NICOLAS BURQ

Mesures semi-classiques et mesures de défaut

Astérisque, tome 245 (1997), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 826, p. 167-195
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1996-1997__39__167_0>

Séminaire BOURBAKI
49ème année, 1996-97, n° 826

Mars 1997

MESURES SEMI–CLASSIQUES ET MESURES DE DÉFAUT

par **Nicolas BURQ**

Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^d$ et (u_k), une suite bornée dans $L^2(\Omega)$. On peut toujours, quitte à extraire une sous-suite, supposer que cette suite converge au sens des distributions vers une limite $u \in L^2(\Omega)$, ce qu'on note $(u_k) \rightharpoonup u$. Les mesures de défaut micro-locales ont été introduites dans la littérature afin de décrire la perte de compacité forte dans ce passage à la limite. L'objet *a priori* le plus simple associé à la suite (u_k), qui est à la base de l'étude par P.L. Lions [29, 30] de problèmes variationnels elliptiques avec perte de compacité, est la mesure de Radon, ν, définie comme la limite vague au sens des mesures de la suite bornée dans L^1 :

$$\nu_k = |u_k(x) - u(x)|^2$$

qu'on appelle mesure de défaut de la suite (u_k). Deux exemples permettent d'illustrer cette notion :

1. Concentration : $u_k(x) = k^{d/2}\varphi(k(x-x_0))$ avec $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$, $\int |\varphi|^2 = 1$, alors $(u_k) \rightharpoonup 0$ et $\nu = \delta_{x_0}$ la mesure de Dirac au point x_0.
2. Oscillation : $u_k = \varphi(x)e^{ikx\cdot\xi}$ alors $(u_k) \rightharpoonup 0$ et $\nu = |\varphi(x)|^2 dx$, où dx est la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^d$.

Le deuxième exemple montre que ces mesures de défaut ne permettent pas de distinguer entre les différentes directions d'oscillation, $\xi \in \mathbf{R}^d$, qui interviennent dès qu'on n'étudie plus seulement des problèmes elliptiques.

La définition des mesures de défaut micro-locales semble être due à Wigner [43] dans le contexte de la mécanique semi-classique. Plus récemment A. Shnirelman [40], Y. Colin de Verdière [10], B. Helffer-A. Martinez-D. Robert [24] développèrent cette notion pour étudier la répartition asymptotique des fonctions propres du Laplacien sur une variété Riemanienne à bord. Enfin, à la fin des années 80, P. Gérard [15] et L. Tartar [41] dégagèrent indépendamment une notion générale, les H-mesures ou mesures de défaut micro-locales, tandis que les versions semi-classiques connaissaient un regain d'intérêt avec les travaux de P. Gérard [16], P.L. Lions-T. Paul [31],

P. Markowitch-N. Mauser-F. Poupaud [32] ... Dans la première partie de cet exposé on présentera le cadre mathématique et on exposera la construction et les principales propriétés de ces mesures. Dans les parties suivantes on présentera quelques exemples récents d'applications de ces notions dans les domaines de l'homogénisation, du contrôle des équations aux dérivées partielles et de l'optique géométrique non linéaire. Ces exemples ne prétendent pas être exhaustifs, nous les avons choisis car ils nous semblent bien illustrer à la fois la variété des applications possibles et l'intérêt de cette approche.

Je remercie vivement P. Gérard pour l'aide qu'il m'a apportée dans la préparation de cet exposé.

1. MESURES MICRO-LOCALES ET SEMI-CLASSIQUES

1.1. Notations. Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^d$ et $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable dont on note $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}}$ le produit scalaire.

1) On note $L^2(\Omega;\mathcal{H})$ l'espace des fonctions à valeurs dans $\mathcal{H}$, de classe L^2 sur Ω muni de son produit scalaire naturel noté $(\cdot,\cdot)$, $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ (respectivement $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$) l'espace des opérateurs compacts sur $\mathcal{H}$ (respectivement à trace). On note aussi $S^*\Omega$ le fibré cotangent en sphères de Ω ($S^*\Omega = T^*\Omega \setminus \{0\}/\mathbf{R}_+^*$) et $\mathcal{M}_+(T^*\Omega;\mathcal{L}^1(\mathcal{H}))$ (respectivement $\mathcal{M}_+(S^*\Omega;\mathcal{L}^1(\mathcal{H}))$) l'espace des mesures de Radon positives sur $T^*\Omega$ (respectivement sur $S^*\Omega$), à valeurs opérateurs à trace sur $\mathcal{H}$.

2) On note $H^s(\Omega;\mathcal{H})$ l'espace de Sobolev des distributions de classe H^s à valeurs dans $\mathcal{H}$, $H^s_{\text{comp}}(\Omega;\mathcal{H})$ le sous espace formé des distributions à support compact et $H^s_{\text{loc}}(\Omega;\mathcal{H})$ l'espace des distributions u telles que pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi u \in H^s(\Omega;\mathcal{H})$.

3) On note $\Psi^m_{\text{comp}}(\Omega;\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ (respectivement $\Psi^m_{\text{comp}}(\Omega;\mathcal{K}(\mathcal{H}))$) l'espace des opérateurs pseudo-différentiels polyhomogènes d'ordre m sur Ω à valeurs $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ (respectivement $\mathcal{K}(\mathcal{H})$), dont le noyau distribution est à support compact dans $\Omega \times \Omega$. Ce sont des opérateurs du type

$$Au(x) = a(x,D_x)u(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\Omega\times\mathbf{R}^d} e^{i(x-y)\cdot\xi}a(x,\xi)u(y)dyd\xi,$$

où $a(x,\xi) \in S^m_{\text{comp}}(\Omega;\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ est un symbole polyhomogène d'ordre m (voir [25], chap. 18.1). On rappelle que si χ est un difféomorphisme C^∞ de Ω alors, pour tout $a \in S^m_{\text{comp}}(\Omega; \mathcal{L}(\mathcal{H}))$, on a la formule de changement de variables

$$(1) \qquad a(x, D_x)u(\chi(x)) = \chi^*(a(x, D_x)u) = \chi^*(a)(x, D_x)(\chi^* u) + R(\chi^* u)$$

où $\chi^*(a)(x, \xi) = a(\chi(x),\ {}^t\chi'^{-1}\xi)$ et $R \in \Psi^{m-1}_{\text{comp}}(\Omega; \mathcal{L}(\mathcal{H}))$.

4) On note $\sigma_m(A) \in C_0^\infty(S^*\Omega; \mathcal{L}(\mathcal{H}))$, le symbole principal d'ordre m de l'opérateur A dont on rappelle les principales propriétés :

i) L'application $\sigma_m : A \in \Psi^m_{\text{comp}}(\Omega; \mathcal{L}(\mathcal{H})) \mapsto \sigma_m(A) \in C_0^\infty(S^*\Omega; \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ est surjective et il en est de même si on remplace $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ par $\mathcal{K}(\mathcal{H})$.

ii) Pour tout $A \in \Psi^m_{\text{comp}}$, $\sigma_m(A) = 0 \Leftrightarrow A \in \Psi^{m-1}_{\text{comp}}$.

iii) Pour tout $A \in \Psi^m_{\text{comp}}$, $\sigma_m(A^*) = \sigma_m(A)^*$ où la première étoile désigne l'adjoint au sens des opérateurs et la deuxième l'adjoint au sens des éléments de $\mathcal{H}$.

iv) Pour tous $Q \in \Psi^q_{\text{comp}}$, $P \in \Psi^p_{\text{comp}}$, l'opérateur $P \circ Q$ appartient à l'espace Ψ^{p+q}_{comp} et

$$\sigma_p(P)\sigma_q(Q) = \sigma_{p+q}(P \circ Q).$$

v) Si $\mathcal{H} = \mathbf{C}$ alors pour tous $Q \in \Psi^q_{\text{comp}}$, $P \in \Psi^p_{\text{comp}}$, l'opérateur $[P, Q] = P \circ Q - Q \circ P$ appartient à l'espace $\Psi^{p+q-1}_{\text{comp}}$ et

$$(2) \qquad \sigma_{p+q-1}([P, Q]) = \frac{1}{i}\{\sigma_p(P), \sigma_q(Q)\},$$

où $\{f, g\} = \sum_{1 \le i \le d} \partial_{\xi_i} f \partial_{x_i} g - \partial_{x_i} f \partial_{\xi_i} g$ désigne le crochet de Poisson des fonctions f et g.

5) On rappelle que si $P \in \Psi^m_{\text{comp}}$ alors l'opérateur P est continu de l'espace de Sobolev $H^s_{\text{loc}}(\Omega; \mathcal{H})$ dans $H^{s-m}_{\text{comp}}(\Omega; \mathcal{H})$. En particulier, pour $m < 0$, $P \in \Psi^m_{\text{comp}}$ est compact sur $L^2(\Omega; \mathcal{H})$.

6) On note pour $h \in]0, h_0[$, $h_0 > 0$ et $a \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{2d}; \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ (la classe de Schwartz des fonctions à décroissance rapide, à valeurs opérateurs bornés), $a(x, hD_x)$ l'opérateur h-pseudo-différentiel défini par

$$a(x, hD_x)u(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d} e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x, h\xi)u(y)dyd\xi.$$

On rappelle les propriétés suivantes vérifiées par ces opérateurs :

i) Pour tout $a \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{2d}; \mathcal{L}(\mathcal{H}))$, l'opérateur $a(x, hD_x)$ est continu sur $L^2(\mathbf{R}^d; \mathcal{H})$ uniformément par rapport au paramètre $h \in]0, h_0[$.

ii) Pour tout $a \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{2d}; \mathcal{L}(\mathcal{H}))$, on a

$$a(x, hD_x)^* = a^*(x, hD_x) + hR_1(h),$$

où $R_1(h)$ est uniformément borné sur $L^2(\mathbf{R}^d; \mathcal{H})$.

iii) Pour tous $a, b \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{2d}; \mathcal{L}(\mathcal{H}))$, on a

$$a(x, hD_x) \circ b(x, hD_x) = ab(x, hD_x) + hR_2(h),$$

avec $R_2(h)$ uniformément borné sur $L^2(\mathbf{R}^d;\mathcal{H})$.

iv) Pour tous $a, b \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{2d};\mathbf{C})$), on a

$$[a(x,hD_x),b(x,hD_x)] = \frac{h}{i}\{a,b\}(x,hD_x) + h^2R_3(h), \tag{3}$$

avec $R_3(h)$ uniformément borné sur $L^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C})$.

v) Si χ est un difféomorphisme C^∞ de $\mathbf{R}^d$ on a la formule de changement de variables :

$$a(x,hD_x)u(\chi(x)) = \chi^*(a(x,hD_x)u) = \chi^*(a)(x,hD_x)(\chi^*u) + hR_4(h)(\chi^*u), \tag{4}$$

avec $R_4(h)$ uniformément borné sur $L^2(\mathbf{R}^d;\mathcal{H})$.

1.2. Définition des mesures. On considère $(u_k) \in L^2_{loc}(\Omega;\mathcal{H})$ une suite localement bornée dans L^2. On suppose que $(u_k) \rightharpoonup u$ au sens des distributions, c'est-à-dire que pour toute fonction $\varphi \in C_0^\infty(\Omega;\mathcal{H})$, on a

$$\lim_{k\to+\infty}(u_k,\varphi) = \lim_{k\to+\infty}\int_\Omega (u_k(x),\varphi(x))_{\mathcal{H}}\,dx = \int_\Omega (u(x),\varphi(x))_{\mathcal{H}}\,dx.$$

Les principaux résultats d'existence des mesures peuvent être résumés par les deux énoncés suivants :

THÉORÈME 1 (P. Gérard et L. Tartar).— *Il existe une sous-suite (u_{k_n}) de la suite (u_k) et une mesure $\mu \in \mathcal{M}_+(S^*\Omega,\mathcal{L}^1(\mathcal{H}))$ telles que pour tout $A \in \Psi^0_{\mathrm{comp}}(\Omega,\mathcal{K}(\mathcal{H}))$,*

$$\lim_{n\to+\infty}(A(u_{k_n}-u),u_{k_n}-u) = \int_{S^*\Omega}\mathrm{tr}(a(x,\xi)\mu(dxd\xi)), \tag{5}$$

où $a = \sigma_0(A)$ est le symbole principal de l'opérateur A. On dit que μ est une mesure de défaut micro-locale (ou une H-mesure) associée à la suite (u_k). S'il y a unicité de la "mesure limite", on dit que la suite (u_k) est pure et on note $\mu = M_{\mathrm{m}}(u_k)$.

