JEAN-CHRISTOPHE YOCCOZ

Non-accumulation de cycles limites

Astérisque, tome 161-162 (1988), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 690, p. 87-103
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1987-1988__30__87_0>

Séminaire BOURBAKI
40ème année, 1987-88, n° 690

Novembre 1987

NON-ACCUMULATION DE CYCLES LIMITES

par Jean-Christophe YOCCOZ

0. INTRODUCTION

Cet exposé peut être considéré comme la suite de celui fait en novembre 1985 par R. Moussu ([1]) ; nous y renvoyons le lecteur en ce qui concerne l'histoire (mouvementée) de la deuxième partie du seizième problème de Hilbert.

Hilbert demande de déterminer le nombre maximal $N(n)$ de cycles limites d'un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ polynômial de degré n . (Un *cycle limite* d'un champ de vecteurs analytique V sur une surface est une orbite périodique isolée de V .)

Il faut d'abord bien sûr résoudre la

<u>Conjecture de finitude</u>.- <u>Un champ de vecteurs polynômial dans le plan a un nombre fini de cycles limites</u>.

Cette conjecture est une conséquence de résultats annoncés par Yu. Il'Yasenko d'une part ([12]), et J. Écalle, J. Martinet, R. Moussu et J.-P. Ramis de l'autre ([2],[3]).

Auparavant, Dulac en avait donné en 1923 une démonstration incorrecte (mais intéressante) ([4]) ; le "trou" n'a été découvert que dans les années 70. En 1984, Il'Yasenko démontrait cette conjecture en degré quelconque pour les champs génériques (à singularités hyperboliques, *cf.* n° 2) ([5]), et Bamon en déduisait un an plus tard le résultat pour tous les champs quadratiques ([6]). Ce sont ces résultats que Moussu a exposés en novembre 1985.

1. LE PROBLÈME DE DULAC

Considérons un *feuilletage singulier* orienté $\mathcal{F}$ d'une surface analytique M , pouvant être localement défini par des champs de vecteurs analytiques à singularités isolées. Un *polycycle* C de $\mathcal{F}$ est une réunion finie, compacte et connexe de singularités et de feuilles de $\mathcal{F}$ qui possède une application (unilatérale) de retour f dans le sens suivant : il existe une courbe analytique $T : [0,1] \longrightarrow M$, avec $T(0) \in C$ et T transverse à $\mathcal{F}$, telle que la feuille passant par $T(t)$, pour t suffisamment petit, recoupe une première fois T en $T(f(t))$.

L'application f fixe 0, préserve l'orientation, est analytique sur un ouvert $(0,\varepsilon)$ mais n'est pas en général analytique en 0.

<u>Problème de Dulac</u>.- <u>Montrer qu'un polycycle ne peut être limite de cycles limites</u>.

En d'autres termes, montrer que, si f n'est pas l'identité, 0 est un point fixe isolé de f.

C'est ce problème qu'Il'Yasenko et Écalle, Martinet, Moussu et Ramis annoncent avoir résolu. Il implique la conjecture de finitude : un champ de vecteurs polynômial de $\mathbb{R}^2$ définit par compactification un feuilletage singulier de $\mathbb{D}^2$ ([7], [8]), et le théorème de Poincaré - Bendixson montre que les feuilles compactes isolées d'un tel feuilletage ne peuvent s'accumuler que sur un polycycle.

A la date où cet exposé a été écrit (mi-octobre 1987), aucune rédaction complète de la démonstration n'était connue de l'auteur de ces lignes. Mais Écalle, Martinet, Moussu et Ramis ont eu la gentillesse de me raconter (en septembre 1987) leur démonstration. Je les en remercie, ainsi que de m'avoir communiqué nombre de leurs manuscrits. Ce sont les grandes lignes de leur démonstration que je vais tracer dans la suite, après quelques rappels (n° 2, 3, 4).

2. DÉSINGULARISATION

DÉFINITIONS.- *Une singularité* x_0 *d'un champ de vecteurs analytique* V *sur une surface est* réduite *si* $DV(x_0)$ *a une valeur propre non nulle ; une singularité réduite est* hyperbolique *si les deux valeurs propres sont réelles, non nulles et de signes contraires ; elle est* semi-hyperbolique *si l'une des deux valeurs propres est nulle.*

D'après le théorème de désingularisation de Seidenberg ([9], [10], [11]), on peut supposer que le polycycle C dans le problème de Dulac ne contient que des singularités réduites.

Éliminons immédiatement le cas où le polycycle C est une singularité (réduite) p de $\mathcal{F}$: Poincaré a démontré que p est un *centre* ou un *foyer* ([7]), donc le problème de Dulac a une réponse positive dans ce cas.

Le résultat d'Il'Yasenko de 1984 mentionné dans l'introduction est le suivant : si toutes les singularités du polycycle C sont hyperboliques, alors C n'est pas limite de cycles limites.

Lorsque C n'est pas réduit à un point (ce que nous supposerons dans la suite), il existe un entier $n \geq 1$, des singularités hyperboliques ou semi-hyperboliques (non nécessairement distinctes) $p_1, \ldots, p_n$ de $\mathcal{F}$, des feuilles $C_1, \ldots, C_n$ de $\mathcal{F}$, et des courbes analytiques transverses à $\mathcal{F}$ notées $T_i : [0,1] \longrightarrow M$ qui vérifient les propriétés suivantes (avec la convention $p_0 = p_n$, $C_0 = C_n$, $T_0 = T_n$) :

- $C = (\bigcup_{i=1}^{n} \{p_i\}) \cup (\bigcup_{i=1}^{n} C_i)$;

- C_i est une séparatrice de p_i et de p_{i+1}, orientée de p_i vers p_{i+1} ;

- $T_i(0) = q_i \in C_i$, les applications de transition $f_i : (T_{i-1}, q_{i-1}) \longrightarrow (T_i, q_i)$ sont définies, et l'application de retour f sur T_n s'écrit :

$$f = f_n \circ \ldots \circ f_1 .$$

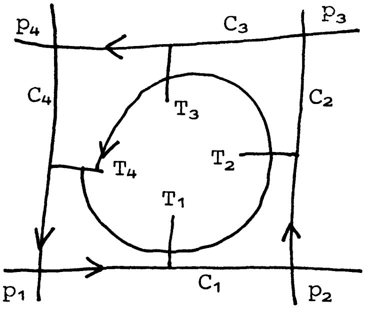


Figure 1

On note x_i la coordonnée de T_i donnée par le paramétrage. L'application f_i est alors un homéomorphisme d'un intervalle $[0,\varepsilon_i)$ sur un intervalle $[0,\varepsilon_i')$, analytique sur $(0,\varepsilon_i)$. Il sera en général plus pratique de rejeter la singularité de 0 à l'infini, en travaillant dans la coordonnée $y_i = x_i$ ou dans la coordonnée $z_i = \mathrm{Log}\, y_i$; on notera en fait f_i l'application de passage lue dans les coordonnées z_{i-1}, z_i, et on notera $\underline{f_i}$ (resp. $\underline{\underline{f_i}}$) la même application lue dans les coordonnées y_{i-1}, y_i (resp. x_{i-1}, x_i). (De façon générale, les notations non soulignées (resp. soulignées 1 fois, resp. 2 fois) désignent les objets lus dans les coordonnées z (resp. y, resp. x).)

