PATRICK GÉRARD

Solutions globales du problème de Cauchy pour l'équation de Boltzmann

Astérisque, tome 161-162 (1988), Séminaire Bourbaki, exp. n° 699, p. 257-281

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1987-1988__30__257_0>

Séminaire BOURBAKI Juin 1988
40ème année, 1987-88, n° 699

SOLUTIONS GLOBALES DU PROBLÈME DE CAUCHY POUR L'ÉQUATION DE BOLTZMANN
[d'après R.J. Di Perna et P.L. Lions]

par Patrick GÉRARD

R.J. Di Perna et P.L. Lions ont récemment démontré l'existence d'une solution de l'équation de Boltzmann pour toute donnée de Cauchy vérifiant des estimations naturelles. Nous nous proposons d'exposer les principales étapes de la démonstration de ce résultat. Auparavant, nous rappelons brièvement le cadre physique et décrivons très succinctement l'évolution dans l'approche de ce problème.

0.1. En 1872 [1], L. Boltzmann développe les travaux de J.C. Maxwell [2] (1866) et établit une équation permettant de décrire l'évolution statistique d'un gaz dilué. En négligeant tout effet de bord, supposons que le gaz occupe l'espace à d dimensions ($d = 1,2$ ou 3) et notons $f = f(t,x,v)$ la densité de probabilité de présence au temps t des molécules de gaz dans l'espace des phases $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ (x représente la position, v représente la vitesse). En dehors de toute interaction, les molécules se déplaceraient en ligne droite, à vitesse constante, de sorte que f serait solution de

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \; . \tag{0.1}$$

Dans un gaz dilué, en l'absence de force extérieure, les interactions se réduisent essentiellement à des collisions élastiques ne mettant en jeu que deux molécules à la fois. Si (v,v_*) et (v',v'_*) désignent les vitesses des deux molécules respectivement avant et après la collision, les conservations de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique s'écrivent

$$\begin{cases} v' + v'_* = v + v_* \\ |v'|^2 + |v'_*|^2 = |v|^2 + |v_*|^2 \end{cases} \tag{0.2}$$

que l'on résout par :

$$\begin{cases} v' = v - (v - v_*).\omega\, \omega \\ v'_* = v_* + (v - v_*).\omega\, \omega \end{cases} \tag{0.3}$$

pour une certaine direction $\omega \in S^{d-1}$.

L'occurence d'une direction ω et d'une vitesse relative $V = v - v_*$ est gouvernée par une grandeur statistique $q(V,\omega)$, appelée section efficace, qui ne dépend que de $|V|$ et de $|V.\omega|$. En supposant l'absence de corrélation entre deux molécules avant et après la collision, Boltzmann montre alors que l'équation (0.1) doit être modifiée comme suit :

$$\text{(B)} \qquad \frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = Q(f,f) \, , \qquad \text{avec}$$

$$\text{(0.4)} \qquad Q(f,f)(t,x,v) = \iint_{\mathbb{R}^d \times S^{d-1}} q(v - v_*,\omega)(f'f'_* - ff_*)dv_* d\omega \, ,$$

$$\text{(0.5)} \qquad f = f(t,x,v) \, , \; f_* = f(t,x,v_*) \, , \; f' = f(t,x,v') \, , \; f'_* = f(t,x,v'_*) \, ,$$

et v', v'_* sont données par (0.3).

Dans le modèle étudié par Boltzmann, les molécules sont assimilées à des boules de billard, et q est de la forme

$$\text{(0.6)} \qquad q(V,\omega) = c_0 |V.\omega|$$

où c_0 est une constante proportionnelle à l'inverse du libre parcours moyen des molécules.

Il existe d'autres modèles, liés par exemple à une force intermoléculaire en $\frac{1}{r^s}$ ($s > 3$) pour lesquels q est de la forme

$$\text{(0.7)} \qquad q(V,\omega) = c_0 |V|^{\frac{s-5}{s-1}} \sigma\left(\frac{V.\omega}{|V|}\right) \qquad (d = 3)$$

et $\sigma \in L^1(]-1,1[)$. (C'est l'hypothèse de "cutoff angulaire" visant à négliger les collisions rasantes, voir Grad [38], Cercignani [3].) Après avoir vérifié la conservation au cours du temps d'un certain nombre de grandeurs macroscopiques du gaz (masse, moment cinétique, énergie cinétique...), Boltzmann introduit la quantité

$$\text{(0.8)} \qquad H = \iint f \operatorname{Log} f \, dxdv$$

et démontre qu'elle décroît au cours du temps. (Voir la section 1). La fonction H sera plus tard interprétée comme l'entropie du système étudié (au signe près). L'usage de la fonction H permet à Boltzmann de retrouver la forme de f à l'équilibre, déjà établie par Maxwell [2] :

$$\text{(0.9)} \qquad f(v) = \frac{\rho}{(2\pi\theta)^{d/2}} \exp(-(v-u)^2/2\theta)$$

où ρ, u, θ sont respectivement la densité, le champ de vitesse et la température du gaz (indépendants de (t,x) à l'équilibre).

0.2. La première preuve de l'existence d'une solution de (B) pour une classe générale de données f^0 en $t = 0$ est obtenue par T. Carleman [10] en 1933. Elle concerne le modèle des "sphères dures" (0.6) dans le cas *spatialement homogène* (f est indépendante de x), de sorte que le problème de Cauchy pour (B) se réduit à

$$\frac{\partial f}{\partial t} = Q(f,f) \quad , \quad f(0,v) = f^{o}(v) \ . \tag{0.10}$$

La difficulté réside bien sûr dans la croissance quadratique du terme $Q(f,f)$, qui peut être un obstacle sérieux à l'existence globale. La démonstration de Carleman consiste à exploiter la compensation entre les deux quantités

$$Q_+(f,f) = \iint q(v-v_*,\omega)\ f'f'_*\ dv_* d\omega \tag{0.11}$$

$$Q_-(f,f) = \iint q(v-v_*,\omega)\ ff_*\ dv_* d\omega = f\,.\,Lf \tag{0.12}$$

qui sont telles que $Q = Q_+ - Q_-$.

