JEAN-FRANÇOIS BOUTOT

Uniformisation p-adique des variétés de Shimura

Astérisque, tome 245 (1997), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 831, p. 307-322

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1996-1997__39__307_0>

Séminaire BOURBAKI Juin 1997
49ème année, 1996-97, n° 831

UNIFORMISATION P-ADIQUE DES VARIÉTÉS DE SHIMURA

par **Jean-François BOUTOT**

0. INTRODUCTION

Les premiers résultats d'uniformisation p-adique remontent à Tate [T] dans le cas des courbes elliptiques à réduction multiplicative. Il introduisit la notion d'espace analytique rigide, dont Raynaud [Ra1] donna par la suite une interprétation comme "fibre générique" de schémas formels. C'est de ce point de vue que Mumford [M] montra que les courbes de genre quelconque, en des places de mauvaise réduction semi-stable où la fibre spéciale est à composantes irréductibles rationnelles, peuvent être uniformisées par des ouverts convenables du "demi-plan p-adique" Ω^2, le complémentaire dans $\mathbb{P}^1$ de l'ensemble des points $\mathbb{Q}_p$-rationnels [Ra2].

Cherednik [Ch] découvrit que c'est le cas de la courbe de Shimura associée à une algèbre de quaternions B sur $\mathbb{Q}$ en les places où cette algèbre est ramifiée. Cherednik part de la courbe définie par uniformisation p-adique et montre en utilisant des travaux d'Ihara que c'est une courbe de Shimura. Cette approche a été généralisée récemment par Varshavsky [V] à certaines variétés de Shimura de dimension supérieure.

Peu après la découverte de Cherednik, Drinfeld [Dr2] en donne une explication naturelle. Soit $\widehat{\Omega}^2$ le modèle formel de Ω^2, Drinfeld montre que $\widehat{\Omega}^2 \hat{\otimes} \widehat{\mathbb{Z}}_p^{nr}$ est un espace de modules pour des groupes p-divisibles d'un type particulier : les $\mathcal{O}_{\mathrm{B}_p}$-modules formels spéciaux (2.1). L'uniformisation p-adique provient alors de ce qu'en la place p considérée la courbe de Shimura paramètre des variétés abéliennes toutes isogènes dont le groupe p-divisible est de ce type (3.4).

Dans cet article, Drinfeld considère plus généralement une extension finie F de $\mathbb{Q}_p$, l'espace Ω_{F}^d complémentaire dans $\mathbb{P}^d$ des hyperplans F-rationnels et le modèle formel $\widehat{\Omega}_{\mathrm{F}}^d$ défini par Deligne. Il montre que $\widehat{\Omega}_{\mathrm{F}}^d \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathrm{F}}} \widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{F}}^{nr}$ est un espace de modules de $\mathcal{O}_{\mathrm{D}}$-modules formels spéciaux, pour D l'algèbre à division de centre F et d'invariant $1/d$ (2.4).

Les sous-groupes finis du groupe p-divisible universel $\mathcal{X}$ sur $\widehat{\Omega}^d_{\mathrm{F}} \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathrm{F}}} \widehat{\mathcal{O}}^{nr}_{\mathrm{F}}$ permettent de définir un système projectif Σ de revêtements étales $\mathrm{GL}_d(\mathrm{F})$-équivariants de $\Omega^d_{\mathrm{F}} \otimes_{\mathrm{F}} \widehat{\mathrm{F}}^{nr}$ de groupe de Galois le complété profini $\widehat{\mathcal{O}}^*_{\mathrm{D}}$ de $\mathcal{O}^*_{\mathrm{D}}$. Drinfeld conjecture que toutes les représentations supercuspidales de $\mathrm{GL}_d(\mathrm{F})$ se réalisent dans la cohomologie étale l-adique à support compact de Σ. Mieux l'action du groupe $\mathrm{GL}_d(\mathrm{F}) \times \mathrm{D}^* \times \mathrm{W}_{\mathrm{F}}$ sur cette cohomologie devrait réaliser à la fois la correspondance de Jacquet-Langlands (entre représentations de $\mathrm{GL}_d(\mathrm{F})$ et de D^*) et la correspondance de Langlands locale (entre représentations de $\mathrm{GL}_d(\mathrm{F})$ et de W_{F}).

Modulo les problèmes dus aux fondements de la cohomologie l-adique des espaces rigides, maintenant éclaircis par les travaux de Berkovich [B], cette conjecture a été vérifiée par Carayol [C] dans le cas $d = 2$. La preuve utilise l'uniformisation p-adique des courbes de Shimura et le calcul de la cohomologie de ces courbes. Harris [H] a étendu cette approche à d quelconque, toutefois il n'identifie pas complètement l'action du groupe W_{F} à celle prédite par la conjecture. Faltings [F] a étudié cette cohomologie par une méthode purement locale, sa méthode ne donne pas de renseignements sur l'action du groupe W_{F}. La cohomologie des espaces Ω^d_{F} eux-mêmes a été déterminée par Schneider et Stuhler [SS].

Rapoport et Zink [RZ] ont généralisé la construction de Drinfeld à toutes les classes d'isogénie de groupes p-divisibles (1.2). Les schémas formels $\breve{\mathcal{M}}$ qu'ils définissent restent en général assez mystérieux. Cependant le groupe p-divisible universel au-dessus de $\breve{\mathcal{M}}$ permet de définir une application de périodes de source l'espace analytique rigide $\breve{\mathcal{M}}^{rig}$ à valeurs dans une grassmannienne. Cette application est étale et, sous réserve de la validité d'une conjecture de Fontaine [F], son image coïncide, d'après Totaro [To], avec le sous-espace de cette grassmannienne défini par Van der Put et Voskuil [VV] par analogie avec les sous-espaces Ω_d de $\mathbb{P}^d$. Dans le cas des groupes de Lubin-Tate [LT], cette application de périodes avait été étudiée auparavant par Gross et Hopkins ([GH1],[GH2],[Y]); c'est une application étale surjective du polydisque ouvert de dimension $d-1$ sur $\mathbb{P}^{d-1}$.

Suivant la méthode de Drinfeld, Rapoport et Zink montrent comment les schémas formels $\breve{\mathcal{M}}$ permettent d'uniformiser le voisinage formel de la classe d'isogénie la plus supersingulière dans la fibre en p d'une variété de Shimura de type (PEL), c'est-à-dire paramétrant des variétés abéliennes avec polarisations, endomorphismes et structures de niveau (3.3). Lorsqu'en la place p toutes les variétés abéliennes paramétrées par la variété de Shimura sont isogènes, il y a uniformisation

p-adique de la variété de Shimura toute entière comme dans le théorème de Cherednik (3.4).

1. ESPACES DE MODULES DE GROUPES P-DIVISIBLES

On fixe un nombre premier p et un corps algébriquement clos k de caractéristique p. Soient $\mathrm{W}(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt à cœfficients dans k, K_0 son corps des fractions et σ l'automorphisme de Frobenius de K_0.

Pour tout anneau de valuation discrète complet $\mathcal{O}$ de caractéristique résiduelle p, on note $Nilp_{\mathcal{O}}$ la catégorie des schémas localement noethériens S sur $\mathcal{O}$ tels que l'idéal $p\mathcal{O}_{\mathrm{S}}$ soit localement nilpotent. On note $\bar{\mathrm{S}}$ le sous-schéma fermé de S défini par $p\mathcal{O}_{\mathrm{S}}$.

