JEAN-PIERRE BOURGUIGNON

Métriques d'Einstein-Kähler sur les variétés de Fano : obstructions et existence

Astérisque, tome 245 (1997), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 830, p. 277-305

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1996-1997__39__277_0>

Séminaire BOURBAKI Juin 1997
49ème année, 1996-97, n° 830

MÉTRIQUES D'EINSTEIN-KÄHLER SUR LES VARIÉTÉS DE FANO : OBSTRUCTIONS ET EXISTENCE
[d'après Y. Matsushima, A. Futaki, S.T. Yau, A. Nadel et G. Tian]

par **Jean Pierre BOURGUIGNON**

0. POSITION DU PROBLÈME

0.1. Sur une variété complexe M de dimension réelle $n = 2m$, nous nous intéressons aux métriques dites *d'Einstein-Kähler*, à savoir aux formes réelles ω de type (1,1) définies positives et fermées qui vérifient, pour un nombre réel λ, la relation

$$(*_\lambda) \qquad \rho_\omega = \lambda\, \omega \ ,$$

où ρ_ω est la *forme de Ricci* de la métrique ω, i.e. la forme de type (1,1) associée à sa courbure de Ricci, contraction du tenseur de courbure de Riemann. Cette forme est aussi (au facteur $-i$ près) la courbure du fibré canonique $K_M = \Lambda^m T^*_{\mathbb{C}} M \longrightarrow M$, fibré déterminant du fibré holomorphe tangent, pour la métrique hermitienne naturellement induite sur ce fibré par la métrique ω sur le fibré tangent.

0.2. Il est à noter que la métrique naturelle sur l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^m$, dite *de Fubini-Study*, satisfait à cette relation pour $\lambda = 2\,(m+1)$ (le diamètre vaut alors $\pi/2$ et la courbure sectionnelle varie entre 1 et 4). Dans [8], M. Berger a prouvé l'unicité de la métrique d'Einstein-Kähler sur $\mathbb{C}P^m$ à homothétie près et à action du groupe $\mathrm{PGL}_{m+1}(\mathbb{C})$ des transformations holomorphes de $\mathbb{C}P^m$ près.

0.3. Dans une carte locale holomorphe (z^α), si on note $\omega = i \sum_{\alpha,\beta=1}^m g_{\alpha\bar\beta}\, dz^\alpha \wedge d\bar z^\beta$ l'expression de la forme de Kähler, alors la forme de Ricci ρ_ω s'écrit

$$(0.4) \qquad \rho_\omega = -i\partial\bar\partial \log(\det(g_{\alpha\bar\beta}))\ .$$

La classe de cohomologie définie par la métrique ω, *notée* $[\omega]$, est appelée la *classe de Kähler*. Par sa relation à la courbure du fibré K_M, la forme ρ_ω définit elle aussi une classe de cohomologie qui vérifie $[\rho_\omega] = 2\pi\, c_1(M)$, où $c_1(M)$ désigne la première classe de Chern réelle du fibré $T_{\mathbb{C}}M$ sur M.

Dès lors, une première condition apparaît : *pour résoudre* $(*_\lambda)$, *il est nécessaire que la première classe de Chern soit nulle ou contienne une forme définie positive ou négative suivant que* $\lambda = 0$, $\lambda > 0$ *ou* $\lambda < 0$. En fait dans ces deux derniers cas *nous normalisons la métrique en supposant*[1] $\lambda = \pm 1$.

0.5. Dans [82] et [83], S. T. Yau résout la *conjecture de Calabi* (*cf.* [16]) selon laquelle, *si* M *est compacte, toute forme dans la classe* $2\pi\, c_1(M)$ *est la courbure de Ricci d'une métrique kählérienne de classe de Kähler fixée* ce qui équivaut à fixer la forme volume. Par suite, lorsque $c_1(M) = 0$, chaque classe de Kähler contient une métrique kählérienne à courbure de Ricci nulle (noter que cela conduit souvent à des modules de métriques d'Einstein-Kähler comme par exemple sur les surfaces K3).

Lorsque $c_1(M)$ est définie (positive ou négative), *la classe de Kähler d'une métrique d'Einstein-Kähler normalisée est bien définie par la structure holomorphe de* M.

Dans le cas $c_1(M) < 0$, i.e. lorsque le fibré canonique est ample, *il y a existence et unicité de la métrique d'Einstein-Kähler* comme l'ont montré T. Aubin (*cf.* [2]) et S.T. Yau (*cf.* [82]). Cette métrique généralise en dimension supérieure les métriques à courbure constante des surfaces de Riemann, et sert d'auxiliaire uniformisant à la géométrie holomorphe.

0.6. Ce rapport est centré sur le cas $c_1(M) > 0$, i.e. lorsque le fibré anticanonique de M est ample (on dit que M est une variété *de Fano*), qui est beaucoup plus délicat : des *obstructions diverses* apparaissent, et la question de l'*existence* n'est pas encore complètement résolue, bien que la compréhension que nous en avons ait considérablement progressé ces dernières années. Ce problème mêle de façon intime des estimations analytiques, des considérations géométriques de plusieurs ordres et des concepts algébriques, ce qui en fait la subtilité, et en rehausse l'intérêt (noter que ceci est tout à fait dans le cadre de pensée développé par S.T. Yau dans [83]).

Dans la suite, nous travaillons toujours avec des métriques kählériennes ω *vérifiant la condition* $[\omega] = 2\pi\, c_1(M)$, et nous cherchons donc à résoudre l'équation $(*_1)$.

0.7. Dans le cadre kählérien, il faut noter qu'un certain nombre de fonctionnelles classiques de la géométrie riemannienne prennent une signification cohomologique, et deviennent des invariants kählériens ou holomorphes.

Il en est ainsi du *volume* $\int_M \omega^m/m!$ qui vaut $[\omega]^m(M)/m!$ (avec notre choix pour $[\omega]$, il s'identifie donc au nombre de Chern c_1^m à $(2\pi)^m/m!$ près ; dans la suite nous

[1] Cette normalisation n'est pas une restriction car, pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, $\rho_{a^2\omega} = \rho_\omega$.

le *noterons* $V(M)$) et de la *courbure scalaire totale* qui vaut $\int_M \rho_\omega \wedge \omega^{m-1}/m! = (c_1(M) \cup [\omega]^{m-1})(M)/m!$ (soit encore c_1^mà $(2\pi)^m$ près).

0.8. Les variétés de Fano sont algébriques projectives puisqu'une puissance du fibré anticanonique est *très ample.* On peut par exemple utiliser les *plongements pluriantcanoniques* dans l'espace projectif $P(H^0(M, K_M^{-k})^*)$ de l'espace vectoriel des sections holomorphes de puissances du fibré anticanonique pour k assez grand obtenus par évaluation sur une base quelconque. En utilisant un résultat de S. Kobayashi (*cf.* [39]) et la solution de la conjecture de Calabi, on prouve que ces variétés sont *compactes simplement connexes*, en particulier n'ont *pas de 1-formes holomorphes non nulles.*

En dimension 1, $\mathbb{C}P^1$ est la seule variété de Fano ; en dimension 2, les variétés de Fano s'identifient aux surfaces de Del Pezzo (*cf.* [24]), à savoir à difféomorphisme près $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$, et les surfaces D_k obtenues à partir de $\mathbb{C}P^2$ en éclatant k points en position générale pour $k \leq 8$; dès la dimension 3, leur classification (même différentiable) est beaucoup plus compliquée (*cf.* [22]) ; en dimension 4, certaines variétés de Fano sont difféomorphes à des variétés de type général (pour un exemple dû à F. Catanese et à C. LeBrun, *cf.* [19]). En dimension m, les exemples les plus simples sont fournis par les hypersurfaces de $\mathbb{C}P^{m+1}$ de degré d pour $d < m+2$.

0.9. Le cœur du problème est de *trouver une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de métriques d'Einstein-Kähler portant sur la structure holomorphe d'une variété de Fano.* Sont d'abord apparues des obstructions, i.e. des conditions nécessaires ; pour des conditions suffisantes, il a fallu attendre que S.T. Yau proposât en 1990 une piste qui, initialement, semblait avoir peu de fondement.

PROBLÈME (S.T. Yau, *cf.* problème 65 de [85]).- *Montrer qu'une variété de Fano a une métrique d'Einstein-Kähler si et seulement si son fibré tangent est stable au sens de la théorie des invariants géométriques et son groupe d'automorphismes réductif.*

Dans cet exposé, nous présentons l'ensemble du problème et notamment les étapes franchies vers la résolution de cette question, particulièrement par G. Tian. Ceci inclut de donner un sens précis à la notion de *stabilité d'une variété algébrique* requise dans ce problème.

0.10. J'ai pu bénéficier de nombreuses remarques utiles pour la préparation et la mise au point de la version finale de ce texte. Je tiens à remercier J.-P. Demailly, P. Gauduchon, D. Hulin, A.D. Hwang, C. LeBrun, T. Mabuchi, Y. Nakagawa, et tout spécialement G. Tian pour leur aide.

0.11. Après cette introduction, le plan de l'exposé est le suivant :

1. Obstructions liées aux champs de vecteurs holomorphes
2. Approche analytique de l'existence
3. Estimations uniformes
4. Exemples et contre-exemples
5. Obstructions étendues et stabilité
6. Point de vue symplectique

1. OBSTRUCTIONS LIÉES AUX CHAMPS DE VECTEURS HOLOMORPHES

1.1. L'espace vectoriel $\mathfrak{H}(M)$ des champs de vecteurs holomorphes de M est l'algèbre de Lie du groupe des transformations holomorphes $H(M)$. Plusieurs obstructions à l'existence de métriques d'Einstein-Kähler, et plus généralement à l'existence de métriques kählériennes à courbure scalaire constante, font intervenir $\mathfrak{H}(M)$. La plus ancienne (1957) est due à Y. Matsushima, et une plus subtile, et plus récente (1983), à A. Futaki.

a) L'obstruction de Matsushima

THÉORÈME 1 (*cf.* [46], [52]).– *L'algèbre de Lie $\mathfrak{I}(M)$ des isométries infinitésimales d'une métrique kählerienne sur une variété compacte à courbure scalaire constante est une forme réelle de $\mathfrak{H}(M)$, qui est donc une algèbre de Lie réductive.*

1.2. Pour établir ce théorème, on utilise un certain nombre de formules reliant la géométrie complexe et la structure métrique. Nous en donnons un rapide aperçu.

Nous *notons* D la dérivation covariante de Levi-Civita de la métrique ω. Si ζ est une 1-forme de type (0,1), soit $D''\zeta$ la partie de type (0,2) de $D\zeta$. Ainsi, si Z désigne le champ de vecteurs dual de ζ pour la métrique hermitienne (il est de type (1,0)), alors Z est *holomorphe* si et seulement si $D''\zeta = 0$.