THÉORÈME 2 (P. Gérard, P.L. Lions-T. Paul).— *Pour toute suite (h_k) de réels strictement positifs tendant vers 0 (qu'on appelle une suite d'échelles), il existe une sous-suite (u_{k_n}) de la suite (u_k) et une mesure $\nu \in \mathcal{M}_+(T^*\Omega,\mathcal{L}^1(\mathcal{H}))$ telles que pour tout $a \in C_0^\infty(T^*\Omega,\mathcal{K}(\mathcal{H}))$,*

$$\lim_{n\to+\infty}(a(x,h_{k_n}D_x)(u_{k_n}),u_{k_n}) = \int_{T^*\Omega}\mathrm{tr}(a(x,\xi)\nu(dxd\xi)). \tag{6}$$

On dit que ν est une mesure de défaut semi-classique (ou une mesure de Wigner) associée à la suite (u_k). S'il y a unicité de la "mesure limite", on dit que la suite (u_k) est pure et on note $\nu = M_{\mathrm{sc}}(u_k)$.

Remarques :

1. La mesure limite, ν, dépend évidemment du choix de la suite d'échelles (h_k). L'introduction d'une telle suite peut sembler artificielle, néanmoins dans la plu-

part des applications et en particulier pour tous les problèmes liés à la limite semi-classique de la mécanique quantique, cette suite (h_k) est donnée naturellement par l'énoncé du problème étudié.

2. Bien que nécessitant l'existence d'une suite (h_k) adaptée au problème, les mesures semi-classiques sont d'une certaine manière plus précises que les mesures microlocales qui vivent sur le quotient, $S^*\Omega$, de l'espace $T^*\Omega$.
3. Si l'espace $\mathcal{H}$ est de dimension finie, alors la nullité de la mesure de défaut microlocale associée à une suite (u_k) convergeant faiblement vers u est équivalente à la convergence forte sur tout compact de Ω de la suite (u_k). Si l'espace $\mathcal{H}$ est de dimension infinie, alors cette nullité est équivalente à la convergence forte pour tout $v \in \mathcal{H}$ de $(u_k, v)_{\mathcal{H}}$ sur tout compact de Ω, ce qui correspond par exemple si $\mathcal{H} = L^2(\mathbf{R}^{d'}_y)$ à des résultats de compacité pour des moyennes en y d'une suite de fonctions $u_k \in L^2(\mathbf{R}^d_x \times \mathbf{R}^{d'}_y)$. On pourra consulter P. Gérard [17] et P. Gérard-F. Golse-B. Wennberg [20] pour des applications de cette remarque.

Démontrons le théorème 1 dans le cas le plus simple où $\mathcal{H} = \mathbf{C}$. La démonstration dans le cas général, ainsi que celle du théorème 2, est essentiellement la même. Le point crucial est le résultat suivant :

LEMME 3 (Inégalité de Gårding).— *Pour tout opérateur $A \in \Psi^0_{\text{comp}}(\Omega)$ de symbole principal, $a = \sigma_0(A)$ positif, et toute fonction $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que $\varphi(x)\varphi(y) = 1$ sur le support du noyau distribution de A il existe $C > 0$ tel que pour tout $u \in L^2(\Omega)$*

$$|\mathbf{Im}\,(A(u), u)| \leq C\|\varphi u\|^2_{H^{-1/2}(\Omega)} \tag{7}$$

$$\mathbf{Re}\,(A(u), u) \geq -C\|\varphi u\|^2_{H^{-1/2}(\Omega)}. \tag{8}$$

D'après le calcul symbolique (3.iii), puisque a est réel, $A - A^* \in \Psi^{-1}_{\text{comp}}(\Omega)$, ce qui implique la relation (7). Nous allons démontrer une version affaiblie de (8) suffisante pour notre propos : si la suite (u_k) converge faiblement vers 0 dans $L^2(\Omega)$ alors

$$\liminf_{k\to+\infty} \mathbf{Re}\,(A(u_k), u_k) \geq 0. \tag{8'}$$

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ comme dans l'énoncé. On fixe $\varepsilon > 0$ et on note $b = \varphi\sqrt{\varepsilon + a} = \varphi\varepsilon^{1/2} + b'$ avec $b' \in S^0_{\text{comp}}(\Omega)$. Le calcul symbolique montre que $b(x, D_x)b(x, D_x)^* - |\varphi|^2(\varepsilon \mathrm{Id} + A) \in \Psi^{-1}_{\text{comp}}(\Omega)$ ce qui implique (si $\Psi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\Psi\varphi = \varphi$)

$$\varepsilon\|\varphi u_k\|^2_{L^2} + \mathbf{Re}\,(A(u_k), u_k) \geq -C\|\Psi u_k\|^2_{H^{-1/2}(\Omega)}. \tag{9}$$

Le terme de droite converge vers 0, donc par passage à la limite on obtient

$$\forall \varepsilon > 0,\ \liminf_{k\to+\infty} \mathbf{Re}\,(A(u_k), u_k) \geq -\varepsilon \limsup_{k\to+\infty} \|\varphi u_k\|^2_{L^2},$$

d'où la relation (8').

On peut donc pour tout $a \in C_0^\infty(S^*\Omega)$ extraire une sous-suite u_{k_n} telle que, si $A \in \Psi^0_{\text{comp}}(\Omega)$ vérifie $\sigma_0(A) = a$, la suite (Au_k, u_k) a une limite quand $k \to +\infty$ (qui ne dépend que de a). Par extraction diagonale on peut, puisque l'espace $C_0^\infty(S^*\Omega)$ est séparable, supposer que la sous-suite est la même pour tout a dans un ensemble dense dénombrable dans $C_0^\infty(S^*\Omega)$. Les relations (7) et (8') montrent que cette limite est une fonctionnelle positive définie sur un sous espace dense de $C_0^\infty(S^*\Omega)$ bornée pour la topologie de $C_0(S^*\Omega)$, donc se prolonge de manière unique en une mesure sur $S^*\Omega$ qui vérifie (5).

Calculons les mesures de défaut micro-locales obtenues pour les deux exemples de l'introduction :

1. Concentration : $u_k(x) = k^d \varphi(-k(x-x_0))$, alors $\mu = \delta_{x_0} \otimes \int_{\lambda>0} |\widehat{\varphi}(\lambda\xi)|^2 \lambda^{d-1} \frac{d\lambda}{2\pi^d}$.
2. Oscillation : $u_k = \varphi(x) e^{ikx\cdot\xi_0}$ avec $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$, $\mu = |\varphi(x)|^2 dx \otimes \delta_{\xi = \frac{\xi_0}{|\xi_0|}}$.

1.3. Quelques propriétés des mesures. Le résultat suivant donne un lien entre les mesures micro-locales et semi-classiques :

PROPOSITION 4. — *On suppose que la suite (u_k) bornée sur $L^2(\mathbf{R}^d)$ est pure de mesure semi-classique ν et vérifie les estimations suivantes :*

$$\limsup_{k\to+\infty} \int_{|x|\geq R} |u_k(x)|^2 dx = C(R) \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad ((u_k) \text{ est compacte à l'infini}) \tag{10}$$

$$\limsup_{k\to+\infty} \int_{|\xi|\geq R/h_k} |\widehat{u}_k(\xi)|^2 dx = D(R) \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad ((u_k) \text{ est } (h_k)\text{-oscillante}) \tag{11}$$

(la première estimation dit que l'énergie de la suite ne part pas à l'infini et la deuxième que les fréquences caractéristiques de chaque terme de la suite (u_k) sont d'ordre au plus h_k^{-1}.)

On a alors $\|u_k\|^2 \to \nu(T^*\mathbf{R}^d)$ et si $\nu\{\xi = 0\} = 0$ (c'est-à-dire si la suite (h_k) ne tend pas trop vite vers 0) alors la suite (u_k) converge faiblement vers 0 et a pour mesure de défaut microlocale la mesure μ donnée par

$$\langle \mu, a \rangle = \int a(x, \frac{\xi}{|\xi|}) d\nu(x,\xi).$$

Remarque : Ce résultat semble indiquer que les mesures semi-classiques sont plus précises que les mesures micro-locales, néanmoins comme le montre P. Gérard [19], il n'existe pas toujours une suite d'échelles (h_k) telle qu'on ait (11) et $M_{\text{sc}}(u_k)\{\xi = 0\} = 0$. Il suffit en effet de prendre la suite (u_k) donnée par $\widehat{u_k}(\xi) = \frac{1}{\log(k)^{1/2}}(1 + |\xi|^2)^{-d/4}\widehat{\psi}(\xi/k)$ avec $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ vérifiant $\int \psi = 1$. On peut alors montrer que

$$\|f_k\|_{L^2} \to (2\pi)^{-d} |S^{d-1}| \Big| \int \psi \Big|^2$$

et $\forall\ 0 < a < b < +\infty$

$$\int_{a \le h_k \le b} |\widehat{f}_k(\xi)|^2 d\xi \le \frac{C}{\log k} \int_{a \le h_k \le b} \frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^{d/2}} \le \frac{C'}{\log k} \log(b/a).$$

Toute mesure semi-classique associée à la suite (u_k) est donc supportée par l'ensemble $\{\xi = 0\}$ alors que la mesure de défaut de (u_k) est $\mu_0 = |\int \psi|^2 \delta_{x=0} \otimes d\sigma(\xi)$ ($d\sigma(\xi)$ est la mesure de Lebesgue sur la sphère S^{d-1}). On pourrait plus généralement montrer qu'on peut obtenir ainsi comme mesure de défaut microlocale une mesure arbitraire.

Le comportement des mesures par changement de variables est décrit par le résultat suivant :

PROPOSITION 5. — *Soient θ un difféomorphisme C^1 de Ω dans lui-même et $\Theta = (\theta,\ {}^t\theta'^{-1})$ la transformation canonique associée sur $T^*\Omega$. Si la suite u_k bornée dans L^2_{loc} est pure de mesure de défaut microlocale μ (respectivement de mesure semi-classique ν) alors il en est de même de la suite $v_k = u_k \circ \theta$ et*

$$M(v_k) = |\det \theta'|^{-1} \Theta^{-1}(M(u_k)).$$

Remarque : Ce résultat est très simple à démontrer si θ est de classe C^∞ (c'est alors une conséquence de (1) ou (4)) ou dans le cas des mesures semi-classiques; il est beaucoup plus difficile à obtenir pour les mesures micro-locales (voir Tartar [41]). Il permet de définir des mesures micro-locales ou semi-classiques sur une variété.

Les théorèmes de régularité elliptique micro-locale se traduisent aussi en termes de mesures : on considère $P = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) \partial_x^\alpha$; $a_\alpha \in C^\infty(\Omega)$ un opérateur différentiel et $p = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x)(i\xi)^\alpha$ son symbole principal.

PROPOSITION 6 (régularité elliptique). — *Soient (h_k) une suite d'échelles et (u_k) une suite bornée dans $L^2_{\text{loc}}(\Omega)$, pure, de mesure de défaut microlocale μ (respectivement de mesure semi-classique ν). Si $P(u_k)$ est compacte dans $H^{-m}_{\text{loc}}(\Omega)$ (respectivement si $h_k^m P(u_k)$ converge fortement vers 0 dans L^2_{loc}) alors on a*

$$p\mu = 0 \quad (\textit{respectivement } p\nu = 0).$$

Enfin on a un résultat d'orthogonalité :

PROPOSITION 7 (orthogonalité). — *Soient (u_k) et (v_k) deux suites bornées dans $L^2(\Omega; \mathbf{C})$, pures, convergeant faiblement vers u et v respectivement, de mesures micro-locales μ_1 et μ_2. Si les mesures μ_1 et μ_2 sont mutuellement singulières ($\mu_1 \perp \mu_2$) alors $(u_k, v_k)_{\mathbf{C}}$ converge vers $(u, v)_{\mathbf{C}}$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Soient (h_k) une suite d'échelles, (u_k) et (v_k) deux suites bornées dans $L^2(\Omega; \mathbf{C})$, pures, de mesures semi-classiques ν_1 et ν_2. Si les mesures ν_1 et ν_2 sont mutuellement singulières ($\nu_1 \perp \nu_2$) alors la suite $(u_k + v_k)$ est pure, de mesure semi-classique

$$M_{\text{sc}}(u_k + v_k) = \nu_1 + \nu_2.$$

2. MESURES ET HOMOGÉNÉISATION

Les H-mesures ont été définies à l'origine par L.Tartar [41,42] pour étudier des problèmes d'homogénéisation délicats. Nous allons ici présenter d'autres résultats d'homogénéisation où les mesures semi-classiques permettent de décrire l'évolution d'un système gouverné par une équation aux dérivées partielles.