A l'aide d'une itération du type

$$\frac{\partial f_{k+1}}{\partial t} + (Lf_k) f_{k+1} = Q_+(f_k,f_k) \ ,$$

c'est-à-dire

$$f_{k+1}(t,v) = f_{k+1}(0,v) + \int_0^t e^{-\int_s^t Lf_k(\sigma,v)d\sigma}\ Q_+(f\ ,f\ )(s,v)ds \ . \tag{0.14}$$

Carleman prouve l'existence et l'unicité d'une solution de (0.10) dans la classe des fonctions f continues positives telles que

$$\sup_{t\geq 0}\ \sup_{v\in\mathbb{R}^d}\ (1+|v|)^p\ f(t,v) < +\infty \tag{0.15}$$

dès que $p > 6$ ($d = 3$).

En 1951, E. Wild [17] construit une solution de (0.10) comme limite d'une suite *croissante* d'approximations ; ce procédé, repris par D. Morgenstern [14] trois ans plus tard, permet de prouver l'existence globale et l'unicité pour (0.10) dans la classe plus naturelle et plus générale des fonctions continues bornées en t à valeurs dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, mais seulement dans le cas d'une section efficace "maxwellienne" (i.e. q vérifie (0.7) avec $s = 5$). En 1972, L. Arkeryd [8] montre que cette méthode s'adapte à toute section efficace globalement bornée en V, puis étend le résultat à des sections efficaces à croissance polynômiale, en remarquant notamment que, si f^o est d'énergie cinétique et d'entropie finies, les estimées *a priori* existant sur ces deux quantités (voir (1.2) et (1.4) ; ici l'intégration en x n'est pas nécessaire) permettent de passer à la limite faible dans L^1 grâce au critère de Dunford-Pettis (voir section 4) à partir d'une suite de solutions d'équations tronquées (correspondant à $q_n = \mathrm{Inf}(q,n)$). Cette méthode générale d'approximation d'une solution est également, dans un cadre plus général, celle de Di Perna et Lions (voir section 3). Citons enfin, également dans le cas spatialement homogène, l'approche probabiliste de Kac [12] et Mc Kean [13], valable pour une section efficace maxwellienne, et généralisée par A.S. Sznitman [16], qui, en particulier, obtient le résultat d'unicité le plus général connu actuellement pour ce problème : si f^o admet un moment d'ordre 3, la solution de (0.10) est unique dans la classe des fonctions f admettant un moment d'ordre 3.

0.3. L'étude de l'équation de Boltzmann générale (i.e. avec dépendance en x) fait apparaître une difficulté de taille. Si f ne vérifie que les estimées naturelles de type L^1 (voir la section 1), il est *a priori* impossible de définir le second membre $Q(f,f)$ dans un espace de distributions (voir la section 2). En effet, si, du point de vue de la variable v, la structure de $Q(f,f)$ est essentiellement celle d'une convolution, elle est, du point de vue de la variable x, celle d'un produit ponctuel, qu'il est impossible de définir entre deux fonctions quelconques de L^1. C'est pourquoi tous les travaux dans ce cadre ont utilisé jusque-là des normes plus contraignantes (par exemple L^∞ à poids, comme dans la preuve de Carleman) ; mais le prix à payer est ici plus élevé, puisque le résultat d'existence obtenu n'est vrai que sur un petit intervalle de temps ([5],[30]), ou impose aux données d'être proches d'un état d'équilibre (0.9), le second membre étant alors traité par une méthode de perturbation ([25],[18],[28],[31]).

0.4. Di Perna et Lions lèvent la difficulté précédente par trois arguments originaux :

a) Une analyse du noyau de collision $Q(f,f)$ (section 5) tirant parti de l'identité d'entropie de Boltzmann (1.4), et explicitant la compensation entre les termes $Q_+(f,f)$ et $Q_-(f,f)$ donnés par (0.11) et (0.12) (inégalités (5.1) et (5.2)).

b) Une méthode de lissage non linéaire consistant à écrire (B) sous la forme suivante, dite "renormalisée" :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{Log}(1+\varepsilon f)\right) = \frac{Q(f,f)}{1+\varepsilon f} \tag{0.16}$$

et qui permet d'exploiter les estimations précédentes sur $Q(f,f)$. Notons que la formulation (0.16) utilise de façon essentielle que l'opérateur différentiel T est un champ de vecteurs.

c) L'utilisation d'un résultat de moyennisation sur la solution d'une équation aux dérivées partielles dépendant d'un paramètre, dû originellement à F. Golse, B. Perthame et R. Sentis [50], assurant ici que la structure intégrale en v du noyau de collision Q régularise sa dépendance en x, et en particulier assure suffisamment de compacité pour passer à la limite à partir d'une suite de solutions d'équations tronquées (voir sections 6 et 7). L'énoncé précis du théorème de Di Perna et Lions figure à la fin de la section 2.

0.5. Les méthodes de Di Perna et Lions s'appliquent à d'autres équations de la cinétique des fluides, notamment l'équation de Boltzmann - Fokker - Planck, qui prend en compte les collisions rasantes, et l'équation de Vlasov - Maxwell, qui décrit l'évolution statistique d'un plasma : voir [44] et [45].

0.6. L'équation de Boltzmann discutée ici néglige les effets de bord. De nombreux travaux traitent du même problème avec conditions aux limites, et il est probable que les méthodes ci-dessus s'appliquent aussi dans ce cadre[(1)].