D'après un résultat d'A. Lichnerowicz (*cf.* [46]), les champs de vecteurs holomorphes et les isométries infinitésimales sont reliés comme suit : *un champ de vecteurs X est une isométrie infinitésimale si et seulement si sa partie de type (1.0) le champ de vecteurs $Z = X - iJX$ (ici J désigne la structure complexe induite sur l'espace tangent par la structure holomorphe de M), est holomorphe, et si la 1-forme ξ duale (au sens réel) de X est cofermée.* Ce fait provient de la formule

$$\bar{\partial}\,\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\,\bar{\partial} = D''^*D'' + \rho_\omega \tag{1.3}$$

où les * désignent les adjoints des opérateurs pour le produit hermitien global.

La formule (1.3) est la clef pour deux faits qui sont fondamentaux pour nous :

- la 1-forme ζ duale d'un champ de vecteurs holomorphe Z vérifie $\zeta = \bar{\partial} f$ pour une fonction complexe f, dont les parties réelle et imaginaire pure donnent lieu à des champs de vecteurs holomorphes ; le théorème de Lichnerowicz-Matsushima suit alors simplement (pour les détails, voir l'exposé X de [64]) ; le fait que dans la preuve la courbure de Ricci n'intervient que par sa co-différentielle permet (*cf.* [46] ou [9], chapitre 11) d'établir le théorème pour les métriques à courbure scalaire constante via la deuxième identité de Bianchi ;
- sur une variété kählérienne, *la première valeur propre λ_1 du laplacien agissant sur les fonctions vérifie $\lambda_1 \geq b$ si $\rho_\omega \geq b\,\omega > 0$, avec égalité si et seulement s'il existe une fonction propre réelle f pour λ telle que $\bar{\partial} f$ est duale au sens hermitien d'un champ de vecteurs holomorphe Z* (et Jdf est duale au sens réel d'une isométrie infinitésimale) ; cette estimation (que nous utiliserons plus tard) sort directement de (1.3) appliquée à $\bar{\partial} f$.

1.4. Le théorème 1 implique, comme Matsushima le remarque dans [52], que *toute variété de Fano M telle que $\mathfrak{H}(M)$ n'est pas réductive n'admet pas de métrique d'Einstein-Kähler.*

On voit directement par exemple que la variété de Fano D_1 (obtenue en éclatant $\mathbb{C}P^2$ en un point p) est obstruée car toute transformation holomorphe de D_1 fixe la courbe exceptionnelle qui se projette sur p. Dans [81], S.T. Yau a montré qu'il en est de même de D_2. On peut noter que, pour les surfaces D_k pour $4 \leq k$, $\mathfrak{H}(D_k) = 0$.

b) Le caractère de Futaki

1.5. Dans [32], A. Futaki introduit une forme linéaire sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{H}(M)$ par la construction suivante qui fait intervenir l'*espace des potentiels kählériens* associés à une métrique kählérienne ω, *noté* $\mathcal{M}_\omega$, objet qui va nous accompagner dans le reste de l'exposé.

On se sert fondamentalement du lemme classique suivant : *pour toutes formes réelles de type (1,1) α et α' telles que $[\alpha'] = [\alpha]$, il est possible de trouver une fonction C^∞ réelle φ globalement définie sur M telle que $\alpha' = \alpha + i\partial\bar{\partial}\varphi$.* Nous nous en servons pour la forme de Kähler ω et nous posons $\mathcal{M}_\omega = \{\varphi \mid \varphi \in \mathrm{C}^\infty(M),\ \omega + i\partial\bar{\partial}\varphi > 0\}$. Noter que, pour toute constante réelle c, $\varphi + c \in \mathcal{M}_\omega$ dès que $\varphi \in \mathcal{M}_\omega$.

Comme nous avons pris $[\omega] = 2\pi\, c_1(M)$, cela assure qu'il existe une fonction r_ω, définie à une constante additive près, telle que $\rho_\omega - \omega = i\partial\bar{\partial} r_\omega$. Nous appellerons r_ω la *déviation de Ricci* de ω car *une métrique ω est d'Einstein-Kähler si et seulement si $r_\omega \equiv 0$.*

THÉORÈME 2 (*cf.* [32], [33]).– *La forme linéaire Φ_ω définie sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{H}(M)$ par $\Phi_\omega(X) = \int_M (\mathcal{L}_X r_\omega)\, \omega^m/m!$ (où $\mathcal{L}_X$ désigne la dérivée de Lie par rapport au champ de vecteurs X) est un caractère, appelé caractère de Futaki, qui est intrinsèque, i.e. ne dépend pas du choix de ω dans $2\pi\, c_1(M)$.*

Dans notre situation, le théorème 2 prouve que *la non-nullité du caractère de Futaki est une obstruction à l'existence d'une métrique d'Einstein-Kähler.* Pour cela il suffit de se placer en une métrique d'Einstein-Kähler ω_{KE}, en laquelle $r_{\omega_{KE}} = 0$, de constater que $\Phi_{\omega_{KE}}$ est trivialement nul, et de se souvenir que Φ est intrinsèque.

Dans [35], A. Futaki a développé de nombreuses propriétés du caractère qui porte son nom. Il montre qu'un des points de vue possibles est de le relier aux classes caractéristiques secondaires associées à certaines classes de Chern, d'où des possibilités de localisation grâce à des formules de résidus (*cf.* [10]). Ces formules permettent de faire le calcul explicite du caractère de Futaki dans un certain nombre de cas comme celui des variétés toriques (voir, 4.2), grâce notamment à des formules combinatoires (*cf.* [59] et [60]).

REMARQUE.– La définition du caractère de Futaki que nous avons donnée dans le théorème 2 semble faire dépendre son existence du fait que M est une variété de Fano. Il n'en est rien : une définition générale peut en être donnée en définissant l'écart de Ricci par *comparaison de ρ_ω à la forme harmonique qui lui est cohomologue.* Le théorème affirme alors que Φ_ω ne dépend que de $[\omega]$.

1.6. Dans la section 4, nous donnons des exemples de variétés dont le caractère de Futaki n'est pas nul alors que $\mathfrak{H}(M)$ est réductive (pour elles, l'obstruction de Matsushima ne s'applique donc pas). Il est à noter que cela nécessite que $\mathfrak{H}(M)$ ne soit pas semi-simple. En effet, si $\mathfrak{H}(M)$ est semi-simple, le caractère de Futaki Φ est automatiquement nul car $\Phi([\mathfrak{H}(M), \mathfrak{H}(M)]) = 0$.

Il existe plusieurs preuves du théorème 2 ; la première fut donnée par A. Futaki dans [33]. Il s'est inspiré d'un calcul fait par J.L. Kazdan et F. Warner (*cf.* [38]) qui ont exhibé des obstructions à prescrire la courbure scalaire dans une classe conforme de métriques riemanniennes sur la sphère ; dans ce contexte, c'est l'algèbre de Lie des champs de vecteurs conformes qui joue le rôle de $\mathfrak{H}(M)$. Dans la section 6, nous en esquissons une autre preuve, qui en fait une loi de conservation "à la Élie Cartan" pour une 1-forme différentielle invariante sur $\mathcal{M}_\omega$. Ce point de vue a l'avantage d'être plus naturel, et d'insérer le caractère de Futaki dans une famille plus vaste. Le problème de remonter ce caractère de l'algèbre de Lie $\mathfrak{H}(M)$ au groupe $H(M)$ est traité dans [36] et [7].

1.7. Pendant un temps, ces deux obstructions, liées à la non-trivialité de $\mathfrak{H}(M)$, ont été les seules disponibles[2]. C'est ce qui a poussé E. Calabi à *conjecturer que le problème* $(*_1)$ *serait soluble sur les variétés de Fano* M *telles que* $\mathfrak{H}(M) = 0$.

Il n'en est rien et d'autres obstructions, dues à W. Ding et G. Tian en 1992 et inspirées du caractère de Futaki tout en n'ayant pas recours aux champs de vecteurs holomorphes de M, sont présentées dans la section 5.

2. APPROCHE ANALYTIQUE DE L'EXISTENCE

a) La traduction analytique

2.1. L'existence de solutions de $(*_1)$ a été recherchée par une méthode analytique, consistant à *ramener cette équation à une équation aux dérivées partielles non-linéaire scalaire, dite de Monge-Ampère*, qui est une modification simple de celle de la conjecture de Calabi. Cette mise en équation remonte à E. Calabi (*cf.* [16]), ainsi qu'un certain nombre de résultats fondamentaux concernant sa résolution.

Prenons une métrique kählérienne ω comme référence (vérifiant $[\omega] = 2\pi c_1(M)$ comme d'habitude). Le principe de base consiste à remonter l'équation $(*_1)$ dans l'espace $\mathcal{M}_\omega$ en considérant les autres métriques kählériennes $\omega' = \omega + i\partial\bar{\partial}\varphi$ définissant la même classe de Kähler. La formule (0.4) donnant la forme de Ricci permet d'écrire $\rho_{\omega'} - \rho_\omega = -i\partial\bar{\partial}\log((\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi)^m/\omega^m)$, et donc de ramener $(*_1)$ à

$$(**) \qquad \frac{(\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi)^m}{\omega^m} = \mathrm{e}^{-\varphi + r_\omega} .$$

Il sera commode par la suite de normaliser r_ω en supposant $\int_M (\mathrm{e}^{r_\omega} - 1)\, \omega^m = 0$.

2.2. Une des méthodes les plus efficaces pour résoudre des équations non-linéaires comme celle-là est la *méthode de continuité*, qui consiste à prouver que $(**)$ a une solution parce qu'elle peut être plongée dans une famille à un paramètre d'équations $(**_t)_{t\in[0,1]}$ telle que $(**_1)$ s'identifie à $(**)$, que l'équation $(**_0)$ soit résolue, et que l'ensemble des valeurs $t \in [0,1]$ pour lesquelles $(**_t)$ a une solution est ouvert et fermé, donc $[0,1]$ tout entier.

[2] L'article [37] est un rapport très complet sur les résultats obtenus jusqu'en 1990.

2.3. La famille d'équations utilisée[3] est

$$(**_t) \qquad \frac{(\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi_t)^m}{\omega^m} = \mathrm{e}^{-t\varphi_t + r_\omega} ,$$

de telle sorte que ρ_{ω_t}, la forme de Ricci de $\omega_t = \omega + i\partial\bar{\partial}\varphi_t$, est donnée par la formule

$$(2.4) \qquad \rho_{\omega_t} = t\,\omega_t + (1-t)\,\omega ,$$

qui peut encore s'écrire $\rho_{\omega_t} - \omega_t = (t-1)\,i\partial\bar{\partial}\varphi_t$.