2.1. On s'intéresse dans cette partie au comportement quand $\varepsilon \to 0$ des solutions d'équations du type

$$\left(-i\varepsilon\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\varepsilon^2}{2}\Delta + V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\Psi^\varepsilon(t,x) = 0, \text{ dans } \mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^d_x, \tag{1}$$

$$\Psi^\varepsilon(t=0,x) = \Psi^\varepsilon_0(x), \tag{2}$$

où V est un potentiel réel, $2\pi\mathbf{Z}^d$ périodique. Ce système modélise le comportement d'électrons se déplaçant dans un réseau cristallin.

L'éclatement $(x, \frac{x}{\varepsilon}) \mapsto (x,y)$ transforme l'opérateur $\left(-\frac{\varepsilon^2}{2}\Delta + V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)$ en

$$\frac{1}{2}(\varepsilon D_x + D_y)^2 + V(y) = A(\varepsilon D_x, D_y, y),$$

avec $A(\xi) = \frac{1}{2}(\xi + D_y)^2 + V(y)$. On suppose $V \in C^\infty$ (d'après [32], L^∞ est suffisant). L'opérateur $A(\xi)$ est pour tout ξ elliptique autoadjoint sur $\mathbf{T}^d$ et il existe donc une base Hilbertienne de $L^2(\mathbf{T}^d)$, $\varphi_j(y,\xi)$ (les fonctions de Bloch) formée de vecteurs propres de $A(\xi)$ associés aux valeurs propres :

$$\lambda_1(\xi) \leq \lambda_2(\xi) \leq \cdots \leq \lambda_j(\xi) \leq \cdots$$

LEMME 8 (Wilcox [44], voir aussi C. Gérard [13]).— *Les fonctions $\lambda_j(\xi)$ sont Lipschitziennes et analytiques en dehors d'un fermé de mesure nulle, F_j, et les fonctions $\varphi_j(y,\xi)$ sont mesurables, analytiques pour $\xi \notin F_j$.*

On suppose que la donnée initiale Ψ^ε est ε-oscillante, pure de mesure semi-classique, μ_0, ne chargeant pas l'ensemble $\mathbf{R}^d_x \times \cup_j F_j$ (qui est de mesure de Lebesgue nulle). On travaille avec la suite d'échelles (ε). On définit, comme dans V. Buslaev [9] et C. Gérard-A. Martinez-J. Sjöstrand [14], $u^\varepsilon(t,x,y)$ solution de

$$\left(\varepsilon D_t + \frac{1}{2}(\varepsilon D_x + D_y)^2 + V(y)\right)u^\varepsilon = 0 \text{ dans } \mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^d_x \times \mathbf{T}^d_y \tag{3}$$

$$u^\varepsilon(t=0,x,y) = u^\varepsilon_0(x,y), \tag{4}$$

où on a construit une donnée initiale $u^\varepsilon_0(x,y)$ de telle façon que d'une part

$$\Psi^\varepsilon_0(x) = u^\varepsilon_0(x, \frac{x}{\varepsilon})$$

et que d'autre part il existe B une zone de Brillouin, c'est-à-dire une cellule fondamentale du réseau $\mathbf{Z}^d$ (le dual de $2\pi\mathbf{Z}^d$) telle que pour tout $k \in \mathbf{Z}^d$ la mesure semi-classique de

$$\widehat{u_0^\varepsilon}(x,k) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbf{T}^d} e^{-iy\cdot k} u_0^\varepsilon(x,y)dy$$

est supportée dans $\mathbf{R}_x^d \times B_\xi$ et ne charge pas son bord, $\mathbf{R}_x^d \times \partial B_\xi$. On retrouve alors

$$\Psi_0^\varepsilon(x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}^d} e^{ikx/\varepsilon}\widehat{u_0^\varepsilon}(x,k).$$

Les mesures semi-classiques des termes de droite sont donc de la forme

$$M_{\mathrm{sc}}(e^{ikx/\varepsilon}\widehat{u_0^\varepsilon}(\cdot,k))(x,\xi) = M_{\mathrm{sc}}(\widehat{u_0^\varepsilon}(\cdot,k))(x,\xi-k)$$

et sont donc deux à deux orthogonales puisque de support disjoints. Pour calculer la mesure semi-classique de Ψ_0^ε, il suffit donc d'après la proposition 7 de calculer celle de chacun des termes de droite. On note $\mathcal{M}_0(x,\xi)$ la mesure semi-classique de la suite $u_0^\varepsilon(x,y) \in L^2(\mathbf{R}_x^d;\mathcal{H})$ avec $\mathcal{H} = L^2(\mathbf{T}^d)$.

THÉORÈME 9 (P. Gérard [16]) .— *La solution $\Psi^\varepsilon(t,.)$ de l'équation (1) admet une mesure semi-classique, $\mu(t)$ continue en temps vérifiant*

$$\mu(t) = \sum_{1\leq j}\mu_j(t) \tag{5}$$

$$\partial_t\mu_j + \lambda_j'(\xi)\cdot\nabla_x\mu_j = 0 \tag{6}$$

$$\mu_j(t=0,x,\xi) = \sum_{k\in\mathbf{Z}^d}\left|\int \varphi_j(y,\xi)e^{iky}\frac{dy}{(2\pi)^d}\right|^2 \langle\mathcal{M}_0(x,\xi-k)\varphi_j(\xi),\varphi_j(\xi)\rangle \tag{7}$$

et la mesure semi-classique de Ψ est

$$\mu = \sum_{1\leq j}\mu_j(t)dt\otimes\delta_{\tau=-\lambda_j(\xi)}. \tag{8}$$

Remarques :

1) Un résultat analogue a été démontré par une méthode très proche par P. Markowich-N. Mauser-F. Poupaud [32] qui s'inspirent pour ce faire de l'approche de P.L. Lions-T. Paul [31] pour la définition des mesures semi-classiques (les mesures de Wigner) et développent en particulier une théorie des mesures semi-classiques adaptée aux problèmes périodiques (les séries de Wigner).
2) L'équation (6) montre d'une part que la mesure μ est complètement déterminée par la mesure initiale et d'autre part que les contributions de chaque Hamiltonien $H_j = \lambda_j(\xi)(\cdot,\varphi_j)\varphi_j$ évoluent sans interaction.
3) P. Gérard [19] a récemment résolu le même problème dans le cas beaucoup plus difficile où on considère un potentiel du type $V(\frac{x}{\varepsilon}) + U(x)$, mais sous l'hypothèse restrictive (génériquement vérifiée en dimension $d = 1$) que les valeurs propres

$\lambda_j(\xi)$ sont simples (ou de multiplicité constante).

2.2. Schéma de la démonstration du théorème. On note

$$u_j^\varepsilon(x) = \int_{\mathbf{T}^d} \overline{\varphi}_j(\varepsilon D_x, y) u^\varepsilon(x,y) dy.$$

D'après la propriété de base Hilbertienne de la suite $\varphi_j(\xi)(\cdot)$, on retrouve

$$u^\varepsilon(x,y) = \sum_j \varphi_j(\varepsilon D_x, y)\left(u_j^\varepsilon(x)\right).$$

Pour tout j la suite u_j^ε vérifie donc

$$(\varepsilon D_t + \lambda_j(\varepsilon D_x))\, u_j^\varepsilon = 0.$$

PROPOSITION 10.— *On suppose que la fonction $\lambda(\xi)$ est bornée et de classe C^1 en dehors d'un fermé F. On note v^ε la suite des solutions du système*

$$(\varepsilon D_t + \lambda(\varepsilon D_x))\, v^\varepsilon = 0, \ v^\varepsilon(t=0,x) = v_0^\varepsilon. \tag{9}$$

Si la suite v_0^ε est ε-oscillante compacte à l'infini, pure et si $M_{\mathrm{sc}}(v_0^\varepsilon)$ ne charge pas $\mathbf{R}^d \times F$ alors pour tout t il en est de même pour la suite $v^\varepsilon(t)$ et on a

$$\partial_t M_{\mathrm{sc}}(v^\varepsilon) + \nabla_\xi \lambda(\xi) \cdot \nabla_x M_{\mathrm{sc}}(v^\varepsilon) = 0, \tag{10}$$

$$\textit{ie. } M_{\mathrm{sc}}(v^\varepsilon)(t,x,\xi) = M_{\mathrm{sc}}(v_0^\varepsilon)(x - t\nabla_\xi \lambda(\xi), \xi).$$

Enfin la suite v^ε a pour mesure semi-classique la mesure $M_{\mathrm{sc}}(v^\varepsilon) dt \otimes \delta_{\tau = -\lambda(\xi)}$.

La suite v^ε est ε-oscillante, compacte à l'infini. D'après l'équation (9), pour tout $a \in C_0^\infty(\mathbf{R}_s^d \times F^c)$ la suite $(a(x,\varepsilon D_x)v^\varepsilon, v^\varepsilon)(t)$ est équicontinue sur $\mathbf{R}_t$. Le théorème d'Ascoli permet donc d'extraire une sous-suite, (ε_k), telle que pour tout t la suite $v^{\varepsilon_k}(t)$ est pure. Si la fonction λ était de classe C^1 partout, l'équation (10) serait conséquence du calcul symbolique :

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{i\varepsilon}\left([\lambda(\varepsilon D_x), a(x,\varepsilon D_x)]v^\varepsilon, v^\varepsilon\right) &= \tfrac{1}{i\varepsilon}\left(a(x,\varepsilon D_x)\varepsilon D_t v^\varepsilon, v^\varepsilon\right) + \tfrac{1}{i\varepsilon}\left(a(x,\varepsilon D_x)v^\varepsilon, -\varepsilon D_t v^\varepsilon\right) \\ &= \tfrac{1}{i} D_t \left(a(x,\varepsilon D_x)v^\varepsilon, v^\varepsilon\right);\end{aligned}$$

le terme de droite est égal à $-\partial_t \langle \mu, a\rangle + o(\varepsilon)$ et le terme de gauche à

$$((\nabla_x a)(x,\varepsilon D_x) \cdot \nabla_\xi \lambda(\varepsilon D_x) v^\varepsilon, v^\varepsilon) + o(\varepsilon)$$

et converge donc vers $\langle \mu, (\nabla_x a)(x,\xi)\nabla_\xi \lambda(\xi)\rangle$. On obtient donc que toute mesure semi-classique de la suite v^ε vérifie (10), donc est égale à l'unique solution de cette équation. Pour conclure dans le cas où λ est moins régulière, on utilise que l'équation (10) est vérifiée en dehors de F et que la donnée initiale ne charge pas F, donc pour tout t la contribution de $\mathbf{R}_x^d \times F^c$ donne d'après (10) toute l'énergie initiale, la conservation de l'énergie implique donc que la mesure $\mu(t)$ ne charge pas non plus F ce qui démontre et donne un sens à (10), sur $\mathbf{R}_x^d \times \mathbf{R}_\xi^d$. On déduit de la proposition 10, puisque $M_{\rm sc}(u_j^\varepsilon\ |_{t=0}) = \langle \mathcal{M}_0(x,\xi)\varphi_j(\xi)(y), \varphi_j(\xi)(y')\rangle$ que la suite $u_j^\varepsilon(t)$ est pure de mesure semi-classique solution de l'équation

$$\partial_t M_{\rm sc}(u_j^\varepsilon) + \nabla_\xi \lambda(\xi) \cdot \nabla_x M_{\rm sc}(u_j^\varepsilon) = 0$$

et la mesure semi-classique de u_j^ε est $M_{\rm sc}(u_j^\varepsilon) dt \otimes \delta_{\tau=-\lambda_j(\xi)}$. On peut alors en utilisant encore des arguments d'orthogonalité obtenir la relation (7).