0.7. Enfin, signalons qu'une motivation supplémentaire à l'étude de (B) est son lien avec les équations de la mécanique des fluides. Lorsque le libre parcours moyen des molécules tend vers zéro, le gaz se rapproche d'un régime de fluide quasi-continu, et l'on s'attend à retrouver les modèles macroscopiques. Dès 1912, D. Hilbert [40] a appliqué sa théorie des équations intégrales à la recherche d'une solution formelle de (B) sous forme d'une série de perturbations

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n f_n \tag{0.17}$$

où $\varepsilon = \frac{1}{c_0}$ tend vers 0 (voir (0.6) et (0.7)). Il en déduit en particulier que le terme prépondérant f_0 est une Maxwellienne (0.9) dont les paramètres ρ, u, ϑ vérifient le système des équations d'Euler. Une méthode d'approximation plus raffinée est ensuite proposée par S. Chapman [35] et D. Enskog [37], qui, au premier ordre, relie f au système des équations de Navier - Stokes (voir par exemple C. Bardos [32]). La validité mathématique de ces approximations a été obtenue, pour des solutions régulières proches de l'équilibre et sur un petit intervalle de temps, par T. Nishida [42] en 1978. Dans les autres cas, il s'agit d'un problème très délicat. Il n'est hélas pas possible de décrire ici la quantité impressionnante de travaux en lien avec ce passage du microscopique au macroscopique (voir par exemple R. Caflish [33] pour une introduction).

L'auteur remercie C. Bardos, F. Coron et F. Golse pour leur aide durant la préparation de cet exposé.

Notations.- . d est un entier strictement positif.

. Sauf mention du contraire, les fonctions utilisées sont à valeurs complexes. Néanmoins, une solution de l'équation de Boltzmann est toujours supposée à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

. Si Ω est un espace mesuré, la notation $L^p(\Omega)$ $(1 \leq p \leq +\infty)$ est classique. Lorsque Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^k$, la mesure utilisée est la mesure de Lebesgue, et $L^p_{loc}(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions mesurables sur Ω dont les restrictions à tout ouvert U relativement compact dans Ω sont dans $L^p(U)$. Si Ω' est un ouvert de $\mathbb{R}^\ell$, on emploiera parfois la notation $L^p(\Omega' \times \Omega_{loc})$ pour désigner l'espace des fonctions mesurables sur $\Omega' \times \Omega$ dont les restrictions à $\Omega' \times U$ sont dans $L^p(\Omega' \times U)$ pour tout ouvert U relativement compact dans Ω .

. Si X est une variété différentiable, $C_0^\infty(X)$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur X , à support compact.

. Si $s \in \mathbb{R}$, $H^s(\mathbb{R}^k)$ est l'espace de Sobolev standard sur $\mathbb{R}^k$.

(1) Un résultat général d'existence a été obtenu tout récemment par K. Hamdache [53].

. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables, à décroissance rapide ainsi que leurs dérivées, sur $\mathbb{R}^k$.

. Si $R > 0$, B_R désigne la boule de $\mathbb{R}^d$ de centre 0 et de rayon R .

. Enfin, l'opérateur de transport $\frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial}{\partial x}$ sera souvent noté T .

1. LOIS DE CONSERVATION ET INÉGALITÉS *A PRIORI*

1.1. Une première étape dans la démonstration d'un résultat d'existence pour une équation aux dérivées partielles consiste en l'obtention d'inégalités permettant de contrôler la régularité d'éventuelles solutions "*a priori*", c'est-à-dire uniquement en fonction des données - ici, la donnée de Cauchy. Ces estimations dictent en particulier l'espace dans lequel chercher une solution, compte tenu de ces données.

Pour des raisons techniques (voir la section 3), nous avons ajouté dans l'énoncé qui suit une dépendance par rapport à x de la fonction q intervenant dans (B).

PROPOSITION 1.- *Soit* $q = q(x,V,\omega)$ *une fonction mesurable positive, localement essentiellement bornée sur* $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times S^{d-1}$ *, ne dépendant que de* $x, |V|, |V.\omega|$ *, et à croissance polynômiale en* (x,V) *. Soit* $f = f(t,x,v) \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{S}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d))$ *une solution (positive) de* (B)*, telle que* $|\mathrm{Log}\, f|$ *ait une croissance polynômiale en* (x,v) *, localement uniformément en* $t \in \mathbb{R}_+$ *. On note* $f^0(x,v) = f(0,x,v)$ *. Pour tout* $t \in \mathbb{R}_+$ *, on a*

$$\iint f \, dxdv = \iint f \, dxdv \tag{1.1}$$

$$\iint f|v|^2 \, dxdv = \iint f^0 |v|^2 \, dxdv \tag{1.2}$$

$$\iint f|x - tv|^2 \, dxdv = \iint f^0 |x|^2 \, dxdv \tag{1.3}$$

$$\iint f \,\mathrm{Log}\, f \, dxdv + \int_0^t \iint e(f) \, dsdxdv = \iint f^0 \,\mathrm{Log}\, f^0 \, dxdv \tag{1.4}$$

où f *est mis pour* $f(t,x,v)$ *, et*

$$e(f)(t,x,v) = \frac{1}{4} \iint (f'f'_* - ff_*) \,\mathrm{Log}\left(\frac{f'f'_*}{ff_*}\right) (t,x,v,v_*,\omega) q(x,v-v_*,\omega) \, dv_* d\omega \tag{1.5}$$

(les notations f_*, f', f'_* *sont introduites en* (0.5)*).*

COROLLAIRE 1.- *Sous les hypothèses de la proposition* 1*, on a les estimations suivantes :*

$$\iint f(1 + |x|^2 + |v|^2) \, dxdv \leq \iint f^0 (1 + 2|x|^2 + (2t^2 + 1)|v|^2) \, dxdv \tag{1.6}$$

$$\iint f|\mathrm{Log}\, f| \, dxdv + \int_0^\infty \iint e(f) \, dsdxdv \leq \iint f^0 (|\mathrm{Log}\, f^0| + 2|x|^2 + 2|v|^2) \, dxdv + c_d \, , \tag{1.7}$$

où c_d *ne dépend que de la dimension* d .