Noter que $(**_0)$ est précisément l'équation traduisant que l'on prescrit ω comme forme de Ricci d'une métrique de Kähler dans la classe $[\omega]$, à savoir celle de la conjecture de Calabi. (Il faut prendre garde que $\varphi_0 \neq 0$.)

b) La mise en œuvre de la méthode de continuité

2.5. La mise en œuvre détaillée de la méthode suit [83] (*cf.* [11] pour un rapport dans ce séminaire).

Le fait que l'ensemble des valeurs du paramètre pour laquelle une solution existe soit un ensemble ouvert s'obtient par application du théorème d'inversion locale dans un espace fonctionnel $\mathcal{E}$ approprié (typiquement un espace de Hölder d'ordre supérieur à 2). Il est donc nécessaire d'avoir des informations sur le linéarisé de l'opérateur appliqué à φ_t, qui n'est autre que $\Delta_{\omega_t} - t$ (ici Δ_{ω_t} désigne le laplacien de la métrique ω_t avec la convention de signe qui lui donne un spectre positif). Cet opérateur est inversible précisément à cause de l'estimation de la première valeur propre du laplacien donnée en 1.3. Noter que, lorsqu'il existe des champs de vecteurs holomorphes non isométriques, l'inversibilité n'est assurée que pour $t < 1$. Ceci suggère qu'atteindre 1 doit être une question délicate.

Montrer la fermeture est la partie la plus problématique (nettement plus que la partie correspondante pour résoudre la conjecture de Calabi puisque des obstructions existent) : il faut montrer qu'une suite de solutions (φ_{t_i}) des équations $(**_{t_i})$ est bornée dans $\mathcal{E}$. Le contrôle des normes des dérivées troisièmes à partir de celui de normes d'ordres inférieurs est dû à Calabi (*cf.* [17]). Celui des dérivées premières et secondes à partir de celui de la norme uniforme est identique à celui utilisé pour la résolution de la conjecture de Calabi. *La question cruciale est donc celle de l'estimation de la norme uniforme des solutions des équations $(**_t)$ pour $t \in [0,1]$.*

[3] Il semble que T. Aubin ait été le premier à utiliser cette famille.

c) D'autres approches analytiques

2.6. Plusieurs problèmes géométriques ont récemment trouvé leur solution en utilisant une méthode dynamique, la solution apparaissant comme la valeur-limite d'une courbe intégrale d'un champ de vecteurs bien choisi dans un espace fonctionnel. On y fait souvent référence sous le nom de *méthode de l'équation d'évolution d'Hamilton* (*cf.* [14] pour un rapport dans ce séminaire).

Pour étudier le problème qui nous intéresse, cette méthode a été utilisée par H.D. Cao (*cf.* [18]) qui montre notamment que l'équation d'évolution a une solution pour tous les temps. La question qui demeure est d'étudier ce qui se passe lorsque le paramètre d'évolution tend vers l'infini. Il ne semble pas que les obstructions précédemment présentées aient fait l'objet d'une interprétation dans ce cadre, ce qui pourrait être intéressant. On peut noter aussi que G. Tian utilise partiellement ce point de vue dans [76] pour établir une partie de ses estimations et rencontre dans ce cadre des *solitons de Ricci* (*cf.* 5.9 pour une définition), qui sont la traduction analytique de ces obstructions.

3. ESTIMATIONS UNIFORMES

a) Les nouvelles énergies et les fonctionnelles F

3.1. La première piste pour établir une estimée uniforme adaptée à notre problème a été fournie par T. Aubin dans [3] : l'estimation uniforme provient d'un contrôle des exponentielles de fonctions. Cela passe par l'introduction d'une *énergie généralisée* I_ω définie comme $I_\omega(\varphi) = (V(M))^{-1} \int_M \varphi\,(\omega^m - (\omega + i\partial\bar\partial\varphi)^m)$. E. Calabi avait aussi recours à cette expression pour prouver l'unicité dans le cas de la conjecture qui porte son nom. (Rappelons que $V(M)$ désigne le volume de M pour toute métrique kählérienne ω telle que $[\omega] = 2\pi\, c_1(M)$). Le nom d'énergie donné à la fonctionnelle I_ω est justifié par le fait qu'en dimension 1 on a $I(\varphi) = (4\pi)^{-1} i \int_M \partial\varphi \wedge \bar\partial\varphi$ (dans ce cas indépendamment de ω), et que, pour $\varphi \in \mathcal{M}_\omega$, nous avons $I_\omega(\varphi) \geq 0$, puisque nous avons la définition alternative

$$V(M)\, I_\omega(\varphi) = i \sum_{j=1}^{m} \int_M \partial\varphi \wedge \bar\partial\varphi \wedge \omega^j \wedge (\omega + i\partial\bar\partial\varphi)^{m-j-1} \; .$$

Dans [3], T. Aubin appelle à une généralisation d'une inégalité due sur la sphère S^2 à N. Trudinger, J. Moser et E. Onofri (*cf.* [79], [54], [61]), à savoir montrer qu'*il existe des constantes C et η telles que, pour toute fonction φ pour laquelle la métrique* *de Kähler $\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi$ a une courbure de Ricci uniformément minorée*[4]*, on ait*

$$\int_M \mathrm{e}^{-\varphi}\,\omega^m \leq C \exp\left(\eta\, I_\omega(\varphi) - (V(M))^{-1} \int_M \varphi\,\omega^m\right) . \tag{3.2}$$

Il prouve que, *sur une variété de Fano, une condition suffisante pour avoir l'estimation uniforme recherchée est qu'on puisse prendre $\eta < ((m+1)\,V(M))^{-1}$.*

3.3. Dans [70], G. Tian introduit un autre invariant *noté* $\alpha(M)$ et défini ainsi

$$\alpha(M) = \sup\{\alpha \mid \exists\, C,\ \forall \varphi \in \mathcal{M}_\omega\ ,\ \int_M \varphi\,\omega^m = 0,\ \int_M \mathrm{e}^{-\alpha\varphi}\,\omega^m \leq C\}\ .$$

Bien que ce ne soit pas a priori évident, on montre que $\alpha(M)$ ne dépend que de $[\omega]$, et donc, dans notre cas, de la structure holomorphe de M seulement.

Cet invariant se relie à l'invariant η et, comme T. Aubin le faisait pour lui, G. Tian établit dans [70] que, *si $\alpha(M)$ vérifie l'inégalité $\alpha(M) > m/(m+1)$, alors l'estimée uniforme peut être établie, et l'existence d'une métrique d'Einstein-Kähler garantie.* Dans [25], W. Ding donne une preuve indépendante de ce résultat.

Le calcul explicite de la constante $\alpha(M)$ a été possible dans un certain nombre de cas concrets. Il existe aussi une version équivariante de cette constante définie en se restreignant à un espace restreint de fonctions, à savoir celles qui sont invariantes sous l'action d'un groupe compact d'automorphismes (*cf.* [77] et [67]). Comme dans le problème de la courbure prescrite sur les surfaces considéré par J. Moser (dans ce cas, il s'agit de passer de S^2 à $\mathbb{R}P^2$), en passant à un quotient il est possible d'améliorer la constante, et du coup d'avoir sur l'espace-quotient un théorème d'existence.

Nous revenons sur ce point dans la section 4 où nous passons en revue un certain nombre d'exemples.

3.4. Il s'est avéré utile de recourir aussi à deux autres fonctionnelles, *notées* respectivement J et F. Elles sont définies comme suit

$$J_\omega(\varphi) = \int_0^1 s^{-1}\, I_\omega(s\varphi)\, ds\ ,$$

$$F_\omega(\varphi) = J_\omega(\varphi) - V(M)^{-1} \int_M \varphi\,\omega^m - \log\left(V(M)^{-1} \int_M \mathrm{e}^{r_\omega - \varphi}\,\omega^m\right)\ .$$

[4] C'est automatiquement le cas pour une suite de solutions de $(**_t)$ à cause de l'identité (2.4).

Par un calcul direct on prouve que *les points critiques de F_ω sont les potentiels qui définissent une métrique d'Einstein-Kähler*, ce qui montre que cette fonctionnelle a un certain caractère intrinsèque. De même si nous notons $\omega' = \omega + i\partial\bar{\partial}\varphi$, on vérifie que $F_\omega(\varphi) = -F_{\omega'}(-\varphi)$ et que $F_\omega(\varphi) + F_{\omega'}(\psi) = F_\omega(\varphi + \psi)$.

C'est en termes de cette fonctionnelle F_ω que les résultats de G. Tian sont exprimés. Nous les passons maintenant en revue, en commençant par un résultat qui conduira dans la section 5 à une solution partielle du problème posé par S.T. Yau. Nous passons ensuite à une généralisation optimale de (3.2) (le cas de S^2 est traité dans [3]).

b) La propreté des fonctionnelles F

3.5. Dans [76], G. Tian introduit la définition suivante : on dit que F_ω *est propre sur* $\mathcal{M}_\omega$ *si, pour toute constante* $C > 0$ *et toute suite de fonctions* (φ_i) *vérifiant* $\operatorname{osc}\varphi_i \leq C(1 + J_\omega(\varphi_i))$ *et* $\lim_{i\to\infty} J_\omega(\varphi_i) = +\infty$, *alors* $\overline{\lim}_{i\to\infty} F_\omega(\varphi_i) = +\infty$. A cause des identités que vérifient les fonctionnelles F_ω lorsque ω varie dans $\mathcal{M}_\omega$, cette propriété est en fait indépendante du choix de ω : on peut donc parler de la *propreté des fonctionnelles F*.

G. Tian donne alors une caractérisation des variétés de Fano qui admettent une métrique d'Einstein-Kähler dans les termes suivants.

THÉORÈME 3 (*cf.* [76]).– *Une variété de Fano telle que* $\mathfrak{H}(M) = 0$ *admet une métrique d'Einstein-Kähler si et seulement si les fonctionnelles F sont propres.*

Le caractère suffisant de la condition s'appuie sur le fait que la propreté de F assure une estimation uniforme de la norme C^0 d'une famille de solutions φ_t de $(**_t)$ pour $t \to 1$. Une telle estimation s'obtient en contrôlant $F_\omega(\varphi_t)$ grâce aux relations $d/dt(t(J_\omega(\varphi_t) - (V(M))^{-1} \int_M \varphi_t\, \omega^m)) = -(I_\omega(\varphi_t) - J_\omega(\varphi_t)) \leq 0$ (pour la dernière inégalité, la bonne explication est de nature symplectique, voir la section 6 pour la description du cadre). La propreté de F faisant intervenir des fonctions φ dont l'oscillation est contrôlée par J, il faut recourir au procédé d'itération de Moser pour relier $J_\omega(\varphi_t)$ et $\inf \varphi_t$ et utiliser l'inégalité $\Delta_\omega \varphi_t \leq m$ pour contrôler $\sup \varphi_t$ par $\int_M \varphi_t\, \omega^m$ (pour des estimations plus complètes, voir [72]).

c) Une généralisation de l'inégalité de Trudinger-Moser-Onofri

3.6. Pour montrer qu'en une métrique d'Einstein-Kähler ω_{KE} les fonctionnelles F sont propres en l'absence de champs de vecteurs holomorphes, G. Tian s'appuie sur un contrôle de $F_{\omega_{KE}}$ par $J_{\omega_{KE}}$, qui est une conséquence d'une inégalité "à la Trudinger-Moser-Onofri" (*cf.* aussi [20]). *Dans [27], W. Ding et G. Tian établissent* *une telle inégalité qui leur permet de montrer que les fonctionnelles F sont bornées inférieurement.* Dans [78], G. Tian et X. Zhu établissent une estimation a priori qui semble la version optimale de cette inégalité dans le cadre kählérien.

