PIERRE CARTIER

Jacobiennes généralisées, monodromie unipotente et intégrales itérées

Astérisque, tome 161-162 (1988), Séminaire Bourbaki, exp. n° 687, p. 31-52

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1987-1988__30__31_0>

Séminaire BOURBAKI
40ème année, 1987-88, n° 687
Novembre 1987

JACOBIENNES GÉNÉRALISÉES, MONODROMIE UNIPOTENTE ET INTÉGRALES ITÉRÉES

par Pierre CARTIER

Dédié à la mémoire de
Kuo-Tsai CHEN

1. INTRODUCTION À LA MONODROMIE

1.1. La monodromie est apparue dans l'étude faite par Riemann (après Gauss et Kummer) de *l'équation différentielle hypergéométrique*. Rappelons que la *série hypergéométrique*

(1) $$F(a,b\,;c\,;z) = 1 + \sum_{n\geq 1} (a)_n\,(b)_n\,z^n/(c)_n\,n\,!$$

(avec la convention $(a)_n = a(a+1)\ldots(a+n-1)$) admet le rayon de convergence 1 en la variable complexe z . Elle est définie si c n'est pas un entier négatif et elle satisfait à l'équation différentielle

(2) $$z(1-z)\,D^2F + (c-(a+b+1)z)\,DF - abF = 0$$

(on pose $D = d/dz$). Coupons le plan $\mathbb{C}$ de la variable complexe z en enlevant les intervalles réels $I_0 =]-\infty,0]$ et $I_1 = [1,+\infty[$; l'ensemble restant Ω est simplement connexe. On étend la fonction $F(a,b\,;c\,;z)$, au-delà du cercle de convergence, par la représentation intégrale (due à Euler)

(3) $$F(a,b\,;c\,;z) = \Gamma(c)\,\Gamma(b)^{-1}\,\Gamma(c-b)^{-1}\int_0^1 t^{b-1}\,(1-t)^{c-b-1}\,(1-tz)^{-a}\,dt$$

qui garde un sens pour z dans Ω . Avec cette définition de F , on obtient un système fondamental de solutions *dans* Ω de l'équation différentielle hypergéométrique sous la forme

(4) $$u_1(z) = F(a,b\,;c\,;z) \qquad u_2(z) = z^{1-c}\,F(a-c+1\,,b-c+1\,;2-c\,;z)\ ,$$

du moins si aucun des nombres a , b , $c-a$, $c-b$, $a-b$, $c-a-b$ n'est un entier.

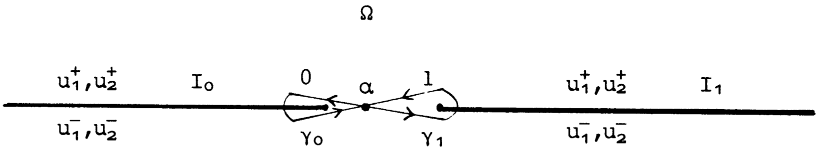

Figure 1

1.2. Lorsque t est réel, les limites $u_k(t \pm i0) = \lim_{\varepsilon \to 0} u_k(t \pm i\varepsilon)$ (pour $k = 1,2$ et $\varepsilon > 0$) existent. Convenons d'écrire $u(z)$ pour la matrice $\begin{pmatrix} u_1(z) \\ u_2(z) \end{pmatrix}$. Comme l'intervalle $]0,1[$ est contenu dans Ω où $u(z)$ est holomorphe, on a $u(t+i0) = u(t-i0)$ pour t dans $]0,1[$. Mais, lorsque t appartient à l'un des intervalles I_0 et I_1 , on a des relations

(5) $$u(t+i0) = M_0 u(t-i0) \quad \text{pour } t \in I_0$$

(6) $$u(t-i0) = M_1 u(t+i0) \quad \text{pour } t \in I_1$$

où M_0 et M_1 sont des matrices 2×2 , à coefficients complexes (constants). Ces relations sont essentiellement dues à Kummer (1836) et se déduisent de la relation

(7) $$F(a,b,c\,;z) = A_1\, F(a,b\,;a+b-c+1\,;1-z) + A_2(1-z)^{c-a-b}\, F(c-a\,,c-b\,;c-a-b+1\,;1-z)$$

(où A_1 et A_2 sont des constantes) et d'une relation analogue avec $1-z$ remplacé par $1/z$; ces relations sont valables pour z non réel et elles exploitent les propriétés d'invariance de l'équation hypergéométrique dans le changement de z en $1-z$ ou $1/z$. *Pour Kummer, la monodromie de la fonction hypergéométrique s'exprime par les relations* (5) *et* (6), *et donc par les matrices* M_0 *et* M_1 .

1.3. Le point de vue "moderne" est dû à Riemann, qui en donne la formulation générale en 1851 et l'application à la fonction hypergéométrique en 1857. Posons $X = \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ et notons $\widetilde{X}$ un revêtement universel de X , et Γ le groupe fondamental, qui opère sur $\widetilde{X}$ de sorte qu'on ait $X = \widetilde{X}/\Gamma$. Comme Ω est simplement connexe, on peut - et l'on doit - choisir une section $s : \Omega \longrightarrow \widetilde{X}$ de la projection canonique $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$. Ceci permet d'identifier canoniquement Γ à $\pi_1(X, \alpha)$ pour tout point base α dans Ω . Alors Γ est le groupe libre à deux générateurs γ_0 et γ_1 correspondant aux lacets de la figure 1. Comme $\widetilde{X}$ est localement homéomorphe à X , c'est une variété analytique complexe de dimension 1 ; il existe alors deux fonctions holomorphes U_k sur $\widetilde{X}$, dont les *branches principales* $U_k \circ s$ sur Ω coïncident avec u_k (pour k égal à 1 ou 2). Posons encore $U(\widetilde{z}) = \begin{pmatrix} U_1(\widetilde{z}) \\ U_2(\widetilde{z}) \end{pmatrix}$. Il existe alors une représentation linéaire $M : \Gamma \longrightarrow GL_2(\mathbb{C})$ telle que l'on ait

$$U(\gamma\tilde{z}) = M(\gamma)\, U(\tilde{z}) \qquad (\tilde{z} \in \tilde{X} \ , \ \gamma \in \Gamma) \ . \tag{8}$$

Comme Γ est un groupe libre, la représentation M est définie par la donnée des matrices $M(\gamma_0)$ et $M(\gamma_1)$ *qui ne sont autres que* M_0 *et* M_1 . *Pour Riemann, la relation* (8) *exprime la monodromie*, d'où le nom de *représentation de monodromie* donné à M .

Il est facile de jeter un pont entre les points de vue de Kummer et de Riemann. Les diverses "branches" $u_{k,\gamma}$ des fonctions u_k sont définies par la formule

$$M(\gamma) \begin{pmatrix} u_1(z) \\ u_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1,\gamma}(z) \\ u_{2,\gamma}(z) \end{pmatrix} = u_\gamma(z) \tag{9}$$

pour z dans Ω et γ dans Γ . Les conditions de raccordement se déduisent des relations (5) et (6) :

$$u_\gamma(t+i0) = u_{\gamma\gamma_0}(t - i0) \qquad \text{pour} \quad t \in I_0 \tag{10}$$

$$u_\gamma(t-i0) = u_{\gamma\gamma_1}(t + i0) \qquad \text{pour} \quad t \in I_1 \ . \tag{11}$$

La fonction hypergéométrique $u_1(z) = F(a,b\,;c\,;z)$ est donc multiforme, mais ses branches, comme celles de z^α , ou de $\log z$, sont des combinaisons linéaires d'un nombre fini de fonctions. On dit que c'est une *fonction à détermination finie.*

1.4. Les résultats précédents se généralisent à toutes les équations différentielles linéaires à coefficients rationnels. Comme tout étudiant le sait, une équation différentielle linéaire se ramène à un système du premier ordre que nous écrirons sous la forme

$$DF(z) = R(z)\, F(z) \ ; \tag{12}$$

on cherche une matrice $F(z) = \begin{pmatrix} F_1(z) \\ \vdots \\ F_n(z) \end{pmatrix}$ solution et $R(z)$ est une matrice carrée d'ordre n , fonction rationnelle de z . Le *cas régulier de Fuchs* est celui où la forme différentielle $R(z)dz$ a des pôles d'ordre 1 , y compris à l'infini. Soient $a_1,\ldots,a_k$ les pôles à distance finie et $A_1,\ldots,A_k$ des matrices constantes telles que $R(z) - A_j/(z-a_j)$ n'ait pas de pôle pour $z = a_j$. On pose $X = \mathbb{C} \setminus \{a_1,\ldots,a_k\}$. Le groupe fondamental est un groupe libre Γ de générateurs $\gamma_1,\ldots,\gamma_k$; le générateur γ_j correspond à un lacet dans le sens direct autour de a_j . La représentation de monodromie est telle que $M(\gamma_j)$ soit de la forme $U_j\, e^{2\pi i\, A_j}\, U_j^{-1}$ (généralisation du cas $n = 1$, où l'on retrouve les fonctions z^a).

Le *problème direct* est le calcul explicite des matrices $M(\gamma_j)$, comme dans le cas hypergéométrique. Le *problème inverse*, connu sous le nom de problème de Riemann - Hilbert, ou 21ème problème de Hilbert, est de montrer que toute représentation linéaire du groupe Γ est la représentation de monodromie d'une équation telle que (12), régulière au sens de Fuchs. Il a été résolu par D. Birkhoff et Plejmel, et sous une forme plus générale par Deligne dans [E 1].

