrale dans la variété de collision. Les estimations sont les mêmes si on remplace la fonction invariante  $\tilde{J}$  (ou plutôt son carré) par la fonction de Sundman. Bien entendu, pour que  $(x_0, y_0)$  soit assez proche de  $(\xi_0, \eta_0)$ , il faut que  $c$  soit assez proche de zéro.

#### 4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE XIA

Soit le problème des cinq corps décrit sur la figure 2. Le vecteur moment cinétique  $\vec{C}$  est parallèle à l'axe de symétrie et peut être assimilé à un nombre réel  $C$ ; il est égal à la somme  $\vec{C}_{12} + \vec{C}_{45}$  des moments cinétiques des deux couples. *Nous nous plaçons dorénavant dans la sous-variété de dimension 11 de l'espace des phases définie par  $\vec{C} = 0$ .*

##### 4.1. Ce qui ressemble à Mather-McGehee

Reprenons l'analyse faite en 1.1 des solutions de Mather-McGehee.  $\Sigma$  est maintenant l'ensemble des données initiales conduisant simultanément à la collision triple asymptotiquement équilatérale de  $m_1, m_2, m_3$  et la collision double de  $m_4, m_5$ . C'est une sous-variété immergée de codimension 3 dans l'espace ambiant de dimension 11 (utiliser 2.4). L'arc  $\Gamma$  est remplacé par une boule de dimension trois transverse à  $\Sigma$  et le sous-arc  $\Gamma_0$  par une région effilée le long d'une courbe  $\gamma_0$  contenue dans l'intersection de cette boule avec la sous-variété  $\Sigma_1$  de codimension 2 formée des données initiales qui conduisent à une collision triple de  $m_1, m_2, m_3$ . De plus, sur les bords de  $\Gamma_0$ , l'excentricité de l'ellipse approximativement décrite par la paire 1, 2 au moment où 3 s'éloigne est contrôlée (la quantité  $|h_{12}|^{\frac{1}{2}} c_{12}$  est minorée et majorée, voir 3.2). Les instants  $\tau^*$  ou  $\hat{\tau}$  correspondent non plus à des collisions mais à l'appartenance à un même plan orthogonal à l'axe de symétrie, de  $m_3$  et respectivement  $m_1, m_2$  ou  $m_4, m_5$ . A partir de  $\hat{\tau}$ , le scénario change puisque la simple collision de  $m_3$  sur  $m_4$  doit être remplacée par une suite symétrique d'événements dans lesquels les rôles des deux couples s'échangent, ce qui supprime les estimations de l'étape 3) de Mather-McGehee. La possibilité d'itérer la construction, qui était assurée chez Mather-McGehee par l'accumulation de  $\Sigma$  sur elle-même, l'est ici par une propriété analogue : l'ensemble des points de  $\Gamma$  qui conduisent simultanément à la collision triple asymptotiquement équilatérale de  $m_3, m_4, m_5$  et la collision double de  $m_1, m_2$  à l'instant  $\hat{\tau}$ , est non vide et contient  $z_0$  dans son adhérence. Intuitivement, en suivant d'infiniment près la variété instable d'une singularité dans la variété de collisions triple et double simultanées, on peut passer en un temps infiniment court de la collision simultanée de  $m_1, m_2, m_3$  et  $m_4, m_5$  à la collision triple  $m_3, m_4, m_5$ , et ce passage se fait au travers d'une infinité

de collisions des masses  $m_1$  et  $m_2$ . La démonstration se fait en deux étapes dont seule la deuxième est l'analogie du point 4) de Mather-McGehee :