1.2. La clé de la proposition 1 est l'identité suivante :

Lemme 1.- *Soient* $q = q(V)$ *ne dépendant que de* $|V|$, $|V.\omega|$, et $\varphi = \varphi(v)$, *toutes deux à croissance polynômiale en* v , *et soit* $g = g(v)$ *à décroissance rapide en* v . *Alors*

$$\int Q(g,g)\,\varphi\,dv = -\frac{1}{4}\iiint (g'g'_* - gg_*)(\varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_*)\,q\,dvdv_*d\omega \ . \tag{1.9}$$

Preuve.- Il suffit d'écrire $\int Q(g,g)\varphi\,dv = \iiint (g'g'_* - gg_*)\varphi q\,dvdv_*d\omega$, puis d'effectuer successivement, à ω fixé, les changements de variables $(v,v_*) \longmapsto (v_*,v)$, $(v,v_*) \longmapsto (v',v'_*)$, $(v,v_*) \longmapsto (v'_*,v')$, en remarquant que ceux-ci n'affectent pas les valeurs de $|v-v_*|$ et de $|(v-v_*).\omega|$. Le second membre de (1.9) est la moyenne des quatre intégrales obtenues.■

Une fonction φ (continue) telle que $\varphi' + \varphi'_* = \varphi + \varphi_*$ pour tous v,v_* , s'appelle un *invariant de collision*. Les fonctions 1 , v_i , $1 \le i \le d$, $|v|^2$, en sont des exemples, et on peut montrer (mais nous ne nous en servirons pas) qu'elles forment une base de l'espace vectoriel des invariants de collision.

1.3. <u>Preuves de la proposition 1 et du corollaire 1</u>

Soit $\psi = \psi(t,x,v) \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ telle que ψ et $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ soient à croissance polynômiale en (x,v) , localement uniformément en t . On suppose que $T\psi = 0$.

Alors, du fait que $\int v.\partial_x g\,dx = 0$ pour tout $g \in S$,

$$\frac{d}{dt}\iint f\psi\,dxdv = \iint T(f\psi)\,dxdv = \iint (Tf)\,\psi\,dxdv = \iint Q(f,f)\,\psi\,dxdv \ .$$

Si de plus, pour tout (t,x) , $v \longmapsto \psi(t,x,v)$ est un invariant de collision, on déduit du lemme 1 que

$$\frac{d}{dt}\iint f\psi\,dxdv = 0 \ .$$

On obtient (1.1), (1.2), (1.3) en appliquant cette identité à $\psi = 1, |v|^2, |x-tv|^2$. De même, on peut calculer

$$\frac{d}{dt}\iint f\,\mathrm{Log}\,f\,dxdv = \iint (1+\mathrm{Log}\,f)\,Tf\,dxdv = \iint (1+\mathrm{Log}\,f)\,Q(f,f)\,dxdv$$

et le lemme 1 appliqué à $\varphi(v) = \mathrm{Log}\,f(t,x,v)$ conduit à (1.4). En ce qui concerne le corollaire 1, l'inégalité (1.6) est immédiate, tandis que (1.7) est conséquence de (1.4) et (1.3) une fois remarqué que

$$\iint_{f\le 1} f\,\mathrm{Log}\,\frac{1}{f}\,dxdv \le c'_d + \iint_\Omega f\,\mathrm{Log}\,\frac{1}{f}\,dxdv$$

où $\Omega = \{(x,v)\ ,\ 1 \ge f(t,x,v) \ge \exp(-|x-tv|^2 - |v|^2)\}$, et cette dernière intégrale est majorée par $\iint (|x-tv|^2 + |v|^2)\,f\,dxdv$.

1.4. Remarques

a) Les identités (1.1) et (1.2) traduisent la conservation de la masse et de l'énergie cinétique. Par la même méthode, on peut obtenir une loi de conservation avec chacun des poids ψ suivants : v_i , $1 \le i \le d$, (conservation de la quantité de mouvement), $x_i v_j - x_j v_i$, $1 \le i < j \le d$, (conservation du moment cinétique), et $x_i - tv_i$, $1 \le i \le d$, $(x-tv).v$ (permettant de décrire l'évolution du centre d'inertie, du "Viriel", et, avec (1.3), du moment d'inertie par rapport à un point).

b) L'intérêt du terme $e(f)$ dans (1.4) et (1.7) est qu'il est toujours ≥ 0 . On obtient ainsi le "théorème H" de Boltzmann sur la décroissance de $\iint f \operatorname{Log} f \, dxdv$ au cours du temps.

c) La question d'estimer les dérivées d'une solution de (B) est un problème ouvert. Dans l'étude qui suit, nous devrons donc nous contenter de (1.6) et (1.7).

2. ÉNONCÉ DU RÉSULTAT

2.1. Hypothèses sur le noyau de collision

On se donne une "section efficace" $q \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d \times S^{d-1})$, à valeurs positives, et ne dépendant que de $|V|$ et de $|V.\omega|$; on pose

(2.1) $$A(V) = \int_{S^{d-1}} q(V,\omega)\, d\omega$$

et on fait les hypothèses suivantes :

(2.2) Pour tout $R > 0$, $\frac{1}{1+|v|^2} \int_{|v_*| \le R} A(v-v_*)\, dv_* \xrightarrow[|v| \to +\infty]{} 0$ (on notera qu'il suffit de le vérifier pour un seul $R > 0$).