3. SINGULARITÉS HYPERBOLIQUES. LE GROUPE D'IL'YASENKO

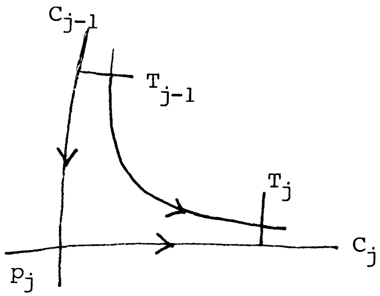


Figure 2

Soient $p = p_j$ une singularité hyperbolique du polycycle C et V un champ définissant $\mathcal{F}$ au voisinage de p. L'application $DV(p)$ a une valeur propre strictement négative λ_-, correspondant à la variété stable C_{j-1} de p, et une valeur propre strictement positive λ_+, correspondant à la variété instable C_j de p. On appelle le quotient $\lambda = -\lambda_-/\lambda_+$ *exposant caractéristique* de $\mathcal{F}$ en p (il ne dépend pas de V).

PROPOSITION (Dulac [4]).- *L'application* f_j *admet à l'infini un développement asymptotique de la forme*

$$\tilde{f}_j(z) = \lambda z + b + \sum_{\substack{m\geq 0\\ n\geq 0\\ m+n\geq 1}} e^{-(m+n\lambda)z} P_{m,n}(z) ,$$

où $b \in \mathbb{R}$ *et les* $P_{m,n}$ *sont des polynômes.*

Remarque.- Les $P_{m,n}$ sont constants lorsque λ est irrationnel.

Suivant Martinet ([13]), nous noterons $\mathcal{D}$ (pour Dulac) le groupe (pour la composition) constitué des séries formelles

$$\tilde{F}(z) = az + b + \sum_{\lambda\in\Lambda} e^{-\lambda z} P_\lambda(z) ,$$

avec $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, $P_\lambda \in \mathbb{R}[z]$ et Λ une partie discrète de $\mathbb{R}$ contenue dans $\mathbb{R}^{+*}$. Nous noterons d'autre part $\mathcal{I}$ (pour Il'Yasenko) le sous-groupe du groupe des germes en $+\infty$ de difféomorphismes analytiques engendré par toutes les applications de transition f (lues en coordonnées z) associées à des singularités hyperboliques. La proposition de Dulac définit un homomorphisme $d : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{D}$.

THÉORÈME (Il'Yasenko [5]).- *Cet homomorphisme est injectif.*

COROLLAIRE.- *Un polycycle* C *n'ayant que des singularités hyperboliques n'est pas accumulé par des cycles limites.*

En effet, si l'application de retour f n'est pas l'identité, son développement asymptotique est non trivial et f ne peut posséder de points fixes arbitrairement grands.

La preuve du théorème repose sur le fait que tout $f \in \mathcal{I}$ s'écrit comme somme d'une application affine et d'une application possédant un prolongement holomorphe *borné* sur un domaine $\{\mathrm{Re}\, z > K(1 + |\mathrm{Im}\, z|^{1/2}\}$, pour $K > 0$ assez grand ; l'injectivité de d résulte alors de la théorie de Phragmen-Lindelöf ([1], [5]).

Écalle, Martinet, Moussu et Ramis ont précisé le résultat d'Il'Yasenko en rendant notamment constructive l'application $d^{-1} : d(\mathcal{I}) \longrightarrow \mathcal{I}$. Nous en parlons au n° 5.

4. SINGULARITÉS SEMI-HYPERBOLIQUES

4.1. Soient $p = p_j$ une singularité semi-hyperbolique de C , V un champ de vecteurs analytique définissant $\mathcal{F}$ au voisinage de p , et μ la valeur propre non nulle de $DV(p)$.

Nous dirons que p est contractante (resp. dilatante) si μ est négative (resp. positive). Un changement d'orientation de $\mathcal{F}$ échange singularités contrac-

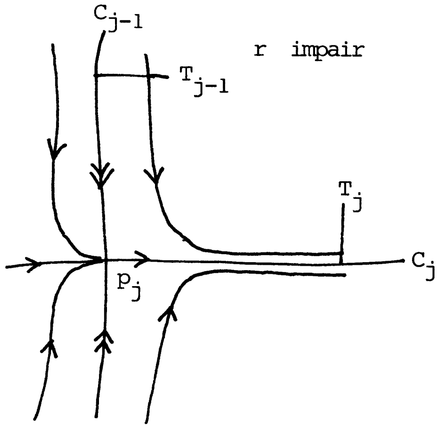


Figure 3

tantes et dilatantes et transforme les applications de passage en leurs inverses ; nous supposerons ici que p est contractante. La feuille C_{j-1} est alors la variété stable forte de p ; la feuille C_j est tangente en p à $\operatorname{Ker} DV(p)$ et nous noterons $r+1 \geq 2$ l'ordre auquel s'annule $V_{|C_j}$ en p.

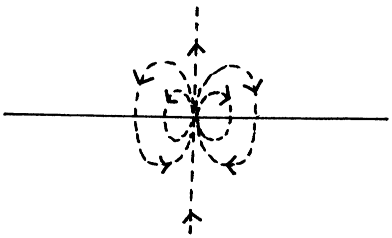
Pour avoir une bonne compréhension de la singularité semi-hyperbolique p, il est nécessaire de complexifier $\mathcal{F}$, V (et les transversales T_{j-1}, T_j) au voisinage de p. La classification de ces singularités dans le champ complexe a été faite par Martinet et Ramis ([14], [15], [16], [17]) ; elle repose sur la classification faite par Écalle ([18], [17], *cf.* aussi Voronin [19]) des germes de difféomorphismes holomorphes de $(\mathbb{C},0)$ qui sont tangents à l'identité.

4.2. Le point de vue géométrique

L'intersection de la variété invariante (complexifiée) C_{j-1} avec un voisinage de p est biholomorphe à $\mathbb{D}^*$, et l'holonomie de cette variété (i.e. le lacet fondamental positif de $\mathbb{D}^*$) définit un germe de difféomorphisme holomorphe $\underline{\underline{h}}$ de T_{j-1} de la forme :

$$\underline{\underline{h}}(x_{j-1}) = x_{j-1} + c\, x_{j-1}^{r+1} + \dots\,, \quad c = is\,, \quad s < 0\,.$$

Considérons un petit secteur $\mathcal{D} = \{x\,,\ 0 \leq |x| < \delta\,,\ |\operatorname{Arg} x| \leq \frac{\pi}{2r} - \varepsilon\}$; l'espace des orbites $\mathcal{E}$ de $\underline{\underline{h}}$ dans $\mathcal{D}$ est une surface de Riemann (biholomorphe à $\mathbb{D}$) ; en notant $\pi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$ l'application canonique, l'application de passage $\underline{\underline{f_j}}$ se prolonge analytiquement dans $\mathcal{D}$ et s'écrit $\underline{\underline{f_j}} = g_j \circ \pi$, où $g_j : (\mathcal{E}, \pi(0)) \longrightarrow (T_j, q_j)$ est un *germe de difféomorphisme holomorphe*.