Remarque : Si on considère la mesure $\mu_j'(x,t,\xi) = \sum_{k\in\mathbf{Z}^d} \mu_j(x,t,\xi+k)$ comme dans [32] (ce qui revient à considérer une série de Wigner), alors la relation (7) se simplifie encore puisqu'en utilisant que $\varphi_j(\xi+k,y) = e^{iky}\varphi_j(\xi,y)$, $\lambda_j(\xi+k) = \lambda_j(\xi)$, on obtient que les mesures μ_j' sont les solutions de l'équation (6) associées aux données initiales

$$\mu_{0,j}' = \sum_{l\in\mathbf{Z}} \langle \mathcal{M}_0(x,\xi+l)\varphi_j(\xi)(y), \varphi_j(\xi)(y')\rangle.$$

3. MESURES ET ÉQUATIONS D'ONDES

Dans cette partie, on s'intéresse au comportement en grand temps des solutions de l'équation des ondes. Les mesures de défaut micro-locales seront utilisées ici pour obtenir des estimations d'énergie. On montrera en particulier comment elles permettent de démontrer des résultats de contrôlabilité exacte, d'observation et de stabilisation. L'idée d'utiliser les mesures de défaut micro-locales dans ce cadre est due à G. Lebeau [27]. On pourra, pour d'autres utilisations des H-mesures dans le cadre de l'homogénéisation de l'équation des ondes, où les mesures de défaut microlocales interviennent pour décrire la concentration de l'énergie dans le passage à la limite, consulter par exemple L. Tartar [41,42], S. Brahim-Otsmane-G. Francfort-F. Murat [6] et G. Francfort-F. Murat [12]. On pourra aussi consulter pour des développements de la notion de mesure de défaut (mesures à deux échelles, mesures deux-microlocales) et leurs applications à l'étude d'équations d'évolution, les travaux récents de G. Allaire [1], C. Fermanian [11], L. Miller [36] et F. Nier [38].

3.1. Notations.

Soient $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ un ouvert borné connexe de classe C^∞, $a \in C^0(\overline{\Omega})$, une fonction positive. On note $A = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id} \\ \Delta & -2a \end{pmatrix}$, l'opérateur non borné sur $H = H_0^1(\Omega) \oplus L^2(\Omega)$, avec pour domaine $D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \oplus H_0^1(\Omega)$. On fixe $\Theta \in C_0^0(\mathbf{R}_+^* \times \partial\Omega)$. On note

$$E(u)(t) = \frac{1}{2}\|u(t)\|^2_{\mathcal{H}},$$

$$F(u)=\int_{\mathbf{R}}\int_{G}\Theta^2\left|\frac{\partial u}{\partial n}(y,s)\right|^2 d\sigma ds$$

et on vérifie facilement que pour tout $u\in\mathcal{H}$, si on note $u(t)=(u_1,u_2)(t)=e^{tA}u$ $(t\geq 0)$ alors

$$E(u)(t)=E(u)(0)-\int_0^t\int_\Omega a(x)\left|u_2(s,x)\right|^2 dxds.$$

On note $M=\mathbf{R}_t\times\Omega$, $T_b^*M=T^*M\setminus\{0\}\cup T^*\partial M\setminus\{0\}$ et $S_b^*M=T_b^*M/\mathbf{R}^+$, le fibré cotangent en sphère jusqu'au bord de M. On a une application naturelle de restriction, $\pi : T^*\mathbf{R}^{d+1}\mid_{\overline{M}}\longrightarrow T_b^*M$ et on munit ce dernier espace de la topologie induite par cette application. On note $P=\Delta-\partial_t^2$, $p=\tau^2-|\eta|^2$ son symbole principal $H_p=2\tau\partial_t-2\,\eta\cdot\partial_y$, son champ Hamiltonien et Σ_b la projection sur T_b^*M de la variété caractéristique, $\mathcal{C}$, d'équation $p=0$. Enfin on note, pour $x\in\partial M$, $n(x)$ la normale extérieure au bord au point x.

DÉFINITION 11.— *On dit que $\zeta\in T^*\partial M\setminus\{0\}$ est*

1) *Hyperbolique si $\sharp\{\pi^{-1}(\zeta)\cap\{p=0\}\}=2$ (et on note $\zeta\in\mathcal{H}$),*
2) *Glancing si $\sharp\{\pi^{-1}(\zeta)\cap\{p=0\}\}=1$ (et on note $\zeta\in\mathcal{G}$),*
3) *Elliptique sinon, c'est-à-dire si $\zeta\notin\Sigma_b$ (et on note $\zeta\in\mathcal{E}$).*

On peut identifier $\mathcal{G}$ avec $\pi^{-1}(\mathcal{G})$, donc considérer que $\mathcal{G}$ est inclus dans $T^*\mathbf{R}^{d+1}$. Dans toute la suite, quand on étudiera un voisinage d'un point du bord, on se placera dans un système de coordonnées géodésiques, $\varrho=(x_n,\xi_n,x',\xi')$, c'est-à-dire que dans ce système M est donné par l'équation $x_n=0$ et l'opérateur $\partial_t^2-\Delta$ s'écrit $-\partial_{x_n}^2-R(x_n,x',D_{x'})$. On note $r(x_n,x',\xi')$ le symbole principal de l'opérateur R et

$$r_0(x',\xi')=r\mid_{x_n=0}.$$

Les points glancing sont les points du bord (x_n,ξ_n,x',ξ') qui vérifient $p=H_p(x_n)=0$, c'est-à-dire $x_n=\xi_n=r(0,x',\xi')=0$.

DÉFINITION 12.—

i) *On dit que le point $\zeta\in\mathcal{G}$ est non strictement glissant (et on note $\zeta\in\mathcal{G}_{nsg}$) si*

$$\partial_{x_n}(r)(\zeta)\geq 0.$$

ii) *On dit que le point $\zeta\in\mathcal{G}$ est strictement glissant (et on note $\zeta\in\mathcal{G}_{sg}$) si*

$$\partial_{x_n}(r)(\zeta)<0.$$

iii) *On dit que le point $\zeta\in\mathcal{G}$ est diffractif (et on note $\zeta\in\mathcal{G}_d$) si*

$$\partial_{x_n}(r)(\zeta)>0.$$

iv) *On dit que le point $\zeta\in\mathcal{G}$ est glissant d'ordre k (et on note $\zeta\in\mathcal{G}^k$) si*

$$H_{r_0}^j\left(\partial_{x_n}(r)\mid_{x_n=0}(\zeta)\right)=0,\ j<k-2\quad et\quad H_{r_0}^{k-2}\left(\partial_{x_n}(r)\mid_{x_n=0}(\zeta)\right)\neq 0.$$

On supposera par la suite que $\mathcal{G}=\cup_{k\in\mathbf{N}^*}\mathcal{G}^k$ (on dit alors que Ω n'a pas de *contact d'ordre infini* avec ses tangentes).

DÉFINITION 13. — *On appelle bicaractéristique généralisée toute application continue, γ, de $\mathbf{R}$ dans T_b^*M telle qu'en dehors d'un ensemble de points isolés, I, $\gamma(s) \in T^*M \cup \mathcal{G}$, si $s \in I$, on a $\gamma(s) \in \mathcal{H}$ et si $s \notin I$, γ est différentiable (comme application à valeurs dans $T^*\mathbf{R}^{d+1}$) avec*

1) $\frac{d\gamma}{ds}(s) = H_p(\gamma(s))$ *si* $\gamma(s) \in T^*M \cup \mathcal{G}_d^f$,

2) $\frac{d\gamma}{ds}(s) = H_p(\gamma(s)) - \partial_{x_n}(r)\partial_{\xi_n}$ *si* $\gamma(s) \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_d^f$.

Il est classique que les définitions que nous avons exprimées en coordonnées sont intrinsèques et que si Ω n'a pas de contact d'ordre infini avec ses tangentes, par tout point ϱ_0 de $T_b^*M \cap \Sigma_b$ il passe une et une seule bicaractéristique généralisée telle que $\gamma(0) = \varrho_0$. On la notera $\gamma(s, \varrho_0)$.

3.2. Mesures pour l'équation des ondes. On considère $(u_k)_{k\in\mathbf{N}} \in H$ une suite bornée d'éléments de H qu'on identifie avec $(u_k)(t) = (e^{tA}u_k)$. On suppose que la suite (u_k) converge faiblement vers 0 et on note $\underline{u}_k \in H^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}_t^+))$ le prolongement par 0 de $u_{k,1}$ à l'extérieur de l'ouvert M. On peut donc, quitte à extraire une sous-suite lui associer une mesure positive sur $S^*\mathbf{R}^{d+1}$, μ, vérifiant pour tout $A \in \Psi^2_{\text{comp}}(\mathbf{R}^{d+1})$,

$$\lim_{k\to+\infty}(A(\underline{u}_k), \underline{u}_k) = \langle \mu, \sigma_2(A)(z,\zeta)\rangle,$$

où on a identifié $S^*\mathbf{R}^{d+1}$ avec $T^*\mathbf{R}^{d+1} \cap \{|\zeta|^2 = 2\}$ et les fonctions homogènes d'ordre m avec leurs restrictions à cette sphère, la métrique choisie sur T^*M étant celle qui est naturellement associée à la métrique $dt^2 + g$ sur M (g est la métrique associée au Laplacien qu'on considère, ici $g = dx^2$). Dans la suite on identifiera donc les points de $\mathcal{C} \cap \{\tau^2 = 1\}$ avec leur classe dans $S^*\mathbf{R}^{d+1}$ et on identifiera aussi les points de $\Sigma_b \cap T^*\partial M \cap \{\tau^2 = 1\}$ avec leur classe dans $S^*\partial M$. On remarquera que cette dernière identification n'est pas celle qui est naturellement associée à la métrique induite sur ∂M.

Remarque : Compte tenu de cette identification, le long d'une bicaractéristique généralisée on a $\frac{dt}{ds} = 2\tau = \pm 2$.

DÉFINITION 14.— *On note ϕ l'application de $\mathcal{C}$ dans lui-même définie par*

$$\phi(s)(\varrho) = \gamma(s-0, \pi(\varrho)) \in T^*\mathbf{R}^{d+1}$$

($\gamma(s-0) = \gamma(s)$ si $\gamma(s) \notin \mathcal{H}$ et $\gamma(s-0) \in T^*\mathbf{R}^d$ est la limite de $\gamma(t)$ quand $t \to s$ par valeurs négatives.) Modulo l'identification précédente, $\phi(s)$ définit aussi une application de $\mathcal{C} \cap S^*\mathbf{R}^{d+1}\,|_{\overline{M}}$ dans lui-même qu'on note $\Phi(s)$.

Il est standard que la suite $(\frac{\partial}{\partial n}u_{k,1}\,|_{\partial M})$ est bornée dans $L^2_{\text{loc}}(\partial M)$. Quitte à extraire encore une sous-suite on peut, d'après la proposition 5 supposer que cette suite a une mesure de défaut micro-locale, ν, sur $S^*\partial M$.

THÉORÈME 15.— *Les mesures μ et ν vérifient les propriétés suivantes :*

i) Le support de la mesure μ est inclus dans l'intersection de la variété caractéristique de l'équation des ondes, $\mathcal{C}$, d'équation $\tau^2 = |\xi|^2$ avec $S^*\mathbf{R}^{d+1} |_{\overline{M}}$ qu'on note encore $\mathcal{C}$.

ii) Pour tout point $\varrho \in \mathcal{H} \cap \mathcal{G}$ on note $\varrho^+ = (x, \xi^+)$ et $\varrho^- = (x, \xi^-)$ les deux points éventuellement confondus de $\{\pi^{-1}(\varrho)\}$ et $n(x(\varrho))$ la normale extérieure à ∂M au point $x(\varrho)$. Les mesures μ et ν vérifient (au sens des distributions) l'équation

$$H_p(\mu) + 4a(x)\tau\mu = \int_{\rho\in\mathcal{H}\cup\mathcal{G}} \frac{\delta(\xi - \xi_+(\rho)) - \delta(\xi - \xi_-(\rho))}{< \xi_+ - \xi_-, n(x(\rho)) >} \nu(d\rho), \tag{1}$$

c'est-à-dire que pour toute fonction b de classe C^1, homogène d'ordre 1 sur $T^*\mathbf{R}^{d+1}$,

$$\langle \mu, 4a\tau b - H_p(b)\rangle = \int_{\mathcal{H}\cup\mathcal{G}} \frac{b(x,\xi^+) - b(x,\xi^+)}{\langle \xi^+ - \xi^-, n(x)\rangle} d\nu(\rho). \tag{2}$$

(Compte tenu de notre choix de métrique sur $T^*\mathbf{R}^{d+1}$, l'action du champ H_p commute à la restriction sur la sphère $|\xi|^2 = 2$.)

iii) La mesure μ ne charge pas l'ensemble des points de $T^*\mathbf{R}^{d+1} \cap \partial M$ dont la projection sur $T^*\partial M$ est un point hyperbolique et la mesure ν ne charge pas l'ensemble des points non strictement glissants de $T^*\partial M$.

iv) Compte tenu de i), la transformation $\Phi(s)$ est, pour tout s, μ presque partout définie et vérifie d'après iii) $\Phi(s) \circ \Phi(-s) = \mathrm{Id}$, μ presque partout. Pour tout $s \in \mathbf{R}$ on a $\Phi(s)^*(\mu) = \exp(-\int_0^s 4\tau a(\gamma(s, \pi(\varrho))))\mu$. En d'autres termes, pour tout borélien $\omega \subset Z$,

$$\mu(\Phi(s)(\omega)) = \int_{\omega\cap\mathcal{C}} \exp(-\int_0^s 4\tau a(\gamma(s, *pi(\varrho))))d\mu(\varrho). \tag{3}$$

Les parties i) et ii) de ce résultat ont été démontrées dans un cadre très proche par P. Gérard et E. Leichtnam [21] pour étudier la répartition asymptotique des fonctions propres du Laplacien avec des conditions au bord de Dirichlet, la partie iii) est due à P. Gérard et l'auteur [7] et la partie iv) a été démontrée par G. Lebeau [27] en utilisant le théorème de propagation des singularités de R. Melrose et J. Sjöstrand [33].