(2.3) $$A \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^d) .$$

L'hypothèse (2.3) n'est pas présente dans [23] ; nous l'avons ajoutée pour simplifier légèrement la démonstration. Notons qu'elle est vérifiée pour les modèles (0.6) et (0.7) si $s \ge 5$. En tout état de cause, les principales difficultés que nous rencontrerons ne sont pas liées à la faible régularité de A .

Si f est une fonction mesurable positive sur $\mathbb{R}^d$, nous noterons

(2.4) $$Q_+(f,f)(v) = \iint q(v-v_*,\omega)\, f' f'_*\, dv_* d\omega$$

(2.5) $$Q_-(f,f)(v) = \iint q(v-v_*,\omega)\, f f_*\, dv_* d\omega = f(v)\; A*f(v)$$

où $A*f$ désigne le produit de convolution de A et de f . $Q_\pm(f,f)$ est une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Si l'une de ces deux quantités est presque partout finie, on définit

$$Q(f,f) = Q_+(f,f) - Q_-(f,f) .$$

2.2. Notions de solution faible

Même si q est C^∞ à support compact, les intégrales $\int Q_\pm(f,f)\,dv$ sont de l'ordre de $\left(\int f\,dv\right)^2$, et il est illusoire d'espérer mieux. En gros, toutes les difficultés dans l'analyse des solutions de (B) se rapportent à ce fait. La première de ces difficultés est de définir la notion même de solution ; en effet, si, compte tenu de la section 1, on cherche des solutions f n'ayant d'autre régularité que celle qui rend finies les quantités intervenant dans (1.6) et (1.7), il est impossible de définir le noyau $Q(f,f)$ en tant que distribution. Il faut donc recourir à des notions de solution différentes de celle de "solution au sens des distributions".

La première de ces notions est classique, et s'exprime uniquement en termes de théorie de la mesure.

Notation.- Si g est mesurable sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, on pose

$$g^{\#}(t,x,v) = g(t,x+vt,v) .$$

DÉFINITION 1.- *Soient* $f = f(t,x,v)$ *et* $f^o = f^o(x,v)$ *deux fonctions mesurables positives sur* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ *et* $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ *respectivement. On dit que* f *est solution* tempérée *de l'équation de Boltzmann avec donnée de Cauchy* f^o *en* $t = 0$ *si, pour presque tout* $(x,v) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$,

$$Q_\pm(f,f)^{\#}(.,x,v) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+) \tag{2.6}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ , \quad f^{\#}(t,x,v) = f^o(x,v) + \int_0^t Q(f,f)^{\#}(s,x,v)\,ds . \tag{2.7}$$

La définition 1 est très générale, mais ne permet pas d'exploiter directement les informations d'intégrabilité en (x,v) fournies par (1.6) et (1.7). On recourt alors à une définition plus contraignante.

DÉFINITION 2.- *Soient* $f = f(t,x,v) \in L^1(\mathbb{R}^+_{loc} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, *à valeurs positives. On dit que* f *est une solution* renormalisée *de l'équation de Boltzmann si*

$$\frac{Q_\pm(f,f)}{1+f} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) , \tag{2.8}$$

et si pour toute fonction lipschitzienne $\beta : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que*

$$\forall t \geq 0 , \quad |\beta'(t)| \leq \frac{C}{1+t} ,$$

on a, au sens des distributions :

$$T\,\beta(f) = \beta'(f)\;Q(f,f) . \tag{2.9}$$

Notons que la condition (2.8) est naturelle (au moins pour Q_-) compte tenu de (1.6) et de (2.2).

La proposition suivante fait le lien entre les deux définitions.

PROPOSITION 2.- *Soit* $f \in L^1(\mathbb{R}^+_{loc} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, *à valeurs positives.*

(i) *Si* f *vérifie* (2.8) *et* (2.9) *avec* $\beta(t) = \mathrm{Log}(1+t)$, f *est une solution tempérée.*

(ii) *Si* f *est une solution tempérée et* $\dfrac{Q_\pm(f,f)}{1+f} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, *alors* f *est une solution renormalisée.*■

En particulier, toute solution renormalisée est tempérée, et f est une solution renormalisée dès qu'elle vérifie (2.8) et (2.9) avec $\beta(t) = \mathrm{Log}\,(1+t)$.

2.3. Nous pouvons maintenant énoncer le résultat qui fait l'objet de cet exposé :

THÉORÈME (Di Perna - Lions, [23]).- *Soit* $f^o \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$ *telle que*

$$\iint f^o(1+|x|^2+|v|^2)\,dxdv < +\infty \;;\; \iint f^o\,|\mathrm{Log}\,f^o|\,dxdv < +\infty \;.$$

Alors il existe une solution renormalisée f *de l'équation de Boltzmann telle que* $f \in C(\mathbb{R}_+, L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d))$, $f|_{t=0} = f^o$, *vérifiant* (1.6) *et* (1.7).

Les sections 3 à 7 sont consacrées à la preuve de ce théorème.