THÉORÈME 4 (*cf.* [78]).– *Soit M une variété de Fano munie d'une métrique d'Einstein-Kähler ω_{KE}. Il existe des constantes $\delta(m)$ et C (qui dépend de m et de l'écart entre 1 et la plus petite valeur propre de Δ_ω plus grande que 1) telles que toute fonction $\varphi \in \mathcal{M}_\omega$ vérifiant $\int_M \varphi\, \psi\, \omega^m = 0$ pour toute fonction propre ψ de Δ_ω pour la valeur propre 1, satisfasse*

$$\frac{1}{V(M)} \int_M \mathrm{e}^{-\varphi}\, \omega_{KE}^m \leq C \exp\left(J_{\omega_{KE}}(\varphi) - \int_M \varphi\, \omega_{KE}^m - (J_{\omega_{KE}}(\varphi))^\delta \right) .$$

d) Les faisceaux d'idéaux multiplicateurs d'A. Nadel

3.7. Pour prouver l'existence d'une métrique d'Einstein-Kähler sur une variété de Fano, une autre stratégie, indirecte celle-là, a été utilisée par A. Nadel (*cf.* [56], [57]) qui a appliqué à ce problème la méthode des *faisceaux d'idéaux multiplicateurs* (par analogie avec une méthode utilisée par J.J. Kohn, *cf.* [42], dans son étude de la sous-ellipticité du problème de Neumann pour l'opérateur $\bar{\partial}$; on notera aussi que, dans [68], H. Skoda produit des invariants holomorphes à partir de métriques singulières). Le caractère faisceautique de la méthode d'A. Nadel permet d'obtenir plus d'exemples que la méthode directe. (Dans [23], J.P. Demailly et J. Kollár donnent une approche plus élémentaire des faisceaux multiplicateurs, et en donnent d'autres usages.)

Le point de départ de la méthode est de *caractériser algébriquement la divergence d'une suite de solutions (φ_t) des équations $(**_t)$ non uniformément bornée lorsque $t \to 1$, en lui associant un faisceau cohérent d'idéaux $\mathcal{I}(M, (\varphi_t))$.* Par sa construction même, ce faisceau vérifie un certain nombre de propriétés algébriques. C'est dans sa définition que les exponentielles $\mathrm{e}^{-\gamma\varphi_t}$ pour $\gamma \in]m/m+1, 1[$ jouent un rôle, en liaison avec les estimées présentées précédemment qui sont utilisées dans le travail de Nadel (voir [86] pour un point de vue plus algébrique sur la construction de A. Nadel).

Cela a pour conséquence que le sous-schéma Y de M qui est le support du faisceau $\mathcal{I}(M, (\varphi_t))$ vérifie lui aussi des propriétés particulières : il est par exemple connexe et de genre arithmétique zéro. En combinaison avec des propriétés de fibrés amples sur M, *on trouve ainsi des restrictions sur la structure holomorphe de M,* ce qui est précisément ce qui nous occupe depuis le début dans ce problème.

L'approche d'A. Nadel a, elle aussi, une version équivariante attachée à des sous-groupes compacts G de $H(M)$, qui apporte d'autres restrictions sur le support Y de $\mathcal{I}(M, (\varphi_t))$ lorsque celui-ci est G-invariant.

THÉORÈME 5 (*cf.* [57]).– *Soit G un sous-groupe compact du groupe $H(M)$ des transformations holomorphes d'une variété de Fano M. Si M n'admet pas de faisceau d'idéaux multiplicateurs G-invariant, alors M admet une métrique d'Einstein-Kähler.*

Notons que ce théorème permet effectivement, comme nous l'énonçons dans la section 4, de construire des exemples de métriques d'Einstein-Kähler sur certaines variétés de Fano.

3.8. Dans [58], A. Nadel vient de raffiner sa méthode en présence de champs de vecteurs holomorphes X qui sont dans le noyau du caractère de Futaki Φ. Il voit cette condition comme une contrainte supplémentaire sur le lieu des points où une suite de solutions peut diverger et d'en tirer une estimée sur ces solutions. Il prouve notamment (*cf.* [58]) que, *si X est un champ de vecteurs holomorphe sur une variété de Fano M appartenant au noyau du caractère de Futaki, le sous-schéma Y qui supporte le faisceau d'idéaux multiplicateurs attaché à une suite divergente (φ_t) de solutions de $(**_t)$ lorsque $t \to 1$ ne rencontre pas $Z^+(X)$, lieu des zéros de X où sa divergence a une partie réelle positive.*

En tant que tel, cet énoncé ne fournit pas un théorème d'existence de métrique d'Einstein-Kähler mais il est en relation avec la notion d'invariant de Futaki étendu que nous présentons dans la section 5. On peut noter que, *dans le problème de la courbure scalaire prescrite sur les sphères* (qui présente beaucoup d'analogies avec le problème que nous considérons), *une condition analogue a été transformée par A. Bahri et J.M. Coron en condition suffisante d'existence de solutions* (*cf.* [4]).

4. EXEMPLES ET CONTRE-EXEMPLES

a) Le cas des surfaces

4.1. Nous commençons par le cas des surfaces ($m = 2$) qui est complètement résolu dans des articles de S.T. Yau et G. Tian ([77]), et de G. Tian ([70] et [71]). Il est plus simple parce que la classification des surfaces de Del Pezzo est complètement connue (y compris les informations sur le module de déformations des structures complexes) et que la traduction analytique du problème est moins non-linéaire qu'en dimension supérieure.

THÉORÈME 6 (*cf.* [71]).– *Une surface complexe M à première classe de Chern positive admet une métrique d'Einstein-Kähler si et seulement l'algèbre de Lie $\mathfrak{H}(M)$ est réductive.*

Il est connu que les espaces symétriques complexes $\mathbb{C}P^2$ et $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ admettent des métriques d'Einstein-Kähler. Nous avons déjà fait remarquer que les surfaces D_1 et D_2 obtenues à partir de $\mathbb{C}P^2$ en éclatant un ou deux points ne peuvent admettre de telles métriques. Il n'y a qu'une structure holomorphe sur D_3 et sur D_4. Une construction utilisant des symétries particulières de D_3 a permis à Y.T. Siu (*cf.* [66] et [67]) de construire une métrique d'Einstein-Kähler.

Les premiers exemples de métriques d'Einstein-Kähler sur les autres surfaces D_k (déformées à partir de la structure holomorphe de surface éclatée de $\mathbb{C}P^2$ en k points en position générale pour $5 \leq k \leq 8$) ont été obtenus par G. Tian et S.T. Yau (*cf.* [77]) à partir de certaines structures particulières pour lesquelles il était possible d'évaluer l'invariant $\alpha(M)$ de Tian[5].

b) Des exemples résultant de constructions géométriques

4.2. Des exemples de métriques d'Einstein-Kähler peuvent être obtenus par des méthodes géométriques classiques. C'est ainsi qu'un certain nombre d'espaces homogènes kählériens sont construits par des considérations algébriques (*cf.* [51], et [53] pour l'unicité à automorphisme de la structure holomorphe près).

D'autres exemples non-homogènes ont été construits par N. Koiso et Y. Sakane (*cf.* [43] et [62]) par une méthode inspirée de constructions "à la Kaluza-Klein", i.e. en trouvant une métrique d'Einstein-Kähler sur l'espace total d'un fibré dont la métrique est construite en remontant celle de la base (souvent prise homogène), et en choisissant bien la connexion utilisée pour définir les espaces orthogonaux aux espaces tangents aux fibres. Il s'agit de compactifications de $\mathbb{C}^*$-fibrés sur des variétés kählériennes compactes qui, elles, peuvent être homogènes. Les premiers exemples de cette sorte étaient de cohomogénéité un, ce qui ramenait la résolution d'une équation aux dérivées partielles à celle d'une équation différentielle ordinaire. La particularité intéressante de leurs exemples est que, *pour cette famille de variétés, l'existence d'une métrique d'Einstein-Kähler est équivalente à la nullité du caractère de Futaki.*

D'autres exemples ont été trouvés dans les variétés de Fano *toriques*, i.e., des variétés de dimension m qui ont une action presque transitive de $(\mathbb{C}^*)^m$, *cf.* [49] et [35]. La discussion de certains exemples discutés par A. Futaki fait intervenir une interprétation symplectique du caractère de Futaki pour ces variétés, *cf.* [34].

[5] C'est dans l'article [71] que, pour la première fois, il est fait appel aux métriques induites de la métrique de Fubini-Study de l'espace projectif complexe par les plongements pluri-anticanoniques et aussi à des connexions spéciales sur des fibrés holomorphes, qui seront très importantes dans la section suivante.

Dans le même esprit, A.D. Hwang m'a fait remarquer qu'il est possible d'obtenir des modules de métriques d'Einstein-Kähler grâce aux résultats de persistance de solutions après petite perturbation de la structure complexe de C. LeBrun et S. Simanca (*cf.* [45]) qu'ils obtiennent à cause de la non-dégénérescence du caractère de Futaki. Cette propriété est en particulier vérifiée pour les hypersurfaces cubiques de Fermat (ici c'est le cas $m \geq 3$ qui nous intéresse).

c) Exemples de métriques d'Einstein-Kähler obtenues grâce à des estimées a priori

4.3. Rappelons que la plupart des constructions de métriques d'Einstein-Kähler sur les surfaces M s'appuyant sur des méthodes analytiques ont été obtenues en évaluant l'invariant $\alpha(M)$ de Tian.

Des exemples en plus grande dimension ont aussi été construits de cette façon : par exemple G. Tian prouve que les hypersurfaces de degré m et $m+1$ de $\mathbb{C}P^{m+1}$ admettent des métriques d'Einstein-Kähler.