1.5. Considérons d'abord un système différentiel linéaire dans le domaine réel, de la forme

$$d\chi(t)/dt = A(t) \,.\, \chi(t) \,. \tag{13}$$

La procédure de Picard consiste à le transcrire en l'équation intégrale

$$\chi(t) = \chi(t_0) + \int_{t_0}^{t} A(s)\,\chi(s)\,ds \;; \tag{14}$$

on la résout par itération en posant $\chi_0(t) = \chi(t_0)$ et, pour $n \geq 0$,

$$\chi_{n+1}(t) = \chi(t_0) + \int_{t_0}^{t} A(s)\,\chi_n(s)\,ds \tag{15}$$

de sorte que la limite $\chi(t)$ des $\chi_n(t)$ existe et satisfait à l'équation (14). En explicitant, on trouve la solution sous la forme $\chi(t_1) = U(t_1,t_0)\,\chi(t_0)$; la matrice $U(t_1,t_0)$ est donnée par la *série de Dyson*

$$U(t_1,t_0) = \sum_{n\geq 0} \int \ldots \int A(s_n)\ldots A(s_1)\,ds_1\ldots ds_n \,, \tag{16}$$

où l'intégrale n-uple est étendue au domaine $t_0 \leq s_1 \leq \ldots \leq s_n \leq t_1$ dans $\mathbb{R}^n$.

1.6. Lappo-Danilevsky a donné une formule analogue dans le cas complexe [A 6]. De manière invariante, considérons une variété analytique complexe X, de dimension 1, et un revêtement universel $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ de X. Soit $\omega = (\omega_{ij})$ une matrice $n \times n$ formée de formes différentielles holomorphes sur X. L'équation différentielle prend la forme

$$dF = \omega \,.\, F \,. \tag{17}$$

Si z_0 et z_1 sont deux points de $\tilde{X}$, et α une forme différentielle holomorphe sur $\tilde{X}$, l'intégrale $\int_{z_0}^{z_1} \alpha$ est bien définie. On définit les *intégrales itérées* $\int_{z_0}^{z_1} \alpha_n \ldots \alpha_1$, où $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ sont des formes différentielles holomorphes sur $\tilde{X}$ (ou sur X), par la récurrence suivante

$$\int_{z_0}^{z_1} \alpha_n \ldots \alpha_1 = \int_{z_0}^{z_1} \alpha_n \,.\, f \;; \tag{18}$$

la fonction f est définie sur $\tilde{X}$ par

$$f(z) = \int_{z_0}^{z} \alpha_{n-1}\ldots\alpha_1 \,. \tag{19}$$

Plus explicitement, choisissons un chemin $\gamma : [t_0,t_1] \longrightarrow \tilde{X}$ d'extrémités z_0 et z_1 ; posons $\gamma^* \alpha_i = a_i(t)dt$. On a alors

(20) $$\int_{z_0}^{z_1} \alpha_n \dots \alpha_1 = \int \dots \int a_n(s_n) \dots a_1(s_1)\, ds_1 \dots ds_n$$

avec le même domaine d'intégration que dans la formule de Dyson. Ceci étant, l'équation différentielle $dF = \omega \,.\, F$ se résout par la formule $F(z_1) = U(z_1,z_0)\, F(z_0)$, où la matrice $U(z_1,z_0)$ est donnée par la formule

(21) $$U(z_1,z_0) = \sum_{n\geq o} \int_{z_0}^{z_1} \omega \dots \omega$$

(n facteurs ω) , en étendant la définition (20) au cas des formes différentielles matricielles.

1.7. Le *cas unipotent* est celui où la série (21) n'a qu'un nombre fini de termes non nuls. Voici un cas typique :

(22) $$\omega = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & & & 0 \\ & 0 & \alpha_2 & & \\ & & 0 & & \\ & 0 & & & \alpha_{n-1} \\ & & & & 0 \end{pmatrix} .$$

La matrice U correspondante est donnée par

(23) $$u_{ij} = 0 \ \text{ si } \ i > j \ , \ u_{ii} = 1 \ , \ u_{ij}(z_1,z_o) = \int_{z_0}^{z_1} \alpha_i \dots \alpha_{j-1} \ \text{ pour } \ i < j \ .$$

L'équation de la résolvante $U(z_2,z_0) = U(z_2,z_1)\, U(z_1,z_0)$ se traduit par la relation fondamentale

(24) $$\int_{z_0}^{z_2} \alpha_1 \dots \alpha_n = \sum_{j=o}^{n} \int_{z_1}^{z_2} \alpha_1 \dots \alpha_j \,.\, \int_{z_0}^{z_1} \alpha_{j+1} \dots \alpha_n \ ;$$

on peut aussi la démontrer par décomposition du domaine d'intégration.

1.8. Un exemple intéressant est celui où X est le complémentaire dans $\mathbb{C}$ d'une partie finie $\{a_1,\dots,a_n\}$, et où l'on pose $\alpha_j = dz/(z-a_j)$. La fonction $\int_0^z \alpha_1 \dots \alpha_n$ est holomorphe sur le revêtement universel de X ; c'est le polylogarithme $L(z \mid a_1,\dots,a_n)$ déjà considéré par Lappo-Danilevsky. Elle sert de base aux développements en séries des fonctions résurgentes d'Écalle ; son prolongement analytique et sa monodromie ont été étudiés par Bloch et Ramakrishnam, et plus complètement par Dupont [H 1].

Expliquons leurs méthodes sur le cas du *dilogarithme*. On considère la matrice de formes différentielles

(25) $$\omega = \begin{pmatrix} 0 & dz/z & 0 \\ 0 & 0 & dz/(1-z) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Sur le plan coupé Ω (voir au n° 1.1), on définit la matrice

$$u(z) = \begin{pmatrix} 1 & \log z & \mathrm{Li}_2(z) \\ 0 & 1 & \log 1/(1-z) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{26}$$

qui satisfait à l'équation $du = \omega u$. On a pris les branches principales des logarithmes, et le dilogarithme $\mathrm{Li}_2(z)$ s'obtient par prolongement analytique de la série $\sum_{n\geq 1} z^n/n^2$, qui converge pour $|z| \leq 1$. Notons $G(\mathbb{C})$ le groupe de Lie complexe des matrices $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $G(\mathbb{Z})$ le sous-groupe défini par le tableau $\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z}(1) & \mathbb{Z}(2) \\ 0 & 1 & \mathbb{Z}(1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; selon la notation de Deligne, on pose $\mathbb{Z}(p) = (2\pi i)^p \mathbb{Z}$. Avec les notations du n° 1.3, il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{U} & G(\mathbb{C}) \\ {\scriptstyle P}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle P'} \\ X & \xrightarrow{V} & G(\mathbb{C})/G(\mathbb{Z}) \end{array}$$

où U et V sont holomorphes, et u est la branche principale $U \circ s$ de U . La monodromie du dilogarithme est entièrement expliquée par ce diagramme ; la représentation de monodromie apparaît comme un homomorphisme $M : \Gamma \longrightarrow G(\mathbb{C})$ d'image $G(\mathbb{Z})$. Cette construction a été généralisée par Paršin [C 3].

Considérons $\mathbb{C}$ comme un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$, et notons $\Lambda^p_{\mathbb{Q}}\,\mathbb{C}$ les puissances extérieures de cet espace vectoriel. On définit une application φ de $G(\mathbb{C})$ dans $\Lambda^2_{\mathbb{Q}}\,\mathbb{C}$ par

$$\varphi\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (2\pi i)^{-2}\,(2b - ac) \wedge 1 - (2\pi i)^{-1}\, a \wedge (2\pi i)^{-1}\, c \, . \tag{27}$$

Cette application passe au quotient en une application Φ de $G(\mathbb{C})/G(\mathbb{Z})$ dans $\Lambda^2_{\mathbb{Q}}\,\mathbb{C}$; l'application $\Phi \circ V$ de $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ dans $\Lambda^2_{\mathbb{Q}}\,\mathbb{C}$ a été introduite par Bloch. Explicitement, sa valeur en un point z de Ω est

$$\Phi(V(z)) = (2\pi i)^{-2}\,(\mathrm{Li}_2(z) - \mathrm{Li}_2(1-z)) \wedge 1 - (2\pi i)^{-1} \log z \wedge (2\pi i)^{-1} \log\left(\frac{1}{1-z}\right) . \tag{28}$$

L'idée de passer par Φ a été exploitée de manière générale par Dupont dans [H 1].

2. RAPPORT SUR LES INTÉGRALES ITÉRÉES

2.1. Les intégrales itérées ont été développées de manière systématique par Chen, qui en a donné un exposé synthétique dans [C 2]. La présentation que nous en donnons est nouvelle sur plusieurs points, et utilise largement les méthodes simpliciales.

Rappelons quelques points de la théorie simpliciale. Pour tout entier $n \geq 0$, nous réalisons le *simplexe* Δ^n comme l'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ satisfaisant aux relations $0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n \leq 1$; il est commode d'introduire les coordonnées superflues $t_0 = 0$, $t_{n+1} = 1$ et de plonger Δ^n dans $\mathbb{R}^{n+2}$. Les *sommets* de Δ^n sont les points $e_i^n = (0^{i+1}, 1^{n+1-i})$ avec $i+1$ coordonnées égales à 0, et $n+1-i$ coordonnées égales à 1 (pour i parcourant l'ensemble $[n]$ des entiers $0,1,\ldots,n)$.

La catégorie $\mathcal{D}$ a pour objets les ensembles $[n]$, pour morphismes les applications croissantes (au sens large). Une application φ de $[m]$ dans $[n]$ détermine une application affine $\bar{\varphi}$ de Δ^m dans Δ^n, qui applique le sommet e_j^m sur le sommet $e_{\varphi(i)}^n$. En particulier, pour i dans $[n]$, on dispose des applications de face $\delta^i : [n-1] \longrightarrow [n]$ et de dégénérescence $\sigma^i : [n+1] \longrightarrow [n]$. Les applications $d^i = \bar{\delta}^i$ de Δ^{n-1} dans Δ^n, et $s^i = \bar{\sigma}^i$ de Δ^{n+1} dans Δ^n se décrivent ainsi

(29) $d^i(t_o,\ldots,t_n) = (t_o,\ldots,t_{i-1},t_i,t_i,\ldots,t_n)$ (répétition de t_i).