1.1. Classes d'isogénie

Si X et Y sont des groupes p-divisibles sur S, une *isogénie* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est un épimorphisme (de faisceaux f.p.p.f) dont le noyau est un schéma en groupes finis localement libre. Une *quasi-isogénie* est, localement sur S, un élément f de $\mathrm{Hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ tel que $p^n f$ soit une isogénie pour n convenable.

Soit $\mathbf{X}$ un groupe p-divisible fixé sur $\mathrm{Spec}\, k$. On considère le foncteur $\mathcal{M}$ sur $Nilp_{\mathrm{W}(k)}$ qui à S associe l'ensemble des classes d'isomorphisme de couples (X, ρ) consistant en :

1) un groupe p-divisible X sur S,

2) une quasi-isogénie $\rho : \mathbf{X}_{\bar{\mathrm{S}}} \to \mathrm{X}_{\bar{\mathrm{S}}}$.

THÉORÈME 1.— *Le foncteur $\mathcal{M}$ est représentable par un schéma formel formellement localement de type fini sur* $\mathrm{Spf}\,(\mathrm{W}(k))$.

La difficulté technique pour démontrer ce résultat ([RZ], th. 2.16) est de contrôler l'entier n tel que $p^n \rho$ soit une isogénie.

1.2. Structures supplémentaires

On va considérer des variantes du foncteur $\mathcal{M}$ pour des groupes p-divisibles munis de structures supplémentaires de type (E) : endomorphismes ou de type (PE) : polarisations et endomorphimes .

Cas (E): On se donne une $\mathbb{Q}_p$-algèbre semi-simple de dimension finie D et un ordre maximal $\mathcal{O}_{\mathrm{D}}$ de D. On suppose que $\mathbf{X}$ est muni d'une action de $\mathcal{O}_{\mathrm{D}}$ et se relève, ainsi que l'action de $\mathcal{O}_{\mathrm{D}}$, en un groupe p-divisible $\widetilde{\mathbf{X}}$ sur l'anneau des entiers $\mathcal{O}_{\mathrm{K}}$ d'une extension finie K de K_0. Soit E l'extension finie de $\mathbb{Q}_p$, corps de définition de la classe d'isomorphisme de $\mathrm{Lie}(\widetilde{\mathbf{X}}_{\mathrm{K}})$ comme représentation de D. Soient $\breve{\mathrm{E}} = \mathrm{EK}_0$ et $\mathcal{O}_{\breve{\mathrm{E}}}$ l'anneau des entiers de $\breve{\mathrm{E}}$.

On considère le foncteur $\breve{\mathcal{M}}$ sur $Nilp_{\mathcal{O}_{\breve{\mathrm{E}}}}$ qui à S associe l'ensemble des classes d'isomorphisme de couples (X, ρ) consistant en :

1) un groupe p-divisible X sur S muni d'une action de $\mathcal{O}_{\mathrm{D}}$, tel que, pour tout S-schéma S′ et tout $a \in \mathcal{O}_{\mathrm{D}} \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{S}'}$, on ait :

$$det_{\mathcal{O}_{\mathrm{S}'}}(a, \mathrm{Lie}(\mathrm{X}_{\mathrm{S}'})) = det_{\mathrm{K}}(a, \mathrm{Lie}(\widetilde{\mathbf{X}}_{\mathrm{K}})).$$

2) une $\mathcal{O}_{\mathrm{D}}$-quasi-isogénie $\rho : \mathbf{X}_{\bar{\mathrm{S}}} \to \mathrm{X}_{\bar{\mathrm{S}}}$.

Remarque 1. La condition d'égalité des déterminants est introduite par Kottwitz dans [K3] . La fonction $a \mapsto det_{\mathrm{K}}(a, \mathrm{Lie}(\widetilde{\mathbf{X}}_{\mathrm{K}}))$ pour $a \in \mathcal{O}_{\mathrm{D}}$ est à valeurs dans $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$, mieux elle définit un polynôme à coefficients dans $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ sur le $\mathbb{Z}_p$-module libre $\mathcal{O}_{\mathrm{D}}$. On note encore $det_{\mathrm{K}}(a, \mathrm{Lie}(\widetilde{\mathbf{X}}_{\mathrm{K}}))$ la valeur de ce polynôme pour $a \in \mathcal{O}_{\mathrm{D}} \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{S}'}$.

Remarque 2. Supposons que le centre F de D soit une extension non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$. Soit $\widetilde{\mathrm{F}}$ une extension non ramifiée de F contenue dans D déployant D. Alors il revient au même de demander que, pour tout point fermé s de S de corps résiduel $k(s)$, $\mathrm{Lie}(\mathrm{X}_s)$ et $\mathrm{Lie}(\mathbf{X}) \otimes_k k(s)$ soient isomorphes comme $\mathcal{O}_{\widetilde{\mathrm{F}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} k(s)$-modules.

Cas (PE) : On suppose $p \neq 2$ et D munie d'une involution $*$ qui laisse $\mathcal{O}_{\mathrm{D}}$ stable. Si X est un groupe p-divisible avec action $i : \mathcal{O}_{\mathrm{D}} \to \mathrm{End}(\mathrm{X})$, on munit le dual $\hat{\mathrm{X}}$ de X de l'action de $\mathcal{O}_{\mathrm{D}}$ donnée par $b \mapsto i(b^*)^\wedge$. On appelle $*$-polarisation de X une $\mathcal{O}_{\mathrm{D}}$-quasi-isogénie symétrique $\mathrm{X} \to \hat{\mathrm{X}}$. On suppose $\mathbf{X}$ muni d'une $*$-polarisation λ.

On considère le foncteur $\breve{\mathcal{M}}$ défini comme ci-dessus, mais en imposant aux couples (X, ρ) la condition : il existe un $\mathcal{O}_{\mathrm{D}}$-isomorphisme $\lambda_{\mathrm{X}} : \mathrm{X} \to \hat{\mathrm{X}}$ et une constante $c_{\mathrm{X}} \in \mathbb{Q}_p^\times$ tels que $\hat{\rho} \circ \lambda_{\mathrm{X}} \circ \rho = c_{\mathrm{X}} \lambda$.

THÉORÈME 2.— *Le foncteur* $\breve{\mathcal{M}}$ *est représentable par un schéma formel formellement localement de type fini sur* $\mathrm{Spf}\,(\mathcal{O}_{\breve{\mathrm{E}}})$.

Ce résultat ([RZ], th. 3.25) se déduit facilement du théorème 1 . Le schéma formel $\breve{\mathcal{M}}$ est mal connu en général; Rapoport et Zink conjecturent qu'il est plat sur $\mathrm{Spf}\,(\mathcal{O}_{\breve{\mathrm{E}}})$. On prendra garde qu'en général $\breve{\mathcal{M}}$ n'est pas un schéma formel p-adique.