dynamique de h (r = 1)

Figure 4

Il existe *deux* plongements remarquables de $(\mathcal{E}, \pi(0))$ dans $(\mathbb{C},0)$ (définis à homothéties près dans $\mathbb{C}$) ; notons $\underline{\underline{f_j^+}}$ et $\underline{\underline{f_j^-}}$ les relèvements à $\mathcal{D}$ de ces plongements ; alors $\underline{\underline{f_j^+}}$ et $\underline{\underline{f_j^-}}$ se prolongent analytiquement à des domaines respectifs :

$$\mathcal{D}^+ = \{x \;,\; 0 < |x| < \delta \;,\; -\frac{3\pi}{2r} + \varepsilon < \operatorname{Arg} x < \frac{\pi}{2r} - \varepsilon\} \;,$$
$$\mathcal{D}^- = \{x \;,\; 0 < |x| < \delta \;,\; -\frac{\pi}{2r} + \varepsilon < \operatorname{Arg} x < \frac{3\pi}{2r} - \varepsilon\} \;,$$

et s'obtiennent par uniformisation globale des espaces d'orbites de $\underline{\underline{h}}$ dans $\mathcal{D}^+$ et $\mathcal{D}^-$ (ces espaces sont biholomorphes à $\mathbb{C}^*$).

On peut donc écrire :

$$\underline{\underline{f}}_j = \underline{\underline{g}}_j^+ \circ \underline{\underline{f}}_j^+ = \underline{\underline{g}}_j^- \circ \underline{\underline{f}}_j^- \;,$$

où $\underline{\underline{g}}_j^+$, $\underline{\underline{g}}_j^-$ sont des germes de difféomorphismes holomorphes : $(\mathbb{C},0) \longrightarrow (T_j , q_j)$.

Remarques.- 1) Bien que f_j soit réel, $\underline{\underline{g}}_j^+$, $\underline{\underline{f}}_j^+$, $\underline{\underline{g}}_j^-$, $\underline{\underline{f}}_j^-$ ne le sont pas nécessairement.

2) Le germe de difféomorphisme holomorphe $k = \underline{\underline{f}}_j^+ \circ (\underline{\underline{f}}_j^-)^{-1}$, défini à composition près (à droite et à gauche) par des homothéties de $\mathbb{C}$, est un invariant de conjugaison holomorphe de $\underline{\underline{h}}$.

3) On a une interprétation analogue des applications de passage en termes d'holonomies des variétés invariantes pour les singularités hyperboliques.

4.3. Le point de vue analytique

Il s'agit de "calculer" effectivement $\underline{\underline{f}}_j^+$ et $\underline{\underline{f}}_j^-$. Dans la coordonnée y_{j-1} , on a :

$$\underline{h}(y_{j-1}) = y_{j-1}(1 - c\, y_{j-1}^r + \ldots) \;,$$

et on montre facilement le :

Lemme.- Il existe une série formelle $\tilde{U}$ *de la forme :*

$$\tilde{U}(y) = a y^r (1 + \sum_{n\geq 1} a_n y^{-n}) + b \operatorname{Log} y \;,\quad a > 0 \;,\quad a_n , b \in \mathbb{R} \;,$$

unique à addition près d'une constante, qui vérifie formellement :

$$\tilde{U}(\underline{h}(y)) = \tilde{U}(y) + 2\pi i$$

La série formelle $\tilde{V}(y) = \tilde{U}(y^{1/r})$ représente une fonction *résurgente* au sens d'Écalle ([18]). Indiquons comment cela permet de récupérer $\underline{\underline{f}}_j^+$ et $\underline{\underline{f}}_j^-$. Posons

$$\tilde{V}(y) = \frac{b}{r} \operatorname{Log} y + a y (1 + \tilde{W}(y)) \;,$$

et considérons la transformée de Borel *formelle* de $\tilde{W}$:

$$\hat{W}(\zeta) = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n\, \zeta^{(n/r)-1}}{\Gamma(n/r)} \;.$$

Dans le revêtement à r feuillets $\mathbb{C}_r$ de $\mathbb{C}$ ramifié à l'origine, cette série converge au voisinage de l'origine et la fonction $\hat{W}$ se prolonge analytiquement le long de tout chemin dans $\mathbb{C}_r$ dont la projection sur $\mathbb{C}$ ne rencontre pas $\mathbb{Z}$. De plus, dans tout secteur fermé de $\mathbb{C}_r$ dont la projection ne coupe $\mathbb{R}$ qu'en 0, la croissance de $\hat{W}$ à l'infini est au plus exponentielle ; on peut donc poser (avec $0 < \delta < \pi$) : $W^{\pm}(y) = \int_{\operatorname{Arg}\zeta = \pm\delta} e^{-\zeta y}\, \hat{W}(\zeta)\, d\zeta$, $\operatorname{Re}(y\, e^{\pm i\delta})$ assez grand,

$$V^{\pm}(y) = \frac{b}{r} \operatorname{Log} y + ay(1 + W^{\pm}(y)) ,$$

et on a finalement :

$$\underline{\underline{f}}_j^{\pm}(y) = \exp(V^{\pm}(y^r)) .$$

De plus, V^+ (resp. V^-) admet V comme développement asymptotique à l'infini dans le secteur $(\mathcal{D}^+)^{-r}$ (resp. $(\mathcal{D}^-)^{-r}$).

Justification sommaire.- La série $\tilde{U}$ est r-sommable au sens de Ramis ([20], [21]) ; ses coefficients vérifient des conditions de Gevrey d'ordre $1 + 1/r$; sur un secteur d'ouverture $< \pi/r$ (comme $\mathcal{D}$), il n'y a pas quasi analyticité (théorème de Borel-Ritt) et de nombreuses fonctions holomorphes dans $\mathcal{D}$ admettent $\tilde{U}$ comme développement asymptotique. Mais sur un secteur d'ouverture $\geq \pi/r$ (comme $\mathcal{D}^+$ ou $\mathcal{D}^-$), il y a quasi analyticité (théorèmes de Nevanlinna, Watson) d'où la possibilité de récupérer $\underline{f}_j^+$, $\underline{f}_j^-$ par transformées de Borel et Laplace.