Pour démontrer le point i), il suffit de remarquer que la suite $\underline{u}_k$ vérifie l'équation

$$\left(\partial_t^2 - \Delta + 2a(x)\partial_t\right)\underline{u}_k = \frac{\partial u_k}{\partial n} \otimes \delta_{\partial M} \in H^{-1/2-\varepsilon},\ \forall \varepsilon > 0$$

et d'utiliser le théorème de régularité elliptique. Le point ii) se démontre en étudiant le commutateur $[Q, P]$ où $Q \in \Psi^1_{\mathrm{comp}}(\Omega)$. La première partie du point iii) se démontre en utilisant que la mesure μ est solution d'une équation de transport $(H_p + 4a\tau)\mu = g$ où le second membre est, sur $\mathcal{H}$, une mesure. La deuxième partie du point iii) correspond à démontrer la relation :

(4) $$\langle \nu, 1_{r_0=0,\ \partial_{x_n} r|_{x_n=0} \geq 0} \rangle = 0.$$

Soit $\varrho_0 \in \mathcal{G}_{nsg}$, pour tout $q_1 = \xi_n q_0(x_n, x', \xi')$, homogène d'ordre 1 à support dans un voisinage de ϱ_0 on a

$$\langle \mu, -4a(x)\tau q_0 + \xi_n^2 \partial_n q_0 - \xi_n H'_r q_0 + \partial_{x_n} r q_0 \rangle = -\langle \nu, q_0 \rangle,$$

où on note $H'_r = \partial_{\xi'} r \partial_{x'} - \partial_{x'} r \partial_{\xi'}$. Comme $\partial_\tau r \mid_{x_n=0} \neq 0$, on peut compléter $r \mid_{x_n=0} = r_0$ en un système coordonnées (non symplectique) sur $S^*\partial M$, r_0, z et choisir dans la relation précédente $q_0^\varepsilon(x_n, x', \xi') = t(\frac{x_n}{\sqrt{\alpha}}, \frac{r_0}{\alpha}, z)\chi(\frac{\partial_{x_n} r}{\sqrt{\alpha}})$ avec χ de classe C^1 égale à 1 sur $[0, +\infty[$ et à 0 sur $]-\infty, 1/2[$. Par convergence dominée et en utilisant que sur le support de μ on a $\xi_n^2 = r$, on obtient

$$\langle \mu, \partial_{x_n} r 1_{x_n=0,\ r_0=0,\ \partial_{x_n} r|_{x_n=0} \geq 0} q_0 \rangle = -\langle \nu, 1_{r_0=0} q_0 \rangle.$$

Les deux termes sont de signes opposés donc tous les deux nuls, ce qui est exactement (4).

Nous donnons en appendice une démonstration élémentaire s'inspirant d'une idée de C. Bardos et T. Masrour [4] d'un résultat a priori plus faible que iv) mais qui est le point crucial de la démonstration de iv) et l'équivalent, en termes de mesures du théorème de propagation des singularités de R. Melrose et J. Sjöstrand [33] :

iv') *Si le point ϱ n'appartient pas au support de la mesure μ, alors l'image réciproque par π de la bicaractéristique issue de $\pi(\rho_0)$ ne rencontre pas non plus ce support.*

3.4. Stabilisation de l'équation des ondes. On suppose ici que $a \not\equiv 0$. L'énergie $E(u)(t)$ est donc décroissante. On s'intéresse à son taux de décroissance. D'après le théorème d'unicité pour les opérateurs elliptiques d'ordre 2, $\lambda \in \mathrm{sp}(A) \Rightarrow \mathbf{Re}\lambda < 0$, ce qui implique, puisque l'espace engendré par les fonctions propres est, d'après I. Gohberg-M. Krein [23], dense dans $\mathcal{H}$ que pour tout $u \in \mathcal{H}$, $\lim_{t\to+\infty} E(u,t) = 0$.

On note $D(x) = \sup\{\mathbf{Re}\lambda; \lambda \in \mathrm{sp}(A), |\lambda| \geq x\}$. Pour $\varrho_0 = (x_0, \xi_0) \in \Sigma_b$ on note $\gamma(s, \varrho_0)$ l'unique bicaractéristique issue du point ϱ_0 pour $s = 0$. Pour $t > 0$, on pose

(5) $$C(t) = \inf_{\varrho_0} \frac{1}{t} \int_0^t a(x(\gamma(s, \varrho_0)))ds.$$

On a $0 \leq C(t) \leq \|a\|_{L^\infty}$. On note $C(\infty)$ sa limite (qui existe) quand t tend vers l'infini.

THÉORÈME 16 (C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch [3]) .— *On a l'alternative suivante :*

1) Soit il existe $T > 0$ tel que toute bicaractéristique généralisée rencontre l'ensemble

$\{a(x) > 0\} \cap [0,T]$ *et alors il existe* $C, \alpha > 0$ *tels que pour tout* $u \in \mathcal{H}$,

$$E(u,t) \leq Ce^{-\alpha t}E(u,0).$$

2) Soit pour tout $T > 0$ *il existe une bicaractéristique généralisée ne rencontrant pas l'ensemble* $\{a(x) > 0\} \cap [0,T]$ *et alors pour tout* $t > 0$

$$\sup_{u\in\mathcal{H}\setminus\{0\}} \frac{E(u,t)}{E(u,0)} = 1.$$

De plus, (G. Lebeau [27]) $\liminf_{x\to+\infty} D(x) \geq C(\infty)$, $C(\infty) > 0$ *dans le cas 1) ce qui implique* $D(0) > 0$ *et la meilleure constante possible* α *dans 1) est donnée par*

$$\alpha_0 = 2\min\{-D(0), C(\infty)\}.$$

Enfin ce dernier résultat est optimal.

L'idée de la démonstration dans le cas 2) consiste à accumuler de l'énergie sur une bicaractéristique qui ne rencontre pas l'ensemble $\{a > 0\} \cap [0,T]$ γ. Pour cela si $\gamma \cap \{t = 0\} = (t = 0, x_{0,\tau_{0,\xi_0}})$, on construit une suite de données initiales dont la mesure de défaut microlocale est δ_{x_0,ξ_0} et le théorème 15, iv) montre que, pour la suite de solutions de l'équation des ondes associée, le support de la mesure de défaut microlocale est cette bicaractéristique donc que cette mesure est invariante par le flot $\Phi(s)$. Comme

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{t_0}^{t_1} E(s,u_k)ds = \langle \mu, 1_{t\in[t_0,t_1]}\rangle,$$

la suite (u_k) vérifie pour tout $0 < t < T$

$$\langle \delta_{x_0,\xi_0}, 1\rangle = \lim_{k\to+\infty} E(0,u_k) = \lim_{k\to+\infty} E(t,u_k).$$

Pour démontrer le cas 1), on procède par l'absurde : on fixe $\alpha < \alpha_0$ et on suppose que

$$E(u,t) \not\leq Ce^{-\alpha t}E(u,0).$$

On pourrait alors construire une suite (u_k) telle que $E(0,u_k) = 1$ et $E(t_k,u_k) > ke^{-\alpha t_k}$, $t_k \to +\infty$. Comme $\alpha < -D(0)$, la suite (u_k) convergerait faiblement vers 0, et comme $\alpha < C(\infty)$, on aurait, pour toute mesure de défaut microlocale associée à une suite extraite de (u_k),

$$\Phi(t)^*\mu \leq e^{-(\alpha_0-\varepsilon)t}\mu,$$

ce qui, d'après le théorème 15, donne une contradiction pour t grand et montre que la meilleure constante possible est au moins α_0. Pour montrer que c'est effectivement la meilleure, G. Lebeau construit des exemples explicites.

3.5. Observation et contrôle de l'équation des ondes. On suppose ici que $a \equiv 0$. L'énergie $E(u)$ est donc indépendante du temps. Soit $\Theta \in C^0_0(\partial\Omega\times]0,T[)$. Peut-on alors, pour $(v_0, v_1) \in L^2 \times H^{-1}$ trouver $g \in L^2(\partial\Omega \times \mathbf{R}_t)$ tel que la solution du système

$$(\partial_t^2 - \Delta)v = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbf{R}_t,$$
$$v \mid_{\partial\Omega \times \mathbf{R}_t} = \Theta g,$$
$$v(0) = v_0, \quad v'(0) = v_1,$$

vérifie $v \equiv 0$ pour $t > T$? En d'autres termes, peut-on en agissant uniquement sur une partie du bord et pendant un temps fini (le support de Θ) amener le système à l'équilibre?

Si la réponse à cette question est affirmative pour toutes les données $(v_0, v_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ on dit que Θ *contrôle exactement* le système.

DÉFINITION 17.— *On dit que* Θ contrôle géométriquement *le système si tout rayon bicaractéristique rencontre l'ensemble* $\Theta > 0$ *en un point hyperbolique ou strictement glissant.*

THÉORÈME 18 (C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch [3], complété par N. Burq et P. Gérard [7]).— *On a équivalence entre :*

i) La fonction Θ *contrôle exactement le système.*

ii) La fonction Θ *contrôle géométriquement le système.*

Remarques :

1) Le résultat original de C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch donnait des conditions suffisantes et des conditions nécessaires fortes, c'est l'utilisation des mesures de défaut micro-locales qui a permis à P. Gérard et l'auteur et de donner une condition nécessaire et suffisante.

2) Le résultat de C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch est également vrai pour essentiellement toutes les conditions au bord pour lesquelles le problème est bien posé. Il repose sur le théorème de propagation des singularités de R. Melrose et J. Sjöstrand [33]. Le problème analogue en termes de mesures (c'est-à-dire sans recours au théorème de propagation des singularités) est essentiellement ouvert, en particulier dans le cas où les conditions au bord ne vérifient plus les conditions de Lopatinski uniformes (cas de la condition de Neumann par exemple).

3) Le théorème 18 reste vrai pour un Laplacien à coefficients variables de classe C^2 et un ouvert Ω de classe C^3 (voir [3] pour le cas C^∞ et [8] pour le cas peu régulier).

Pour démontrer ce résultat on utilise d'abord un argument de dualité (la méthode H.U.M.) de J. L. Lions [28] qui permet de montrer que la contrôlabilité exacte est équivalente à l'inégalité d'observation suivante :

$$\exists C > 0;\ \forall u \in H, E(u) \leq C \int_{\mathbf{R}_t \times \partial\Omega} \Theta^2 \left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|^2 d\sigma dt = CF(u). \tag{5}$$

Pour démontrer cette inégalité on procède par l'absurde, ce qui permet de construire une suite (u_k) telle que $E(u_k) = 1$ et $F(u_k) \to 0$. La limite faible de la suite (u_k) est solution de $Pu = 0$, $\Theta \frac{\partial}{\partial n} u \mid_{\partial M} = 0$ et un argument d'unicité permet de montrer que $u = 0$. On peut donc associer deux mesures de défaut micro-locales aux suites (u_k) et $(\partial_n u_k \mid_{\partial M})$, μ et ν. Le support de la mesure μ est donc réunion de bicaractéristiques généralisées et au voisinage de tout point ϱ_0 de $T_b^* M \cap \{\Theta > 0\}$ on a $\nu = 0$ (car $F(u_k) \to 0$) donc $H_p\mu = 0$ d'après (1), donc la mesure μ est localement invariante par le flot de H_p dans $\mathbf{R}^{d+1}$. Si ϱ_0 est strictement glissant son image par ce flot sort de $\overline{M}$ donc rentre d'après le théorème 15 i) dans une région où $\mu = 0$. Donc $\varrho_0 \notin \operatorname{supp}(\mu)$. L'hypothèse de contrôle géométrique assure donc que toute bicaractéristique contient un point qui n'appartient pas au support de μ, donc, d'après le théorème 15, iv'), $\mu \equiv 0$, ce qui est contradictoire avec $E(u_k) = 1 \not\to 0$.