1.3. Groupe d'automorphismes

Le groupe $\mathrm{J}(\mathbb{Q}_p)$ des $\mathcal{O}_\mathrm{D}$-quasi-isogénies de $\mathbf{X}$ (resp. $(\mathbf{X},\mathbb{Q}_p^\times\lambda)$) dans le cas (PE) agit sur $\breve{\mathcal{M}}$ via

$$g.(\mathrm{X},\rho) = (\mathrm{X},\rho\circ g^{-1}).$$

1.4. Donnée de descente

Soit τ l'automorphisme de Frobenius de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\breve{\mathrm{E}}})$ au-dessus de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_\mathrm{E})$ et $\bar\tau$ l'automorphisme correspondant de $\mathrm{Spec}(k)$. Pour $\mathrm{S}\in \mathit{Nilp}_{\mathcal{O}_{\breve{\mathrm{E}}}}$ de morphisme structural φ, on note S_τ le schéma S muni du morphisme structural $\tau\circ\varphi$. Une puissance convenable du morphisme de Frobenius de $\mathbf{X}$ définit un morphisme $\mathrm{Frob}_\mathrm{E} : \mathbf{X}\to\bar\tau^*\mathbf{X}$. Le schéma formel $\breve{\mathcal{M}}$ est muni de la donnée de descente :

$$\begin{aligned}\alpha : \breve{\mathcal{M}}(\mathrm{S}) &\longrightarrow \breve{\mathcal{M}}(\mathrm{S}_\tau)\\ (\mathrm{X},\rho) &\mapsto (\mathrm{X},\varphi^*(\mathrm{Frob}_\mathrm{E}^{-1})\circ\rho).\end{aligned}$$

Cette donnée de descente n'est pas effective sur $\breve{\mathcal{M}}$ lui-même, mais le devient sur un système projectif convenable de quotients de $\breve{\mathcal{M}}$ par des sous-groupes de $\mathrm{J}(\mathbb{Q}_p)$, système projectif qui provient donc par changement de base d'un pro-schéma formel $\mathcal{M}$ sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_\mathrm{E})$ ([RZ], th. 3.49). L'action de $\mathrm{J}(\mathbb{Q}_p)$ sur $\breve{\mathcal{M}}$ commute à α et définit donc une action de $\mathrm{J}(\mathbb{Q}_p)$ sur $\mathcal{M}$.

2. ESPACES DE DRINFELD

Drinfeld a étudié dans [Dr2] le cas où D est une algèbre à division de centre F et d'invariant $1/d$ sur son centre. On note $\widetilde{\mathrm{F}}$ une extension non ramifiée de degré d de F contenue dans D et τ l'homomorphisme de Frobenius de $\widetilde{\mathrm{F}}$ au-dessus de F. Enfin soit π une uniformisante de $\mathcal{O}_\mathrm{F}$, q le cardinal du corps résiduel de F et Π un élément de $\mathcal{O}_\mathrm{D}$ tel que:

$$\mathcal{O}_\mathrm{D} = \mathcal{O}_{\widetilde{\mathrm{F}}}[\Pi], \quad \Pi^d = \pi, \quad \Pi a = \tau(a)\Pi \quad \text{pour} \quad a\in\widetilde{\mathrm{F}}.$$

2.1. $\mathcal{O}_\mathrm{D}$-modules formels spéciaux

Soit S un $\mathcal{O}_\mathrm{F}$-schéma sur lequel p est nilpotent et X un groupe p-divisible sur S .

DÉFINITION 1.— *On dit que* X *est un* $\mathcal{O}_F$ -module formel *s'il est connexe et muni d'une action de* $\mathcal{O}_F$ *telle que l'action induite sur* Lie(X) *coïncide avec celle provenant de la structure de* $\mathcal{O}_S$ *-module de* Lie(X) *via l'homomorphisme structural* $\mathcal{O}_F \to \mathcal{O}_S$.

On appelle F-hauteur d'un $\mathcal{O}_F$-module formel X le quotient par $[F : \mathbb{Q}_p]$ de la hauteur du groupe p-divisible X. C'est l'entier h tel que $\mathrm{Ker}(\pi : X \to X)$ soit un schéma en groupes fini de rang q^h.

DÉFINITION 2.— *On dit que* X *est un* $\mathcal{O}_D$ -module formel spécial *s'il est connexe et muni d'une action de* $\mathcal{O}_D$ *telle que:*

(i) l'action induite de $\mathcal{O}_F$ *en fait un* $\mathcal{O}_F$ *-module formel,*

(ii) l'action induite de $\mathcal{O}_{\widetilde{F}}$ *sur* Lie(X) *en fait un* $\mathcal{O}_S \otimes_{\mathcal{O}_F} \mathcal{O}_{\widetilde{F}}$ *-module localement libre de rang un.*

Dans les propositions suivantes, on suppose que S est le spectre d'un corps algébriquement clos k.

PROPOSITION 1.— *Un* $\mathcal{O}_D$ *-module formel spécial est de* F *-hauteur multiple de* d^2 .

Démonstration : Supposons pour simplifier $F = \mathbb{Q}_p$. Soit (M,V) le cristal de Dieudonné de X: M est un $W(k)$-module libre dont le rang est la hauteur h de X, muni d'un opérateur σ^{-1}- linéaire V tel que $M/VM = \mathrm{Lie}(X)$. Notons $i : \mathcal{O}_D \to \mathrm{End}(X)$ l'action de $\mathcal{O}_D$. Soit

$$M_j = \{m \in M \;/\; i(a)m = \sigma^{-j}(a)m \text{ pour } a \in \widetilde{F}\}, \quad j \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}.$$

On a

$$M = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} M_j.$$

Les opérateurs Π et V sont de degré 1. L'entier $r = \mathrm{long}(M_j/\Pi M_{j-1})$ est indépendant de j et $h = \mathrm{long}(M/\pi M) = d\,\mathrm{long}(M/\Pi M) = d^2 r$. ∎

Soit également, pour $j \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Lie}(X)_j &= \{t \in \mathrm{Lie}(X) \;/\; i(a)t = \sigma^{-j}(a)t \text{ pour } a \in \widetilde{F}\}, \\ &= M_j/VM_{j-1}. \end{aligned}$$

L'action de Π sur Lie(X) est de degré 1 . On dit que j est *critique* si l'application $\Pi : \mathrm{Lie}(X)_j \to \mathrm{Lie}(X)_{j+1}$ est nulle.

PROPOSITION 2.— *Il n'existe qu'une seule classe de* $\mathcal{O}_D$ *-isogénie de* $\mathcal{O}_D$ *-modules formels spéciaux de* F *-hauteur* d^2 *. Le groupe des* $\mathcal{O}_D$ *-quasiisogénies d'un tel* $\mathcal{O}_D$ *-module formel spécial est isomorphe à* $\mathrm{GL}_d(F)$.

Démonstration (lorsque $F = \mathbb{Q}_p$*):* La classe de $\mathcal{O}_D$-isogénie de X est déterminée par l'isocristal $(M \otimes \mathbb{Q}_p, V)$ avec action de D, lui-même déterminé par l'isocristal $(M_j \otimes \mathbb{Q}_p, V^{-1}\Pi)$, qui est indépendant de j (via les isomorphismes induits par Π).

Montrons que cet isocristal est de pente zéro. Soit j un indice critique; il en existe car $\Pi^d = 0$ sur Lie(X) et chaque $\mathrm{Lie}(X)_j$ est un espace vectoriel de dimension 1. Alors $\Pi M_j = VM_j$; ainsi M_j est un réseau stable par $V^{-1}\Pi$ dans $M_j \otimes \mathbb{Q}_p$ et, d'après Dieudonné, $\eta_j = (M_j)^{V^{-1}\Pi}$ est un $\mathbb{Z}_p$-module libre de rang d et $(M_j \otimes \mathbb{Q}_p, V^{-1}\Pi) \simeq (\eta_j \otimes W(k), id \otimes \sigma^{-1})$.