1) dans la première, topologique, on montre que le sous-ensemble de  $\Gamma_0$  formé des données initiales qui conduisent au temps  $\hat{\tau}$  à la collision des trois masses  $m_3, m_4, m_5$  contient un continuum  $\gamma_1$  ayant  $z_0$  dans son adhérence. La preuve est un habile argument d'indice : un petit lacet  $\lambda$  entourant  $z_0$  dans le bord de  $\Gamma_0$  (figure 13) enlace nécessairement la courbe  $\mathcal{D}$  des données initiales dans  $\Gamma$  qui conduisent au temps  $\tau^*$  à la collision des masses  $m_4$  et  $m_5$ . Cette dernière appartient en effet à la surface, contenant  $\gamma_0$  et traversant  $\Gamma_0$ , des données initiales telles que le moment cinétique de chaque couple s'annule au temps  $\tau^*$ . L'application qui à une donnée initiale dans  $\lambda$  fait correspondre la direction orientée du vecteur joignant  $m_4$  à  $m_5$  au temps  $\tau^*$  est donc de degré  $\pm 1$ . On remarque alors que, le contrôle de l'excentricité du couple  $m_1, m_2$  le long du bord de  $\Gamma_0 \setminus \gamma_0$  excluant les collisions doubles, on définit une homotopie de cette application en faisant varier le temps de  $\tau^*$  à  $\hat{\tau}$  (pour une donnée initiale dans  $\gamma_0$  on définit par continuité  $\hat{\tau} = \tau^*$ ). De la non-nullité du degré on déduit enfin que chaque disque dans  $\Gamma_0$  bordé par  $\lambda$  contient au moins une donnée initiale pour laquelle, au temps  $\hat{\tau}$ ,  $m_4$  et  $m_5$ , donc également  $m_3$ , sont en collision ;

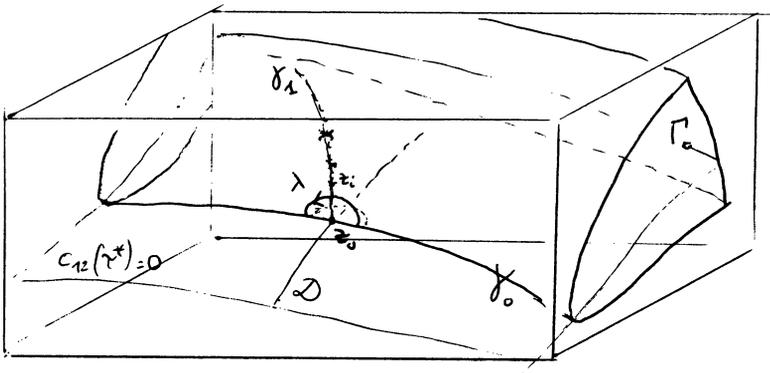


Figure 13

2) dans la deuxième étape, des estimations de type "deux corps" montrent comme dans le cas de Mather-McGehee que le nombre de révolutions (resp. collisions lorsque  $c_{12}$  s'annule) effectuées entre  $\tau^*$  et  $\hat{\tau}$  par  $m_1$  et  $m_2$ , tend vers l'infini lorsque  $z$  tend vers  $z_0$ . Il en est donc de même du nombre d'instants auxquels la distance entre  $m_1$  et  $m_2$  atteint un minimum. Ce minimum étant égal à 0 lorsque le moment cinétique des

couples s'annule, on en déduit l'existence d'une suite de points  $z_i$  de  $\gamma_1$ , convergeant vers  $z_0$ , tels que les mouvements correspondants conduisent simultanément aux collisions  $m_1, m_2$  et  $m_3, m_4, m_5$ , avec un accroissement de la taille qui provient de la conservation de l'impulsion totale. Répétant la construction de  $\Gamma_0$  et de la suite  $z_i$  en remplaçant chaque fois  $z_0$  par un couple de  $z_i$ , on obtient un ensemble de Cantor de conditions initiales qui conduisent à une explosion du système en temps fini.

#### 4.2. Ce qu'il y a en plus de Mather-McGehee

C'est l'objet du dernier paragraphe de l'article de Xia où sont établies les deux propriétés cruciales qui impliquent l'absence de collision double :

- (i) d'une part les couples  $m_1, m_2$  et  $m_4, m_5$  s'aplatissent (l'excentricité des ellipses tend vers 1, et ce bien que les demi-grands axes tendent vers 0) et les directions de leurs demi-grands axes tendent vers des limites;
- (ii) d'autre part, si les directions limites de ces mouvements de collision ne sont ni parallèles ni orthogonales, les moments cinétiques  $\mathcal{C}_{12}$  et  $\mathcal{C}_{45}$  finissent par tendre de façon monotone vers zéro, d'où il suit qu'ils ne s'annulent qu'à la limite.