4.4. Partant des propriétés géométriques du sous-schéma qu'il a mis en évidence lorsque la méthode de continuité ne permet pas de résoudre l'équation $(**_1)$, A. Nadel montre dans [57] par exemple que l'hypersurface de Fermat de degré d dans $\mathbb{C}P^n$ pour $n/2 \leq d \leq n$ a des métriques d'Einstein-Kähler, et qu'il en est de même de certains revêtements ramifiés ou éclatés de $\mathbb{C}P^m$.

d) Variétés obstruées

4.5. Nous avons déjà donné des exemples de variétés de Fano obstruées par le théorème de Matsushima. Jusqu'ici nous n'avons donné aucun exemple de variété obstruée par le caractère de Futaki. En voici un donné par A. Futaki : on prend pour M l'espace total du fibré projectif sur $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^2$ associé au fibré somme directe des fibrés en droites tautologiques $\mathcal{O}(-1)$ sur chaque facteur. On trouve d'autres exemples parmi les *variétés toriques* (*cf.* [59]).

4.6. Nous terminons cette revue d'exemples de variétés obstruées en présentant le *contre-exemple dû à G. Tian* (*cf.* [76]) *à la conjecture de Calabi* selon laquelle, sur une variété de Fano M, la nullité de $\mathfrak{H}(M)$ serait une condition suffisante pour l'existence d'une métrique d'Einstein-Kähler.

La variété M est la sous-variété de la grassmannienne $G_{4,7}(\mathbb{C})$ formée des espaces W de dimension 4 qui, un espace Q de dimension 3 étant donné dans $\Lambda^2\mathbb{C}^7$, ont la propriété que Q se projette sur 0 dans $\Lambda^2(\mathbb{C}^7/W)$. Pour un choix générique de Q, la variété M associée est de Fano et n'a pas de champs de vecteurs holomorphes. Elle est cependant obstruée par des considérations de stabilité décrites dans la section 5.

e) Une réponse négative à une question d'Arthur Besse

4.7. Notons enfin que [19] contient des *exemples de variétés de Fano de dimension 2ℓ, $\ell \geq 2$, admettant des métriques d'Einstein-Kähler à courbure scalaire positive, qui sont difféomorphes à des variétés à fibré canonique ample, donc admettant des métriques d'Einstein-Kähler à courbure scalaire négative.* Ceci donne les *premiers exemples de variétés différentiables admettant des métriques d'Einstein de signes différents*, répondant ainsi par la négative à une question formulée page 19 de [9].

La remarque fondamentale est que la *surface de Barlow B* (*cf.* [19]) a une déformation qui a un fibré canonique ample, alors qu'elle est h-cobordante (en fait homéomorphe) à une surface de Del Pezzo D_8. Par le théorème du h-cobordisme, les variétés $D_8 \times D_8$ et $B \times B$ (et plus généralement $(D_8)^\ell$ et B^ℓ pour $2 \leq \ell$) sont difféomorphes.

5. OBSTRUCTIONS ÉTENDUES ET STABILITÉ

a) Caractère de Futaki étendu

5.1. Dans [26], W. Ding et G. Tian généralisent le caractère de Futaki de façon décisive en prenant avantage du fait que, pour une variété de Fano M, les puissances du fibré anticanonique K_M^{-k} sont très amples pour k assez grand. Ceci fournit des plongements Ψ_N de M dans les espaces projectifs complexes $\mathbb{C}P^N$. Dans la suite nous supposons donc que *M est une sous-variété algébrique de $\mathbb{C}P^N$ et que le fibré en hyperplans sur $\mathbb{C}P^N$ se restreint en une puissance du fibré anticanonique K_M^{-1}.*

5.2. Le groupe $\mathrm{PGL}_{N+1}(\mathbb{C})$ des transformations holomorphes de $\mathbb{C}P^N$ a certains sous-groupes à un paramètre qui proviennent de gradients de fonctions propres pour la plus petite valeur propre du laplacien (avec la normalisation que nous avons rappelée pour la métrique de Fubini-Study, cette valeur propre est $2(N+1)$). Soit (σ_s) un tel groupe à un paramètre qui, par hypothèse, n'engendre pas un groupe compact de transformations mais au contraire "va à l'infini" dans $\mathrm{PGL}_{N+1}(\mathbb{C})$. Sous son action certaines coordonnées homogènes deviennent arbitrairement grandes avec l'effet géométrique d'"écraser certaines directions".

Posons $M_s = \sigma_s(M)$. Lorsque $s \to \infty$, M_s converge vers une sous-variété (éventuellement singulière) M_∞ de $\mathbb{C}P^N$. Si M_∞ est irréductible et non-dégénérée (ce qui est vrai génériquement), alors σ_s préserve M_∞ pour tout $s \in \mathbb{R}$, et par suite le champ de vecteurs holomorphe que définit le groupe à un paramètre (σ_s) est tangent à M_∞. On peut dire que M_∞ est obtenue à partir de M par *concentration* sous (σ_s).

5.3. Il est alors utile d'introduire la sous-algèbre $\mathfrak{H}(M_\infty)$ de l'algèbre de Lie de $\mathrm{PGL}_{N+1}(\mathbb{C})$ formée des champs de vecteurs holomorphes qui sont tangents à M_∞ à laquelle nous étendons le caractère de Futaki. Pour cela, pour $X \in \mathfrak{H}(M_\infty)$, nous évaluons la dérivée $\mathcal{L}_X r_\omega$, où r_ω désigne la déviation de Ricci sur la partie régulière M_∞^{reg} de M_∞ pour une métrique ω dite *admissible*, i.e. induite de la métrique de Fubini-Study ω_{FS} par un plongement Ψ_N. Les phénomènes de compensation qui assurent que $\int_M \mathcal{L}_X r_\omega$ ne dépend pas de la métrique $\omega \in 2\pi\, c_1(M)$ continuent de fonctionner *pourvu que l'on prenne soin de contrôler ce qui se passe aux points singuliers* (par exemple en passant par une résolution de X_∞). C'est évidemment là que réside tout la subtilité de l'extension.

Le résultat essentiel est alors le suivant.

THÉORÈME 7 (*cf.* [26]).– *Soit M_∞ la variété algébrique (supposée normale) obtenue par concentration par un sous-groupe à un paramètre (σ_s) de* $\mathrm{PGL}_{N+1}(\mathbb{C})$ *agissant sur un plongement plurianticanonique d'une variété de Fano M. Si M admet une métrique d'Einstein-Kähler, alors l'extension à $\mathfrak{H}(M_\infty)$ du caractère de Futaki a une partie réelle non-négative.*

5.4. Dans [26], les auteurs ne parviennent pas à déduire du théorème 7 un nouvel exemple de variété de Fano qui soit obstruée. Ils donnent cependant une variété d'orbites kählérienne à laquelle la construction précédente s'applique.

Notons qu'ils constatent que les variétés d'orbites de la famille qu'ils considèrent ont un fibré stable au sens de Mumford. Cela nous remet sur la voie proposée par S.T. Yau dans le problème cité dans l'introduction, et incite à considérer de plus près les relations entre les constructions précédentes et les notions de stabilité des variétés algébriques.

Dans [76], G. Tian part de la propriété du caractère de Futaki étendu qui apparaît dans le théorème 7 pour des déformations générales d'une variété algébrique M telle que $\mathfrak{H}(M) = 0$ pour introduire la notion de *K-stabilité*. Avant de revenir à létude des variétés algébriques proprement dites, nous passons en revue le cas des fibrés holomorphes.

b) Semi-stabilité et stabilité des fibrés

5.5. Les concepts de stabilité (et de semi-stabilité) des fibrés et des variétés projectives ont été développés avec l'étude du problème de leurs modules, dans le contexte de la géométrie algébrique (*cf.* [55] par exemple pour une introduction). Nous sommes intéressés à la liaison de cette théorie avec des données métriques.

Dans le cadre de la théorie des fibrés, ce lien est maintenant établi de façon satisfaisante (*cf.* [1] pour le cas des surfaces de Riemann dans le cadre de l'étude de la fonctionnelle de Yang et Mills sur l'espace des connexions, [41] et [65] pour des présentations très complètes). Rappelons qu'un fibré holomorphe E sur une variété kählérienne (M,ω) de dimension m est dit *stable par rapport à* $[\omega]$ si, *pour tout sous-faisceau cohérent* $\mathcal{F}$ *du faisceau* $\mathcal{O}(E)$ *des germes de sections holomorphes de* E *dont le rang est strictement inférieur à* m, *on a*

$$\frac{c_1(\mathcal{F}) \cup [\omega]^{m-1}(M)}{\mathrm{rang}\mathcal{F}} < \frac{1}{m}\, c_1(M)\ .$$

Il est dit *semi-stable par rapport à* $[\omega]$ *si l'inégalité précédente n'est pas stricte pour certains faisceaux.*

Si on munit le fibré E d'une métrique hermitienne h, on fait apparaître sa courbure qui est une 2-forme Ω_h à valeurs dans $\mathrm{End}E$. Dans [47] Lübke montre que l'existence sur le fibré E d'une métrique d'*Hermite-Einstein*, i.e. une métrique h sur E pour laquelle il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\omega^{m-1} \wedge \Omega_h = \lambda\, \omega^m \otimes Id_E$, entraînait qu'il soit semi-stable, somme de fibrés stables, donc stable si irréductible (voir aussi [40]).

L'énoncé réciproque, connu sous le nom de *conjecture de Hitchin-Kobayashi*, a été établi d'une part par S. Donaldson (*cf.* [28] et [29]), qui a utilisé à la fois des idées empruntées à la géométrie algébrique et à la géométrie symplectique (voir la section 6), et par K. Uhlenbeck et S.T. Yau (*cf.* [80]), qui se sont servis principalement d'estimations analytiques (pour un exposé dans ce séminaire, voir [50]).

5.6. Le problème qui nous occupe est plus difficile car plus non-linéaire. Cette situation est bien connue en Physique Mathématique où les théories de l'électromagnétisme et des champs de Yang-Mills sont plus faciles (et en particulier plus facilement quantifiables) que la Gravitation. En effet, dans notre cas, la métrique kählérienne joue deux rôles à la fois : celui de métrique de référence sur la base du fibré, et celui de métrique hermitienne sur le fibré tangent vu comme un fibré holomorphe comme les autres. *On pourrait donc penser que c'est la stabilité du fibré tangent qui importe*[6]. Ce n'est pas le cas, et il faut avoir recours à une notion de stabilité plus spécialement adaptée au caractère algébrique des variétés considérées que nous introduisons maintenant.

[6] Les articles [69] et [15] mettent en évidence les conséquences pour le fibré tangent de l'existence d'une métrique d'Einstein-Kähler (ou plus généralement d'une métrique à courbure scalaire constante).

c) Vers la solution du problème de S.T. Yau : la stabilité au sens de Chow-Mumford

5.7. Le cas le plus élémentaire pour l'étude de la *stabilité des variétés projectives* est celui des hypersurfaces complexes de $\mathbb{C}P^{m+1}$. Dans le contexte qui nous intéresse ici, la liaison entre la stabilité et de l'existence de métriques d'Einstein-Kähler a été traitée par G. Tian dans [75]. Une hypersurface M définie par l'équation $f = 0$, où $f \in \mathcal{P}_{m+2,d}$, espace des polynômes complexes à $m+2$ variables de degré d, est dite *stable si l'orbite* $\mathrm{PGL}_{m+2}(\mathbb{C}).f$ *pour l'action* $f \mapsto f \circ \sigma^{-1}$ *est fermée dans* $\mathcal{P}_{m+2,d}$ *et si le stabilisateur de* f *dans* $\mathrm{PGL}_{m+2}(\mathbb{C})$ *est fini.* (Noter que l'équation $f \circ \sigma^{-1} = 0$ est celle de l'hypersurface $\sigma(M)$.) Elle est dite *semi-stable* si $0 \notin \mathcal{P}_{m+2,d}$.