De plus $\mathrm{Aut}_D(M \otimes \mathbb{Q}_p, V) = \mathrm{Aut}(M_j \otimes \mathbb{Q}_p, V^{-1}\Pi) = \mathrm{Aut}(\eta_j)$. ■

2.2. Le foncteur de Drinfeld

On choisit une clôture algébrique $\varepsilon : F \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ de F. On identifie $k = \overline{\mathbb{F}}_p$ au corps résiduel de $\overline{\mathbb{Q}}_p$ et du même coup le corps des fractions K_0 de $W(k)$ à un sous-corps de $\overline{\mathbb{Q}}_p$.On pose $E = F$ et $\breve{E} = EK_0$. Enfin soit $\mathbf{X}$ un $\mathcal{O}_D$-module formel spécial fixé sur $\mathrm{Spec}(k)$.

Drinfeld [Dr2] considère le foncteur $\breve{\mathcal{M}}$ sur $Nilp_{\mathcal{O}_{\breve{E}}}$ qui à S associe l'ensemble des classes d'isomorphisme de couples (X, ρ) consistant en:

1) un $\mathcal{O}_D$-module formel spécial X sur S de F-hauteur constante d^2.

2) une $\mathcal{O}_D$-quasi-isogénie $\rho : \mathbf{X}_{\bar{S}} \to X_{\bar{S}}$.

Remarque. La condition pour X d'être un $\mathcal{O}_D$-module formel spécial de F-hauteur d^2 pourrait s'exprimer comme une condition sur le déterminant de l'action de $\mathcal{O}_D$ sur Lie(X) comme en (1.2) (*cf.* [RZ] 3.58).

Drinfeld identifie explicitement le schéma formel qui représente $\breve{\mathcal{M}}$.

2.3. L'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathrm{GL}_d(F)$

L'immeuble de Bruhat-Tits $\mathcal{B}$ de $\mathrm{GL}_d(F)$ est un complexe simplicial dont les sommets sont les classes d'homothétie de $\mathcal{O}_F$-réseaux dans F^d. Il sera plus commode ici de considérer $\mathcal{B} \times \mathbb{Z}$ dont les sommets sont les réseaux eux-mêmes. Pour $h \in \mathbb{Z}$, un simplexe de $\mathcal{B} \times \{h\}$ est un ensemble $\Delta = (\eta_{i_0}, ..., \eta_{i_r})$, $0 \leq i_0 < i_1 < ... < i_r < d$, de $\mathcal{O}_F$-réseaux dans F^d tels que:

$$\pi\eta_{i_r} \subset \eta_{i_0} \subset ... \subset \eta_{i_r} \quad \text{et} \quad [\eta_{i_k} : \mathcal{O}_F^d] = i_k - h \quad \text{pour} \quad k = 0, ..., r,$$

où, si η et η' sont deux $\mathcal{O}_F$-réseaux dans F^d, on note:

$$[\eta : \eta'] = \mathrm{long}_{\mathcal{O}_F}(\eta/\eta \cap \eta') - \mathrm{long}_{\mathcal{O}_F}(\eta'/\eta \cap \eta').$$

Le groupe $\mathrm{GL}_d(\mathrm{F})$ agit sur $\mathcal{B}\times\mathbb{Z}$ via $\eta\mapsto g\eta$ et $h\mapsto h+\mathrm{ord}_{\mathrm{F}}(\det g)$ pour $g\in\mathrm{GL}_d(\mathrm{F})$.

2.4. Le schéma formel $\widehat{\Omega}^d_{\mathrm{F}}\times\mathbb{Z}$

Pour Δ un simplexe de $\mathcal{B}\times\mathbb{Z}$, soit $\mathcal{F}_\Delta$ le foncteur sur $Nilp_{\mathcal{O}_{\mathrm{F}}}$ qui à S associe l'ensemble des classes d'isomorphisme de diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\eta_{i_0} & \subset & \eta_{i_1} & \subset & \dots & \subset & \eta_{i_r} & \xrightarrow{\pi} & \eta_{i_0}\\
{\scriptstyle\varphi_{i_0}}\big\downarrow & & {\scriptstyle\varphi_{i_1}}\big\downarrow & & & & {\scriptstyle\varphi_{i_r}}\big\downarrow & & {\scriptstyle\varphi_{i_0}}\big\downarrow\\
\mathcal{L}_{i_0} & \to & \mathcal{L}_{i_1} & \to & \dots & \to & \mathcal{L}_{i_r} & \to & \mathcal{L}_{i_0}
\end{array}$$

où les $\mathcal{L}_{i_k}$ sont des $\mathcal{O}_{\mathrm{S}}$-modules inversibles et les φ_{i_k} des applications $\mathcal{O}_{\mathrm{F}}$-linéaires telles que, pour tout $n\in\eta_{i_k}\setminus\eta_{i_{k-1}}$, la section $\varphi_{i_k}(n)$ de $\mathcal{L}_{i_k}$ ne s'annule en aucun point de S. Le foncteur $\mathcal{F}_\Delta$ est représentable par un ouvert $\widehat{\Omega}_\Delta$ du schéma formel:

$$\mathrm{Spf}\big(\mathcal{O}_{\mathrm{F}}[\mathrm{T}_0,\dots,\mathrm{T}_r,\mathrm{U}_{r+1},\dots,\mathrm{U}_d,\mathrm{U}_{r+1}^{-1},\dots,\mathrm{U}_d^{-1}])/(\mathrm{T}_0\dots\mathrm{T}_r-\pi)^\wedge\big)\quad,$$

où $^\wedge$ dénote la complétion π-adique.

Si $\Delta'=\Delta\setminus\{\eta_{i_k}\}$, on définit une immersion ouverte $\widehat{\Omega}_{\Delta'}\hookrightarrow\widehat{\Omega}_\Delta$ en complétant un diagramme de type Δ' en le diagramme de type Δ :

$$\begin{array}{ccccccc}
\dots & \subset & \eta_{i_k} & \to & \eta_{i_{k+1}} & \subset & \dots\\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
\dots & \to & \mathcal{L}_{i_{k+1}} & = & \mathcal{L}_{i_{k+1}} & \to & \dots
\end{array}$$

On note $\widehat{\Omega}^d_{\mathrm{F}}\times\mathbb{Z}$ le schéma formel π-adique localement de type fini sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\mathrm{F}})$ obtenu par recollement des $\widehat{\Omega}_\Delta$ le long de ces immersions ouvertes pour Δ parcourant les simplexes de $\mathcal{B}\times\mathbb{Z}$. La fibre spéciale au-dessus du corps résiduel κ de $\mathcal{O}_{\mathrm{F}}$ d'une composante $\widehat{\Omega}^d_{\mathrm{F}}$ s'identifie à la réunion d'une infinité d'espaces projectifs $\mathbb{P}^{d-1}_\kappa$ recollés le long de leurs hyperplans κ-rationnels en un agencement dual de celui des simplexes de $\mathcal{B}$.