L'affirmation (i) équivaut à l'existence d'une limite de module 1 pour les vecteurs de Laplace  $\vec{p}_{12}$  et  $\vec{p}_{34}$  des deux couples, vecteurs invariants par homothétie définis par

$$\vec{p}_{ij} = \frac{\vec{r}_{ij}}{|\vec{r}_{ij}|} + \frac{1}{m_i + m_j} \vec{\sigma}_{ij} \wedge \dot{\vec{r}}_{ij},$$

où  $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i$  est le vecteur joignant les corps  $i$  et  $j$ , et  $\vec{\sigma}_{ij} = \vec{r}_{ij} \wedge \dot{\vec{r}}_{ij} = \frac{m_i + m_j}{m_i m_j} \vec{C}_{ij}$ . On sait\* que pour un problème de deux corps,  $\vec{p}_{ij}$  est une intégrale première : c'est, en énergie négative, le vecteur de longueur l'excentricité des deux ellipses kepleriennes (ou de celle décrite par  $\vec{r}_{ij}$ ) et de direction celle du périhélie de  $m_j$ . Xia obtient l'existence d'une limite au moyen d'un long calcul qui prouve que, pour un ensemble de Cantor de données initiales bien choisi, la somme de la série des contributions de chaque quasi-collision triple à la variation au cours du temps de  $\vec{p}_{12}$  (ou  $\vec{p}_{34}$ ) converge.

---

\* Retrouvée par Laplace dans sa recherche systématique des intégrales premières du problème des deux corps qui sont polynomiales de petit degré en les vitesses, cette intégrale (ou plutôt une de ses composantes) apparait pour la première fois chez J. Hermann (Jacopo Ermanno) en 1710 (voir les Mémoires de l'Acad. Royale des Sciences 1712). C'est sans doute parce qu'elle était connue de Hamilton que les physiciens l'appellent "vecteur de Runge-Lenz". On conseille la lecture des deux articles de H. Goldstein : Prehistory of the "Runge-Lenz" vector, Am. J. Phys. 43 (1975) 737 et More on the prehistory ... id. 44 (1976) 1123, ainsi que d'un article historique d'Albouy à paraître.

Plus précisément, la formule élémentaire

$$\dot{\vec{p}}_{ij} = - \left( \frac{m_3}{2m_i} |\vec{r}_{i3}|^{-3} \right) \vec{\sigma}_{ij} \wedge \vec{r}_{ij} + O(|z_k|^{-2}),$$

dans laquelle l'influence de l'autre couple (repéré par  $z_k$  suivant l'axe de symétrie) est séparée de celle de  $m_3$ , montre que seule fait problème la contribution du messenger. En effet, le terme  $O(|z_k|^{-2})$  qui tend vers 0 correspond à une variation  $\Delta \vec{p}_{ij} = \int_0^{t_\infty} \dot{\vec{p}}_{ij} dt$  finie du vecteur de Laplace pendant le temps fini  $t_\infty$  que prend l'explosion du système. Les instants où le messenger n'est pas au voisinage du couple  $i, j$  fournissant également une contribution finie, il s'agit de montrer la convergence de la série  $\sum \int_{t'_n}^{t''_n} \dot{\vec{p}}_{ij} dt$  des variations du vecteur de Laplace lors des passages successifs du système au voisinage de la collision triple  $i, j, 3$ , c'est-à-dire entre les instants  $t'_n$  et  $t''_n$  d'entrée et de sortie dans un certain voisinage (fini) de celle-ci, par exemple les instants successifs de passage du messenger dans un sens ou dans l'autre au centre de gravité du système total (analogues des temps  $\tau_-$  et  $\tau_+$  définis en 1.1). Enfin, puisque très près de la collision triple la configuration des trois corps est approximativement équilatérale, on peut toujours minorer  $r_{i3}$  par  $r_{ij}$ . Se plaçant dans le temps étiré de la collision  $d\tau = I^{-\frac{3}{4}} dt$  défini en 2.3 ( $I$  est l'inertie du système  $i, j, 3$ ), on est ramenés au problème de la convergence de la série  $\sum a_n$  où, les notations étant celles de 3.2 appliquées au triple  $i, j, 3$ , et les instants  $\tau'_n, \tau''_n$  correspondant respectivement à  $t'_n, t''_n$ ,