Les hypersurfaces lisses sont stables, et dans [75] *G. Tian relie la semi-stabilité de l'hypersurface M ayant seulement des singularités du type "espace d'orbites" à l'existence de métriques d'Einstein-Kähler généralisées* en mettant en correspondance deux fonctionnelles définies sur les orbites, à savoir $\log ||f \circ \sigma^{-1}||$ et la K-énergie des métriques kählériennes induites sur les hypersurfaces $\sigma(M)$, notion qui est définie dans la section 6.

5.8. Dans le cas général d'une sous-variété algébrique M de $\mathbb{C}P^N$, la définition de la stabilité (et de la semi-stabilité) est plus lourde à mettre en place (pour les détails en relation avec notre point de vue, voir [74] et [76]).

A toute déformation Z de M, on associe un fibré virtuel L_Z construit à partir du fibré L en hyperplans sur $\mathbb{C}P^N$ et de la déformation de M. Ce fibré est naturel en ce sens que son caractère de Chern reproduit exactement en cohomologie l'interprétation comme classe caractéristique secondaire de Bott-Chern du caractère de Futaki développée par A. Futaki, T. Mabuchi et Y. Nakagawa. La stabilité au sens de Chow-Mumford de M (on dira que M est *CM-stable*) se formule alors, comme dans le cas des hypersurfaces, comme la fermeture de l'orbite de tout élément $\tilde{z} \neq 0$ dans l'espace total de L_Z sous l'action de $\mathrm{PGL}_{N+1}(\mathbb{C})$; pour la semi-stabilité, il s'agit de la non-appartenance de 0 à la fermeture de cette orbite.

Le résultat qui montre le chemin de la résolution du problème posé par S.T. Yau est alors le suivant.

THÉORÈME 8 (G. Tian, *cf.* [76]).– *Si une variété de Fano M admet une métrique d'Einstein-Kähler, alors M est faiblement CM-stable. Si* $\mathfrak{H}(M) = 0$, *alors M est CM-stable.*

La principale question qui reste ouverte est celle de la réciproque. Pour cela, il faut pouvoir déduire la stabilité d'estimées a priori.

d) Commentaires supplémentaires

5.9. Dans [76], G. Tian s'intéresse aussi à ce qui se passe lorsque la méthode de continuité ne permet pas d'aller jusqu'en 1. Il en déduit l'existence d'un espace M_∞ dont les singularités sont de codimention réelle au moins 4, d'un champ de vecteurs $X \in \mathfrak{H}(M)$ dont l'invariant de Futaki étendu a une partie réelle négative. De plus la métrique ω_∞ vérifie l'équation

$$\rho_{\omega_\infty} - \omega_\infty = -\mathcal{L}_X \omega_\infty$$

sur la partie régulière $M^{\mathrm{reg}}_{\omega_\infty}$ de M_∞.

De tels espaces ont été appelés des *solitons de Ricci* par R. Hamilton. (Il est intéressant de contraster cette équation avec celle où la métrique ω_∞ a pour coefficient la courbure scalaire, au lieu d'une constante, qui n'a pas, elle, de solution non triviale, *cf.* [12]).

6. POINT DE VUE SYMPLECTIQUE

a) L'espace des potentiels kählériens comme objet géométrique

6.1. Tout au long de l'exposé est apparu l'espace $\mathcal{M}_\omega$ des fonctions pluri-surharmoniques pour ω, qui est l'espace des potentiels kählériens de notre problème. Jusque là, nous avons laissé dans l'ombre sa géométrie qui est très riche et qui est la clef de beaucoup de questions reliées à notre problème. En fait $\mathcal{M}_\omega$ est intrinsèquement attaché à M, la référence à ω n'étant en quelque sorte que le choix d'un point-base. Cela est bien mis en valeur par la remarque suivante (*cf.* [31]), qui utilise le fait que $[\omega]$ est multiple d'une classe entière donc est (à une constante multiplicative près) la courbure d'un fibré en droites holomorphe : *l'espace $\mathcal{M}_\omega$ s'identifie à l'espace des métriques hermitiennes sur le fibré K_M à courbure positive.* En effet, si la métrique h a pour courbure $i\,\omega$, alors la courbure de la métrique $e^\varphi\, h$ est $i\,(\omega + i\partial\bar\partial\varphi)$. Désormais, nous *notons* $\mathcal{M}$ au lieu de $\mathcal{M}_\omega$.

De plus, si on considère l'addition d'une constante réelle à un potentiel comme l'action du groupe additif $\mathbb{R}$, alors *l'espace quotient $\mathcal{M}/\mathbb{R}$ s'identifie à l'espace des métriques kählériennes de la classe $2\pi\, c_1(M)$.*

6.2. Dans [48], T. Mabuchi montre que $\mathcal{M}$ a une métrique riemannienne naturelle (faible) : en effet au point $\varphi \in \mathcal{M}$, pour $f,\ f' \in T_\varphi\mathcal{M} = C^\infty(M)$, on peut poser par définition $\langle f, f'\rangle = \int_M f f'\,(\omega + i\partial\bar\partial\varphi)^m$. Le résultat principal qu'il obtient est le fait que, pour ce produit scalaire, *$\mathcal{M}$ est un espace riemannien symétrique* dont *la courbure se calcule au point φ par le crochet de Poisson des vecteurs tangents*, à savoir pour f_1, f_2 et $f_3 \in C^\infty(M)$, $R(f_1, f_2)f_3 = -\frac{1}{4}\{\{f_1, f_2\}_\varphi, f_3\}_\varphi$, où $\{\ ,\ \}_\varphi$ désigne le crochet de Poisson de la structure symplectique $\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi$. Le seul point délicat est de *prouver l'existence d'une dérivation covariante de Levi-Civita* car $\mathcal{M}$ est de dimension infinie (on peut noter cependant l'analogie avec l'espace symétrique des produits scalaires hermitiens sur un espace vectoriel).

Ce résultat a été retrouvé par S. Semmes dans [63], qui donne quelques prolongements intéressants du point de vue des équations de Monge-Ampère : il montre comment la recherche des géodésiques de $\mathcal{M}$ est reliée à la solution des équations de Monge-Ampère homogènes. En prenant complexe le paramètre le long des géodésiques, ce qui revient à considérer des applications harmoniques définies sur une surface de Riemann Σ à valeurs dans l'espace symétrique $\mathcal{M}$, il en tire une interprétation nouvelle (et dynamique) de ces équations et permet aussi de les relier à l'étude d'équations de Monge-Ampère dégénérées sur $\mathcal{M} \times \Sigma$. Pour lui, c'est cette interprétation qui est le point de départ de son intérêt pour le sujet.

C'est aussi le point de vue développé systématiquement par S. Donaldson dans [31], et enrichi par une mise en relation avec des équations définissant des applications harmoniques définies sur des surfaces de Riemann à bord à valeurs dans un espace symétrique du type G^c/G, où G^c désigne le complexifié du groupe de Lie G. Ces équations sont analogues à celles qui apparaissent dans la théorie de Wess-Zumino-Witten.

6.3. Dans ce cadre, il est possible d'introduire une fonctionnelle I (*cf.* [31]) qui peut se relier à l'énergie. Sur $\mathcal{M}$, nous pouvons définir une 1-forme différentielle ι en posant, pour $f \in T_\varphi\mathcal{M}$, $\iota(f) = \int_M f\,(\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi)^m/m!$. On vérifie que ι est fermée. Comme $\mathcal{M}$ est contractible, il est possible de définir une fonction à deux points $I(\varphi, \varphi')$ en calculant l'intégrale curviligne de la forme ι sur tout chemin joignant φ à φ' (car cette intégrale ne dépend pas du chemin choisi à cause de la fermeture de ι). Pour avoir une formule explicite on prend comme chemin joignant φ à φ' un segment, et on retrouve l'énergie généralisée I_ω par la formule $I_{\omega+i\partial\bar{\partial}\varphi} = I(\varphi, .)$.

Les considérations précédentes suggèrent de travailler en prenant un point-base et de décomposer $\mathcal{M}$ en $\mathcal{K} \times \mathbb{R}$, où $\mathcal{K} = \{\varphi \mid \varphi \in \mathcal{M},\ I_\omega(\varphi) = 0\}$ (la notation $\mathcal{K}$ est là pour rappeler que cet espace peut être identifié à l'*espace des métriques kählériennes* de la classe $2\pi\, c_1(M)$ et a donc une signification géométrique évidente). La décomposition précédente est en fait isométrique pour la métrique riemannienne naturelle.

b) L'unicité des métriques d'Einstein-Kähler

6.4. Dans le cadre de la géométrie de dimension infinie de $\mathcal{M}$, il est aussi possible d'*interpréter l'invariant de Futaki comme une loi de conservation "à la Élie Cartan" liée à une action du groupe $H_0(M)$ sur $\mathcal{M}$*. En effet, si $\psi \in H_0(M)$, alors nous avons $\psi^*\omega = \omega + i\partial\bar{\partial}\alpha_\psi$, ce qui nous permet de définir une action par la formule $\psi.\varphi = \varphi \circ \psi + \alpha_\psi$ (où α_ψ doit être normalisé). On doit vérifier qu'il s'agit bien d'une action.

Introduisons alors sur $\mathcal{M}$ la 1-forme différentielle τ définie sur $f \in T_\varphi\mathcal{M}$ par $\tau(f) = \int_M f\, \rho_{\omega+i\partial\bar{\partial}\varphi} \wedge (\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi)^{m-1}$. Les deux faits fondamentaux concernant τ (*cf.* [13]) sont les suivants : *la forme τ est fermée et invariante sous l'action de $H_0(M)$ sur $\mathcal{M}$ que nous venons de définir.* Par suite, si $X \in \mathfrak{H}(M)$, nous avons la relation[7] $''\mathcal{L}_{X_\varphi}''\sigma = 0$ qui, par la relation fondamentale du calcul des variations $\mathcal{L}_X = i_X \circ d + d \circ i_X$, la forme τ étant fermée, donne la constance de la fonction $\tau(X_\varphi)$ sur $\mathcal{M}$ (où X_φ désigne l'action de $\mathfrak{H}(M)$ déduite de l'action de $H_0(M)$ définie précédemment), qui donne la constance du caractère de Futaki dans une classe de Kähler fixée.