Le groupe $\mathrm{GL}_d(\mathrm{F})$ agit sur $\widehat{\Omega}^d_{\mathrm{F}}\times\mathbb{Z}$ de manière compatible à son action sur $\mathcal{B}\times\mathbb{Z}$. L'action de $g\in\mathrm{GL}_d(\mathrm{F})$ est définie par les applications de $\mathcal{F}_\Delta(\mathrm{S})\to\mathcal{F}_{g\Delta}(\mathrm{S})$ qui, à $\{\varphi_{i_k}:\eta_{i_k}\to\mathcal{L}_{i_k}\}$ font correspondre $\{\varphi_{i_k}\circ g^{-1}:g\eta_{i_k}\to\mathcal{L}_{i_k}\}$.

2.5. Le théorème de Drinfeld

Le résultat principal de l'article de Drinfeld [Dr2] est le théorème suivant :

THÉORÈME 3.— *Il existe un isomorphisme de schémas formels :*

$$\breve{\mathcal{M}} \xrightarrow{\sim} (\widehat{\Omega}^d_{\mathrm{F}} \times \mathbb{Z}) \times_{\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\mathrm{F}})} \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\breve{\mathrm{E}}}),$$

équivariant pour les actions de $\mathrm{GL}_d(\mathrm{F})$ *sur* $\widehat{\Omega}^d_{\mathrm{F}} \times \mathbb{Z}$ *et sur* $\breve{\mathcal{M}}$ *(pour un choix convenable de l'isomorphisme* $\mathrm{GL}_d(\mathrm{F}) \simeq \mathrm{J}(\mathbb{Q}_p)$ *).*

La donnée de descente sur $\breve{\mathcal{M}}$ *induit sur le membre de droite le composé de la donnée de descente canonique avec la translation par* $+1$ *sur* $\mathbb{Z}$.

Décrivons explicitement la flèche $\breve{\mathcal{M}}(k) \to (\widehat{\Omega}^d_{\mathrm{F}} \times \mathbb{Z})(k)$ en reprenant les notations de (2.1). Soit (X, ρ) un point de $\breve{\mathcal{M}}(k)$. Pour tout indice critique j de X, la quasi-isogénie ρ et l'opérateur Π^{-j} permettent d'identifier $\eta_j = \mathrm{M}_j^{\mathrm{V}^{-1}\Pi}$ à un réseau dans $\mathrm{F}^d = (\mathrm{M}_0(\mathbf{X}) \otimes_{\mathrm{W}(k)} \mathrm{K}_0)^{\mathrm{V}^{-1}\Pi}$. Alors, si $0 \leq i_0 < i_1 < ... < i_r < d$ sont les indices critiques de X et Δ le simplexe $(\eta_{i_0}, ..., \eta_{i_r})$ de $\mathcal{B} \times \mathbb{Z}$ défini par ces réseaux, on associe à (X, ρ) le point de $\widehat{\Omega}_\Delta(k)$ correspondant au diagramme:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\eta_{i_0} & \subset & \eta_{i_1} & \subset & \cdots & \subset & \eta_{i_r} & \xrightarrow{\pi} & \eta_{i_0} \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Lie}(\mathrm{X})_{i_0} & \to & \mathrm{Lie}(\mathrm{X})_{i_1} & \to & \cdots & \to & \mathrm{Lie}(\mathrm{X})_{i_r} & \to & \mathrm{Lie}(\mathrm{X})_{i_0}
\end{array}$$

où les applications verticales sont obtenues en composant les inclusions de $\eta_j = \mathrm{M}_j^{\mathrm{V}^{-1}\Pi}$ dans M_j avec les applications $\mathrm{M}_j \to \mathrm{M}_j/\mathrm{V}\mathrm{M}_j = \mathrm{Lie}(\mathrm{X})_j$.

On vérifie facilement que l'on obtient ainsi une bijection $\breve{\mathcal{M}}(k) \to (\widehat{\Omega}^d_{\mathrm{F}} \times \mathbb{Z})(k)$. La partie la plus délicate de la démonstration de Drinfeld consiste à définir la flèche $\breve{\mathcal{M}} \to \widehat{\Omega}^d_{\mathrm{F}} \times \mathbb{Z}$ au niveau des foncteurs (*cf.* [Dr2],[BC],[RZ]). La comparaison des théories de déformation permet ensuite de conclure. ∎

COROLLAIRE — *Le pro-schéma formel* $\mathcal{M}$ *s'identifie au système projectif des* $\widehat{\Omega}^d_{\mathrm{F}} \times_{\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\mathrm{F}})} \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\mathrm{F}_n})$, *où les* F_n *sont les extensions non ramifiées de* F.

Remarque. Drinfeld adopte une présentation légèrement différente en se restreignant aux quasi-isogénies de hauteur zéro. Nous avons suivi ici le point de vue de Rapoport et Zink.

3. UNIFORMISATION DES VARIÉTÉS DE SHIMURA

3.1. Variétés de Shimura de type PEL

Soient B une $\mathbb{Q}$-algèbre simple de dimension finie et $*$ une involution positive de B. Soient V un B-module à gauche de type fini et $(.,.)$ une $\mathbb{Q}$-forme bilinéaire alternée non dégénérée telle que $(bv, w) = (v, b^*w)$ pour $v, w \in \mathrm{V}$ et $b \in \mathrm{B}$.

Soit $h : \mathbb{C} \to \mathrm{End}_{\mathrm{B}}(\mathrm{V}_{\mathbb{R}})$ un homomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres tel que

$$(h(z)v, w) = (v, h(\bar{z})w) \quad \text{pour} \quad \mathrm{v}, \mathrm{w} \in \mathrm{V}_{\mathbb{R}} \quad \text{et} \quad \mathrm{z} \in \mathbb{C},$$

et que la forme bilinéaire symétrique $(v, h(i)w)$ sur $\mathrm{V}_{\mathbb{R}}$ soit définie positive.

Soit G le groupe algébrique sur $\mathbb{Q}$ des B-similitudes symplectiques de V : pour une $\mathbb{Q}$-algèbre R on a

$$\mathrm{G(R)} = \{g \in \mathrm{GL}_{\mathrm{B}\otimes\mathrm{R}}(\mathrm{V} \otimes \mathrm{R})/(gv, gw) = c(g)(v, w), c(g) \in \mathbb{Q}\}.$$

Soit $\mathcal{M}_\infty$ l'ensemblé des conjugués de h sous l'action de $\mathrm{G}(\mathbb{R})$. C'est de manière naturelle un espace analytique complexe dont les composantes connexes sont des domaines hermitiens symétriques. On considère le système projectif indexé par les sous-groupes compacts ouverts C de $\mathrm{G}(\mathbb{A}_f)$ des quotients

$$\mathrm{Sh}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{an}} = \mathrm{G}(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{M}_\infty \times \mathrm{G}(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})/\mathrm{C}.$$

Soit $\mathrm{V}_{\mathbb{C}} = \mathrm{V}_{\mathbb{C}}^0 \oplus \mathrm{V}_{\mathbb{C}}^1$ la graduation de $\mathrm{V}_{\mathbb{C}}$ définie par h :

$$\mathrm{V}_{\mathbb{C}}^0 = \{v \in \mathrm{V}_{\mathbb{C}}/h(z)v = zv \ , z \in \mathbb{C}\} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V}_{\mathbb{C}}^1 = \{\mathrm{v} \in \mathrm{V}_{\mathbb{C}}/\mathrm{h(z)v} = \bar{\mathrm{z}}\mathrm{v} \ , \mathrm{z} \in \mathbb{C}\}.$$

Ces sous-espaces sont munis d'une action de B, car B centralise h. Soit E le corps de définition de la classe d'isomorphisme de $\mathrm{V}_{\mathbb{C}}^0$ comme représentation de B ; plus concrètement $\mathrm{E} = \mathbb{Q}\left[\{\mathrm{Tr}(\mathrm{b}|\mathrm{V}_{\mathbb{C}}^0)\}, \mathrm{b} \in \mathrm{B}\right]$. D'après Shimura, les espaces Sh_{C}^{an} sont les espaces analytiques associés à des variétés algébriques Sh_{C} définies sur E, dites modèles canoniques (*cf.* [De]).