2.4. Remarques

a) L'unicité dans le cadre du théorème ci-dessus est un problème ouvert.

b) Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que la méthode exposée dans les sections 5 à 7 permet aussi de prouver que toute suite (f_n) de solutions renormalisées de (B) vérifiant

$$f_n \in C(\mathbb{R}_+, L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d))$$

et

$$\forall \theta > 0 \;,\quad \sup_{t\in[0,\theta]} \sup_n \iint f_n\;(1+|x|^2+|v|^2+|\mathrm{Log}\,f_n|)dxdv < +\infty \;,$$

admet une sous-suite convergeant faiblement dans $L^1(]0,\theta[\times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ pour tout $\theta > 0$ vers une solution renormalisée f de (B) vérifiant

$$f \in C(\mathbb{R}_+, L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d))$$

et

$$\forall \theta > 0 \;,\quad \sup_{t\in[0,\theta]} \iint f\,(1+|x|^2+|v|^2+|\mathrm{Log}\,f|)\,dxdv < +\infty \;.$$

3. CONSTRUCTION D'UNE SOLUTION DE L'ÉQUATION TRONQUÉE

3.1. On se fixe $\delta > 0$, $\bar{q} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \times S^{d-1})$, positive, et on pose

$$\tilde{Q}(g,g) = (1+\delta \int |g|\,dv)^{-1}\,\bar{Q}(g,g) \tag{3.1}$$

où $\bar{Q}$ est donné par (0.4), avec $\bar{q}$ au lieu de q .

PROPOSITION 3.- *Soit* $f^o \in S(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, *à valeurs dans* $\mathbb{R}^*_+$, *telle que* $|\log f^o|$ *ait une croissance polynômiale. Alors il existe une solution unique* f *du problème*

$$Tf = \tilde{Q}(f,f) \;,\quad f|_{t=0} = f^o \;, \tag{$\tilde{B}$}$$

qui vérifie les hypothèses de la proposition 1.

La démonstration de la proposition 3 est élémentaire : la croissance de $\tilde{Q}$ étant linéaire, il est aisé de prouver que la suite (f_n) définie par l'itération $Tf_{n+1} = \tilde{Q}(f_n,f_n)$, $f_n|_{t=0} = f^o$, converge dans $C(\mathbb{R}_+, \mathcal{S}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d))$. L'unicité est analogue. Pour vérifier que $|\mathrm{Log}\, f|$ a une croissance polynômiale en (x,v) , on part de l'hypothèse $f_o(x,v) \geq \frac{1}{C_1} e^{-C_1(|x|^k+|v|^k)}$; par ailleurs, l'équation $(\tilde{B})$ implique

$$Tf \geq - \frac{\bar{A}*f}{1+\delta\int f\,dv} f \geq -C_2 f$$

car $\bar{A} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \subset L^\infty(\mathbb{R}^d)$; on en conclut que

$$f(t,x,v) \geq \frac{1}{C_1} e^{-C_1(|x-tv|^k+|v|^k)-C_2 t} \quad .\blacksquare$$

3.2. *Remarque*.- Le corollaire 1, appliqué avec $q(x,V,\omega) = \frac{1}{1+\delta\int f\,dv} \bar{q}(V,\omega)$, assure que la solution f ci-dessus satisfait aux estimations (1.6) et (1.7).

3.3. Nous nous plaçons désormais sous les hypothèses du théorème. On approche q par une suite (q_n) de fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^d \times S^{d-1}$, à supports compacts, positives, de sorte que (2.2) et (2.3) aient lieu uniformément en n , et $q_n \longrightarrow q$ presque partout. On approche également f^o en norme $L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ par une suite (f_n^o) de fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ telles que

$$\forall n \ , \quad f_n^o \geq \mu_n \exp(-|x|^2-|v|^2) \qquad \text{avec } \mu_n > 0 \text{ , et}$$

$$\iint f_n^o(1+|x|^2+|v|^2)\,dxdv \longrightarrow \iint f^o(1+|x|^2+|v|^2)\,dxdv \tag{3.2}$$

$$\iint f_n^o\,|\mathrm{Log}\, f_n^o|\,dxdv \longrightarrow \iint f^o\,|\mathrm{Log}\, f^o|\,dxdv \,. \tag{3.3}$$

On choisit de plus une suite (δ_n) de réels strictement positifs tendant vers 0 , et on construit le noyau de collision Q^n donné par (3.1) avec $\delta = \delta_n$, $\bar{q} = q_n$.

La proposition 3 assure l'existence d'une suite (f_n) telle que

$$Tf_n = Q^n(f_n,f_n) \quad , \quad f_n|_{t=0} = f_n^o \ ,$$

et, par la remarque 3.2,

$$\forall\theta > 0 \ , \quad \sup_{t\in[0,\theta]} \sup_n \iint f_n(1+|x|^2+|v|^2)\,dxdv < +\infty \tag{3.4}$$

$$\forall\theta > 0 \ , \quad \sup_{t\in[0,\theta]} \sup_n \iint f_n\,|\mathrm{Log}\, f_n|\,dxdv < +\infty \tag{3.5}$$

$$\sup_n \int_0^\infty \iint e_n(f_n)\,dsdxdv < +\infty \ , \qquad \text{avec} \tag{3.6}$$

$$e_n(f_n) = \frac{1}{4}\left(1+\delta_n \int f_n\,dv\right)^{-1} \iint (f_n' f_{n*}' - f_n f_{n*})\,\mathrm{Log}\,\frac{f_n' f_{n*}'}{f_n f_{n*}}\, q_n\,dv_* d\omega \,. \tag{3.7}$$

4. QUELQUES RAPPELS SUR LA CONVERGENCE FAIBLE DANS L^1

4.1. Soit Ω un espace localement compact dénombrable à l'infini, muni d'une mesure de Radon positive μ.
Rappelons que la topologie faible sur $L^1(\Omega)$ est la topologie $\sigma(L^1, L^\infty)$, i.e. la topologie de la convergence simple sur $L^1(\Omega)$ considéré comme espace de fonctions sur $L^\infty(\Omega)$. La convergence faible d'une suite (f_n) vers f sera notée

$$f_n \xrightarrow{w} f \quad \text{dans} \quad L^1(\Omega) .$$

Le caractère non réflexif de L^1 impose à une suite bornée des conditions supplémentaires pour être faiblement relativement compacte. Celles-ci font l'objet du

Critère de Dunford-Pettis (voir par exemple [52]).- *Soit* (f_n) *une suite de* $L^1(\Omega)$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) (f_n) *est contenue dans un compact faible de* $L^1(\Omega)$.