6.5. Le fait que la 1-forme différentielle τ soit fermée suggère que l'on considère sa primitive T, i.e. la fonction à deux points

$$T(\varphi, \varphi + \psi) = -\int_0^1 \left(\int_M \psi\, (\rho_{\omega_t} - \omega_t) \wedge (\omega_t)^{m-1} \right) dt \ ,$$

où $\omega_t = \omega + i\partial\bar{\partial}(\varphi + t\psi)$, l'indépendance du chemin choisi joignant φ à $\varphi + \psi$ provenant bien entendu du fait que τ est fermée. On vérifie facilement que l'on a $T(\varphi, \varphi') = -T(\varphi', \varphi)$ et pour φ_1, φ_2 et $\varphi_3 \in \mathcal{M}$, $T(\varphi_1, \varphi_2) + T(\varphi_2, \varphi_3) = T(\varphi_1, \varphi_3)$.

Prenant un point-base dans $\mathcal{M}$ (ce qui revient à prendre une métrique kählérienne de référence ω), T. Mabuchi définit (*cf.* [5]) la *K-énergie* T_ω par $T_\omega(\varphi) = T(0, \varphi)$. Il prouve dans [5] que *les points critiques des fonctionnelles T sont les métriques d'Einstein-Kähler*, et aussi que, *si (ξ_t) est le groupe à un paramètre de difféomorphismes de M engendré par $\mathcal{R}\mathrm{e}(X)$ pour un champ de vecteurs holomorphe X de M, alors $d/dt(T(0, \alpha_{\xi_t}))_{|t=0} = \mathcal{R}\mathrm{e}(\Phi(X))$* si α_{ξ_t} est défini par $\xi_t^*(\omega) = \omega + i\partial\bar{\partial}\alpha_{\xi_t}$. Ceci montre qu'*il est possible de remonter le caractère de Futaki au groupe $H(M)$*. De plus, pour toute famille φ_t de solutions de $(**_t)$, il prouve que $T(0, \varphi_t) \leq 0$.

[7] Les guillemets sont là pour rappeler que nous considérons la dérivation de Lie dans le cadre de la variété de dimension infinie $\mathcal{M}$.

Ces calculs ont conduit S. Bando et T. Mabuchi (*cf.* [6]) à l'important résultat géométrique suivant, qui nécessite plusieurs arguments analytiques délicats mais qui s'appuie essentiellement sur la *convexité de la* K*-énergie* T_ω.

THÉORÈME 9 (*cf.* [6]).– *S'il existe une métrique de Kähler-Einstein sur une variété de Fano, alors celle-ci est unique, à l'action du groupe* $H_0(M)$ *près.*

La question de l'extension du théorème 9 au cas à courbure scalaire constante reste ouverte (*cf.* [31] pour une conjecture dans ce sens, et [21] pour le cas des surfaces).

6.6. Il suit aussi du théorème de Bando-Mabuchi que toute métrique d'Einstein-Kähler sur une variété de Fano ayant un groupe d'automorphismes compact G admet G comme groupe d'isométries.

c) Interprétation symplectique de la stabilité

6.7. Dans [30], S. Donaldson propose une interprétation symplectique de l'intervention de la notion de stabilité dans le problème de l'existence de métriques d'Einstein-Kähler. Le schéma, déjà appliqué avec succès à certaines situations en géométrie algébrique, est le suivant. Un groupe G agit par transformations holomorphes isométriques sur une variété complexe $\mathcal{C}$ munie d'une métrique kählérienne Ω. On doit aussi disposer d'une application *moment* μ de $\mathcal{C}$ dans le dual de l'algèbre de Lie de G et d'une complexification G^c de G agissant aussi sur $\mathcal{C}$. L'identification entre objets holomorphes et objets métriques est donnée par la formule $\mathcal{C}_{\text{stable}}/G^c = \mu^{-1}(0)/G$, où $\mathcal{C}_{\text{stable}}$ désigne l'ouvert formé des points stables de $\mathcal{C}$ qui est invariant sous G^c.

C'est déjà cette approche qu'il a mise en œuvre pour l'étude de la stabilité des fibrés holomorphes. Dans ce cas l'espace $\mathcal{C}$ est l'espace des connexions unitaires, le groupe G est celui des automorphismes unitaires. La m-forme $\omega^{m-1} \wedge \Omega_h$ peut être prise comme application moment μ.

6.8. S. Donaldson propose dans [30] la transposition de cette construction dans notre cadre via l'étude de l'espace des structures complexes sur le fibré tangent compatibles à une métrique ω. Ce cas présente une non-linéarité supplémentaire. La m-forme $\rho_\omega \wedge \omega^{m-1} - \omega^m$ peut être prise comme application moment pour l'action du groupe G qui peut s'identifier au sous-espace de $C^\infty(M)$ formé des fonctions d'intégrale nulle. Le gradient symplectique de tout élément de $C^\infty(M)$ donne naissance à un automorphisme de la structure symplectique définie par la forme réelle ω. La difficulté principale est l'absence a priori d'une complexification de groupe G. S. Donaldson suggère de le remplacer par un feuilletage holomorphe dont les feuilles joueraient le rôle des orbites du groupe complexifié.

Dans cette approche, on peut espérer mettre en évidence des informations intéressantes sur la géométrie de la situation, en profitant du fait qu'il existe a priori un fibré en droites naturel sur $\mathcal{C}$ qu'il serait souhaitable d'interpréter comme un fibré déterminant muni d'une métrique "à la Quillen-Bismut". Par ailleurs cela a l'avantage de permettre d'aborder naturellement le problème plus vaste de l'existence de métriques kähleriennes à courbure scalaire constante (dans le cadre restreint de la dimension 4, on peut aussi consulter [44] pour une autre approche de ce problème.)

BIBLIOGRAPHIE

[1] ATIYAH, M.F., BOTT, R., *The Yang-Mills Equations over Riemann Surfaces,* Phil. Trans. R. Soc. London **A 308** (1983), 523–615.

[2] AUBIN, T., *Équations du type de Monge-Ampère sur les variétés kählériennes compactes,* C.R. Acad. Sci. Paris **283** (1976), 119–121.

[3] AUBIN, T., *Réduction du cas positif de l'équation de Monge-Ampère sur les variétés kählériennes compactes à la démonstration d'une inégalité,* J. Functional Anal. **57** (1984), 143–153.

[4] BAHRI, A., CORON, J.-M., *The Scalar Curvature Problem on the Standard 3-Dimensional Sphere,* J. Functional Anal. **95** (1991), 106–172.

[5] BANDO, S., *The K-Energy Map, Almost Einstein-Kähler Metrics and an Inequality of the Miyaoka-Yau Type,* Tôhoku Math. J. **39** (1987), 231–235.

[6] BANDO, S., MABUCHI, T., *Uniqueness of Kähler-Einstein Metrics Modulo Connected Group Actions,* in *Algebraic Geometry,* Sendai 1985, Adv. Studies in Pure Math. **10**, Kinokuniya, Tokyo, 1987, 11–40.

[7] BANDO, S., MABUCHI, T., *On some Integral Invariants on Compact Complex Manifolds,* Proc. Japan Acad. Sci. **62** (1986), 197–200.

[8] BERGER, M., *Sur les variétés d'Einstein compactes,* C.R. III$^{\text{ème}}$ Réunion Math. Expression Latine, Namur (1965), 35–55.

[9] BESSE, A.L., *Einstein Manifolds,* Ergeb. Math. **10**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1987.

[10] BOTT, R., *A Residue Formula for Holomorphic Vector Fields,* J. Differential Geom. **1** (1967), 311–330.

[11] BOURGUIGNON, J.P., *Premières formes de Chern des variétés kählériennes compactes,* in *Séminaire Bourbaki 1977-78,* Exposé n°507, Lect. Notes in Math. **710**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1978, 1–21.

[12] BOURGUIGNON, J.P., *Ricci Curvature and Einstein Metrics*, in *Differentiel Geometry and Global Analysis*, Berlin 1979, U. Simon and D. Ferus Ed., Lect. Notes in Math. **838**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1981, 42–63.

[13] BOURGUIGNON, J.P., *Invariants intégraux fonctionnels pour des équations aux dérivées partielles d'origine géométrique,* in *Differential Geometry*, Peñiscola, A.M. Naveira Ed., Lect. Notes in Math. **1209**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1987, 100–108.

[14] BOURGUIGNON, J.P., *L'équation de la chaleur associée à la courbure de Ricci,* in *Séminaire Bourbaki 1985-86*, Exposé n°653, Astérisque **145-146** (1987), 45–61.

[15] BURNS, D., DE BARTOLOMEIS, P., *Stability of Vector Bundles and Extremal Metrics,* Inventiones Math. **92** (1988), 403–407.

[16] CALABI, E., *The Space of Kähler Metrics,* in Proc. International Congress of Mathematicians, Amsterdam, **II** (1954), 206–207.

[17] CALABI, E., *Improper Affine Hyperspheres and a Generalization of a Theorem of K. Jörgens,* Michigan Math. J. **5** (1958), 105–126.

[18] CAO, H.D., *Deformation of Kähler metrics to Kähler-Einstein metrics on Compact Kähler Manifolds,* Inventiones Math. **81** (1985), 359–372.

[19] CATANESE, F., LEBRUN, C., *On the Scalar Curvature of Einstein Manifolds,* Prépublication, Universität Göttingen.

[20] CHANG, S.Y.A., YANG, P.C., *Prescribing Gaussian Curvature on S^2*, Acta Math. **159** (1987), 215–259.

[21] CHRUSCIEL, P., *Semi-Global Existence and Convergence of Solutions of the Robinson-Trautman (2-dimensional Calabi) Equation,* Commun. Math. Phys. **137** (1991), 289–313.

[22] DEBARRE, O., *Variétés de Fano,* in *Séminaire Bourbaki 1996-97*, Exposé n° 827, 1–25.

[23] DEMAILLY, J.-P., KOLLÁR, J., *Semi-continuity of Complex Singularity Exponents and Kähler-Einstein Metrics on Fano Orbifolds*, Prépublication Institut Fourier, Grenoble, à paraître.

[24] DEMAZURE, M., *Surfaces de Del Pezzo,* in *Séminaire sur les singularités des surfaces* 1976-1977, Palaiseau, Lect. Notes in Math. **777**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1980, 23–69.

[25] DING, W., *Remarks on the Existence Problem of Positive Kähler-Einstein Metrics,* Math. Ann. **282** (1988), 463–471.

[26] DING, W., TIAN, G., *Kähler-Einstein Metrics and the Generalized Futaki Invariant,* Inventiones Math. **110** (1992), 315–335.

[27] DING, W., TIAN, G., *The Generalized Moser-Trudinger Inequality*, in *Proc. Int. Conf. on Non-Linear Analysis*, Tianjin, K.C. Chang et al. Ed., World Scientific, Singapore, 1992, 57–70.