3.2. Modèles entiers en une place de E

Soit $\mathcal{O}_{\mathrm{B}}$ un ordre de B, stable sous l'involution $*$ et tel que $\mathcal{O}_{\mathrm{B}} \otimes \mathbb{Z}_p$ soit un ordre maximal dans $\mathrm{B} \otimes \mathbb{Q}_p$. Soit Λ un $\mathbb{Z}_p$-réseau dans $\mathrm{V}_{\mathbb{Q}_p}$, stable sous $\mathcal{O}_{\mathrm{B}}$ et autodual pour $(.,.)$. Soient C_p le stabilisateur de Λ dans $\mathrm{G}(\mathbb{Q}_p)$, C^p un sous-groupe compact ouvert de $\mathrm{G}(\mathbb{A}_f^p)$ et $\mathrm{C} = \mathrm{C}^p\mathrm{C}_p$.

Soit ν une place de E au-dessus de p. On considère le foncteur $\mathcal{S}h_{\mathrm{C}}$ qui, à un $\mathcal{O}_{\mathrm{E}_\nu}$-schéma S, associe l'ensemble des classes d'isomorphisme de quadruplets $(\mathrm{A}, i, \bar{\lambda}, \bar{\alpha})$ où:

– A est un schéma abélien sur S à quasi-isogénie première à p près,

– $i : \mathcal{O}_{\mathrm{B}} \to \mathrm{End}(\mathrm{A})$ est une action de $\mathcal{O}_{\mathrm{B}}$ sur A telle que

$$\det(i(b), \mathrm{Lie}(\mathrm{A})) = \det(b, \mathrm{V}_0) \quad , \text{ pour } b \in \mathcal{O}_{\mathrm{B}} \ ,$$

égalité au sens des polynômes comme en (1.2),

– $\bar{\lambda}$ est une $*$-polarisation $\mathbb{Q}$-homogène principale de A,

– $\bar{\alpha}$ une classe $\mathrm{mod}(\mathrm{C}^p)$ de structures de niveau $\alpha : \mathrm{H}_1(\mathrm{A}, \mathbb{A}_f^p) \simeq \mathrm{V} \otimes \mathbb{A}_f^p$, compatible aux actions de B et, à un facteur dans $\mathbb{A}_f^p$ près, aux formes bilinéaires sur les deux membres : la forme de Riemann induite par $\bar{\lambda}$ sur H_1 et la forme $(.,.)$ sur V.

Pour C^p assez petit, ce foncteur est représentable par un schéma quasi-projectif $\mathcal{S}h_{\mathrm{C}}$ sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\mathrm{E}_\nu})$. De plus la fibre générique de ce schéma est une réunion disjointe d'un nombre fini de copies de $\mathrm{S}h_{\mathrm{C}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{E}}} \mathcal{O}_{\mathrm{E}_\nu}$ (*cf.* [Ko3], par.8).

3.3. Uniformisation au voisinage d'une classe d'isogénie

Soit k la clôture algébrique du corps résiduel de $\mathcal{O}_{\mathrm{E}_\nu}$. Soit $(\mathrm{A}_0, i_0, \bar{\lambda}_0, \bar{\alpha}_0)$ un point de $\mathcal{S}h_{\mathrm{C}}(k)$ fixé. Le groupe p-divisible $\mathbf{X}$ de A_0, muni de l'action de $\mathrm{B}_{\mathbb{Q}_p}$ induite par i_0 et de la polarisation $\mathbb{Q}_p$-homogène induite par $\bar{\lambda}$, définit d'après (1.2) un pro-schéma formel $\mathcal{M}$ sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\mathrm{E}_\nu})$ équipé d'une action de $\mathrm{J}(\mathbb{Q}_p) = \mathrm{Aut}^0(\mathbf{X})$.

Soit $\mathbb{D}$ le pro-tore sur $\mathbb{Q}_p$ de groupe des caractères $\mathbb{Q}$. La décomposition isocline de $\mathbf{X}$ définit un homomorphisme $\mathbb{D}_{\mathrm{K}_0} \to \mathrm{G}_{\mathrm{K}_0}$. On dit que $\mathbf{X}$ est *basique* si cet homomorphisme est central (*cf.* [Ko1]).

THÉORÈME 4.— *Supposons le groupe p-divisible* $\mathbf{X}$ *de* $(\mathrm{A}_0, i_0, \bar{\lambda}_0)$ *basique. Alors l'ensemble des points* $(\mathrm{A}, i, \bar{\lambda}, \bar{\alpha})$ *de* $\mathcal{S}h_{\mathrm{C}}(k)$ *tels que* $(\mathrm{A}, i, \bar{\lambda})$ *soit isogène à* $(\mathrm{A}_0, i_0, \bar{\lambda}_0)$ *est un fermé* Z *de* $\mathcal{S}h_{\mathrm{C}}$.

C'est une variante due à Rapoport et Richartz [RR] du théorème de spécialisation de Grothendieck [G] pour les groupes p-divisibles. ∎

Soit $\mathrm{I}(\mathbb{Q})$ le groupe des quasi-isogénies de $(\mathrm{A}_0, i_0, \bar{\lambda}_0)$, c'est le groupe des points rationnels d'une forme intérieure I de G. L'action de $\mathrm{I}(\mathbb{Q})$ sur $\mathbf{X}$ et sur $\mathrm{H}_1(\mathrm{A}_0, \mathbb{A}_f^p) = \mathrm{V} \otimes \mathbb{A}_f^p$ définit des homomorphismes de $\mathrm{I}(\mathbb{Q})$ dans $\mathrm{J}(\mathbb{Q}_p)$ et $\mathrm{G}(\mathbb{A}_f^p)$.

THÉORÈME 5.— *Supposons que* $\mathbf{X}$ *est basique et que le groupe* G *vérifie le principe de Hasse. Soit* $\widehat{\mathcal{S}h}_{\mathrm{C}/\mathrm{Z}}$ *le complété formel de* $\mathcal{S}h_{\mathrm{C}}$ *le long de* Z. *Alors on a un* *isomorphisme canonique de schémas formels sur* $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\mathrm{E}_\nu})$ *:*

$$\theta_{\mathrm{C}} : \mathrm{I}(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{M} \times \mathrm{G}(\mathbb{A}_f^p)/\mathrm{C}^p \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{S}h}_{\mathrm{C}/\mathrm{Z}},$$

où $\mathrm{I}(\mathbb{Q})$ *agit sur* $\mathcal{M}$ *via* $\mathrm{I}(\mathbb{Q}) \to \mathrm{J}(\mathbb{Q}_p)$ *et sur* $\mathrm{G}(\mathbb{A}_f^p)$ *via* $\mathrm{I}(\mathbb{Q}) \to \mathrm{G}(\mathbb{A}_f^p)$.