(30) $s^i(t_o,\ldots,t_{n+2}) = (t_o,\ldots,t_i,t_{i+2},\ldots,t_{n+2})$ (omission de t_{i+1}).

Un *ensemble simplicial* E est un foncteur contravariant de $\mathcal{D}$ dans la catégorie des ensembles ; définition analogue d'un groupe simplicial, d'une variété simpliciale, etc. On décrit E par la donnée d'une suite d'ensembles E_0, E_1, E_2, ... et d'applications de face $d_i : E_n \longrightarrow E_{n-1}$ et de dégénérescence $s_i : E_n \longrightarrow E_{n+1}$, pour $0 \leq i \leq n$, qui satisfont à des relations que nous ne répèterons pas ici. Un ensemble *cosimplicial* est un foncteur covariant défini dans $\mathcal{D}$; il se décrit par une suite d'ensembles E^0, E^1, E^2, ... et des applications de face $d^i : E^{n-1} \longrightarrow E^n$ et de dégénérescence $s^i : E^{n+1} \longrightarrow E^n$ (pour $0 \leq i \leq n$).

2.2. Soit X une variété différentielle, disons de classe C^∞. On lui associe classiquement l'ensemble simplicial $C_\bullet(X)$, qui en degré n se compose de l'ensemble $C_n(X)$ des applications continues de Δ^n dans X ("simplexes singuliers"). Nous utiliserons une version géométrique de la cobar-construction ; c'est la variété cosimpliciale $M^\bullet(X)$ qui se compose des variétés $M^n(X) = X^{n+2}$, et des opérateurs d^i et s^i donnés respectivement par les formules (29) et (30).

Pour toute variété différentielle Y, on note $\mathcal{a}^p(Y)$ l'espace des p-formes différentielles extérieures sur Y, et $d : \mathcal{a}^p(Y) \longrightarrow \mathcal{a}^{p+1}(Y)$ la différentielle extérieure.

Revenant à la variété X, nous lui associons un bicomplexe C tel que $C^{m,-n} = \mathcal{a}^m(X^{n+2})$ pour $m \geq 0$, $n \geq 0$ (dans le "quatrième quadrant"). Les deux différentielles sont, d'une part, la différentielle extérieure d qui applique $C^{m,-n} = \mathcal{a}^m(X^{n+2})$ dans $C^{m+1,-n} = \mathcal{a}^{m+1}(X^{n+2})$, et la différentielle combinatoire Δ

de $C^{m,-n} = \mathcal{a}^m(X^{n+2})$ dans $C^{m,-n+1} = \mathcal{a}^m(X^{n+1})$ qui transforme μ en $\sum_{i=0}^{n} (-1)^{m+i}(d^i)^*\mu$ (on note $(d^i)^*\mu$ l'image réciproque de μ par l'application d^i de X^{n+1} dans X^{n+2}). On note $\Gamma^\bullet$ le complexe total associé ; un élément de Γ^p est une suite $\mu = (\mu_0, \mu_1, \dots)$ où μ_n est une forme différentielle de degré $n+p$ sur X^{n+2} , et sa différentielle est la suite $\nu = (\nu_0, \nu_1, \dots)$ dans Γ^{p+1} décrite par

$$\nu_n = d\mu_n + \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^{n+p+i}(d^i)^*\mu_{n+1} \ . \tag{31}$$

C'est le *complexe de Chen*.

Si α et β sont deux formes différentielles sur X , on note $\alpha \times \beta$ la forme $\pi_1^*\alpha \wedge \pi_2^*\beta$ sur X^2 , où π_1 et π_2 sont les projections de X^2 sur X . Définition analogue de $\alpha \times \beta \times \gamma$ sur X^3 , etc. Le complexe de de Rham $\mathcal{a}^\bullet(X)$ de X est une algèbre différentielle graduée ; la bar-construction de $\mathcal{a}^\bullet(X)$ s'identifie au sous-complexe de $\Gamma^\bullet$ formé des suites où chaque μ_n est décomposable en somme finie de termes $\alpha_0 \times \dots \times \alpha_{n+1}$, et nulle pour tout n assez grand.

2.3. L'espace PX des chemins dans X se compose des applications γ de classe C^∞ de $I = [0,1]$ dans X . Ce n'est pas une variété ; on peut cependant définir un vecteur tangent à PX en un chemin γ comme un relèvement ξ de classe C^∞ dans le fibré tangent TX (autrement dit, $\xi(t)$ est tangent à X au point $\gamma(t)$). On définit ainsi l'espace vectoriel $T_\gamma(PX)$ tangent en γ à PX . Une p-forme différentielle extérieure ω sur PX est ainsi une fonction $\omega(\gamma\,;\xi_1,\dots,\xi_p)$ multilinéaire alternée en les éléments $\xi_1,\dots,\xi_p$ de $T_\gamma(PX)$.

Soient S une variété différentielle et φ une application de classe C^∞ de $S \times I$ dans X ; on lui associe une application Φ de S dans PX par $\Phi(s)(t) = \varphi(s,t)$. On imagine facilement ce que sera l'image réciproque $\Phi^*\omega$ d'une p-forme ω sur PX . On dira que ω est (faiblement) de classe C^∞ si toutes les formes du type $\Phi^*\omega$ sont de classe C^∞ . On peut alors définir le complexe de de Rham $\mathcal{a}^\bullet(PX)$ de sorte que $\Phi^* : \mathcal{a}^\bullet(PX) \longrightarrow \mathcal{a}^\bullet(S)$ soit toujours compatible aux différentielles.

Dans le cas particulier $p = 0$, on obtient la définition d'une fonction F (faiblement) de classe C^∞ sur PX ; sa différentielle est un élément de $\mathcal{a}^1(PX)$ qui n'est autre que la "variation $\delta F(\gamma\,;\xi)$ de la fonctionnelle $F(\gamma)$ " au sens du calcul des variations.

2.4. *L'intégrale itérée* est un homomorphisme I du complexe de Chen $\Gamma^\bullet$ dans le complexe de de Rham de PX .

Pour tout entier $n \geq 0$, on considère l'application h_n de $PX \times \Delta^n$ dans X^{n+2} qui associe à $(\gamma, t_1, \dots, t_n)$ le point $(\gamma(0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_n), \gamma(1))$ de $M^n(X) = X^{n+2}$. En généralisant un peu le point de vue du n° 2.3, on peut définir des formes différentielles sur $\mathcal{P}X \times \Delta^n$; on connaît aussi le procédé d'intégration partielle (ou d'image directe) qui, à une forme différentielle Λ de degré $n+p$ sur $S \times \Delta^n$ associe la p-forme $\lambda = \int_{\Delta^n} \Lambda$ sur S. Grâce à l'artifice d'envoyer de (vraies) variétés S dans $\mathcal{P}X$, on étend ce procédé aux formes différentielles sur $\mathcal{P}X \times \Delta^n$.

Soit alors $\mu = (\mu_0, \mu_1, \ldots)$ un élément de Γ^p ; pour tout entier $n \geq 0$, la forme différentielle $h_n^* \mu_n$ de degré $n+p$ est définie sur $\mathcal{P}X \times \Delta^n$. On pose $I(\mu) = \sum_{n \geq 0} \int_{\Delta^n} h_n^* \mu_n$; sous réserve de convergence de la série, c'est une p-forme sur $\mathcal{P}X$. On a $dI(\mu) = I(\nu)$ si l'élément $\nu = d\mu + \Delta\mu$ de Γ^{p+1} est défini par la formule (31).

Le cas le plus usuel est le suivant : on se donne n formes différentielles $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de degré 1 sur X, on pose $\mu_n = 1 \times \alpha_1 \times \ldots \times \alpha_n \times 1$ et $\mu_m = 0$ pour $m \neq n$. On obtient un élément μ de Γ^0 et $I(\mu)$ est une fonction de classe C^∞ sur $\mathcal{P}X$, dont Chen note $\int_\gamma \alpha_1 \ldots \alpha_n$ la valeur en γ. Naturellement, les intégrales itérées du n° 1.6 sont des cas particuliers de cette construction.

2.5. Fixons deux points a et b de X, et notons $\mathcal{P}_{a,b}X$ l'espace des chemins d'origine a et extrémité b. On peut modifier les définitions précédentes et définir un complexe de Chen $\Gamma^\bullet_{a,b}$ et une intégrale itérée $I_{a,b} : \Gamma^\bullet_{a,b} \longrightarrow \mathcal{A}^\bullet(\mathcal{P}_{a,b}X)$. Le théorème fondamental de Chen [C 1] affirme que l'*homologie du complexe* $\Gamma^\bullet_{a,b}$ *calcule la cohomologie singulière de l'espace* $\mathcal{P}_{a,b}X$ *de chemins au moins lorsque* X *est compact et simplement connexe*. En particulier, pour $a = b$, on obtient la cohomologie de l'espace des lacets de X.

2.6. Un autre type d'application concerne la définition de *fonctions multiformes* au moyen d'intégrales itérées. Si a et b sont deux points de X, on note $\Pi_{a,b}X$ l'ensemble des composantes connexes par arcs de $\mathcal{P}_{a,b}X$; en particulier, $\Pi_{a,a}X$ est le groupe fondamental $\pi_1(X,a)$ de X. On peut en fait définir un espace quotient ΠX de $\mathcal{P}X$ qui est un revêtement de $X \times X$, et tel que $\Pi_{a,b}X$ soit sa fibre au-dessus du point (a,b) de $X \times X$ ("groupoïde de Poincaré" de X). Choisissant un point-base a dans X, on réalise le revêtement universel $\widetilde{X}$ de X comme la sous-variété de ΠX, réunion des $\Pi_{a,b}X$, pour b parcourant X.