[28] DONALDSON, S.K., *Anti-Self-Dual Yang-Mills Connections over Complex Algebraic Surfaces and Stable Vector Bundles,* Proc. London Math. Soc. **50** (1985), 1–26.

[29] DONALDSON, S.K., *Infinite Determinants, Stable Bundles and Curvature,* Duke Math. J. **54** (1987), 231–247.

[30] DONALDSON, S.K., *Remarks on Gauge Theory, Complex Geometry and 4-Manifold Topology,* The Fields Medal Volume, M.F. Atiyah and D. Iagolnitzer Ed., World Scientific, 1997.

[31] DONALDSON, S.K., *Symmetric Spaces, Kähler Geometry and Hamiltonian Dynamics,* Preprint, Oxford Univ., Oxford, 1997.

[32] FUTAKI, A., *On Compact Kähler Manifolds of Constant Scalar Curvatures,* Proc. Japan Acad. Sci. **59** (1983), 401–402.

[33] FUTAKI, A., *An Obstruction to the Existence of Kähler-Einstein Metrics,* Inventiones Math. **73** (1983), 437–443.

[34] FUTAKI, A., *The Ricci Curvature of Symplectic Quotients of Fano Manifolds,* Tôhoku Math. J. **39** (1987), 329–339.

[35] FUTAKI, A., *Kähler-Einstein Metrics and Integral Invariants,* Lect. Notes in Math. **1314**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1988.

[36] FUTAKI, A., MABUCHI, T., *An Obstruction Class and a Representation of Holomorphic Automorphisms*, in *Geometry and Analysis on Manifolds*, Lect. Notes in Math. **1339**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, (1988), 127–141.

[37] FUTAKI, A., MABUCHI, T., SAKANE, Y., *Einstein-Kähler Metrics with Positive Ricci Curvature*, in *Kähler Metrics and Moduli Spaces*, Adv. Stud. Pure Math. **18** (1990), 11–83.

[38] KAZDAN, J.L., WARNER, F.W., *Curvature Functions for Compact 2-manifolds,* Ann. Math. **99** (1974), 14–47.

[39] KOBAYASHI, S., *On Compact Kähler Manifolds with Positive Definite Ricci Tensor,* Ann. Math. **74** (1961), 570–574.

[40] KOBAYASHI, S., *Curvature and Stability of Vector Bundles,* Proc. Japan Acad. Sci. **58** (1982), 158–162.

[41] KOBAYASHI, S., *Differential Geometry of Complex Vector Bundles*, Publ. Math. Soc. Japan **15**, Princeton Univ. Press, Princeton, and Iwanami Shoten, Tokyo, 1987.

[42] KOHN, J.J., *Subellipticity of the $\bar{\partial}$-Neumann Problem on Pseudo-Convex Domains : Sufficient Conditions*, Acta Math. **142** (1979), 79–122.

[43] KOISO, N., SAKANE, Y., *Non-Homogeneous Kähler-Einstein Metrics on Compact Complex Manifolds*, in *Curvature and Topology of Riemannian Manifolds*, Lect. Notes in Math. **1201**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1986, 165–179.

[44] LEBRUN, C., *Polarized 4-Manifolds, Extremal Kähler Metrics and Seiberg-Witten Theory*, Math. Res. Lett. **2** (1995), 653–662.

[45] LEBRUN, C., SIMANCA, S., *Extremal Kähler Metrics and Complex Deformation Theory*, Geom. Funct. Anal. **4** (1994), 298–336.

[46] LICHNEROWICZ, A., *Sur les transformations analytiques des variétés kählériennes*, C.R. Acad. Sci. Paris **244** (1957), 3011–3014.

[47] LÜBKE, M., *Stability of Einstein-Kähler Vector Bundles*, Manuscripta Math. **42** (1983), 245–257.

[48] MABUCHI, T., *Some Symplectic Geometry on Compact Kähler Manifolds*, Osaka Math. J. **24** (1987), 227–252.

[49] MABUCHI, T., *Einstein-Kähler Forms, Futaki Invariants and Convex Geometry on Toric Fano Manifolds*, Osaka Math. J. **24** (1987), 705–737.

[50] MARGERIN, C., *Fibrés stables et métriques d'Hermite-Einstein*, in *Séminaire Bourbaki 1986-87*, Exposé n°683, Astérisque **152-153** (1987), 263–283.

[51] MATSUSHIMA, Y., *Sur les espaces homogènes kählériens d'un groupe réductif*, Nagoya Math. J. **11** (1957), 53–60.

[52] MATSUSHIMA, Y., *Sur la structure du groupe d'homéomorphismes analytiques d'une certaine variété kählérienne*, Nagoya Math. J. **11** (1957), 145–150.

[53] MATSUSHIMA, Y., *Remarks on Kähler-Einstein Manifolds*, Nagoya Math. J. **46** (1972), 161–173.

[54] MOSER, J., *A Sharp Form of an Inequality by N. Trudinger*, Indiana Math. J. **20** (1971), 1077–1091.

[55] MUMFORD, D., *Stability of Projective Varieties*, Enseignement Math. **23** (1977), fasc. 1-2, 39–110.

[56] NADEL, A.M., *Multiplier Ideal Sheaves and Existence of Kähler-Einstein Metrics of Positive Scalar Curvature*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **86** (1989), 7299–7300.

[57] NADEL, A.M., *Multiplier Ideal Sheaves and Kähler-Einstein Metrics of Positive Scalar Curvature*, Ann. Math. **132** (1990), 549–596.

[58] NADEL, A.M., *Multiplier Ideal Sheaves and Futaki's Invariant*, Preprint, Univ. Southern California, Los Angeles, 1997.

[59] NAKAGAWA, Y., *Einstein-Kähler toric Fano fourfolds,* Tôhoku Math. J. **45** (1993), 297–310.

[60] NAKAGAWA, Y., *Combinatorial Formulae for Futaki Characters and Generalized Killing Forms on Toric Fano Manifolds,* Prépublication, Tôhoku Univ., Sendai.

[61] ONOFRI, E., *On the Positivity of the Effective Action in a Theory of Random Surfaces*, Commun. Math. Phys. **86** (1982), 321–326.

[62] SAKANE, Y., *Examples of Compact Kähler-Einstein Manifolds with Positive Ricci Curvature*, Osaka J. Math. **31** (1986), 585–617.

[63] SEMMES, S., *Complex Monge-Ampère Equations and Symplectic Manifolds,* Amer. J. Math. **114** (1992), 495–550.

[64] *Première classe de Chern et courbure de Ricci : preuve de la conjecture de Calabi,* Séminaire Palaiseau, Astérisque **58** (1978).

[65] SIU, Y.T., *Lectures on Hermite-Einstein Metrics for Stable Bundles and Kähler-Einstein Metrics,* Deutscher Math. Ver. Seminar **8**, Birkhäuser, Basel, 1987.

[66] SIU, Y.T., *Kähler-Einstein Metrics for the Case of Positive First Chern Class,* in *Complex Analysis III,* C.A. Berenstein Ed., Lect. Notes in Math. **1277**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, (1987), 120–130.

[67] SIU, Y.T., *The Existence of Kähler-Einstein Metrics on Manifolds with Positive Anticanonical Line Bundle and a Suitable Finite Symmetry Group,* Ann. Math. **127** (1988), 585–627.

[68] SKODA, H., *Sous-ensembles analytiques d'ordre fini dans* $\mathbb{C}^n$, Bull. Soc. Math. France **100** (1972), 353–408.

[69] SUBRAMANIAN, S., *Stability of the Tangent Bundle and Existence of a Kähler-Einstein Metric,* Math. Ann. **291** (1991), 573–577.

[70] TIAN, G., *On Kähler-Einstein Metrics on Certain Manifolds with* $c_1(M) > 0$, Inventiones Math. **89** (1987), 225–246.

[71] TIAN, G., *On Calabi's Conjecture for Complex Surfaces with Positive First Chern Class,* Inventiones Math. **101** (1990), 101–172.

[72] TIAN, G., *A Harnack Inequality for some Complex Monge-Ampère Equations,* J. Differential Geom. **29** (1989), 481–488.

[73] TIAN, G., *On Stability of the Tangent Bundles of Fano Varieties,* Intern. J. Math. **3** (1992), 401–413.

[74] TIAN, G., *Kähler-Einstein Metrics on Algebraic Manifolds,* in C.I.M.E. Conf. *Transcendental Methods in Algebraic Geom.*, F. Catanese, C. Ciliberto Ed., 1994.

[75] TIAN, G., *The K-Energy on Hypersurfaces and Stability,* Commun. Geom. Anal. **2** (1994), 239–265.

[76] TIAN, G., *Kähler-Einstein Metrics with Positive Scalar Curvature,* Inventiones Math., à paraître.

[77] TIAN, G., YAU, S.T., *Kähler-Einstein Metrics on Complex Surfaces with $c_1(M)$ positive,* Commun. Math. Phys. **112** (1987), 175–203.

[78] TIAN, G., ZHU, X., *A Non-Linear Inequality of Moser-Trudinger Type,* Preprint Mass. Inst. Technology, Cambridge.

[79] TRUDINGER, N., *On Imbeddings into Orlicz Spaces and some Applications,* J. Math. Phys. **17** (1967), 473–483.

[80] UHLENBECK, K.K., YAU, S.T., *On the Existence of Hermite-Yang-Mills Connections in Stable Vector Bundles,* Commun. Pure Appl. Math. **39** (1986), 257–293.

[81] YAU, S.T., *On the Curvature of Compact Hermitian Manifolds,* Inventiones Math. **25** (1974), 213–239.

[82] YAU, S.T., *On Calabi's Conjecture and some New Results in Algebraic Geometry,* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **74** (1977), 1798–1799.

[83] YAU, S.T., *On the Ricci-Curvature of a Complex Kähler Manifold and the Complex Monge-Ampère Equation, I,* Commun. Pure Appl. Math. **31** (1978), 339–411.

[84] YAU, S.T., *Non-Linear Analysis in Geometry,* Enseignement Math. **33** (1986), 1–54.

[85] YAU, S.T., *Open Problems in Geometry,* in *Differential Geometry,* Part I : Partial Differential Equations on Manifolds, Proc. Symp. Pure Math. **54**, (1993), 1–28.

[86] YOTOV, M., *Nadel's Subschemes of Fano Manifolds with a Picard Group Isomorphic to $\mathbb{Z}$,* Preprint, Humboldt Univ., 1996.

Jean Pierre BOURGUIGNON

Institut des Hautes Études Scientifiques
35, route de Chartres
F-91440 BURES-SUR-YVETTE
et
Centre de Mathématiques
U.R.A. 169 du C.N.R.S.
École polytechnique
F-91128 PALAISEAU Cedex
Adresse électronique : jpb@ihes.fr