(ii) (f_n) *est bornée dans* $L^1(\Omega)$ *et est équiintégrable au sens suivant :*

(DP1) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall E \subset \Omega$ *mesurable de mesure* $< \delta$, $\sup_n \int_E |f_n| \, d\mu \le \varepsilon$.

(DP2) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists K$ *compact* $\subset \Omega$, $\sup_n \int_{\Omega\setminus K} |f_n| \, d\mu \le \varepsilon$.

Exemple.- Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^k$, μ est la mesure de Lebesgue. Si $G \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ et $w \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}_+)$ sont telles que $\frac{G(t)}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ et $w(x) \xrightarrow[|x|\to+\infty]{} +\infty$, alors l'inégalité

$$\sup_n \int_\Omega [G(|f_n|) + |f_n|(1+w)] \, dx < +\infty \tag{4.1}$$

assure que (f_n) vérifie (ii), donc admet une sous-suite faiblement convergente.

4.2. Contrairement à la convergence en norme (qui, après extraction d'une sous-suite, entraîne la convergence presque partout), la convergence faible se comporte très mal vis-à-vis des opérations non linéaires, une suite faiblement convergente pouvant "beaucoup osciller".
Par exemple, si $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ est périodique de période 1, la suite définie par $f_n(x) = g(nx) \, 1_{[0,1]}(x)$ converge faiblement vers $1_{[0,1]} \int_0^1 g(x)dx$. Si $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, est continue et vérifie $|F(t)| \le C|t|$, alors, pour les mêmes raisons,

$$F(f_n) \xrightarrow{w} \int_0^1 F(g(x)) \, dx \, 1_{[0,1]} \neq F\left(\int_0^1 g(x) \, dx \, 1_{[0,1]}\right)$$

en général.
Citons néanmoins la

Propriété de semi-continuité inférieure.- Si $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe et si $f_n \xrightarrow{w} f$ dans $L^1(\Omega)$, alors $\int F(f) \, d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int F(f_n) \, d\mu$.

4.3. Enfin, le passage à la limite faible dans un produit est bien sûr aisé lorsque l'un des facteurs converge presque partout : si $f_n \xrightarrow{w} f$ dans $L^1(\Omega)$ et si

(g_n) est bornée dans $L^\infty(\Omega)$ et $g_n \longrightarrow g$ p.p., alors $f_n g_n \xrightarrow{w} fg$ dans $L^1(\Omega)$. En effet, d'après (DP2), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que $\sup_n \int_{\Omega\setminus K} (|f_n g_n| + |fg|)d\mu \leq \varepsilon$. De plus, le théorème d'Egorov et (DP1) assurent que $(g_n 1_K)$ converge uniformément vers $g 1_K$ en dehors d'un ensemble E tel que $\sup_n \int |f_n| \, d\mu \leq \varepsilon$. ∎

5. ESTIMATIONS DU NOYAU DE COLLISION

5.1. Nous reprenons les notations de (3.3), et définissons A_n, $Q_+^n(g,g)$ et $Q_-^n(g,g)$ comme en (2.1), (2.4) et (2.5), $q(V,\omega)$ étant remplacé par

$$q_n(x,V,\omega) = \frac{1}{1+\delta \int f_n \, dv} \, q_n(V,\omega) \; .$$

PROPOSITION 4.- *Pour tous* $\theta > 0$, $R > 0$, *les suites* $\left(\frac{Q_+^n(f_n,f_n)}{1+f_n}\right)$ *et* $\left(\frac{Q_-^n(f_n,f_n)}{1+f_n}\right)$ *sont contenues dans un compact faible de* $L^1(]0,\theta[\times \mathbb{R}^d \times B_R)$.

Preuve.- Etudions d'abord le cas de Q_-. On a

$$0 \leq \frac{Q_-^n(f_n,f_n)}{1+f_n} \leq A_n * f_n \; ,$$

il suffit donc de vérifier (DP1) et (DP2) sur $\Omega =]0,\theta[\times \mathbb{R}^d \times B_R$ pour la suite $(A_n * f_n)$, et ceci est aisé, compte tenu de (2.2) (vérifié uniformément en n), (3.4) et (3.5). Le cas de Q_+ est alors conséquence de :

(5.1) $$\forall K > 1 \; , \quad Q_+^n(f_n,f_n) \leq K \, Q_-^n(f_n,f_n) + \frac{4}{\operatorname{Log} K} \, e_n(f_n)$$

que l'on obtient en distinguant les domaines d'intégration correspondant à $f'_n f'_{n*} \leq K \, f_n f_{n*}$ et $f'_n f'_{n*} \geq K \, f_n f_{n*}$. ∎

5.2. *Remarque*.- De la même façon que (5.1), on montre

(5.2) $$\forall K > 1 \; , \quad Q_-^n(f_n,f_n) \leq K \, Q_+^n(f_n,f_n) + \frac{4}{\operatorname{Log} K} \, e_n(f_n) \; .$$

Cette inégalité nous sera utile en section 7.