$$a_n = \int_{\tau'_n}^{\tau''_n} |\tilde{c} \cos \varphi| d\tau.$$

Choisissant à chaque étape le domaine  $\Gamma_0$  assez petit pour qu'aussi bien la valeur après la  $n^{\text{ème}}$  quasi-collision des rapports  $|\vec{r}_{12}|/|\vec{r}_{14}|$ ,  $|\vec{r}_{45}|/|\vec{r}_{14}|$  que le laps de temps entre cette étape et la suivante admettent, par exemple, une majoration de la forme  $M2^{-n}$ , Xia montre que la convergence découle d'une majoration analogue

$$|h_{ij}(t'_n) c_{ij}^2(t'_n)| \leq M2^{-n},$$

c'est-à-dire d'une convergence suffisamment rapide vers 1 de l'excentricité du couple  $m_i, m_j$  en la suite d'instant  $t'_n$ . Or ce dernier point est conséquence de la possibilité de choisir un accroissement arbitraire de la vitesse du messenger entre deux passages loin des couples. Considérons en effet sur la figure 14 l'évolution des différents amas composant le système :

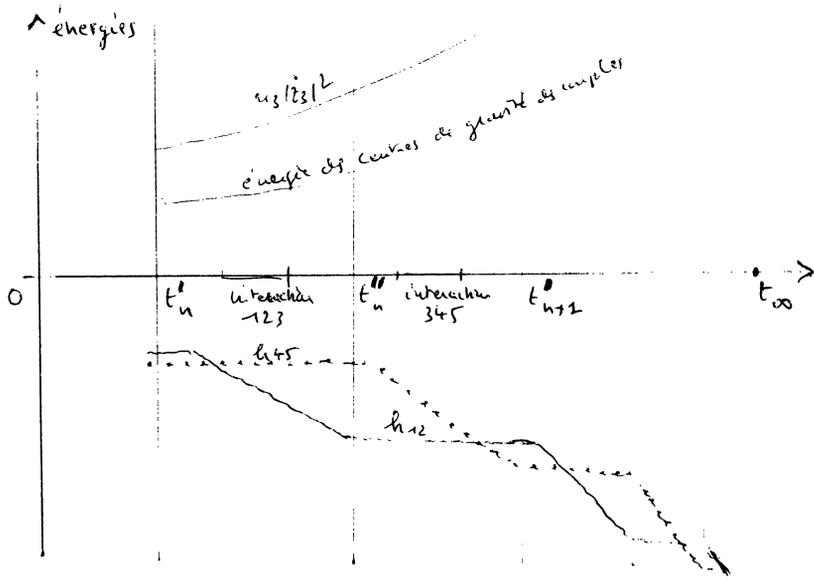


Figure 14

Tout d'abord, l'énergie  $h_{ij}$  du couple  $i, j$  varie peu lorsque le messenger est plus près de l'autre couple (comparer à 1.1) :  $h_{12}$  est approximativement constant entre  $t'_n$  et  $t''_n$  alors que  $h_{45}$  est approximativement constant entre  $t'_n$  et  $t''_n$ . D'autre part, aux époques  $t'_n$ ,  $h_{45}$  est un grand  $O$  de l'énergie cinétique  $m_3 |\dot{z}_3|^2$  du messenger, alors qu'aux époques  $t''_n$ , c'est  $h_{12}$  qui est un grand  $O$  de cette énergie cinétique. Choisissons  $\Gamma_0$  à chaque étape de façon à ce qu'après chaque éjection du messenger hors du couple  $i, j$ , la quantité  $|h_{ij} c_{ij}^2|$ , proportionnelle à  $1 - e_{ij}^2$ , soit majorée par une quantité fixe  $w$  (voir 4.1). On a