Remarque 1. Si G ne vérifie pas le principe de Hasse, il faut remplacer le membre de gauche par une réunion disjointe de copies.

Remarque 2. Le système projectif de ces isomorphismes lorsque C_p varie est équivariant pour l'action naturelle sur les deux membres des opérateurs de Hecke de $\mathrm{G}(\mathbb{A}_f^p)$.

Esquisse de démonstration ([RZ], 6.30) : On montre d'abord l'énoncé analogue après changement de base à l'extension non ramifiée maximale $\mathcal{O}_{\breve{\mathrm{E}}_\nu}$. Soit $\widetilde{\mathbf{X}}$ un relèvement de $\mathbf{X}$ sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\breve{\mathrm{E}}_\nu})$ et $\widetilde{\mathrm{A}}_0$ le relèvement correspondant de A_0. Pour $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Nilp}_{\mathcal{O}_{\breve{\mathrm{E}}_\nu}})$ et (X, ρ) dans $\breve{\mathcal{M}}(\mathrm{S})$, la quasi-isogénie $\rho : \mathbf{X}_{\bar{\mathrm{S}}} \to \mathrm{X}_{\bar{\mathrm{S}}}$ se relève de manière unique en une quasi-isogénie $\widetilde{\rho} : \widetilde{\mathbf{X}}_{\mathrm{S}} \to \mathrm{X}$. Il existe un unique $\mathcal{O}_{\mathrm{B}}$-schéma abélien à isogénie première à p près $\rho_*\widetilde{\mathrm{A}}_0$ et une unique $\mathcal{O}_{\mathrm{B}}$-quasi-isogénie $\widetilde{\mathrm{A}}_{0\mathrm{S}} \to \rho_*\widetilde{\mathrm{A}}_0$ induisant sur les groupes p-divisibles la quasi-isogénie $\widetilde{\rho}$. De plus $\bar{\lambda}_0$ et $\bar{\alpha}_0$ induisent sur $\rho_*\widetilde{\mathrm{A}}_0$ une $*$-polarisation $\rho_*\bar{\lambda}_0$ et une structure de niveau $\rho_*\bar{\alpha}_0$.

On définit un morphisme de foncteurs sur $\mathrm{Nilp}_{\mathcal{O}_{\breve{\mathrm{E}}_\nu}}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{\Theta} : \breve{\mathcal{M}} \times \mathrm{G}(\mathbb{A}_f^p) &\longrightarrow \mathcal{S}h_{\mathrm{C}} \\ \big((\mathrm{X}, \rho), g\big) &\mapsto \big(\rho_*\widetilde{\mathrm{A}}_0, \rho_*\bar{\lambda}_0, g^{-1}\rho_*\bar{\alpha}_0\big),\end{aligned}$$

et on vérifie facilement que $\mathbf{\Theta}$ se factorise à travers :

$$\bar{\mathbf{\Theta}} : \mathrm{I}(\mathbb{Q})\backslash\breve{\mathcal{M}} \times \mathrm{G}(\mathbb{A}_f^p)/\mathrm{C}^p \longrightarrow \mathcal{S}h_{\mathrm{C}}.$$

Si G vérifie le principe de Hasse, $\bar{\mathbf{\Theta}}$ induit une bijection des points à valeurs dans k du membre de gauche avec $\mathrm{Z}(k)$. De plus $\bar{\mathbf{\Theta}}$ est formellement étale en ces points d'après le théorème de Serre-Tate selon lequel il revient au même de déformer une variété abélienne ou son groupe p-divisible. Il reste à vérifier la compatibilité des données de descente pour conclure. ∎

Remarque 3. En passant aux espaces rigides analytiques associés à ces schémas formels, on déduit du théorème 5 sa variante rigide analytique où l'on uniformise un "voisinage tubulaire" de Z dans $\mathcal{S}h_{\mathrm{C}}^{an}$.

3.4. Uniformisation p-adique des courbes de Shimura

Il peut arriver dans certains cas assez rares que Z soit toute la fibre spéciale en la place ν de la variété de Shimura; on obtient alors une véritable uniformisation ν-adique. C'était en particulier le cas du théorème initial de Cherednik [Ch] pour les courbes de Shimura sur $\mathbb{Q}$.

Dans ce cas B est une algèbre de quaternions sur $\mathbb{Q}$ non ramifiée à l'infini, le groupe G est tel que $\mathrm{G}(\mathbb{Q}) = \mathrm{B}^*$ et $\mathcal{M}_\infty = \mathcal{H}^\pm = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ avec l'action naturelle de $\mathrm{G}(\mathbb{R}) = \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$. On a pour tout sous-groupe compact ouvert C de $\mathrm{G}(\mathbb{A}_f)$ une courbe de Shimura Sh_C définie sur $\mathrm{E} = \mathbb{Q}$ dont les points complexes sont

$$Sh_\mathrm{C}(\mathbb{C}) = \mathrm{G}(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{H}^\pm \times \mathrm{G}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{C}\,.$$

Soit p un nombre premier en lequel B est ramifiée; soient $\mathrm{D} = \mathcal{O}_{\mathrm{B}_p}$ et $\mathrm{C} = \mathrm{C}_p\mathrm{C}^p$, où C_p est le sous-groupe compact maximal $\mathcal{O}_\mathrm{D}^*$ de $\mathrm{G}(\mathbb{Q}_p) = \mathrm{D}^*$. Soit $\overline{\mathrm{B}}$ l'algèbre de quaternions sur $\mathbb{Q}$ ayant mêmes invariants que B en toutes les places sauf en p et ∞ et $\overline{\mathrm{G}}$ le groupe algébrique sur $\mathbb{Q}$ tel que $\overline{\mathrm{G}}(\mathbb{Q}) = \overline{\mathrm{B}}^*$.

THÉORÈME 6.— *On a un isomorphisme de schémas formels p-adiques sur* $\mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_p)$ *:*

$$\overline{\mathrm{G}}(\mathbb{Q})\backslash\big(\widehat{\Omega}^2_{\mathbb{Q}_p} \times_{\mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_p)} \mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_p^{nr})\big) \times \mathrm{G}(\mathbb{A}_f^p)/\mathrm{C}^p \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}h_\mathrm{C}^\wedge\,,$$

où l'action de $\overline{\mathrm{G}}(\mathbb{Q})$ *est diagonale via l'action décrite en* (2.4) *de* $\overline{\mathrm{G}}(\mathbb{Q}_p) = \mathrm{GL}(2, \mathbb{Q}_p)$ *sur*

$$\widehat{\Omega}^2_{\mathbb{Q}_p} \times_{\mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_p)} \mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_p^{nr})$$

et via l'isomorphisme $\overline{\mathrm{G}}(\mathbb{A}_f^p) \simeq \mathrm{G}(\mathbb{A}_f^p)$.