5. COMPLÉMENTS SUR LE GROUPE D'IL'YASENKO

Notations et définitions :

Λ un semi-groupe additif discret contenu dans $\mathbb{R}^{+*}$;

$\mathbb{A}$ le groupe affine des applications : $z \longmapsto az + b$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$;

$d' : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{A}$, l'homomorphisme naturel ;

$\tilde{\mathbb{Q}}$ l'algèbre des séries formelles $g - d'(g)$, $g \in \mathcal{D}$;

$\mathcal{D}_K = \{z \in \mathbb{C} , \operatorname{Re} z \geq K(1 + \operatorname{Log}^+ |z|)\}$, pour $K > 0$;

$\mathcal{P}(\Lambda,K)$ l'algèbre de fonctions sur $\mathcal{D}_K$ engendrée par les "monômes" $z^r e^{-\lambda z} (r \in \mathbb{N} , \lambda \in \Lambda)$ qui sont bornés sur $\mathcal{D}_K$ (i.e. $r \leq \lambda K$) ;

$\mathbb{Q}(\Lambda,K)$ l'algèbre de Banach complétée de $\mathcal{P}(\Lambda,K)$ pour la norme uniforme ;

$\mathbb{Q}(\Lambda) = \bigcup_{K>0} \mathbb{Q}(\Lambda,K)$, $\mathbb{Q} = \bigcup_{\Lambda} \mathbb{Q}(\Lambda)$.

PROPOSITION.- 1) *Pour tout* $g \in \mathbb{Q}$, *il existe* $K > 0$ *et* $\tilde{g} \in \tilde{\mathbb{Q}}$ *tels que* $\tilde{g}$ *soit développement asymptotique uniforme de* g *sur* $\mathcal{D}_K$.

2) *L'homomorphisme* $g \longmapsto \tilde{g}$ *est injectif.*

3) *Pour tout* $f \in \mathcal{I}$, $f - d'd(f)$ *appartient à* $\mathbb{Q}$.

Remarque.- Pour $f \in \mathcal{I}$, la série formelle $d(f)$ ne converge pas, en général, à cause des petits diviseurs ; mais il est possible d'en regrouper les termes (les "compensateurs" d'Écalle) de façon que la série modifiée converge ([22]).

L'autre résultat important pour la suite est la possibilité de reconstruire f à partir de $d(f)$ d'une façon analogue à celle du n° 4.3. Soient $f \in \mathcal{I}$, $f_0 = f - d'd(f)$, et $\tilde{f}_0 = d(f) - d'd(f) = \sum_{\lambda\in\Lambda} e^{-\lambda z} P_\lambda(z)$; pour $K > 0$ assez grand, posons $z = h(w) = w + K \log w$, $f_1 = f_0 \circ h$, $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_0 \circ h$. On a :

$$\tilde{f}_1(w) = \sum_{\lambda\in\Lambda} e^{-\lambda w} w^{-K\lambda} P_\lambda(w + K \operatorname{Log} w) = \sum_{\lambda\in\Lambda} Q_\lambda(w) \ ;$$

d'autre part, f_1 est holomorphe et bornée dans un domaine $\{\operatorname{Re} w \geq w_0\}$, vérifiant de surcroît :

$$\int_{w_0-i\infty}^{w_0+i\infty} |f_1(w)| \ |dw| < +\infty \ .$$

Soit $\hat{Q}_\lambda$ la transformée de Borel de Q_λ :

$$\hat{Q}_\lambda(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{w_0-i\infty}^{w_0+i\infty} e^{w\zeta} Q_\lambda(w) \, dw \ , \quad \zeta \geq 0 \ .$$

On a $\hat{Q}_\lambda(\zeta) = 0$ pour $\zeta \in [0,\lambda]$, donc la transformée de Borel *formelle* $\sum_{\lambda\in\Lambda} \hat{Q}_\lambda(\zeta)$ de $\tilde{f}_1$ définit une fonction $\hat{f}_1$ sur $\mathbb{R}^+$. Le point crucial est que cette fonction croît au plus exponentiellement en ζ , et qu'on peut obtenir f_1 par transformée de Laplace :

$$f_1(w) = \int_0^{+\infty} e^{-w\zeta} \hat{f}_1(\zeta) \, d\zeta \ .$$

6. FACTORISATION DE L'APPLICATION DE RETOUR DU POLYCYCLE C

On notera dans la suite E l'application exponentielle.

6.1. Applications de transition admissibles. Profondeur

Pour $1 \leq n' \leq n$, on note $N^+(n')$ (resp. $N^-(n')$) le nombre de singularités semi-hyperboliques contractantes (resp. dilatantes) parmi $p_1,\ldots,p_{n'}$. Quitte à changer l'orientation de $\mathcal{F}$ et la numérotation cyclique de $p_1,\ldots,p_n$, on peut supposer qu'on a $N^+(n') \geq N^-(n')$ pour tout $1 \leq n' \leq n$. Un calcul facile montre alors le :

Lemme.- Supposons qu'on ait $N^+(n) > N^-(n)$. *Il existe alors* $\vartheta > 0$ *tel que l'application de retour* f *sur* T_n *vérifie* $f(z) > e^{\vartheta z}$ *pour* z *assez grand. Le polycycle* C *n'est donc pas limite de cycles limites.*

On supposera dorénavant qu'on a $N^+(n) = N^-(n)$. On appelle *profondeur* du polycycle C la valeur maximale de $N^+(n') - N^-(n')$ lorsque n' décrit $1,\ldots,n$.

Plus généralement, on dira que l'application de transition de T_i à T_j

(avec $0 \leq i \leq j \leq n$) est *admissible* si on a
$((N^+(\ell) - N^+(i)) - (N^-(\ell) - N^-(i)) \overset{\text{def}}{\equiv} N(i,\ell) \geq 0$ pour $i \leq \ell \leq j$ et $N(i,j) = 0$; on appellera profondeur de cette application la valeur maximale de $N(i,\ell)$, pour $i \leq \ell \leq j$.

6.2. Factorisation d'une application de transition admissible

Soient $0 \leq i \leq j \leq n$; supposons que l'application de transition f de T_i à T_j soit admissible, de profondeur N .

Si $N = 0$, les singularités $p_{i+1}, \dots, p_j$ sont hyperboliques et f appartient à $\mathcal{I}$.

Supposons $N > 0$. Il existe alors $s \geq 1$, et des entiers $i = i'_o < i_1 < i'_1 < \dots < i_s < i'_s < j + 1 = i_{s+1}$ déterminés par les propriétés suivantes :

- pour $1 \leq r \leq s$, p_{i_r} (resp. $p_{i'_r}$) est semi-hyperbolique contractante (resp. dilatante) ;

- si p_ℓ (avec $i < \ell \leq j$) est semi-hyperbolique, il existe $r \in \{1,\dots s\}$ tel que $i_r \leq \ell \leq i'_r$;

- pour $1 \leq r \leq s$, l'application f_r de transition de T_{i_r} à $T_{i'_r-1}$ est admissible de profondeur au plus $N - 1$.

On factorise donc f sous la forme suivante :

$$f = h_s \circ k'^{-1}_s \circ f_s \circ k_s \circ h_{s-1} \circ \dots \circ h_1 \circ k'^{-1}_1 \circ f_1 \circ k_1 \circ h_o ,$$

où k_r (resp. k'^{-1}_r) est l'application de transition à travers la singularité semi-hyperbolique contractante p_{i_r} (resp. dilatante $p_{i'_r}$), et $h_o,\dots,h_s$ appartiennent au groupe d'Il'Yasenko $\mathcal{I}$.