Soit alors $\mu = (\mu_0, \mu_1, \ldots)$ un élément de Γ^0 ; autrement dit, μ_n est une forme différentielle de degré n sur X^{n+2}. Alors $I(\mu)$ est une fonction sur $\mathcal{P}X$; elle se descend en une fonction F sur ΠX si et seulement si sa restriction à $\mathcal{P}_{a,b}X$ est localement constante pour a,b fixés. Sous forme différentielle, ceci se traduit par le système d'équations

$$d\mu_n + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+i} (d^i)^* \mu_{n+1} = 0 . \tag{32}$$

Si, d'aventure, on veut calculer la différentielle dF , on combinera les formules (31) et (32) qui donnent $dI(\mu) = I(\nu)$ avec

(33) $$\nu_n = (-1)^n (d^o)^* \mu_{n+1} - (d^{n+1})^* \mu_{n+1} .$$

Par choix d'un point-base a dans X , on restreint la fonction F en une fonction $\tilde{F}$ sur le revêtement universel $\tilde{X}$ de X . C'est la *fonction multiforme sur* X *associée à* μ .

2.7. Il est temps de revenir à la *monodromie*. Soit $\omega = (\omega_{ij})$ une matrice $m \times m$ de 1-formes différentielles sur X . On considère le système différentiel $dF = \omega F$, ou plus explicitement

(34) $$dF_i = \sum_{j=1}^{m} \omega_{ij} F_j \qquad \text{pour} \quad 1 \le i \le m .$$

Le transport parallèle s'exprime par la formule

(35) $$U(\gamma) = \sum_{n \geq o} \int_\gamma \omega \ldots \omega \qquad (\ n \ \text{ facteurs } \ \omega\ )$$

pour tout chemin γ (généralisation du n° 1.6). Autrement dit, l'application $\gamma \longmapsto U(\gamma) = (U_{ij}(\gamma))$ de PX dans $GL_n(\mathbb{C})$ est donnée par $U_{ij} = I(\Omega_{ij})$ où $\Omega_{ij} = (\Omega_{ij,o}, \Omega_{ij,1}, \ldots)$ est l'élément de Γ^o décrit comme suit :

(36) $$\Omega_{ij,n} = \sum_{i_1 \ldots i_{n-1}} 1 \times \omega_{ii_1} \times \omega_{i_1 i_2} \times \ldots \times \omega_{i_{n-1} j} \times 1 .$$

La condition d'intégrabilité du système (34) s'écrit classiquement sous la forme $d\omega - \omega \wedge \omega = 0$, ou explicitement

(37) $$d\omega_{ij} - \sum_{k=1}^{m} \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} = 0 .$$

Pour que la matrice $U(\gamma)$, pour des chemins d'extrémités fixées a et b , ne dépende que de la classe d'homotopie $[\gamma]$ de γ , il faut et il suffit que les formes $\Omega_{ij,n}$ satisfassent à la condition (32). Un calcul facile montre que *ceci équivaut à la relation d'intégrabilité* (37). S'il en est ainsi, après choix d'un point-base a , *la représentation de monodromie* $M : \pi_1(X;a) \longrightarrow GL_m(\mathbb{C})$ *est donnée par* $M([\gamma]) = U(\gamma)$.

2.8. On introduit l'algèbre $A_p = \mathbb{C}\langle T_1,\ldots,T_p\rangle$ des polynômes en des variables non commutatives $T_1,\ldots,T_p$. Le plus petit sous-espace vectoriel de A_p contenant les variables $T_1,\ldots,T_p$ et stable par le crochet $[u,v] = uv - vu$ est l'algèbre de Lie libre $\mathcal{L}_p$. Il existe un homomorphisme d'algèbres $c : A_p \longrightarrow A_p \otimes A_p$ caractérisé par $c(T_j) = T_j \otimes 1 + 1 \otimes T_j$ et $\mathcal{L}_p$ se compose des éléments u de A_p tels que $c(u) = u \otimes 1 + 1 \otimes u$. On considère aussi l'algèbre $\hat{A}_p = \mathbb{C}\langle\langle T_1,\ldots,T_p\rangle\rangle$ des séries formelles en $T_1,\ldots,T_p$ et l'adhérence $\hat{\mathcal{L}}_p$ de $\mathcal{L}_p$ dans $\hat{A}_p$; caractérisation de $\hat{\mathcal{L}}_p$ analogue à celle de $\mathcal{L}_p$

(pour tout ceci, lire Bourbaki [A 2], chap. 2).

Soient $\alpha_1,\dots,\alpha_p$ des 1-formes différentielles sur X, et soit $\omega = T_1\alpha_1 + \dots + T_p\alpha_p$. Reprenant la formule de transport parallèle (35), on est conduit à introduire les séries formelles

$$U(\gamma) = \sum_{n\geq o}\ \sum_{i_1\dots i_n}\left(\int_\gamma \alpha_{i_1}\dots\alpha_{i_n}\right).T_{i_1}\dots T_{i_n}. \tag{38}$$

Soient $\mu_1,\dots,\mu_m,\mu_{m+1},\dots,\mu_{m+n}$ des 1-formes sur X. Pour tout chemin γ, on a la relation "des shuffles"

$$\int_\gamma \mu_1\dots\mu_m \int_\gamma \mu_{m+1}\dots\mu_{m+n} = \sum_\sigma \int_\gamma \mu_{\sigma(1)}\dots\mu_{\sigma(m+n)}, \tag{39}$$

où σ parcourt l'ensemble de toutes les permutations dans S_{m+n}, croissantes sur les intervalles $[1,m]$ et $[m+1,m+n]$. Géométriquement, cela revient à décomposer $\Delta^m\times\Delta^n$ en simplexes. Il n'en faut pas plus pour établir la relation $c(U(\gamma)) = U(\gamma)\otimes U(\gamma)$, qui signifie que *la série* $\log U(\gamma)$ *appartient à l'algèbre de Lie* $\hat{\mathcal{L}}_p$ (pour ceci, voir Ree dans [C 4]).

3. INTERLUDE : LA THÉORIE DE HODGE

3.1. Quelques notations pour commencer. On note X une variété algébrique complexe lisse (sans point singulier), d sa dimension complexe, et l'on introduit divers espaces de formes différentielles

- $\mathcal{a}^n(X)$ formes différentielles de degré n et de classe C^∞ ;
- $\Omega^n(X)$ formes différentielles de degré n holomorphes ;
- $F^p\mathcal{a}^n(X)$ formes qui sont localement décomposables en somme finie de formes $\alpha\wedge\beta$ avec α holomorphe de degré p et β de degré $n-p$ et de classe C^∞ ;
- $\mathcal{a}^{p,q}(X)$ formes localement décomposables en somme de termes $f\ \alpha\wedge\bar{\beta}$ avec une fonction f de classe C^∞, α holomorphe de degré p et β holomorphe de degré q [1].

On peut naturellement remplacer X par n'importe quel ouvert de X, d'où la définition des *faisceaux* $\mathcal{a}^n$, Ω^n, $F^p\mathcal{a}^n$, $\mathcal{a}^{p,q}$. Si F est l'un de ces faisceaux, *à l'exception de* Ω^n, on a $H^i(X,F) = 0$ pour tout entier $i > 0$.

3.2. Pour un espace tel que X, il y a identité entre cohomologies singulière, de Čech et de de Rham. On peut donc considérer que $H^n_{\mathbb{C}} = H^n(X,\mathbb{C})$ est le n-ième groupe de cohomologie du complexe de de Rham $\mathcal{a}^\bullet(X)$. On a une suite décroissante de sous-complexes

---

[1] Si u est un nombre (ou une fonction, une forme,...) complexe, on note $\bar{u}$ le complexe conjugué de u.

$$\mathcal{A}^\bullet(X) = F^0\,\mathcal{A}^\bullet(X) \supset F^1\,\mathcal{A}^\bullet(X) \supset \ldots \supset F^p\,\mathcal{A}^\bullet(X) \supset F^{p+1}\,\mathcal{A}^\bullet(X) \supset \ldots .$$

On note $F^pH^n_{\mathbb{C}}$ l'image dans $H^n_{\mathbb{C}}$ du n-ième groupe de cohomologie du sous-complexe $F^p\,\mathcal{A}^\bullet(X)$ de $\mathcal{A}^\bullet(X)$; on a donc une suite décroissante de sous-espaces

$$H^n_{\mathbb{C}} = F^0\,H^n_{\mathbb{C}} \supset F^1\,H^n_{\mathbb{C}} \supset \ldots \supset F^p\,H^n_{\mathbb{C}} \supset F^{p+1}\,H^n_{\mathbb{C}} \supset \ldots \supset F^n\,H^n_{\mathbb{C}} \supset F^{n+1}\,H^n_{\mathbb{C}} = 0 ,$$

qu'on appelle la *filtration de Hodge* de la cohomologie de X.