$$|h_{45}(t'_n) c_{45}^2(t'_n)| \simeq |h_{45}(t'_n) c_{45}^2(t''_n)| = |h_{45}(t'_n) c_{12}^2(t''_n)| \leq M c_{12}^2(t''_n) |\dot{z}_3(t'_n)|^2.$$

Mais de  $w \geq |h_{12}(t''_n) c_{12}^2(t''_n)| \geq M c_{12}^2(t''_n) |\dot{z}_3(t''_n)|^2$  on déduit une majoration de  $c_{12}^2(t''_n)$  qui transforme l'inégalité précédente en

$$|h_{45}(t'_n) c_{45}^2(t'_n)| \leq M \frac{|\dot{z}_3(t'_n)|^2}{|\dot{z}_3(t''_n)|^2},$$

que l'on peut supposer inférieur à  $M2^{-n}$ . Enfin, puisque sur le petit intervalle de temps  $[t'_n, t''_n]$  le couple 4, 5 est loin des autres masses, une inégalité de ce type vaut également pour  $h_{45} c_{45}^2$  à l'instant  $t'_n$ . Des estimations analogues aux instants  $t'_n$  et  $t''_n$  valent également pour  $h_{12} c_{12}^2$ .

Quant à l'affirmation (ii), elle vient de ce que la dérivée temporelle du moment cinétique du couple  $m_1, m_2$  (assimilé à un nombre réel  $C_{12}$ ) ne dépend pas du messenger :

$$\dot{C}_{12} = \frac{3}{8} m_1 m_4 |\vec{r}_{12}|^2 |\vec{r}_{45}|^2 \sin 2\theta [(z_1 - z_4)^{-6} + O(|z_1 - z_4|^{-9})],$$

où  $\theta$  est l'angle des vecteurs  $\vec{r}_{12}$  et  $\vec{r}_{45}$ . On déduit en effet de cette expression que les seuls cas à exclure sont ceux pour lesquels l'angle des directions limites des demi-grands axes des deux couples est un multiple de  $\frac{\pi}{2}$ , cas qui correspondent en fait à des sous-problèmes invariants. Car s'il n'en est pas ainsi, en un point où  $C_{12}$  s'annule,  $\vec{p}_{12}$  coïncide avec le rayon vecteur normalisé  $\vec{r}_{12}/|\vec{r}_{12}|$  et  $\dot{C}_{12}$  a un signe constant, ce qui empêche toute oscillation vers la limite 0 et exclut donc à partir d'un certain instant toute collision entre  $m_1$  et  $m_2$  d'une part,  $m_4$  et  $m_5$  de l'autre. Les collisions triples ayant été exclues par construction, on obtient la conclusion cherchée.

**Remarques.** 1) Les solutions de Xia sont d'une complexité essentiellement minimale compatible avec l'existence d'une singularité (impossibilité de prolonger). Il faut en effet plus de trois corps, la taille du système doit tendre vers l'infini, et la distance minimale de deux particules doit avoir 0 comme *lim inf*. Le premier point est le *Théorème de Painlevé* [18], le deuxième celui de *Von Zeipel* [25], le troisième vient de la nécessité d'atteindre des valeurs non bornées de  $U$ . Il implique la présence d'un messenger revenant indéfiniment interagir avec les amas qui s'éloignent à l'infini : le centre de gravité d'un amas isolé a en effet une vitesse asymptotiquement constante (mouvement hyperbolique) qui ne lui permet pas d'atteindre l'infini en temps fini.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. ALBOUY - *Recherches sur le problème des configurations centrales*, 1997, à paraître.
- [2] A. ALBOUY, A. CHENCINER - *Collisions totales, mouvements complètement paraboliques et réduction des homothéties dans le Problème des N corps*, 1996.
- [3] E. CARTAN - *Leçons sur les invariants intégraux*, Hermann (1922).
- [4] J. CHAZY - *Sur l'allure du mouvement dans le Problème des trois corps quand le temps croit indéfiniment*, Annales de l'Ecole Normale Supérieure **39** (1922), 29–130.
- [5] L. EULER - *Considérations sur le problème des trois corps* Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin ( lu en 1765) **19** (1770), 194–220 .