6.3. D'après 4.3, une application de transition k associée à une singularité semi-hyperbolique contractante s'écrit :

$$\underline{\underline{k}} = \underline{\underline{g}}^+ \circ \underline{\underline{k}}^+ \quad , \quad \underline{k}^+ = E \circ \underline{V}^+ \circ P_r \ ,$$

où $r \in \mathbb{N}^*$, P_r désigne l'application $y \longmapsto y^r$, $\underline{V}^+$ a été décrite en 4.3 et $\underline{\underline{g}}^+$ est un germe de difféomorphisme holomorphe de $(\mathbb{C},0)$. Désignons par $[k]$, g , m les applications $\underline{V}^+$, $\underline{\underline{g}}^+$, P_r lues en coordonnée z . On a donc $k = g \circ E \circ [k] \circ m$. De plus, $[k]$ n'est pas en général réelle mais admet à l'infini un développement asymptotique *réel* qui appartient à $\mathcal{D}$. En introduisant cette décomposition de k dans la factorisation du numéro précédent, on montre (par récurrence sur la profondeur) que toute application de transition admissible admet en coordonnée z un développement asymptotique à l'infini $d(f)$ qui appartient à $\mathcal{D}$.

Soit f une application de transition admissible, de profondeur N, factorisée comme au numéro précédent lorsque $N > 0$. On définit :

$$D_{-1}(f) = d'd(f) \qquad \text{(partie affine de } f \text{)} ;$$

$$D_0(f) = \begin{cases} f \quad \text{si} \quad N = 0 , \\ h_s\, m_s'^{-1}\, [k_s']^{-1}\, E^{-1}\, D_{-1}(f_s)\, E[k_s]\, m_s \ldots h_o , \text{ si } N > 0 ; \end{cases}$$

(on écrit $k_s = g_s\, E\, [k_s]\, m_s$ comme ci-dessus)

$$D_\ell(f) = \begin{cases} f \quad \text{pour} \quad \ell \geq N \geq 0 , \\ h_s\, k_s'^{-1}\, D_{\ell-1}(f_s)\, k_s\, h_{s-1} \ldots h_o \quad \text{pour} \quad 0 \leq \ell < N . \end{cases}$$

Lemme.- Pour tout $\ell \geq -1$ *, il existe* $A > 0$ *tels qu'on ait*

$$|f(z) - D_\ell(f)(z)| < E(-E^{\ell+1}(Az)) , \text{ pour } z \text{ assez grand.}$$

Lorsque f décrit l'ensemble des applications de transition admissibles, $D_\ell(f)$ parcourt un groupe d'applications qu'on notera K_ℓ ; une application de K_ℓ se prolonge analytiquement à un domaine de la forme :

$$\{z , \operatorname{Re} z \geq A , |\operatorname{Im} z| < A^{-1}\} \quad \text{pour} \quad \ell = 0 ,$$

$$\{z , \operatorname{Re} z \geq A , |\operatorname{Im} z| < E(-E^{\ell-1}(A \operatorname{Re} z))\} , \text{ pour } \ell > 0 .$$

On a $K_\ell \subset K_{\ell+1}$ pour $\ell \geq -1$, $K_{-1} = \mathbb{A}$, et K_0 est engendré par $\mathcal{I}$ et les applications $[k]$ associées à des selles semi-hyperboliques contractantes. D'après le lemme, toute application g dans K_ℓ $(\ell \geq 0)$ a un développement asymptotique à l'infini qui appartient à $\mathfrak{D}$.

THÉORÈME.- *L'homomorphisme* $d : K_0 \longrightarrow \mathfrak{D}$ *est injectif.*

On esquisse la démonstration du théorème, qui fait appel à la notion d'accélération des fonctions résurgentes, au numéro suivant.

COROLLAIRE.- *Si* $g \in K_0$ *est distinct de l'identité, il existe* $A > 0$ *tel qu'on ait* $|g(z) - z| > E(-Az)$ *pour* z *assez grand.*

THÉORÈME.- *Soient* $\ell \geq 0$, $g \in K_\ell$ *distinct de l'identité ; il existe* $A > 0$ *tel qu'on ait* $|g(z) - z| > E(-E^\ell(Az))$ *pour* z *assez grand.*

Ce théorème termine bien sûr la résolution du problème de Dulac ; sa démonstration fait appel à des développements formels qu'Écalle appelle "transasymptotiques" (ils ne peuvent plus s'interpréter comme développements asymptotiques ordinaires) et à la resommation de ces développements ; nous évoquerons ceci au n° 8.

7. L'ACCÉLÉRATION ET LA QUASI-ANALYTICITÉ DE K_0

7.1. Pour motiver ce qui suit, considérons la situation (très simplifiée) suivante.

Soit $\tilde{U}(y) = b \operatorname{Log} y + a y^r (1 + \tilde{w}(y))$, $\tilde{w}(y) = \sum_{n\geq 1} a_n y^{-n}$ une série formelle associée à une singularité semi-hyperbolique comme en 4.3. L'entier $r \geq 1$ s'appelle le *niveau* de $\tilde{U}$ (ou $\tilde{w}$) ; pour récupérer une fonction w à partir de $\tilde{w}$, on pose $\tilde{W}(y) = \tilde{w}(y^{1/r})$, on prend la transformée de Borel $\hat{W}$ de $\tilde{W}$ puis la transformée de Laplace W de $\hat{W}$, et on pose $w(y) = W(y^r)$ (*cf.* 4.3).

Supposons maintenant qu'on se donne deux séries formelles $\tilde{w}_1$, $\tilde{w}_2$ du type précédent, de niveaux distincts $r_1 < r_2$. Comment récupérer, en connaissant seulement r_1, r_2 et la série "brute" $\tilde{w} = \tilde{w}_1 + \tilde{w}_2$, la fonction $w_1 + w_2 = w$?

Si on pose $\tilde{W}(y) = \tilde{w}(y^{1/r})$, la transformée de Borel formelle $\hat{W}$ de W ne converge en général au voisinage de l'origine que pour $r \leq r_1$, mais elle est alors à l'infini de croissance exponentielle d'ordre > 1, et on ne peut prendre sa transformée de Laplace.

Les opérateurs d'"accélération", qu'on introduit maintenant, remédient à ces problèmes de "mélange de niveaux".

7.2. Les opérateurs d'accélération ([23])

Pour $0 < \alpha < 1$, considérons la fonction entière :

$$C_\alpha(\zeta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \sin(\pi n \alpha) \frac{\Gamma(1+n\alpha)}{\Gamma(1+n)} \zeta^n .$$

Elle vérifie :

$$C_\alpha(\zeta) \sim K_\alpha\, \zeta^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} E\left(-\zeta^{\frac{1}{1-\alpha}}\right) , \quad |\operatorname{Arg} \zeta| < \frac{\pi}{2}(1-\alpha) , \quad |\zeta| \longrightarrow +\infty .$$

L'opérateur intégral d'*accélération d'ordre* α défini par :

$$\mathfrak{C}_\alpha(\varphi)(\zeta_2) = \zeta_2^{-1} \int_0^{+\infty} \varphi(\zeta_1)\, C_\alpha(\zeta_1 \zeta_2^{-\alpha})\, d\zeta_1 .$$

associe à une fonction φ, continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, intégrable en 0 et à croissance exponentielle d'ordre $\leq (1-\alpha)^{-1}$ une fonction $\mathfrak{C}_\alpha(\varphi)$ holomorphe dans le secteur $\left\{\zeta , |\operatorname{Arg} \zeta| < \frac{\pi}{2} \frac{1-\alpha}{\alpha}\right\}$.