Démonstration ([Dr2],[BC],[RZ]) : Le problème de modules correspondant est a priori un problème de modules pour des surfaces abéliennes polarisées avec action de $\mathcal{O}_\mathrm{B}$. Cependant on peut se débarasser de la polarisation en montrant qu'une $*$-polarisation principale est uniquement déterminée ([BC], 3.3). Le théorème de Tate-Honda montre qu'il n'y a qu'une seule classe d'isogénie de telles surfaces sur $\bar{\mathbb{F}}_p$, leurs groupes p-divisibles sont des $\mathcal{O}_\mathrm{D}$-modules formels spéciaux de hauteur 4 et dimension 2 isoclines de pente $1/2$, en particulier basiques. On conclut par application d'un cas particulier du théorème 5 (ici $\mathrm{I} = \overline{\mathrm{G}}$) et du théorème 3 (de Drinfeld) pour identifier $\mathcal{M}$. ∎

Remarque 1. Cette situation se rencontre également pour certaines variétés de Shimura de type (PEL) pour des groupes unitaires en dimension supérieure ([R1],[RZ], [V]).

Remarque 2. On peut en utilisant ces résultats, la loi de réciprocité des modèles canoniques et l'introduction de "modèles étranges" [De], obtenir des résultats analogues pour des variétés de Shimura qui ne sont pas de type (PEL), en particulier pour les courbes de Shimura sur les corps totalement réels [BZ].

BIBLIOGRAPHIE

[B] V.G. Berkovich – *Etale cohomology for non-archimedean analytic spaces*, Publ. Math. I.H.E.S. **78** (1993), 5–161.

[Be] P. Berthelot – *Cohomologie rigide et cohomologie à supports propres*, prépublication **96-03**, Inst. Rech. Math. Rennes, 1996.

[BC] J.-F. Boutot, H. Carayol – *Uniformisation p-adique des courbes de Shimura: les théorèmes de Cherednik et de Drinfeld*, Astérisque **196-197** (1991), 45–158.

[BZ] J.-F. Boutot, Th. Zink – *The p-adic uniformisation of Shimura curves*, preprint **95-107**, Sonderforschungsbereich 343, Universität Bielefeld, 1995.

[C] H. Carayol – *Non-abelian Lubin-Tate theory*, Automorphic forms, Shimura varieties and L-functions, vol. II, Perspectives in Math. **11**, Academic Press (1990), 15–39.

[Ch] I.V. Cherednik – *Uniformization of algebraic curves by discrete subgroups of $PGL_2(k_w)$ with compact quotients*, Math. USSR Sbornik **29** (1976), 55–78.

[De] P. Deligne – *Travaux de Shimura*, Séminaire Bourbaki, vol. 1970/71, Exp. 389, Lecture Notes in Math. **244**, Springer Verlag (1971), 123–165.

[Dr1] V. G. Drinfeld – *Elliptic Modules*, Math. USSR Sbornik **23** (1974), 561–592.

[Dr2] V. G. Drinfeld – *Coverings of p-adic symmetric regions*, Funct. Anal. and Appl. **10** (1976), 107–115.

[F] G. Faltings – *The trace formula and Drinfeld's upper halfplane*, Duke Math. J. **76** (1994), 467–482.

[F] J.-M. Fontaine – *Modules galoisiens, modules filtres et anneaux de Barsotti-Tate*, Astérisque **65** (1979), 3–80.

[Ge] A. Genestier – *Espaces symétriques de Drinfeld*, Astérisque **234** (1996).

[GH1] B. Gross, M. Hopkins – *The rigid analytic period mapping, Lubin-Tate space, and stable homotopy theory*, Bull. Amer. Math. Soc. **30** (1994), 76–86.

[GH2] B. Gross, M. Hopkins – *Equivariant vector bundles on the Lubin-Tate moduli space*, Contemp. Math. **158** (1994), 23–88.

[G] A. Grothendieck – *Groupes de Barsotti-Tate et cristaux*, Actes du Congr. Internat. Math., Nice 1970, vol.**1**, Gauthier-Villars (1971), 431–436.

[H] M. Harris – *Supercuspidal representations in the cohomology of Drinfeld upper half-spaces ; elaboration of Carayol's program*, Inventiones Math. **129** (1997), 75–119.

[Ko1] R.E. Kottwitz – *Isocrystals with additional structure*, Compositio Math. **56** (1985), 201–220.

[Ko2] R.E. Kottwitz – *Shimura varieties and λ-adic representations*, Automorphic forms, Shimura varieties and L-functions, vol. I , Perspectives in Math. **10**, Academic Press (1990), 161–209.

[Ko3] R.E. Kottwitz – *Points on some Shimura varieties over finite fields*, Journal Amer. Math. Soc. **5** (1992), 373–444.

[L] G. Lafaille – *Constructions de groupes p-divisibles: le cas de dimension 1* , Astérisque **65** (1979), 103–124.

[LT] J. Lubin, J. Tate – *Formal moduli for one parameter formal Lie groups*, Bull. Soc. Math. France **94** (1966), 49–60.

[Me] W. Messing – *The crystals associated to Barsotti-Tate groups : with applications to abelian schemes*, Lecture Notes in Math. **264**, Springer Verlag (1972).

[M] D. Mumford – *An analytic construction of degenerating curves over complete local rings*, Compositio Math. **24** (1972), 239–272.

[Mu] G. A. Mustafin – *Non archimedean uniformization*, Math. USSR Sbornik **34** (1978), 187–214.

[R1] M. Rapoport – *On the bad reduction of Shimura varieties*, Automorphic forms, Shimura varieties and L-functions, vol. II, Perspectives in Math. **11**, Academic Press (1990), 15–39.

[R2] M. Rapoport – *Non-archimedean period domains*, Proc. Internat. Congress Math., Zürich 1994, vol. **1**, Birkhäuser Verlag (1995), 423–434.

[RR] M. Rapoport, M. Richartz – *On the classification and specialization of F-isocrystals with additional structure*, Compositio Math. **103** (1996), 153–181.

[RZ] M. Rapoport, Th. Zink – *Period spaces for p-divisible groups*, Annals of Math. Studies **141**, Princeton University Press (1996).

[Ra1] M. RAYNAUD – *Géométrie analytique rigide d'après Tate, Kiehl,...* , Bull. Soc. Math. France, Mém. **39-40** (1974), 319–327.

[Ra2] M. RAYNAUD – *Construction analytique de courbes en géométrie non archimedienne (d'après David Mumford)*, Séminaire Bourbaki, vol. 1972/73, Exp. 427, Lecture Notes in Math. **383**, Springer Verlag (1974), 171–185.

[SS] P. SCHNEIDER, U. STUHLER – *The cohomology of p-adic symmetric spaces*, Inventiones Math. **105** (1991), 47–122.

[T] J. TATE – *Rigid analytic spaces*, Inventiones Math. **12** (1971), 257–289.

[To] B. TOTARO – *Tensor products in p-adic Hodge theory*, Duke Math. Journal **83** (1996), 79–104.

[VV] M.VAN DER PUT , H. VOSKUIL – *Symmetric spaces associated to split algebraic groups over a local field*, J. reine angew. Math. **433** (1992), 69–100.

[Va] Y. VARSHAVSKY – *P-adic uniformization of unitary Shimura varieties*, preprint Jerusalem (1995).

[Y] J.-K. YU – *On the moduli of quasi-canonical liftings*, Compositio Math. **96** (1995), 296–321.

Jean-François BOUTOT

Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur et CNRS
7, rue René Descartes
F–67084 STRASBOURG CEDEX

boutot@math.u-strasbg.fr