Il résulte aussitôt du lemme de Dolbeault que le q-ième groupe de cohomologie du complexe $F^p\,\mathcal{A}^\bullet(X)/F^{p+1}\,\mathcal{A}^\bullet(X)$ s'identifie à $H^q(X,\Omega^p)$ (cohomologie du faisceau Ω^p). De la filtration du complexe $\mathcal{A}^\bullet(X)$ par les sous-complexes $F^p\,\mathcal{A}^\bullet(X)$, on déduit une suite spectrale

$$E_1^{p,q} = H^q(X,\Omega^p) \Longrightarrow H^{p+q}(X;\mathbb{C}) .$$

3.3. Supposons que X *soit une variété projective*, donc compacte. Il résulte de la théorie de Hodge des formes harmoniques que *la suite spectrale précédente dégénère au niveau* E_1. Autrement dit, notons $H^{p,q}(X,\mathbb{C})$ (ou simplement $H^{p,q}$) le sous-espace de $H^{p+q}_{\mathbb{C}}$ formé des classes de cohomologie ayant un représentant dans $\mathcal{A}^{p,q}(X)$. On peut identifier $H^{p,q}$ à $H^q(X,\Omega^p)$. De plus, on a

$$H^n_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q} \tag{40}$$

$$F^p\,H^n_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{r\geq p} H^{r,n-r} \tag{41}$$

$$H^{q,p} = \overline{H}^{p,q} \qquad \text{pour } p+q=n . \tag{42}$$

Deligne exprime ces propriétés en disant que la filtration de Hodge définit une *structure de Hodge de poids* n sur $H^n_{\mathbb{C}}$. Des formules précédentes, on déduit

$$H^{p,n-p} = F^p\,H^n_{\mathbb{C}} \cap \overline{F^{n-p}\,H^n_{\mathbb{C}}} \tag{43}$$

et la décomposition en les sous-espaces $H^{p,q}$ de $H^n_{\mathbb{C}}$ est donc déterminée de manière univoque par la filtration de Hodge.

3.4. La grande innovation de Deligne [E 2] concerne le cas des variétés algébriques *non compactes*.

Supposons donc que X soit le complémentaire dans une variété projective lisse $\overline{X}$ d'un diviseur D à croisements normaux. Dans un certain nombre d'exemples intéressants, $\overline{X}$ est naturellement donnée ; son existence pour X arbitraire est un corollaire du théorème de Hironaka sur la désingularisation.

Explicitons l'hypothèse de *croisements normaux* : il existe une suite décroissante $\overline{X}_0 \supset \overline{X}_1 \supset \ldots \supset \overline{X}_d$ de sous-variétés algébriques de $\overline{X}$ avec $\overline{X}_0 = \overline{X}$, $\overline{X}_1 = D$, $\overline{X}_j$ de dimension complexe $d-j$, et de plus en tout point x de $\overline{X}_r \smallsetminus \overline{X}_{r+1} = X_r$, on peut trouver un système de coordonnées locales holomorphes $z_1,\ldots,z_d$ sur $\overline{X}$ telles que D soit décrit au voisinage de x par l'équation $z_1 \ldots z_r = 0$.

Pour calculer la cohomologie de X , on utilise la suite spectrale de Leray pour l'inclusion j de X dans $\bar{X}$. Ceci nécessite la considération des faisceaux $R^q j_* \mathbb{C}$ sur $\bar{X}$: la fibre en un point x de $\bar{X}$ de $R^q j_* \mathbb{C}$ est la limite inductive des groupes $H^q(X \cap U, \mathbb{C})$ où U parcourt les voisinages ouverts de x dans $\bar{X}$. Ces faisceaux sont déterminés au moyen de l'hypothèse de croisements normaux qui assure qu'en un point de X_r la paire $\bar{X}, X$ se comporte comme la paire $\mathbb{C}^d$, $\mathbb{C}^{*r} \times \mathbb{C}^{d-r}$ à l'origine de $\mathbb{C}^d$.

Deligne introduit la filtration des formes différentielles par le poids. Pour tout entier s tel que $0 \leq s \leq n$, on définit le sous-espace $W_{s+n}\mathcal{a}^n(X)$ de $\mathcal{a}^n(X)$ comme suit : les formes différentielles de degré n sur X qui localement en un point x de X_r s'écrivent

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_s \leq r} \alpha_{i_1 \ldots i_s} \wedge \frac{dz_{i_1}}{z_{i_1}} \wedge \ldots \wedge \frac{dz_{i_s}}{z_{i_s}} \tag{44}$$

avec des formes $\alpha_{i_1 \ldots i_s}$ de degré $n-s$ et de classe C^∞ au voisinage de x dans $\bar{X}$, et un système de coordonnées $z_1, \ldots, z_d$ comme plus haut.

On note ensuite $W_{s+n} H^n_{\mathbb{C}}$ le sous-espace de $H^n_{\mathbb{C}}$ formé des classes de cohomologie qui ont un représentant dans $W_{s+n}\mathcal{a}^n(X)$. La *filtration par le poids* de $H^n_{\mathbb{C}}$ est la suite croissante de sous-espaces

$$0 \subset W_n H^n_{\mathbb{C}} \subset W_{n+1} H^n_{\mathbb{C}} \subset \ldots \subset W_{2n-1} H^n_{\mathbb{C}} \subset W_{2n} H^n_{\mathbb{C}} = H^n_{\mathbb{C}} . \tag{45}$$

On convient de poser $W_t H^n_{\mathbb{C}} = 0$ si $t < n$ et $W_t H^n_{\mathbb{C}} = H^n_{\mathbb{C}}$ si $t > 2n$. Le point capital est que *ces espaces* $W_t H^n_{\mathbb{C}}$ *de* $H^n_{\mathbb{C}}$ *ne dépendent que de* X *et non du plongement de* X *dans une variété* $\bar{X}$ *compacte et lisse.*

3.5. Résumons la situation. On écrit $H^n_{\mathbb{Z}}$ pour $H^n(X,\mathbb{Z})$ et l'on définit de même $H^n_{\mathbb{Q}}$.

a) $H^n_{\mathbb{Z}}$ *est un groupe commutatif de type fini ;*

b) *on peut identifier* $H^n_{\mathbb{Q}}$ *à* $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} H^n_{\mathbb{Z}}$ *et* $H^n_{\mathbb{C}}$ *à* $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} H^n_{\mathbb{Z}}$.

Par ailleurs, sur $H^n_{\mathbb{C}}$, on dispose d'une *filtration de Hodge*, c'est-à-dire une suite *décroissante* de sous-espaces $F^p H^n_{\mathbb{C}}$ (pour p dans $\mathbb{Z}$) et d'une *filtration par le poids*, c'est-à-dire une suite *croissante* de sous-espaces $W_r H^n_{\mathbb{C}}$ (pour r dans $\mathbb{Z}$). Les propriétés suivantes sont valables :

c) *il existe des sous-espaces* $W_r H^n_{\mathbb{Q}}$ *de l'espace vectoriel* $H^n_{\mathbb{Q}}$ *sur* $\mathbb{Q}$, *tels que* $W_r H^n_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} W_r H^n_{\mathbb{Q}}$ (la filtration par le poids est définie sur le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels) ;

d) *on pose* $Gr^W_r H^n_{\mathbb{C}} = W_r H^n_{\mathbb{C}} / W_{r-1} H^n_{\mathbb{C}}$ *et on le munit de la filtration définie par les images des sous-espaces* $F^p H^n_{\mathbb{C}} \cap W_r H^n_{\mathbb{C}}$ *; avec cette filtration,* $Gr^W_r H^n_{\mathbb{C}}$ *est une structure de Hodge de poids* r *au sens du n° 3.3.*

Ce sont ces propriétés que Deligne prend pour axiomes des *structures de Hodge mixtes*.

3.6. D'après la propriété d) précédente, l'espace $\mathrm{Gr}_r^W H^n_{\mathbb{C}}$ se décompose en somme directe de sous-espaces $H^n_{p,q}$ (pour $p+q=r$). La dimension h^n de $H^n_{\mathbb{C}}$ est donc égale à $\sum_{p,q} h^n_{p,q}$, où $h^n_{p,q}$ est la dimension de $H^n_{p,q}$. Dans le cas qui nous intéresse ici, on a $h^n_{p,q}=0$, sauf éventuellement si $p\le n$, $q\le n$ et $p+q\ge n$. Si le groupe $\mathrm{Gr}_r^W H^n_{\mathbb{C}}$ n'est pas nul, on dira que le poids r intervient dans le groupe de cohomologie $H^n_{\mathbb{C}} = H^n(X;\mathbb{C})$; seuls les poids $n, n+1, \dots, 2n$ peuvent intervenir. Le poids n correspond à l'image $W_n H^n_{\mathbb{C}}$ de l'homomorphisme de restriction de $H^n(\bar{X},\mathbb{C})$ dans $H^n(X,\mathbb{C})$.

Supposons qu'on ait $\bar{X} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et $D = \{0,\infty\}$, d'où $X = \mathbb{C}^*$. On note $\mathbb{Z}(-1)$ la structure de Hodge mixte sur $H^1(\mathbb{C}^*,\mathbb{C})$. On identifie cet espace à $\mathbb{C}$ en prenant pour base la classe de cohomologie de dz/z, d'où $\mathbb{Z}(-1)_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}$. Les classes de cohomologie entières sont les multiples entiers de $dz/2\pi iz$, d'où $\mathbb{Z}(-1)_{\mathbb{Z}} = (2\pi i)^{-1}\mathbb{Z}$. Enfin seul le poids 2 intervient, $W_1\,\mathbb{Z}(-1)_{\mathbb{C}} = 0$, $W_2\,\mathbb{Z}(-1)_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}$, et l'on a $H^1_{1,1} = \mathbb{C}$. Autrement dit, $\mathbb{Z}(-1)$ *est pur de poids* 2, *de type* $(1,1)$.

4. JACOBIENNES GÉNÉRALISÉES

4.1. Soit X une surface de Riemann compacte, de genre g. Choisissons un point-base a de X et une base $\alpha_1,\dots,\alpha_g$ de l'espace $\Omega^1(X)$ des 1-formes holomorphes sur X. Enfin, soit $\tilde{X}$ le revêtement universel de X basé en a. On définit l'application $\tilde{\varphi}_a$ de $\tilde{X}$ dans $\mathbb{C}^g$ par $\tilde{\varphi}_a(z) = (\int_a^z \alpha_1, \dots, \int_a^z \alpha_g)$; soit Λ l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{C}^g$ de la forme $(\int_\gamma \alpha_1,\dots,\int_\gamma \alpha_g)$ où γ est un lacet au point a. Il est bien connu que Λ est un sous-groupe discret de $\mathbb{C}^g$ isomorphe à $\mathbb{Z}^{2g}$. La *jacobienne* $J(X)$ est le tore complexe $\mathbb{C}^g/\Lambda$, et l'on peut construire un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, "\tilde{\varphi}_a"] \arrow[d, "p"'] & \mathbb{C}^g \arrow[d, "p'"] \\ X \arrow[r, "\varphi_a"] & J(X) \end{tikzcd}$$

analogue à celui du n° 1.8.