L'opérateur $\mathfrak{C}_\alpha$ préserve la convolution ; il est conjugué, via la transformation de Borel formelle, au changement de variable $z \longmapsto z^\alpha$ dans le sens suivant : soient $r > 0$, et $\tilde{w} = \sum_{n\geq 1} a_n z^{-n}$ une série formelle r-sommable dans la direction de $\mathbb{R}^+$ ([20], [21]), par exemple celle considérée en 7.1 ; si on pose $\tilde{W}_\gamma(z) = \tilde{w}(z^{1/\gamma})$ pour $\gamma > 0$, la transformée de Borel formelle $\hat{W}_\gamma$ de $\tilde{W}_\gamma$ converge au voisinage de l'origine pour $\gamma \leq r$, et pour $\gamma < r$ c'est une fonction entière (sur la surface de Riemann du logarithme) à croissance exponentielle d'ordre $\leq \frac{r}{r-\gamma}$; on a alors

$$\hat{W}_{\gamma'} = \mathfrak{C}_{\gamma/\gamma'}(\hat{W}_\gamma) \quad , \quad \text{pour} \quad \gamma < \gamma' \leq r \ .$$

Pour $0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1$, les opérateurs $\mathfrak{C}_{\alpha_1} \mathfrak{C}_{\alpha_2}$ et $\mathfrak{C}_{\alpha_1\alpha_2}$ coïncident là où ils sont définis.

7.3. Les algèbres $\mathbb{A}(p_0 \dots p_r)$

Soient $0 < p_0 < p_1 < \dots < p_r$ des nombres réels ; on pose $\alpha_i = \frac{p_{i-1}}{p_i}$ pour $1 \leq i \leq r$. Nous dirons, après Écalle (qui emploie d'ailleurs le terme dans un contexte légèrement différent), qu'une série formelle $\tilde{w}(z) = \sum_{\lambda\in\Lambda} z^{-\lambda} P_\lambda(\mathrm{Log}\, z)$ ($P_\lambda \in \mathbb{C}[z]$, $\Lambda \subset \mathbb{R}^{+*}$, discret) est accélérosommable dans la direction de $\mathbb{R}^+$, de niveaux $p_0 \dots p_r$, si les conditions suivantes sont réalisées :

- la transformée de Borel formelle $\hat{w}_0$ de $w_0(z) = \tilde{w}(z^{1/p_0})$ converge au voisinage de l'origine et se prolonge en une fonction holomorphe au voisinage de $\mathbb{R}^+$ de croissance exponentielle d'ordre $\leq \frac{1}{1-\alpha_1}$; on peut donc définir $\hat{w}_1 = \mathfrak{C}_{\alpha_1}(\hat{w}_0)$;

- pour $1 \leq i \leq r-1$, la fonction $\hat{w}_i = \mathfrak{C}_{\alpha_i}(\hat{w}_{i-1})$ est holomorphe dans un secteur $\{|\mathrm{Arg}\, \zeta| < \delta_i\}$ et à croissance exponentielle d'ordre $\leq \frac{1}{1-\alpha_{i+1}}$ dans ce secteur ; on peut donc définir $\hat{w}_{i+1} = \mathfrak{C}_{\alpha_{i+1}}(\hat{w}_i)$;

- la fonction $\hat{w}_r$ est holomorphe dans un secteur $\{|\mathrm{Arg}\, \zeta| < \delta_r\}$, à croissance au plus exponentielle dans ce secteur.

On peut donc prendre la transformée de Laplace w_r de $\hat{w}_r$, et la fonction $w(z) = w_r(z^{p_r})$ sera dite *somme* de $\tilde{w}$; elle admet $\tilde{w}$ comme développement asymptotique à l'infini. Revenant à l'exemple considéré en 7.1, la série $\tilde{w} = \tilde{w}_1 + \tilde{w}_2$ est accélérosommable de niveaux r_1, r_2 et de somme $w_1 + w_2$ (mais pas dans la direction de $\mathbb{R}^+$ où $\hat{w}$ a des singularités ; il faut commencer par conjuguer $\tilde{w}_1, \tilde{w}_2$ par de petites rotations).

PROPOSITION.- *Les séries* $\tilde{w}$ *qui vérifient les conditions précédentes forment une algèbre stable par dérivation, notée* $\mathbb{A}(p_0 \dots p_r)$, *qui contient, pour* $1 \leq i \leq r$, *l'algèbre des séries* p_i*-sommables dans la direction de* $\mathbb{R}^+$.

Remarque.- On a bien sûr, pour tout $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$, une notion d'accélérosommabilité dans la direction $\{\mathrm{Arg}\, z = \vartheta^0\}$: une série formelle w est accélérosommable dans cette direction si la série $w(e^{-i\vartheta_0} z)$ l'est dans la direction de $\mathbb{R}^+$.

7.4. Quasi-analyticité de K_0

Construction de l'inverse de $d : K_0 \longrightarrow \mathfrak{D}$.

Soit $f = g_s \circ h_s \circ g_{s-1} \circ \dots \circ g_1 \circ h_1$ un élément de K_0 ; pour

$1 \leq i \leq s$, h_i appartient à $\mathcal{I}$, et on note λ_i le coefficient de z dans $d(h_i)$; les g_i sont des applications de la forme $[k]$ ou $[k]^{-1}$ (cf. 6.3) associées à des singularités semi-hyperboliques ; le coefficient de z dans $d(g_i)$ est égal à 1 . Posons $\mu_i = \prod_{j\leq i} \lambda_j$ pour $1 \leq i \leq s$ et réordonnons l'ensemble $\{\mu_1,\ldots,\mu_s\} = \{p_o < p_1 < \ldots < p_r\}$.

Posons $y = e^{zp_o} = M(z)$ et considérons la série formelle :

$$M \circ d(f) \circ M^{-1} = b\, y^{\mu_s}(1 + \sum_{n\geq 0} Q_n(y)) ,$$

avec $b > 0$, $Q_n(y) = y^{-\lambda_n} P_n(\mathrm{Log}\, y)$, $\lambda_n > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$, et $P_n \in \mathbb{R}[X]$. La transformée de Borel $\hat{Q}_n$ de Q_n est de la forme :

$$\hat{Q}_n(\zeta) = \zeta^{\lambda_n - 1} R_n(\mathrm{Log}\, \zeta) \quad , \quad R_n \in \mathbb{R}[X] .$$

La série $\Sigma\, \hat{Q}_n(\zeta)$ est en général divergente à l'origine (à cause des petits diviseurs) mais un changement de variable $\zeta = E(- w - K \,\mathrm{Log}\, w)$ ($K > 0$ assez grand) permet de la "resommer" exactement comme au n° 5, pour obtenir une fonction $\hat{\varphi}(\zeta)$.