Réciproquement, s'il existe une bicaractéristique généralisée ne rencontrant l'ensemble $\{\Theta > 0\}$ qu'en des points non strictement glissants, on peut construire une suite (u_k) d'énergie égale à 1 et dont la mesure μ a pour support cette bicaractéristique. Le support de la mesure ν est inclus dans $\pi(\operatorname{supp}(\mu))$, il ne rencontre donc l'ensemble $\{\Theta > 0\}$ qu'en des points non strictement glissants donc des points que la mesure ν ne charge pas. On obtient donc, d'après (4),

$$0 = \langle \nu, \Theta^2 \rangle = \lim_{k \to +\infty} F(u_k)$$

ce qui montre (puisque $E(u_k) = 1$) que l'inégalité (5) ne peut pas être satisfaite.

4. COMPACITÉ PAR COMPENSATION

Nous allons montrer dans cette partie comment les mesures de défaut micro-locales permettent de passer à la limite dans certaines expressions non linéaires pour des solutions d'équations aux dérivées partielles.

4.1 Compacité par compensation. On considère $\mathcal{H}_i, i = 1; 2$, deux espaces de Hilbert, $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ et $P \in \Psi^m_{\text{comp}}(\Omega, \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2))$. On se donne $(u_k) \rightharpoonup u$ une suite pure de $L^2_{\text{loc}}(\Omega; \mathcal{H}_1)$ de mesure de défaut microlocale μ et on suppose que pour un ensemble dense D de $\mathcal{H}_2$ la suite $(Pu_k, h)_{\mathcal{H}_2}$ est relativement compacte dans $H^{-m}_{\text{loc}}(\Omega)$.

Le résultat suivant de P. Gérard [15] généralise le lemme du "div-rot" de Murat et Tartar [37], [42].

THÉORÈME 19 (Compacité par compensation) .—

i) La mesure μ vérifie $\sigma_m(p)(x,\xi)\mu = 0$ (régularité elliptique).

ii) Pour tout $q \in \Psi^0_{\mathrm{comp}}(\Omega; \mathcal{K}(\mathcal{H}_1))$ tel que

$$\forall (x,\xi,h) \in S^*\Omega \times \mathcal{H}_1,\ p(x,\xi)h = 0 \Rightarrow (q(x,\xi)h,h)_{\mathcal{H}_1} \geq 0$$

alors pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ positive

$$\liminf_{k\to+\infty} \int_\Omega \varphi(x)(q(x,D_x)u_k,u_k)_{\mathcal{H}_1} dx \geq \int_\Omega \varphi(x)(q(x,D_x)u,u)_{\mathcal{H}_1} dx.$$

En particulier si

$$\forall (x,\xi,h) \in S^*\Omega \times \mathcal{H}_1,\ p(x,\xi)h = 0 \Rightarrow (q(x,\xi)h,h)_{\mathcal{H}_1} = 0,$$

alors $(q(x,D_x)u_k,u_k)_{\mathcal{H}_1}$ converge vers $(q(x,D_x)u,u)_{\mathcal{H}_1}$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

4.2 Compacité par compensation trilinéaire et optique géométrique non linéaire. Nous allons donner dans cette partie un exemple d'utilisation des idées de compacité par compensation. Pour d'autres exemples, en particulier dans le cadre de l'homogénéisation on renvoie à F. Murat [37] et L. Tartar [41].

Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^2$ et $X_j = \partial_t + c_j(t,x)\partial_x,\ j = 1,\cdots,N,\ (t,x) \in \Omega$, N champs de vecteurs sur Ω. On considère u_j solutions bornées dans $L^\infty(\Omega)$ de

(1) $$X_j u_j = F_j(t,x,u_1,\cdots,u_N),\ j = 1,\cdots,N,$$

un système d'équations d'évolutions. On peut, quitte à extraire des sous-suites, associer à toute famille $u^\epsilon = (u_1^\epsilon,\cdots,u_N^\epsilon)$ une famille mesurable $\mu_{t,x}$ (respectivement $\mu_{j,t,x}$) de densités de probabilités sur $\mathbf{R}^N$ (respectivement sur $\mathbf{R}$), qu'on appelle mesures de Young, telles que pour tout $\Phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ (respectivement$\Phi_j \in C_0^\infty(\mathbf{R})$)

$$\Phi(u^\epsilon) \xrightarrow{\mathcal{D}'} \int_{\mathbf{R}^N} \Phi(\lambda)\mu_{t,x}(\lambda) \quad \left(\text{respectivement } \Phi_j(u_j^\epsilon) \xrightarrow{\mathcal{D}'} \int_{\mathbf{R}} \Phi(\lambda)\mu_{t,x}(\lambda)\right).$$

On s'intéresse à la question de savoir si les mesures μ_j déterminent la mesure μ. En particulier a-t-on

(2) $$\mu_{t,x}(d\lambda) = \mu_{1,t,x}(d\lambda) \otimes \cdots \otimes \mu_{N,t,x}(d\lambda) \quad \text{pour presque tout } (t,x)?$$

En considérant des fonctions Φ de la forme $\Phi(\lambda) = \Phi_1(\lambda_1) \times \cdots \times \Phi_N(\lambda_N)$ et les fonctions $v_j^\epsilon = \Phi_j(u_j^\epsilon)$ solutions de

$$X_j v_j^\epsilon = \Phi_j'(u_j^\epsilon) F_j(t,x,u_1^\epsilon,\cdots,u_N^\epsilon),$$

on voit facilement que la relation (1) est équivalente à la propriété

(3) $$\forall (\Phi_1,\cdots,\Phi_N),\ \lim_{\mathcal{D}'} (v_1^\epsilon \times \cdots \times v_N^\epsilon) = \lim_{\mathcal{D}'} (v_1^\epsilon) \times \cdots \times \lim_{\mathcal{D}'} (v_N^\epsilon),$$

où $v_j^\varepsilon = \Phi_j(u_j^\varepsilon)$.

La réponse pour $N = 2$ est une conséquence simple du théorème de compacité par compensation ou encore plus simplement des propositions 6 et 7 : On note

$$\mathcal{W}(\Omega; X) = \{u \in L^2_{\text{loc}}; Xu \in L^2_{\text{loc}}\}.$$

THÉORÈME 20. — *Soient X_1, X_2, deux champs de vecteurs sur Ω partout indépendants, alors l'application $(u_1, u_2) \mapsto u_1 u_2$ est continue de l'espace $\mathcal{W}(\Omega; X_1) \times \mathcal{W}(\Omega; X_2)$ dans $L^2(\Omega)$ pour les topologies faibles.*

La preuve de ce résultat est très simple. Soient (u_j^ε) une suite d'éléments de $\mathcal{W}(\Omega; X_j)$ convergeant faiblement vers u_j. On va montrer que $(u_1^\varepsilon u_2^\varepsilon) \rightharpoonup u_1 u_2$. Quitte à extraire des sous-suites, on peut supposer que u_1^ε a une mesure de défaut microlocale, μ_1 et $\overline{u}_2^\varepsilon$ a une mesure de défaut microlocale, μ_2. D'après la proposition 6, μ_j est supportée par l'ensemble $\sigma_1(X_i) = 0$. Comme l'intersection de ces deux ensembles est réduite à $\{(t, x, \tau, \xi); \tau = \xi = 0\}$ (puisque les deux champs sont indépendants), les deux mesures μ_1 et μ_2 sont mutuellement singulières donc $M(u_1^\varepsilon + \overline{u}_2^\varepsilon) = \mu_1 + \mu_2$ donc

$$\lim \mathbf{Re}(\int_\Omega \varphi(u_1^\varepsilon - u_1)(u_2^\varepsilon - u_2) = 0$$

et $M(u_1^\varepsilon + i\overline{u}_2^\varepsilon) = \mu_1 + \mu_2$, soit

$$\lim \mathbf{Im}(\int_\Omega \varphi(u_1^\varepsilon - u_1)u_2^\varepsilon - u_2) = 0,$$

on en déduit que $(u_1^\varepsilon - u_1)u_2^\varepsilon - u_2) \rightharpoonup 0$ donc $(u_1^\varepsilon u_2^\varepsilon) \rightharpoonup 0$.

Pour $N \geq 3$ le problème est plus complexe puisqu'il peut apparaître des phénomènes de résonances.

DÉFINITION 21.— *On appelle résonance sur un ouvert Ω, la donnée d'un ouvert $\omega \subset \Omega$ et de N fonctions φ_j tels que*

$$X_j \varphi_j = 0 \quad et \quad \sum_1^3 d\varphi_j = 0, \quad \exists k;\ d\varphi_k(x, t) \neq 0 \quad \text{sur } \omega. \tag{4}$$

S'il existe une résonance on peut supposer que $\sum_j \varphi_j = 0$ sur ω, on choisit alors $a_j \in C_0^\infty(\omega)$ telles que $a_1 \times \cdots \times a_3 \neq 0$ et on vérifie facilement que les fonctions $u_j = a_{j(x,t)} e^{i\varphi_j(x,t)}$ convergent faiblement vers 0 tandis que ce n'est pas le cas de leur produit. Si les champs sont à coefficients constants (et $N \geq 3$) il est facile de voir qu'il existe toujours une résonance.

On se place dans toute la suite dans le cas $N = 3$. On suppose que les champs X_j sont deux à deux linéairement indépendants. Chaque champ X_j définit un feuilletage $\mathcal{F}_j$ de Ω par les courbes intégrales de X_j. La donnée de ces trois feuilletages est appelée un 3-tissu. L'existence de résonances ne dépend que du 3-tissu. On peut définir une notion de courbure du 3-tissu (voir W. Blaschke et G. Bol [5]) et montrer que l'existence d'une résonance sur ω est équivalente à l'annulation sur ω de cette courbure. Il est tout a fait remarquable que cet invariant géométrique décrive l'obstruction à la convergence faible (3) comme le montre le résultat suivant :

THÉORÈME 22 (J.L. Joly, G. Métivier et J. Rauch [26]).— *Soient $X_i, i = 1, 2, 3$, trois champs de vecteurs deux à deux indépendants sur un ouvert Ω de $\mathbf{R}^2$, tels que la courbure du 3-tissu associé ne s'annule en aucun point de Ω. Alors il existe un voisinage ω de y dans Ω tel que l'application $(u_1, u_2, u_3) \mapsto u_1 u_2 u_3$ est continue de l'espace $\mathcal{W}(\Omega; X_1) \times \mathcal{W}(\Omega; X_2) \times \mathcal{W}(\Omega; X_3)$ dans $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ pour les topologies faibles. En particulier la relation (3) est vérifiée sur ω.*

On peut alors déduire de ce résultat le théorème suivant sur les mesures de Young :

THÉORÈME 23 (J.L. Joly, G. Métivier et J. Rauch [26]).— *Soient X_i, $i = 1, 2, 3$, trois champs de vecteurs deux à deux indépendants sur un ouvert Ω de $\mathbf{R}^2$, tels que la courbure du 3-tissu associé ne s'annule en aucun point de Ω. Soit u^ε une suite de solutions de (1), bornée dans $L^\infty(\Omega)$. On note μ_j les mesures de Young d'une sous-suite des u^ε_j. Alors (μ_j) vérifie sur $\Omega \times \mathbf{R}$*

$$X_j(t, x, \partial_t, \partial_x)(\mu_j) - \partial_{\lambda_j}(A_j(t, x, \lambda_j)\mu_j) = 0, \tag{5}$$

avec

$$A_1(t, x, \lambda_1) = \int F_1(t, x, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\mu_{2,t,x}(d\lambda_2)\mu_{3,t,x}(d\lambda_3)$$

et des définitions similaires pour A_2 et A_3

Remarques :

1) Les solutions de (5) sont déterminées par leurs données de Cauchy.
2) Le cas de N champs ($N > 3$) est essentiellement ouvert.
3) Le cas de 3 champs résonants a été récemment complètement résolu par G. Métivier et S. Schochet [34,35].