4.2. On peut procéder de manière plus générale et plus invariante pour définir la *variété d'Albanese* $\mathrm{Alb}(X)$ d'une variété algébrique projective et lisse X.

Tout d'abord, si un espace vectoriel V est muni d'une filtration par une suite décroissante de sous-espaces $F^p V$, on note $F^p V^*$ le sous-espace du dual V^* de V orthogonal à $F^{1-p} V$; on obtient ainsi une filtration décroissante sur V^* et l'espace $\mathrm{Gr}_F^p V^* = F^p V^* / F^{p+1} V^*$ est le dual de l'espace

$\mathrm{Gr}_F^{-p} V = F^{-p} V / F^{-p+1} V$. On utilise des conventions analogues pour une filtration croissante $(W_n V)_{n\in\mathbb{Z}}$. On peut ainsi définir le dual d'une structure de Hodge mixte.

Sur l'espace $H^1(X,\mathbb{C})$ la filtration de Hodge se décrit ainsi

$$F^0 H^1(X,\mathbb{C}) = H^1(X,\mathbb{C}) \ , \ F^1 H^1(X,\mathbb{C}) = \Omega^1(X) \ , \ F^2 H^1(X,\mathbb{C}) = 0 \ .$$

Sur le groupe d'homologie $H_1 = H_1(X,\mathbb{C})$ dual de $H^1(X,\mathbb{C})$, on a donc la filtration de Hodge

$$H_1 = F^{-1} H_1 \supset F^0 H_1 \supset F^1 H_1 = 0 \ .$$

La variété d'Albanese est alors définie par

$$\mathrm{Alb}(X) = H_1(X,\mathbb{Z})\backslash H_1(X,\mathbb{C}) / F^0 H_1(X,\mathbb{C}) \ ;$$

l'espace $H_1(X,\mathbb{C}) / F^0 H_1(X,\mathbb{C})$ s'identifie au dual $\Omega^1(X)^*$ de $\Omega^1(X)$. Choisissons un point-base a dans X , et notons $\tilde{X}$ le revêtement universel de X . On définit une application $\tilde{\varphi}_a$ de $\tilde{X}$ dans $\Omega^1(X)^*$ par $\langle\tilde{\varphi}_a(z),\omega\rangle = \int_a^z \omega$ pour ω dans $\Omega^1(X)$; cette intégrale est bien définie car on a $d\omega = 0$. Par passage au quotient, on définit l'application φ_a de X dans $\mathrm{Alb}(X) = H_1(X,\mathbb{Z}) \backslash \Omega^1(X)^*$.

4.3. Nous rappelons maintenant quelques points de la *théorie de Malcev des groupes nilpotents* [1]. Pour l'instant, X est une variété différentielle ; on choisit un point-base a et l'on pose $\pi = \pi_1(X;a)$. On supposera que π est engendré par un nombre fini d'éléments, ce qui est le cas si X est une variété algébrique complexe.

Soit $\mathbb{C}\pi$ l'algèbre du groupe π à coefficients complexes, formée des sommes *finies* $\sum_g a_g g$. On identifie le dual de $\mathbb{C}\pi$ à l'espace vectoriel $F(\pi)$ des fonctions complexes sur π . On note J l'idéal bilatère de $\mathbb{C}\pi$ défini par la relation $\sum_g a_g = 0$, d'où $\mathbb{C}\pi/J = \mathbb{C}$, et $J^0 = \mathbb{C}\pi$, $J^1 = J$, $J^2 = J.J,\ldots$ les puissances de J . On désigne, pour tout entier $s \geq 0$, par $F_s(\pi)$ l'orthogonal de J^{s+1} dans $F(\pi)$; c'est donc l'ensemble des applications f de π dans $\mathbb{C}$ telles que

$$\langle f,(1-g_0)\ldots(1-g_s)\rangle = 0$$

pour $g_0,\ldots,g_s$ dans π . On a défini une suite croissante $F_s(\pi)$ de sous-espaces de $F(\pi)$, et l'on note $F_\infty(\pi)$ leur réunion.

Si π est le groupe $\mathbb{Z}^n$, $F_s(\pi)$ se compose des fonctions qui sont restriction à $\mathbb{Z}^n$ d'une fonction polynomiale de degré $\leq s$ sur $\mathbb{R}^n$, et $F_\infty(\pi)$ est l'espace des fonctions polynomiales sur π .

Dans le cas général, disons qu'une représentation linéaire $\sigma : \pi \longrightarrow GL(V)$,

---

[1] Voir Quillen dans [D 3].

où V est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$, est *unipotente* [1] si l'opérateur $1_V - \sigma(g)$ est nilpotent pour tout $g \in \pi$. Alors $F_\infty(\pi)$ se compose des coefficients des représentations unipotentes de π. Comme d'habitude, on identifie $F(\pi) \otimes F(\pi)$ à un sous-espace de $F(\pi \times \pi)$, de sorte que $f_1 \otimes f_2$ soit la fonction $(g_1,g_2) \longmapsto f_1(g_1)\ f_2(g_2)$. On vérifie alors que $F_\infty(\pi)$ est une sous-algèbre de $F(\pi)$ (pour la multiplication $(f_1f_2)(g) = f_1(g)\ f_2(g)$) et qu'il existe un homomorphisme d'algèbres c de $F_\infty(\pi)$ dans $F_\infty(\pi) \otimes F_\infty(\pi)$ tel que $(cf)(g_1,g_2) = f(g_1g_2)$ pour $f \in F_\infty(\pi)$ et g_1, g_2 dans π.

Autrement dit, $F_\infty(\pi)$ est une *bigèbre* au sens de Bourbaki (d'aucuns disent algèbre de Hopf). Notons $G_\infty(\mathbb{C})$ l'ensemble des homomorphismes d'algèbres de $F_\infty(\pi)$ dans $\mathbb{C}$; grâce au coproduit c, on définit sur $G_\infty(\mathbb{C})$ une multiplication qui en fait un groupe. Il s'agit de l'ensemble des points complexes d'un schéma affine en groupes G_∞ défini sur $\mathbb{Q}$; on peut donc aussi considérer le sous-groupe $G_\infty(\mathbb{Q})$ des points rationnels.

Pour tout entier $s \geq 0$, $F_s(\pi)$ est un espace vectoriel de dimension finie formé de fonctions sur G, et son dual s'identifie à $\mathbb{C}\pi/J^{s+1}$. Si g est un point de $G_\infty(\mathbb{C})$, l'application $f \longmapsto f(g)$ de $F_s(\pi)$ dans $\mathbb{C}$ définit donc un élément $\gamma_s(g)$ de $\mathbb{C}\pi/J^{s+1}$. L'application $g \longmapsto \gamma_s(g)$ est un homomorphisme de $G_\infty(\mathbb{C})$ dans le groupe multiplicatif $(\mathbb{C}\pi/J^{s+1})^\times$ d'une algèbre de dimension finie sur $\mathbb{C}$; l'image de γ_s est un groupe algébrique affine unipotent $G_s(\mathbb{C})$. Comme tout élément de $G_s(\mathbb{C})$ est de la forme $1+u$ avec u dans J/J^{s+1} (donc nilpotent), l'exponentielle et le logarithme fonctionnent bien. Il existe donc une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{g}_s$ de $\mathbb{C}\pi/J^{s+1}$ (pour le crochet $[u,v] = uv - vu$) telle que l'exponentielle soit une bijection de $\mathfrak{g}_s$ sur $G_s(\mathbb{C})$; il est clair que $\mathfrak{g}_s$ est l'algèbre de Lie du groupe de Lie complexe $G_s(\mathbb{C})$. En fait, on peut considérer G_s comme un schéma en groupes sur $\mathbb{Q}$, d'où une forme rationnelle $\mathfrak{g}_s^{\mathbb{Q}}$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_s$ avec $\mathfrak{g}_s = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathfrak{g}_s^{\mathbb{Q}}$.

Le groupe $G_\infty(\mathbb{C})$ est la limite projective des groupes $G_s(\mathbb{C})$ et son algèbre de Lie $\mathfrak{g}_\infty$ celle des $\mathfrak{g}_s$. Notons $\Gamma^1\pi \supset \Gamma^2\pi \supset \ldots$ la suite centrale descendante du groupe π, et $\Gamma^1 G_\infty \supset \Gamma^2 G_\infty \supset \ldots$ celle du groupe $G_\infty = G_\infty(\mathbb{C})$; notons aussi $\Gamma^1\mathfrak{g}_\infty \supset \Gamma^2\mathfrak{g}_\infty \supset \ldots$ la suite centrale descendante de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_\infty$. On a alors des isomorphismes

$$G_s(\mathbb{C}) = G_\infty/\Gamma^{s+1} G_\infty \quad , \quad \mathfrak{g}_s = \mathfrak{g}_\infty/\Gamma^{s+1}\mathfrak{g}_\infty$$

$$\Gamma^s G_\infty/\Gamma^{s+1} G_\infty = (\Gamma^s \pi/\Gamma^{s+1}\pi) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = \Gamma^s \mathfrak{g}_\infty/\Gamma^{s+1}\mathfrak{g}_\infty .$$

On pose $G_s(\mathbb{Z}) = \pi/\Gamma^{s+1}\pi$. On a un homomorphisme naturel de $G_s(\mathbb{Z})$ dans $G_s(\mathbb{C})$,

---

[1] Voici l'apparition de la "monodromie unipotente" du titre de l'exposé

dont le noyau est un sous-groupe fini de $G_s(\mathbb{Z})$ et l'image un sous-groupe discret de $G_s(\mathbb{C})$. En particulier, on a $G_1(\mathbb{Z}) = H_1(X;\mathbb{Z})$ et $G_1(\mathbb{C}) = H_1(X;\mathbb{C})$.