On peut alors à partir de $\hat{\varphi}$ appliquer successivement les opérateurs d'accélération $\mathcal{C}_{p_o/p_1},\ldots,\mathcal{C}_{p_{r-1}/p_r}$ pour obtenir une fonction $\hat{\psi}$ à croissance au plus exponentielle à l'infini, dont on prend la transformée de Laplace ψ . On récupère finalement f grâce à la formule :

$$M \circ f \circ M^{-1}(y) = b\, y^{\mu_s}(1 + \psi(y^{p_r/p_o})) .$$

Remarques.- 1) Les intégrales définissant les opérateurs d'accélération et la transformée de Laplace doivent être prises sur un rayon $\{\mathrm{Arg}\, \zeta = \delta\}$, $\delta > 0$, car les fonctions considérées ont (en général) des singularités au dessus de $\mathbb{Z}$; c'est la raison pour laquelle on récupère des fonctions à valeurs *complexes* à partir de développements asymptotiques *réels*.

2) Supposons que les développements asymptotiques $d(h_i)$ $(1 \leq i \leq s)$ soient convergents. La série $\Sigma\, \hat{Q}_n(\zeta)$ est alors convergente au voisinage de l'origine, et la série formelle $\Sigma\, Q_n(y^{p_o})$ est accélérosommable dans la direction $\{\mathrm{Arg}\, y = \delta\}$ ($\delta > 0$, petit), de niveaux $p_o \ldots, p_r$ et de somme $\psi(y^{p_r})$. La justification principale de la construction précédente est le fait suivant : si $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ sont deux séries formelles accélérosommables de niveaux $p_o \ldots p_r$ (de sommes respectives f et g), alors $\tilde{h}(y) = \tilde{f}(y + \tilde{g}(y))$ l'est aussi, et sa somme est $h(y) = f(y + g(y))$ (pour voir ceci, on utilise l'opération de "composition - convolution", conjuguée de la composition des séries formelles par la transformation de Borel formelle).

3) Dans le cas général, il faut remplacer les algèbres $\mathbb{A}(p_o \ldots p_r)$ par des algèbres plus grosses $\mathbb{B}(p_o \ldots p_r)$, encore stables par dérivation, où le

processus de resommation est celui décrit dans la construction ; l'observation cruciale est la suivante : la transformée de Borel d'une fonction φ de $\mathbb{Q}$ (*cf.* n° 5) *par rapport à la variable* $y = E(z)$ appartient encore à $\mathbb{Q}$, et son développement asymptotique est la transformée de Borel *formelle* de $d(\varphi)$ par rapport à la variable y.

8. DÉVELOPPEMENTS TRANSASYMPTOTIQUES

8.1. Toutes les idées nécessaires à la démonstration du deuxième théorème de 6.3 ("quasi-analyticité" de K_ℓ) sont maintenant en place. Le principe de la démonstration de ce théorème est le suivant : à une application $D_\ell(f)$ factorisée comme en 6.3, on associe un développement "transasymptotique", qui est par définition la "composition formelle" des développements asymptotiques des termes de la factorisation de $D_\ell(f)$; il est alors possible, en combinant les différentes techniques de resommation introduites précédemment, de récupérer l'application $D_\ell(f)$ à partir de son développement transasymptotique $\widetilde{D}_\ell(f)$; en particulier, on a $D_\ell(f) = \mathrm{id}$ si $\widetilde{D}_\ell(f) = \mathrm{id}$; lorsque $\widetilde{D}_\ell(f)$ n'est pas l'identité, la différence $\widetilde{D}_\ell(f) - \mathrm{id}$ a une partie principale qui garantit après resommation la conclusion du théorème.

Je vais détailler un peu ceci pour $D_1(f)$, le cas général n'étant pas essentiellement différent.

8.2. Calculs formels

Une application $F = D_1(f)$ s'écrit (*cf.* 6.3) :

$$F = F_s \circ G_s \circ F_{s-1} \cdots \circ G_1 \circ F_0 ,$$

avec $F_i \in K_0$, $G_i = E^{-1} g_i' f_i g_i E$, $f_i \in K_0$ et g_i, g_i' convergentes (à coefficients complexes). On peut même supposer que la partie affine de f_i est triviale, de sorte que G_i possède un développement asymptotique de la forme

$$z + \sum_\sigma E(-\sigma E(z))\, Q_\sigma \quad , \quad Q_\sigma \in \mathbb{C}[E(z), E(-z)] .$$

Notations.- 1) $\widetilde{L}$ est l'algèbre des séries formelles $\sum_{\lambda \in \Lambda} E(-\lambda z)\, P_\lambda(z)$, avec $P_\lambda \in \mathbb{C}[z]$ et Λ discret et minoré dans $\mathbb{R}$.

2) Soit A une algèbre ; les séries formelles $\sum_{\sigma \in (\mathbb{R}^+)^r} a_\sigma Y_1^{-\sigma_1} \cdots Y_r^{-\sigma_r}$, avec $a_\sigma \in A$ et $a_\sigma = 0$ sauf pour une partie discrète de $(\mathbb{R}^+)^r$, forment une algèbre notée $A\langle Y_1,\dots,Y_r\rangle$.

Posons $z_{i+1} = F_i \circ F_{i-1} \circ \cdots \circ F_0(z)$ pour $0 \le i \le s$ et $\Delta F(z) = F(z) - z_{s+1}$. On calcule formellement ΔF par la formule de Taylor en traitant dans un premier temps les z_i comme des variables indépendantes ; on obtient ainsi un élément $\widetilde{\Delta F}_0$ de $L\langle E^2(z_1),\dots,E^2(z_s)\rangle$, où L est l'algèbre engendrée par les fonctions $E(z_j)$, $E(-z_j)$, $D^\ell F_j(z_j)$ $(1 \leq j \leq s\ ,\ \ell \geq 1)$.

Par ailleurs, écrivons le développement de $E(z_i)$ déduit de celui de z_i sous la forme $E(z_i) = P_i(z) + S_i(z)$, avec $S_i(z) = o(1)$ et

$$P_i(z) = \sum_{\substack{\sigma\geq 0\\ m\in\mathbb{N}}} E(\sigma z)\ z^m\ a_{\sigma,m} \quad \text{(somme finie)}.$$

On choisit une base $Q_1,\ldots,Q_r$ de l'espace vectoriel réel engendré par $P_1,\ldots,P_s$ qui vérifie :

i) les coordonnées des P_j dans cette base sont positifs ou nuls ;

ii) $Q_{i+1}(z) = o(Q_i(z))$ pour $i = 1,\ldots,r-1$.

On pose $Y_i = E(Q_i(z))$; on déduit de $\widetilde{\Delta F}_0$ un élément $\widetilde{\Delta F}_1$ de $\not{L}\langle Y_1,\ldots,Y_r\rangle$, où $\not{L}$ est l'algèbre engendrée par L et les $E(-\sigma S_i(z))$, $1 \leq i \leq s$, $\sigma > 0$.