4.3 Quelques éléments de la preuve du théorème 22. On se ramène par un choix convenable de coordonnées au cas où $X_1 = \partial_t$, $X_2 = \partial_x$ et $X_3 = \partial_t + a(t, x)\partial_x$. La courbure du 3-tissu associé est alors $\kappa = a^{-1}\partial_t\partial_x \log(|a|)$. On peut aussi supposer que les u^ε_j sont à supports compacts dans ω un ouvert où κ ne s'annule pas. On veut alors montrer que

$$\int_\omega u^\varepsilon_1 u^\varepsilon_2 u^\varepsilon_3 \to \int_\omega u_1 u_2 u_3. \tag{6}$$

Soit $1 = \Delta_0(\eta) + \sum_{j=1}^{+\infty} \Delta(2^j\eta)$, avec Δ à support dans la couronne $1/2 < |x| < 2$ une partition de l'unité dyadique. On a donc, si on note pour $k \geq 1$ $\Delta_k(\cdot) = \Delta(2^k \cdot)$,

$$u_j^\varepsilon = \sum_{k \in \mathbf{N}} \Delta_k(\varepsilon D_x) u_j.$$

Introduisant cette décomposition dans le terme de gauche de (6), on obtient une somme de termes du type

$$\int_\omega \Delta_i u_1^\varepsilon \Delta_j u_2^\varepsilon \Delta_k u_3^\varepsilon.$$

On remarque ensuite que si $i \geq j+2$, $i \geq k+2$ alors l'intégrale correspondante est nulle, il suffit donc d'étudier une somme finie de termes de type

$$\sum_j \int_{\mathbf{R}^2} \Delta_j u_1^\varepsilon \Delta_{j+\alpha} u_2^\varepsilon \sum_{k \leq j+\beta} \Delta_k u_3^\varepsilon, \tag{7}$$

avec $|\alpha| \leq 2, |\beta| \leq 2$.

Pour simplifier on étudie seulement le cas $\alpha = \beta = 0$. La convergence faible de u_j^ε implique la convergence forte de $\Delta_k u_j^\varepsilon$, chacun des termes de la série (7) est donc continu pour la convergence faible. Il suffit donc pour pouvoir conclure de montrer que la série converge uniformément. Le point crucial pour ce passage à la limite est le suivant :

PROPOSITION 24 .— Il existe une suite δ_j qui tend vers 0 telle que pour tout $u_k \in \mathcal{W}_k$ à support compact dans ω on a

$$\left| \int \Delta_j u_1^\varepsilon \Delta_j u_2^\varepsilon \sum_{k \leq j} \Delta_k u_3^\varepsilon \right| \leq \delta_j \prod_{1 \leq i \leq 3} \|u_i\|_{\mathcal{W}_i}. \tag{8}$$

Ce résultat se démontre par l'absurde : si cette estimation est fausse, alors il existe $\delta > 0$, une suite $h_k = 2^{-j_k} \to +\infty$ et trois suites u_i^k bornées dans $\mathcal{W}_i$ et à support compact dans ω tels que

$$\left| \int \Delta(h_k D) u_1^k \Delta(h_k D) u_2^k \sum_{2^p \leq h_k^{-1}} \Delta_p u_3^k \right| > \delta. \tag{9}$$

On considère les mesures semi-classiques des suites u_3^k et $\Delta(h_k D) u_1^k \Delta(h_k D) u_2^k$. De l'équation vérifiée par u_3^k on déduit :

LEMME 25 .— *Soit μ une mesure semi-classique de la suite u_3^h, alors son support est inclus dans $\{\tau + a(x,t)\xi = 0\} \cap T^*\omega$ et toute hypersurface transverse au champ X_3 est de μ mesure nulle. En particulier si on note pour tout $(x_0, t_0, \xi_0, \tau_0) \in T^*\omega$,*

$$\Gamma_{x,\xi} = \{(t, \tau, x, \xi);\ (t, \tau) \in T^*\mathbf{R}\},$$
$$\Gamma^{t,\tau} = \{(t, \tau, x, \xi);\ (x, \xi) \in T^*\mathbf{R}\},$$

alors

$$\forall(x,\xi)\ \mu(\Gamma_{x,\xi}) = 0 \quad \forall(t,\tau)\ \mu(\Gamma_{t,\tau}) = 0. \tag{10}$$

Des équations vérifiées par u_1^k et u_2^k on déduit :

LEMME 26 .— *Soit ν une mesure semi-classique de la suite $\Delta(h_k D)u_1^k \Delta(h_k D)u_2^k$. Alors $\{\tau = \xi = 0\} \notin \mathrm{supp}(\nu)$ et il existe deux mesures de Radon, ν_1 et ν_2, telles que ν est absolument continue par rapport à la mesure $\nu_1(dtd\tau) \otimes \nu_2(dxd\xi)$.*

On note $V = \mathcal{C} \cap \{(x,t,\xi,\tau); \nu_1\{(t,\tau)\} = \nu_2\{(x,\xi)\} = 0\}$. D'après (10), μ est supportée par V. On note

$$\mathcal{C}_{x,\xi} = \{(t,\tau); \{\tau + a(x,t)\xi = 0\} \cap \{(t,\tau); \nu_1\{(t,\tau)\} = 0\},$$

ce sont des arcs de courbes qui, d'après l'hypothèse de non résonance, se coupent transversalement deux à deux (et nécessairement en des points que la mesure ν_1 ne charge pas). Donc l'ensemble des (x,ξ) tels que $\nu_2\{(x,\xi)\} = 0$ et $\nu_1(\mathcal{C}_{x,\xi}) > 0$ est au plus dénombrable, donc de ν_2 mesure nulle. D'après le théorème de Fubini,

$$\nu_1 \otimes \nu_2(V) = 0,$$

ce qui montre que les mesures μ et ν sont étrangères et contredit (9), d'après la proposition 7.

APPENDICE. PREUVE DU POINT IV′) DU THÉORÈME 15

Le résultat annoncé est un résultat local. Il suffit de montrer que si $\gamma(-s,\varrho_0) \notin \mathrm{supp}(\mu)$ pour $0 < s$ assez petit, alors $\varrho_0 \notin \mathrm{supp}(\mu)$. Pour simplifier l'exposition, on se limitera au cas $a = 0$. On peut également supposer $\tau(\varrho_0) = 1$ (le cas -1 se traitant de la même manière). La preuve que nous donnons, inspirée de C. Bardos-T. Masrour [4], repose essentiellement sur le lemme suivant dont on trouvera une démonstration dans [25], §24.3 p. 436-437 :

LEMME 27.— *Soit $\rho_0 = (x',\xi') \in \mathcal{G} \cap \{\tau = 1\}$. On suppose que ρ_0 est un point de contact d'ordre exactement $k > 2$ ($\rho_0 \in \mathcal{G}^k$), ce qui est équivalent à*

$$H_{r_0}^j(\partial_{x_n} r(0,x',\xi')) = 0,\ \forall j < k-2 \quad et \quad H_{r_0}^{k-2}(\partial_{x_n} r(0,x',\xi')) \neq 0.$$

Alors il existe $C > 0$ tel que si on note $e(s) = \frac{\partial r}{\partial x_n}(\gamma(s,\rho_0))$ on a

$$\left|e(s) - as^{k-2}\right| \leq Cs^{k-1} \tag{1}$$

$$|x_n(s)| \leq Cs^k, \tag{2}$$

avec

$$a = (-H_{r_0})^j(\partial_{x_n} r(0,x',\xi'))/(k-2)!$$

et si pour $s>0$ (respectivement $s<0$) $as^{k-2}>0$ alors $\gamma(s,\rho_0)$ est l'orbite du champ H_p (incluse dans T^*M) issue vers $s>0$ (respectivement $s<0$) de ρ_0 tandis que si $as^{k-2}<0$ alors $\gamma(s,\rho_0)\in T^*\partial M$ est l'orbite du champ $H_p-\partial_s r\partial_\sigma$ (incluse dans $\mathcal{G}_{sg}$) issue vers $s>0$ (respectivement $s<0$) de ρ_0.

De plus si on choisit $\rho_1\in\mathcal{G}^k\cap\{\tau=1\}$ assez proche de ρ_0 alors le résultat reste vrai si on échange ϱ_0 et ϱ_1 avec la même constante C.

Remarque : Ce résultat est le point crucial pour démontrer que par tout point de Σ_b il passe au plus une bicaractéristique généralisée.

COROLLAIRE 28. — *Pour tout $k>2$ et tout $\rho_0\in\mathcal{G}^k\cap\{\tau=1\}$ il existe un voisinage dans T^*_bM de ρ_0, V, et $\alpha>0$ tels que pour tout $\rho\in V\cap\{\tau=1\}$, l'ensemble $\{\gamma(s,\rho);\ |s|\leq\alpha\}$ ne rencontre $\mathcal{G}^k$ qu'en au plus 1 point.*

La preuve de iv′) va se faire en plusieurs étapes. on rappelle que supp($\mu\subset\mathcal{C}$) et supp($\nu\subset\pi\,(\text{supp}(\mu))\subset\Sigma_b$.

1ère étape : $\varrho_0\in\mathbf{T^*M}$. Si le point ϱ_0 est un point intérieur, iv′) est clairement conséquence de l'équation ii).

2ème étape (voir [21]) : $\varrho_0\in\mathcal{H}$. La mesure μ est solution à l'intérieur d'une équation de transport, $H_p\mu=0$, elle possède donc près de tout point $\varrho_0\in\mathcal{H}$ une trace sur $T^*\mathbf{R}^d\cap\{x_n=0\}$ puisqu'alors cette hypersurface est transverse au champ H_p. D'après la formule des sauts, on a

$$H_p(\mu)=H_p\cdot n(x)\mu\,|_{x_n=0}\otimes\delta_{x_n=0}. \tag{3}$$

On note $S:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ la symétrie orthogonale par rapport au plan tangent au bord de l'ouvert. Il est clair que le second membre de (3.1) est, sur $\mathcal{H}$, une mesure antiinvariante par l'involution S. Or $H_p\cdot n\circ S=-H_p\cdot n$, on en déduit que $\mu\,|_{\partial M}$ est invariante par l'involution S et revenant à l'équation vérifiée par μ à l' intérieur, on voit que si une des deux demi-bicaractéristiques (dont on exclut les points $\pi^{-1}(\rho_0)=\rho_0^{\pm}$) issues de $\rho_0\in\mathcal{H}$ ne rencontre pas, au voisinage de ρ_0, le support de μ alors $\mu\,|_{\partial M}$ est identiquement nulle au voisinage de ρ_0^+ (ou ϱ_0^-), donc par symétrie elle est aussi nulle au voisinage de ρ_0^- (ou ϱ_0^+). Revenant à l'équation (3), on voit que μ est identiquement nulle, au voisinage de $\rho_0^{\pm}$.

3ème étape : $\varrho_0\in\mathcal{G}_\mathbf{d}$. Au voisinage de ϱ_0 on a encore $\partial_{x_n}r>0$. Les bicaractéristiques rencontrent donc soit le bord en un point hyperbolique, soit (si elles rencontrent le bord en un point glissant, donc diffractif) sont des courbes intégrales de H_p. Leurs points de rencontre avec le bord sont donc isolés, on en déduit que si V est un voisinage de ϱ_0 dans $T^*\partial M$ et si $\alpha>0$ est assez petit, pour tout $\varrho\in V\cap\Sigma_b$, l'ensemble $\{\gamma(s,\varrho);\ -\alpha<s<0\}$ ne rencontre pas $T^*\partial M$. D'après la deuxième étape et l'hypothèse, si V est assez petit, le support de ν ne rencontre donc pas $\mathcal{H}\cap V$ et comme, d'après (3.4), il ne charge pas $\mathcal{G}_d$, ν est nulle sur V. Revenant à l'équation (3.1), on en déduit que la mesure μ est invariante par le flot de H_p et comme par hypothèse $\gamma(-\alpha, \varrho_0) \notin \mathrm{supp}(\mu)$ si $\alpha > 0$ est assez petit, on en déduit qu'elle est nulle aussi au voisinage de ρ_0.

4ème étape : $\varrho_0 \in \mathcal{G}_{\mathbf{sg}}$. Au voisinage de ϱ_0 on a encore $\partial_{x_n} r < 0$. Soient V un voisinage de ϱ_0 dans $T_b^* M$ et $\alpha > 0$ qu'on choisira assez petits. D'après [25], §24.3 p. 435, on sait que pour $\varrho \in V \cap \mathcal{G} \cap \{|\tau| = 1\}$, $\{\gamma(s, \varrho); |s| \leq \alpha\} \subset \mathcal{G}_{sg}$. On peut donc trouver W un voisinage de ϱ_0 dans $T_b^* M$ et $\beta > 0$ tels que $\Phi_{-\beta}(W \cap \Sigma_b) \cap \mathrm{supp}(\mu) = \emptyset$ et pour tout point $\varrho \in W \cap \Sigma_b$, $\varrho \notin \mathcal{G} \Rightarrow \{\gamma(-s, \rho);\ 0 \leq s \leq \beta\} \cap \mathcal{G} = \emptyset$. Donc, d'après la deuxième étape, l'intersection du support de μ avec W est incluse dans $T^* M \cap \mathcal{G}$, soit

$$\mu = \mu 1_{\mathcal{G}}. \tag{4}$$

Soit $q(x_n, x', \xi')$ à support dans W. D'après l'équation (3.1) appliquée à q et compte tenu de (4), on obtient, si on note $H'_{r_0} = \partial_{\xi'} r_0 \partial_{x'} - \partial_{x'} r_0 \partial_{\xi'}$,

$$\langle \mu, H'_{r_0} q \rangle = 0,$$

ce qui implique que la mesure μ est, sur $T^* \partial M$, invariante au voisinage de ϱ_0 par le flot de H_{r_0}. Comme $\{\gamma(s, \varrho_0);\ -\alpha < s \leq 0\}$ est une courbe intégrale dans $T^* \partial M$ de $-H_{r_0}$ et comme $\{\gamma(s, \varrho);\ -\alpha < s < 0\}$ ne rencontre pas le support de μ, on obtient encore $\varrho_0 \notin \mathrm{supp}(\mu)$.