4.4. Explicitons le lien entre ces groupes G_s et les intégrales itérées, en décrivant un résultat dû à *Chen et Stallings*.

On a fixé un point-base a dans X. On définit comme suit une variante du complexe de Chen $\Gamma^\bullet$. Pour tout entier $n \geq 0$, on note $M_a^n(X)$ la sous-variété $a \times X^n \times a$ de $M^n(X) = X^{n+2}$, d'où une variété cosimpliciale $M_a^\bullet(X)$. Le complexe $\Gamma_a^\bullet$ est un quotient de $\Gamma^\bullet$; pour tout entier $p \geq 0$, un élément de Γ_a^p est une suite $(\mu_n)_{n\geq 0}$ où μ_n est une forme différentielle de degré $n+p$ sur $a \times X^n \times a$. La différentielle $d + \Delta$ de Γ_a^p dans Γ_a^{p+1} est encore décrite par la formule (31) du n° 2.2.

Pour tout entier $s \geq 0$, on note $B_s\,\Gamma_a^p$ le sous-espace de Γ_a^p formé des suites $(\mu_n)_{n\geq 0}$ avec $\mu_n = 0$ pour $n > s$. On obtient ainsi un sous-complexe $B_s\,\Gamma_a^\bullet$ de $\Gamma_a^\bullet$. L'espace $H^0(\Gamma_a^\bullet)$ est ainsi filtré par les images $B_s\,H^0(\Gamma_a^\bullet)$ des groupes de cohomologie $H^0(B_s\,\Gamma_a^\bullet)$.

L'intégrale itérée définit alors, pour tout $s \geq 0$, *un isomorphisme de* $B_s\,H^0(\Gamma_a^\bullet)$ *sur* $F_s(\pi)$.

4.5. On revient maintenant au cas d'une variété algébrique lisse X ; on la suppose donnée sous la forme $\bar{X}\setminus D$ comme au n° 3.4, avec un diviseur D à croisements normaux. On dit qu'une forme différentielle de degré n est à *singularités logarithmiques* si elle appartient à $W_{2n}\,\mathcal{A}^n(X)$. Avec les notations précédentes, on dit qu'un élément $\mu = (\mu_0, \mu_1, \ldots)$ de Γ_a^p est à singularités logarithmiques si chaque μ_n est somme finie de formes du type $1 \times \omega_1 \times \ldots \times \omega_n \times 1$, où $\omega_1, \ldots, \omega_n$ sont à singularités logarithmiques. On obtient ainsi un sous-complexe $\Gamma_{a,\log}^\bullet$ de $\Gamma_a^\bullet$. On peut encore filtrer ce complexe par les sous-complexes $B_s\,\Gamma_a^\bullet \cap \Gamma_{a,\log}^\bullet = B_s\,\Gamma_{a,\log}^\bullet$. En passant à la cohomologie, on obtient l'espace $H^0(\Gamma_{a,\log}^\bullet)$ filtré par les images des cohomologies $H^0(B_s\,\Gamma_{a,\log}^\bullet)$, notées $B_s\,H^0(\Gamma_{a,\log}^\bullet)$.

La démonstration de Chen et Stallings s'adapte : *l'intégrale itérée définit un isomorphisme de* $B_s\,H^0(\Gamma_{a,\log}^\bullet)$ *sur* $F_s(\pi)$.

4.6. Le résultat précédent est la clé pour la définition d'une *structure de Hodge mixte* sur $\pi = \pi_1(X,a)$. Celle-ci a d'abord été construite par Morgan [D 2] par utilisation des méthodes d'homotopie rationnelle développées par lui-même et Sullivan ; la méthode des intégrales itérées est due à Hain [F 3].

Pour tout entier $n \geq 0$, la variété X^n est le complémentaire d'un diviseur à croisements normaux dans $\bar{X}^n$. Pour les formes différentielles de classe C^∞ sur X^n, on peut donc définir la filtration de Hodge et la filtration par le poids. On en déduit successivement des filtrations F et W sur $\Gamma_{a,\log}^\bullet$, sur

$B_s \Gamma^{\bullet}_{a,\log}$, sur $H^o(\Gamma^{\bullet}_{a,\log})$ et sur $B_s H^o(\Gamma^{\bullet}_{a,\log})$. Compte tenu de l'isomorphisme du n° précédent, on aboutit à la définition d'une structure de Hodge mixte sur $F_s(\pi)$.

On transfère ensuite par dualité, comme au n° 4.2, ces filtrations F et W au dual $\mathbb{C}\pi/J^{s+1}$ de $F_s(\pi)$, puis on induit sur le sous-espace $\mathfrak{g}_s$ de $\mathbb{C}\pi/J^{s+1}$. La conclusion est qu'*on a construit une structure de Hodge mixte sur l'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}_s$ *du groupe de Lie complexe nilpotent* $G_s(\mathbb{C})$.

4.7. Les filtrations F et W sur $\mathfrak{g}_s$ sont compatibles avec le crochet de Lie en un sens évident. On peut donc repasser des algèbres de Lie aux groupes. Résumons la situation acquise :

a) *pour tout entier* $s \geq 0$, *on a construit un schéma en groupes* G_s, *affine, de corps de base* $\mathbb{Q}$;

b) *on a construit une suite croissante* $(W_n G_s)_{n\leq o}$ *de sous-schémas en groupes de* G_s ;

c) *le groupe* $G_s(\mathbb{C})$ *des points complexes de* G_s *est un groupe de Lie complexe simplement connexe et nilpotent, donc l'application exponentielle est un isomorphisme de variétés analytiques complexes de* $\mathfrak{g}_s$ *sur* $G_s(\mathbb{C})$;

d) *le quotient* $G_s(\mathbb{Z})$ *de* $\pi_1(X;a)$ *par le sous-groupe* $\Gamma^{s+1}\pi_1(X;a)$ *est un groupe nilpotent à un nombre fini de générateurs ; il s'envoie dans* $G_s(\mathbb{C})$ *par un homomorphisme à noyau fini, et dont l'image est un sous-groupe discret ;*

e) *on a construit une suite décroissante* $(F^p G_s)_{p\geq o}$ *de sous-groupes de Lie complexes de* $G_s(\mathbb{C})$.

C'est en ce sens qu'on a muni $\pi_1(X;a)$ d'une structure de Hodge mixte. On peut aussi le faire pour les groupes d'homotopie supérieurs $\pi_i(X;a)$ avec la simplification que ce sont des groupes commutatifs de type fini, et qu'on peut se rapporter aux définitions de Deligne données en 3.5 ; Morgan [D 2] et Hain [F 2] l'ont fait, chacun par ses méthodes.

Signalons aussi que Hain et Zucker [F 5] ont donné une caractérisation de la structure de Hodge mixte sur $\pi_1(X;a)$ en termes des "variations de structure de Hodge mixte", un sujet important pour l'étude des "modules".

4.8. La *définition générale de la variété d'Albanese* a été donnée par Hain et Zucker dans [F 5]. On pose

$$\mathrm{Alb}_s(X) = G_s(\mathbb{Z}) \backslash G_s(\mathbb{C}) \,/\, F^o\, G_s(\mathbb{C}) .$$

On remarquera que la variété analytique complexe $G_s(\mathbb{C}) / F^o G_s(\mathbb{C})$ est simplement connexe, et que le quotient de $G_s(\mathbb{Z}) = \pi/\Gamma^{s+1}\pi$ par son groupe (fini) de torsion opère librement et proprement sur $G_s(\mathbb{C}) / F^o G_s(\mathbb{C})$. Lorsque X est projective et lisse, on retrouve la variété Alb(X) définie au n° 4.2 comme le cas particulier $s = 1$.

La situation se simplifie beaucoup lorsque toute 1-forme différentielle holomorphe sur $\bar{X}$ est nulle $(\Omega^1(\bar{X}) = 0)$; ceci se produit en particulier si X est le complémentaire d'une hypersurface à croisements normaux dans l'espace projectif $\mathbf{P}^d(\mathbb{C})$ (cas étudié abondamment par Aomoto et Kohno [G 1, G 4, G 6]).

Supposons donc qu'on ait $\Omega^1(\bar{X}) = 0$. On a alors $F^0\, G_s = 0$, d'où

$$\mathrm{Alb}_s(X) = G_s(\mathbb{Z}) \setminus G_s(\mathbb{C}) \ .$$

Il s'agit de décrire l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_s$. Notons $\Omega^p(X \log D)$ l'espace $\Omega^p(X) \cap W_{2p}\, a^p(X)$ des formes différentielles holomorphes de degré p sur X , à singularités logarithmiques le long de D . Ces formes différentielles sont fermées, d'où un homomorphisme

$$c_p : \Omega^p(X \log D) \longrightarrow H^p(X;\mathbb{C})$$

qui est bijectif pour $p = 1$, injectif pour $p = 2$. Le produit extérieur des formes définit une application linéaire δ_2 de $\Lambda^2\, \Omega^1(X \log D)$ dans $\Omega^2(X \log D)$; identifiant le dual de $\Omega^1(X \log D)$ à $H_1 = H_1(X;\mathbb{C})$, la transposée de δ_2 est une application linéaire de $\Omega^2(X \log D)^*$ dans $\Lambda^2\, H_1$, dont on note R^2 l'image. Introduisons l'algèbre de Lie libre $\mathcal{L}(H_1)$ construite sur l'espace vectoriel H_1 , et graduée de manière naturelle par des sous-espaces $\mathcal{L}_p(H_1)$: on a

$$\mathcal{L}_0(H_1) = 0 \ , \ \mathcal{L}_1(H_1) = H_1 \ , \ \mathcal{L}_2(H_1) = \Lambda^2\, H_1 \ .$$

Alors $\mathfrak{g}_s$ *s'identifie au quotient de* $\mathcal{L}(H_1)$ *par l'idéal engendré par* $R_2 + \mathcal{L}_{s+1}(H_1)$.