Tout élément q de $\not{L}$ a un développement asymptotique $d(q)$ qui appartient à $\tilde{L}$. L'élément $\widetilde{\Delta F}$ de $\tilde{L}\langle Y_1 \ldots Y_r\rangle$ déduit de $\widetilde{\Delta F}_1$ est le *développement transasymptotique* de ΔF .

8.3. Resommation

Le premier point crucial est que l'homomorphisme $d : \not{L} \longrightarrow \tilde{L}$ est injectif, et qu'on peut calculer son inverse par la méthode indiquée en 7.4.

On récupère donc $\widetilde{\Delta F}_1 \in \not{L}\langle Y_1,\ldots,Y_r\rangle$ à partir de $\widetilde{\Delta F}$. On considère $\widetilde{\Delta F}_1$ comme élément de $\not{L}\langle Y_r\rangle\langle Y_1 \ldots Y_{r-1}\rangle$, et on commence par resommer les éléments de $\not{L}\langle Y_r\rangle$. Soit $\ell = \Sigma\, \ell_\sigma\, Y_r^{-\sigma}$ un tel élément ; il possède des "niveaux" $p_0 \ldots p_r$ (*cf.* 7.3) ; on pose $y = Y_r^{p_0} = E(p_0\, Q_r(z)) = H(z)$, et on considère la transformée de Borel *formelle* $\hat{\ell}$ de $\ell \circ H^{-1}$.

$$\hat{\ell}(\zeta) = \Sigma\ \hat{\ell}_\sigma * \frac{\zeta^{(\sigma/p_0)-1}}{\Gamma(\sigma/p_0)} ,$$

où $\hat{\ell}_\sigma$ est la transformée de Borel de $\ell_\sigma \circ H^{-1}$. On procède ensuite comme en 7.4 pour resommer $\hat{\ell}$, puis accélérer et récupérer $\ell \circ H^{-1}$ par transformation de Laplace (les "coefficients" ℓ_σ se comportent essentiellement comme des constantes).

On répète successivement ce procédé par rapport aux variables $Y_{r-1},\ldots,Y_1$ et on obtient finalement la *fonction* ΔF .

8.4. *Remarque*.- Les variables $Y_1,\ldots,Y_r$ sont ici des fonctions explicites de z . En considérant les développements transasymptotiques associés à $D_\ell(f)$, $\ell \geq 2$, on introduit des variables auxiliaires dont la définition contient des exponentielles de séries formelles. Il faut alors commencer par resommer celles-ci par les techniques usuelles.

9. REMARQUE

La démonstration qu'on a évoquée ci-dessus utilise au maximum les propriétés analytiques des applications de transition, et évite dans la mesure du possible de faire beaucoup de calculs formels.

Une autre approche serait au contraire de faire l'essentiel du travail dans un cadre formel, en essayant de comprendre dans quelle mesure les développements asymptotiques des applications de transition peuvent se compenser par composition.

En développant cette approche, Écalle, Martinet, Moussu et Ramis sont parvenus à montrer le résultat suivant [3] : si l'application de retour est analytique, les singularités semi-hyperboliques du polycycle se regroupent en paires dilatante - contractante de singularités isomorphes à ramification finie près.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. MOUSSU - *Le problème de la finitude du nombre de cycles limite*, Sém. Bourbaki, exposé n° 655 (1985), Astérisque 145-146 (1987), 89-101.

[2],[3] J. ÉCALLE, J. MARTINET, R. MOUSSU, J.-P. RAMIS - *Non-accumulation de cycles limites*, C.R.A.S. t. 304, série I, n° 14 (1987), (I) 375-378, (II) 431-434.

[4] H. DULAC - *Sur les cycles limites*, Bull. Soc. Math. France, 51 (1923), 45-188.

[5] Yu. IL'YASENKO - *Limit cycles of polynomial vector fields with non degenerate singular points on the real plane*, Funk. Anal. Eqo. Pri., 18, 3 (1984), 32-34.

[6] R. BAMON - *Quadratic vector fields in the plane have a finite number of limit cycles*, Publ. Math. IHES, 64 (1986), 111-142.

[7] H. POINCARÉ - Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle, J. Math. 7 (1881), 375-422.

[8] J. SOTOMAYOR - *Curvas definidas por equaçoes diferenciais no plano*, 13e Coll. Bras. Math., publ. IMPA (1981).

[9] A. SEIDENBERG - *Reduction of singularities of the differentiable equation* A dy = B dx , Amer. J. Math. (1968), 248-269.

[10] F. DUMORTIER - *Singularities of vector fields*, J. of Diff. Eq., 23, 1 (1977).

[11] J.-F. MATTEI, R. MOUSSU - *Holonomie et intégrales premières*, Ann. Sc. E.N.S., 13 (1980), 469-523.

[12] Yu. IL'YASENKO - Ycπ. Mam. Hayk., 42, 3 (1987), 223.

[13] J. MARTINET - Conférence à l'IMPA (Rio) (1985).

[14] J. MARTINET, J.-P. RAMIS - *Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre*, Publ. Math. IHES, 55 (1982), 63-164.

[15] J. MARTINET, J.-P. RAMIS - *Classification analytique des équations différentielles non linéaires résonnantes du premier ordre*, Ann. Sc. E.N.S., 4e série, t. 16 (1983), 671-625.

[16] J. MARTINET, J.-P. RAMIS - *Analytic classification of resonant saddles and foci, in singularities and dynamical systems*, S.N. Pneumatikos - Editor, North Holland (1985), 109-136.

[17] B. MALGRANGE - *Travaux d'Écalle et de Martinet - Ramis sur les systèmes dynamiques*, Sém. Bourbaki, exposé n° 582 (1981), Astérisque n° 92-93 (1982) 59-73.

[18] J. ÉCALLE - *Les fonctions résurgentes* (I), (II), (III), Publications Université Paris XI.

[19] S. VORONIN - *Classification des germes d'applications conformes* $(\mathbb{C},0) \longrightarrow (\mathbb{C},0)$ *tangents à l'identité*, Funkt. Anal. 15-1 (1981), 1-17.

[20] J.-P. RAMIS - *Les séries* k*-sommables et leurs applications*, L.N. in Physics 126, Springer (1980).

[21] J.-P. RAMIS - *Théorèmes d'indice Gevrey pour les équations différentielles ordinaires*, Memoirs Am. Math. Soc., 48, 296 (1984).

[22] J. ÉCALLE, J. MARTINET, R. MOUSSU, J.-P. RAMIS - *Le problème de Dulac : solution et compléments*, à paraître.

[23] J. ÉCALLE - *L'accélération des fonctions résurgentes*, manuscrit (1987).

[24] R. MOUSSU - *Le problème de Dulac*, Journées X - UPS (1987).

[25] J.-P. RAMIS - *Phénomène de Stokes et resommation*, C.R.A.S., t. 301, Série 1, n° 4 (1985), 99-102.

[26] J. MARTINET - *Le problème de Dulac pour un polycycle comportant deux cols semi-hyperboliques*, manuscrit (1968).

Jean-Christophe YOCCOZ

École Polytechnique
Centre de Mathématiques
F-91128 PALAISEAU CEDEX