5ème étape : $\varrho_0 \in \mathcal{G}^3$. Soit V_0 un petit voisinage de ϱ_0 dans $T_b^* M$ tel que pour $k > 3$, $V_0 \cap \mathcal{G}^k = \emptyset$. On choisit $V \subset V_0$ un autre voisinage de ϱ_0 dans $T_b^* M$ et $\alpha > 0$ comme au corollaire 28. On suppose que $\Phi_{-\alpha}(V) \cap \mathrm{supp}(\mu) = \emptyset$, ce qui est possible si on prend α puis V petits. D'après les étapes 1 à 4 et le corollaire 28 on sait que l'intersection du support de μ avec V est incluse dans l'ensemble des points ϱ tels que

$$\{\gamma(s, \varrho);\ -\beta < s \leq 0\} \cap \mathcal{G}^3 \neq \emptyset. \tag{5}$$

On distingue alors selon le signe de $\partial_n r(\gamma(s, \varrho_0)) = e(s, \varrho_0)$ pour $s > 0$.

Si e < 0, pour s > 0. Pour les autres points de $\mathcal{G}^3 \cap V$ on a encore $e(s, \varrho) < 0$ pour $s > 0$. On sait donc d'après (5) et puisqu'alors la demi-bicaractéristique vers $s > 0$ correspondante est d'après le lemme 27 incluse dans $\mathcal{G}_{sg}$ que les points susceptibles d'être dans l'intersection du support de μ avec V sont dans $\mathcal{G}_{sg} \cap \mathcal{G}^3$ et en procédant comme à l'étape 4 on obtient que $\langle \mu, H'_{r_0} q \rangle = 0$ ce qui permet de conclure comme à l'étape 4 si le signe de e est négatif pour $s < 0$ (c'est-à-dire si γ est au voisinage de ϱ_0 une courbe intégrale dans $T^* \partial M$ du champs $-H_{r_0}$).

Si le signe de e est positif pour $s < 0$ (c'est-à-dire si $\gamma(s, \varrho_0)$ quitte le bord pour $s < 0$), on sait que pour $\delta < 0$ petit, le point ϱ_1 sur la bicaractéristique de $-H'_{r_0}$ issue de ϱ_0 n'appartient pas au support de μ. En effet d'après (2), et puisque $e(-\delta) > 0$, $\varrho_1 \in \mathcal{G}_d$ donc ne peut pas appartenir au support de μ puisqu'on sait que celui-ci est inclus dans $\mathcal{G}_{sg} \cap \mathcal{G}^3$. On peut donc encore conclure que $\varrho_0 \notin \text{supp}(\mu)$ puisque $\langle \mu, H'_{r_0} q \rangle = 0$ et que la courbe intégrale de H_{r_0} issue de ϱ_0 rencontre un point (ϱ_1) qui n'appartient pas au support de μ.

Si e > 0, pour s > 0. On a aussi, pour tout $\varrho \in \mathcal{G}^3 \cap V$, $e(s, \varrho) > 0$ pour $s > 0$ et donc pour tout point $\varrho \in \mathcal{G}^3 \cap V$, $\{\gamma(s, \varrho), 0 < s < \alpha\}$ ne rencontre V qu'en des points qui n'appartiennent pas au bord. On en déduit, d'après (5), que l'intersection du support de la mesure ν avec V (qui est incluse dans $\pi(\text{supp}(\mu))$) est incluse dans $\mathcal{G}^3 \subset \mathcal{G}_{nsg}$ et comme elle ne charge pas cet ensemble d'après (3.4), on a $\nu = 0$ au voisinage de ϱ_0. Finalement, revenant à (3.1), on obtient encore $\varrho_0 \notin \text{supp}(\mu)$.

6ème étape : $\varrho_0 \in \mathcal{G}^{\mathbf{k}}$. Pour étudier le cas général on procède par récurrence sur l'indice k et à chaque étape on fait le même raisonnement qu'à la cinquième étape.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. ALLAIRE - *Homogenization and two-scale convergence*, Siam Journal of Mathematical Analysis **23-6** (1992), 1482-1518.

[2] H. BAHOURI ET P. GÉRARD - *Concentration effects in critical nonlinear wave equations and scattering theory* in Geometrical optics and related topics, F. Colombini et N. Lerner ed., Progress in nonlinear differential equations and their applications, Birkhäuser, à paraître.

[3] C. BARDOS, G. LEBEAU, J. RAUCH - *Sharp Sufficient Conditions for the Observation, Control and Stabilization of Waves from the Boundary*, Siam Journal of Control and Optimization **305** (1992), 1024-1065.

[4] C. BARDOS ET T. MASROUR - *Utilisation des mesures de défaut pour l'observation, le contrôle et la décroissance locale de l'énergie* (en préparation)

[5] W. BLASCHKE ET G. BOL - *Geometrie der Gewebe*, Springer Verlag (1938).

[6] S. BRAHIM-OTSMANE, G. FRANCFORT ET F. MURAT - *Correctors for the homogenization of the wave equation and heat equation* Jour. de Math. pures et appliquées **X-71-3** (1992), 197-231.

[7] N. BURQ, P. GÉRARD - *Condition nécessaire et suffisante pour la contrôlabilité exacte des ondes*, à paraître aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences.

[8] N. BURQ - *Contrôle de l'équation des ondes dans des ouverts peu réguliers*, Asymptotic Analysis **14** (1997), 157-191.

[9] V. BUSLAEV - *Semi-classical approximations for equations with periodic coefficients*, Russian Math. Surveys **42** (1987), 97-125.

[10] Y. COLIN DE VERDIÈRE - *Ergodicité et fonctions propres du Laplacien*, Comm. Math. Phys. **102** (1985), 497-502.

[11] C. FERMANIAN - *Equation de la chaleur et mesures semi-classiques*, Thèse de l'université de Paris Sud (1995) et article en préparation.

[12] G. FRANCFORT ET F. MURAT - *Oscillations and energy densities in the wave equation*, Comm. in Partial Diff. equations, **17** (11&12) (1992), 1785-1865.

[13] C. GÉRARD - *Resonance theory for periodic Schrödinger operators*, Bull. Soc. Math. France **118** (1990), 27-54.

[14] C. GÉRARD, A. MARTINEZ ET J. SJÖSTRAND - *A mathematical approach to the effective Hamiltonian in perturbed periodic problems*, Commun. Math. Phys. **142-2** (1991), 217-244.

[15] P. GÉRARD - *Microlocal Defect Measures*, Communications in Partial Differential Equations **16** (1991), 1761-1794.

[16] P. GÉRARD - *Mesures semi-classiques et ondes de Bloch*, Seminaire EDP de l'École Polytechnique **16** (1990-1991).

[17] P. GÉRARD - *Moyennisation et régularite deux-micro-locale*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup., **IV. Ser. 23**, No.1, (1990), 89-121.

[18] P. GÉRARD - *Oscillations and Concentration Effects in Semilinear Dispersive Wave Equations*, Journal of Functional Analysis, **141-1** (1996), 60-98.

[19] P. GÉRARD - *Communication personnelle.*

[20] P. GÉRARD, F. GOLSE ET B. WENNBERG - *A compactness result for generalized Radon transforms*, Math. Research Let. **3** (1996), 491-497.

[21] P. GÉRARD ET E. LEICHTNAM - *Ergodic properties of eigenfunctions for the Dirichlet problem*, Duke Math. Jour. **71** (1993), 559-607.

[22] P. GÉRARD, P. MARKOWICH, N. MAUSER ET F. POUPAUD - *Homogenization limits and Wigner transforms*, Commun. in Pure and Applied Math **L** (1997), 323-379.

[23] I. GOHBERG ET M. KREIN - *Introduction to the theory of Linear non Self adjoint Operators*, Transal. of Math. Monographs **18**, Amer. Math. Soc. (1969).

[24] B. HELFFER, A. MARTINEZ ET D. ROBERT - *Ergodicité et limite semi-classique*, Comm. Math. Phys. **109** (1987), 313-326.

[25] L. HÖRMANDER - *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I–IV*, Springer Verlag, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **256, 257, 274, 275** (1983-1985).

[26] J.L. JOLY, G. MÉTIVIER ET J. RAUCH - *Trilinear compensated compactness and nonlinear geometric optics*, Annals of Mathematics, **142** (1995), 121-169.

[27] G. LEBEAU - *Équation des ondes amorties* in Algebraic and Geometric Methods in Mathematical Physics, A. Boutet de Monvel et V. Marchenko éd, (1996), Kluwer Academic, The Netherlands , 73-109.

[28] J.L. LIONS - *Contrôlabilité exacte. Perturbation et stabilisation des systèmes distribués*, R.M.A., Masson **23**, (1988).

[29] P.L. LIONS - *The concentration compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case*, Ann. IHP **1** (1984), 109-145.

[30] P.L. LIONS - *The concentration compactness principle in the calculus of variations. The limit case*, Rev. Mat. Iberoamericana, **9** (1985), 145-201.

[31] P.L. LIONS ET T. PAUL - *Sur les mesures de Wigner*, Revista Matemática Iberoamericana **9, 3**(1993).

[32] P. MARKOWICH, N. MAUSER ET F. POUPAUD - *A Wigner-Function Approach to (Semi)classical Limits I: Electrons in a Periodic Potential*, J. Math. Physics, **35** (1994), 1006-1094.

[33] R. MELROSE ET J. SJÖSTRAND - *Singularities of boundary value problems I*, Communications in Pure and Applied Mathematics **31** (1978), 593-617

[34] G. MÉTIVIER ET S. SCHOCHET - *Interaction trilinéaires résonantes*, Séminaire E.D.P. de l'École Polytechnique (1995-1996), VI.

[35] G. MÉTIVIER ET S. SCHOCHET - *Trilinear resonant interactions of semilinear hyperbolic waves*, Prépublications de l'Institut de Recherche Mathématique de Rennes, **96-31** (1996).

[36] L. MILLER - *Propagation d'ondes semi-classiques à travers une interface et mesures deux-micro-locales*, Thèse de l'université de Paris Sud (1996), Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **I-325** (1997), 371-376 et article en préparation.

[37] F. MURAT - *Compacité par compensation*, Ann. Scuola Sup. di Pisa, **5** (1978), 489-507.

[38] F. NIER - *A semi-classical picture of quantum scattering*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. **4-29** (1996), 149-183.

[39] F. POUPAUD ET C. RINGHOFER - *Semiclassical Limits in a Crystal with External Potentials and Effective Mass Theorems*, Prepublication du laboratoire J.A. Dieudonné, Univ. de Nice **436** (1995), à paraître à C.P.D.E.

[40] A. SHNIRELMAN - *Ergodic properties of eigenfunctions*, Uspekhi Mat. Nauk. **29** (1974), 181-182.

[41] L. TARTAR - *H-Measures, a New Approach for Studying Homogenization, Oscillations and Concentration Effects in Partial Differential Equations*, Proceedings of the Royal Society Edinburgh, **115-A** (1990), 193-230.

[42] L. TARTAR - *Compensated compactness and applications to partial differential equations*, in Non linear Analysis and Mechanics, Heriot-Watt Symposium, **IV** 136-212, Res. Notes in Math. **39**, Pitman, (1979).

[43] E. WIGNER - *On the quantum correction for thermodynamic equilibrium*, Phys. Rev. **40** (1934), 742-759.

[44] C.H. WILCOX - *Theory of Bloch waves,* Journal d'Analyse Mathématique, **33** (1978), 146-167.

Nicolas BURQ

École Polytechnique
Centre de Mathématiques
URA 169 du CNRS
F–91128 PALAISEAU CEDEX

E–mail : burq@math.polytechnique.fr