Comme H_1 et $\Omega^1(X \log D)$ sont en dualité, on dispose d'une forme différentielle canonique ω_s dans $\Omega^1(X \log D) \otimes H_1$. On l'interprète comme une forme différentielle holomorphe à coefficients dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_s$, et l'on plonge $\mathfrak{g}_s$ dans l'algèbre associative $\mathbb{C}\pi/J^{s+1}$. Alors ω_s satisfait à la condition d'intégrabilité $d\omega_s + \omega_s \wedge \omega_s = 0$ en vertu de la définition de R_2 . On peut alors jouer le jeu habituel :

a) *introduire le revêtement universel* $\tilde{X}$ *de* X *basé en* a ;

b) *si* γ *est un chemin dans* X , *d'origine* a *et d'extrémité* b , *calculer le transport parallèle par la série* $U_s(\gamma) = \sum_{n\geq 0} \int_\gamma \omega_s \ldots\ldots \omega_s$;

c) *la condition d'intégrabilité* $d\omega_s + \omega_s \wedge \omega_s = 0$ *assure que* $U_s(\gamma)$ *ne dépend que du point de* $\tilde{X}$ *correspondant, d'où une application holomorphe* U_s *de* $\tilde{X}$ *dans* $\mathbb{C}\pi/J^{s+1}$;

d) *l'application* U_s *prend ses valeurs dans* $G_s(\mathbb{C})$ *et définit par passage aux quotients une application holomorphe* u_s *de* X *dans sa variété d'Albanese* $\mathrm{Alb}_s(X) = G_s(\mathbb{Z}) \setminus G_s(\mathbb{C})$.

On renvoie à Hain et Zucker [F 5] pour les constructions à faire dans le cas général où $\Omega^1(\bar{X})$ n'est pas nul.

4.9. A titre d'illustration, le lecteur est invité à étudier le cas $\bar{X} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et à retrouver par spécialisation les constructions du n° 1.8.

Kohno a beaucoup étudié le cas où X est le complémentaire d'une famille finie d'hyperplans dans $\mathbb{P}^d(\mathbb{C})$. En particulier, supposons que X soit l'ensemble des vecteurs dans $\mathbb{C}^d$ à coordonnées toutes distinctes ; par définition $\pi_1(X)$ est le groupe de tresses. L'étude des représentations linéaires liées à la monodromie de X permet de retrouver et généraliser certains des résultats de Jones (voir [G 4], [G 5] et [G 7]). Faute de place, nous abandonnons le lecteur à sa curiosité ...

BIBLIOGRAPHIE RAISONNÉE

A. Traités généraux

[1] J. BIRMAN - *Braids, links and mapping class groups*, Ann. Math. Studies, vol. 82 (1974), Princeton Univ. Press.

[2] N. BOURBAKI - *Groupes et algèbres de Lie, chap.* 2-3, Hermann, Paris, 1972.

[3] N. BOURBAKI - *Groupes et algèbres de Lie, chap.* 4-6, Masson, Paris, 1981.

[4] E. CATTANI et al. (éditeurs) - *Hodge theory*, Proc. Conf. Sant. Cugat, Lect. Notes in Math. vol. 1246, Springer, Berlin, 1987.

[5] P.A. GRIFFITHS, J.W. MORGAN - *Rational homotopy theory and differential forms*, Birkhäuser, Boston, 1981.

[6] J.A. LAPPO-DANILEVSKY - *Théorie des systèmes des équations différentielles linéaires*, Chelsea, New York, 1953.

[7] W. MAGNUS, A. KARASS et D. SOLITAR - *Combinatorial group theory*, Dover, New York, 1976.

B. Exposés au Séminaire Bourbaki sur des sujets connexes

[1] E. BRIESKORN - *Sur les groupes de tresses (d'après V.I. Arnold)*, n° 401, 1971/2.

[2] P. CARTIER - *Arrangements d'hyperplans ; un chapitre de géométrie combinatoire*, n° 561, 1980/1.

[3] P. CARTIER - *Décomposition des polyèdres, le point sur le 3e problème de Hilbert*, n° 646, 1984/5.

[4] A. CONNES - *Index des sous-facteurs, algèbres de Hecke et théorie des noeuds (d'après Vaughan Jones)*, n° 647, 1984/5.

[5] J.-L. VERDIER - *Groupes quantiques (d'après Drinfel'd)*, n° 685, 1986/7.

C. Intégrales itérées

[1] K.T. CHEN - *Iterated integrals of differential forms and loop space homology*, Ann. of Maths, 97 (1973), p. 217-246.

[2] K.T. CHEN - *Iterated path integrals*, Bull. Amer. Math. Soc. 83 (1977), p. 831-879.

[3] A.N. PARŠIN - *A generalization of Jacobian variety*, Amer. Math. Soc. Transl. (2) 84 (1969), p. 187-196.

[4] R. REE - *Lie elements and an algebra associated with shuffles*, Ann. of Maths, 68 (1958), p. 210-220.

D. Homotopie rationnelle et applications

[1] P. DELIGNE, P. GRIFFITHS, J. MORGAN, D. SULLIVAN - *Real homotopy theory of Kähler manifolds*, Invent. Math. 29 (1975), p. 245-274.

[2] J. MORGAN - *The algebraic topology on smooth algebraic varieties*, Publ. Math. I.H.E.S., 48 (1978), p. 157-204.

[3] D. QUILLEN - *Rational homotopy theory*, Ann. of Maths, 90 (1969), p. 205-295.

[4] D. SULLIVAN - *Infinitesimal computations in topology*, Publ. Math. I.H.E.S., 47 (1977), p. 269-331.

E. Théorie de Hodge (articles classiques)

[1] P. DELIGNE - *Équations différentielles à points singuliers réguliers*, Lect. Notes in Math. vol. 163, Springer, Berlin, 1970.

[2] P. DELIGNE - *Théorie de Hodge* I : Congrès Int. Math. Nice 1970, vol. 1, p. 425-430 ; II : Publ. Math. I.H.E.S. 40 (1971), p. 5-58 ; III : *ibid.*, 44 (1974), p. 5-77.

[3] P. DELIGNE - *Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales*, Publ. Math. I.H.E.S., 35 (1968), p. 107-126.

[4] A. GROTHENDIECK - *On the de Rham cohomology of algebraic varieties*, Publ. Math. I.H.E.S., 29 (1966), p. 351-359.

[5] P. GRIFFITHS, W. SCHMIDT - *Recent developments in Hodge theory : a discussion of techniques and results*, p. 31-127, in *Discrete subgroups of Lie groups and applications to moduli* (Bombay Colloquium 1973), Oxford Univ. Press, 1975.

F. Théorie de Hodge (résultats récents)

[1] A.A. BEILINSON - *Notes on absolute Hodge cohomology*, Contemporary Maths, vol. 55, p. 35-68, Amer. Math. Soc., 1986.

[2] R. HAIN - *The de Rham homotopy theory of complex algebraic varieties* I, II, à paraître.

[3] R. HAIN - *The geometry of the mixed Hodge structure on the fundamental group, Algebraic geometry*, Bowdoin College 1985, à paraître dans Proc. Symp. Pure Math.

[4] R. HAIN - *On a generalization of Hilbert's 21st problem*, Ann. Scient. E.N.S. 19 (1986), p. 609-627.

[5] R. HAIN, S. ZUCKER - *Unipotent variations of mixed Hodge structure*, Invent. Math. 88 (1987), p. 83-124.

[6] V. NAVARRO-AZNAR - *Sur la théorie de Hodge - Deligne* I : Invent. Math. 90 (1987), p. 11-76 ; II : à paraître.

Voir aussi les articles de Hain, Zucker et Navarro-Aznar dans [A 4].

G. Monodromie, systèmes d'hyperplans, groupes de tresses

[1] K. AOMOTO - *Fonctions hyperlogarithmiques et groupes de monodromie unipotents*, J. Fac. Sci. Tokyo, 25 (1978), p. 149-156.

[2] M. FALK et R. RANDELL - *The lower central series of a fiber-type arrangement*, Invent. Math. 82 (1985), p. 77-88.

[3] V. JONES - *Index of subfactors*, Invent. Math. 72 (1983), p. 1-25.

[4] T. KOHNO - *Série de Poincaré - Koszul associée aux groupes de tresses pures*, Invent. Math. 82 (1985) p. 57-75.

[5] T. KOHNO - *Poincaré series of the Malcev completion of generalized pure braid groups*, à paraître.

[6] T. KOHNO - *On the holonomy Lie algebra and the nilpotent completion of the fundamental group of the complement of hypersurfaces*, Nagoya Math. J. 92 (1983), p. 21-37.

[7] T. KOHNO - *Monodromy representations of braid groups and Yang - Baxter equations*, Annales Inst. Fourier, 37 (fascicule 4) (1987), p. 139-160, Colloque en l'honneur de J.-L. Koszul.

[8] T. KOHNO et T. ODA - *The lower central series of the pure braid group of an algebraic curve*, à paraître.

H. Ouvertures

[1] J.-L. DUPONT - *On polygarithms*, Aarhus, prépublication, 1987.

[2] Y. IHARA - *Profinite braid groups, Galois representations and complex multiplications*, Ann. of Maths, 123 (1986), p. 43-106.

Pierre CARTIER

École Polytechnique
Centre de Mathématiques
F-91128 PALAISEAU CEDEX