- [6] J.L. GERVER - *The existence of Pseudocollisions in the Plane*, Journal of Differential Equations **89** (1991), 1–68.
- [7] C.G.J. JACOBI - *Vorlesungen über Dynamik* (1843), Gesammelte Werke, Chelsea (1969).
- [8] J.L. LAGRANGE - *Essai sur le problème des trois corps*, œuvres **vol. 6** (1772), 229–324.
- [9] J.L. LAGRANGE - *Remarques générales sur le mouvement de plusieurs corps*, œuvres **vol. 4** (1777), 401–418.
- [10] T. LEVI CIVITA - *Sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps*, Acta Mathematica **30** (1906), 311, et *Sur la régularisation du problème des trois corps*, Acta Mathematica **42** (1920), 44.
- [11] C. MARCHAL, D. SAARI - *On the final evolution of the  $n$  body problem*, Journal of Differential Equations **20** (1976), 150–186.
- [12] J. MATHER, R. McGEHEE - *Solutions of the collinear four body Problem which become unbounded in finite time*, Lecture Notes in Physics **38** (J. Moser editor) Springer (1975), 573–597.
- [13] R. McGEHEE - *Triple collision in the collinear three body Problem*, Inventiones Mathematicæ **27** (1974), 191–227.
- [14] R. McGEHEE - *Singularities in Classical and Celestial Mechanics*, Proceedings of the Int. congress of Math. Helsinki (1978), 827–834.
- [15] R. McGEHEE - *Von Zeipel's theorem on singularities in celestial mechanics*, Expo. Math. **4** (1986), 335–345.
- [16] J. MILNOR - *On the geometry of the Kepler problem*, American Mathematical Monthly **vol. 2** (1983), 353–365.
- [17] I. NEWTON - *Principia Mathematica Liber Tertius* (1686).
- [18] P. PAINLEVE - *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles*, Hermann (1897), in Œuvres, C.N.R.S **vol. 1**.
- [19] D. SAARI - *The manifold structure for collision and for hyperbolic-parabolic orbits in the  $n$ -body problem*, J. of Differential Equations **55** (1984), 300–329.
- [20] C.L. SIEGEL, J. MOSER - *Lectures on Celestial Mechanics*, Springer (1971).
- [21] C. SIMO - *Analysis of triple collision in the isocetes problem*, Classical Mechanics and Dynamical Systems, Dekker New York 1981.
- [22] K.F. SUNDMAN - *Mémoire sur le problème des trois corps*, Acta Math. **36** (1913), 105–179.
- [23] A. WINTNER - *The analytical foundations of Celestial Mechanics*, Princeton University Press (1947).

- [24] Z. XIA - *The existence of non collision singularities in newtonian systems*, Thèse Northwestern University (1988) et *Annals of Mathematics* **135** (1992), 411–468.
- [25] H. von ZEIPEL - *Sur les singularités du problème des  $n$  corps*, *Arkiv för Matematik, Astronomii och Fysik* **Bd 4 Nr 32** (1908).

Alain CHENCINER

Université de Paris 7–Denis Diderot

U.F.R. de Mathématique

Tour 45–55, 5ème étage

2, place Jussieu

F–75251 PARIS CEDEX 05

et

Astronomie et Systèmes Dynamiques

Bureau des Longitudes

URA 707 du CNRS

3, rue Mazarine

F-75006 PARIS

chencine@mathp7.jussieu.fr