5.3. Les estimations (3.4) et (3.5) assurent l'existence d'une sous-suite de (f_n) qui converge faiblement dans $L^1(]0,\theta[\times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ pour tout $\theta > 0$. Appelons $f \in L^1(\mathbb{R}^+_{loc} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ la limite ainsi mise en évidence.
Comme première application de la formulation renormalisée, nous allons prouver que $f \in C(\mathbb{R}_+, L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d))$ et que, quitte à extraire une sous-suite de (f_n) :

(5.3) $$\forall t \; , \quad f_n(t) \xrightarrow{w} f(t) \quad \text{dans} \quad L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) \; .$$

En effet, si $\varepsilon > 0$, notons $g_n^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{Log}(1+\varepsilon f_n)$. Alors (3.4) et (3.5) assurent que

(5.4) $$\forall \theta > 0 \; , \quad \sup_{t\in[0,\theta]} \; \sup_n \|f_n(t) - g_n(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)} \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} 0 \; .$$

Par ailleurs, en intégrant l'équation renormalisée :

(5.5) $$T g_n^\varepsilon = \frac{1}{1+\varepsilon f_n} \, Q^n(f_n,f_n) \; ,$$

on obtient, en utilisant la notation $g^{\#}$ introduite en section 2.2,

$$g_n^{\varepsilon\#}(t+h) - g_n^{\varepsilon\#}(t) = \int_t^{t+h} \frac{Q^n(f_n,f_n)^{\#}(s)}{1+\varepsilon f_n^{\#}(s)}\, ds \ , \tag{5.6}$$

ce qui, compte tenu de la proposition 4, donne

$$\forall\varepsilon > 0 \ , \ \forall\theta > 0 \ , \ \forall R > 0 \ , \quad \sup_{t\in[0,\theta]} \ \sup_n \|g_n^{\varepsilon\#}(t+h) - g_n^{\varepsilon\#}(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^d\times B_R)} \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \, . \tag{5.7}$$

(3.4) permet d'éliminer la contribution à l'infini en v, et (5.4) conduit à

$$\forall\theta>0 \ , \quad \sup_{t\in[0,\theta]} \ \sup_n \|f_n^{\#}(t+h) - f_n^{\#}(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)} \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \tag{5.8}$$

et un argument classique d'équicontinuité permet de conclure que $f^{\#} \in C(\mathbb{R}_+, L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d))$ et que (5.3) a lieu pour $f_n^{\#}$ et $f^{\#}$. Finalement, on élimine les $\#$ par des considérations élémentaires de théorie de l'intégration.∎

Passant à la limite faible dans (1.6) et (1.7) pour les f_n, compte tenu de la convexité de $s \longmapsto s\max(\mathrm{Log}\, s,0)$, on obtient :

$$\forall t \ , \quad \iint f\,(1+|x|^2+|v|^2)\ dxdv \le \iint f^0\,(1+2|x|^2+(2t^2+1)|v|^2)\ dxdv \tag{5.10}$$

$$\forall t \ , \quad \iint f\,|\mathrm{Log}\, f|\ dxdv + \lim_{n\to\infty}\ \sup \int_0^t\iint e_n(f_n)\ dxdv \tag{5.11}$$

$$\le \iint f^0\,(|\mathrm{Log}\, f^0| + 2|x|^2 + 2|v|^2)\ dxdv + c_d \, .$$

Nous reviendrons sur cette dernière inégalité à la fin de la section 7.

5.4. La proposition 4 montre qu'une sous-suite de $\left(\dfrac{Q^n(f_n,f_n)}{1+f_n}\right)$ converge faiblement. Le passage à la limite dans une telle expression est rendu délicat par son caractère non linéaire en fonction de f_n, mais la présence de quantités moyennées en v va nous permettre de lever la principale difficulté.

6. MOYENNISATION

6.1. Le résultat suivant est tiré de [51].

PROPOSITION 5.- *Soit* (g_n) *une suite faiblement relativement compacte de* $L^1(]0,\theta[\times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$. *On suppose que* (Tg_n) *est faiblement relativement compacte dans* $L^1_{loc}(]0,\theta[\times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$. *Alors, pour toute suite* (ψ_n) *bornée dans* $L^\infty(]0,\theta[\times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ *et convergeant presque partout, la suite* $\left(\int g_n\psi_n\, dv\right)$ *est compacte dans* $L^1(]0,\theta[\times \mathbb{R}^d)$ *pour la topologie de la norme.*

COROLLAIRE 2.- *Sous les hypothèses de la proposition* 5, *si* $g_n \xrightarrow{w} g$ *dans* $L^1(]0,\theta[\times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ *et si* $\psi_n \longrightarrow \psi$ p.p., *alors*

$$\left\|\int g_n\psi_n\, dv - \int g\psi\, dv\right\|_{L^1(]0,\theta[\times\mathbb{R}^d)} \longrightarrow 0 \, .$$

Preuve de la proposition 5.- a) On peut supposer que g_n est supportée dans un compact fixe de $L^1(]0,\theta[\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)$. En effet, pour tout $\varepsilon>0$, il existe un compact K de $]0,\theta[\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ tel que

$$\forall n\ ,\quad \iiint_{K^c} |g_n\,\psi_n| + |g\psi|\ dtdxdv < \varepsilon\ .$$

b) En utilisant le théorème d'Egorov comme à la fin de la section 4, on peut supposer que $\psi_n=\psi$ pour tout n.

c) On peut supposer que $\psi=1$. C'est évident si ψ est lipschitzienne car $g_n\psi$ vérifie les mêmes hypothèses que g_n. Si ψ est seulement dans L^∞, il existe une suite (ψ_k) de fonctions régulières telle que $\|\psi_k-\psi\|_{L^1}\longrightarrow 0$ et $\sup\limits_k\|\psi_k\|_{L^\infty}<+\infty$. Alors $\iiint\left|\int\psi_k\,g_n\,dv-\int\psi\,g_n\,dv\right|dtdx\le\iiint|\psi_k-\psi|\,|g_n|\,dtdxdv\xrightarrow[k\to+\infty]{}0$ uniformément en n. (Il suffit de remarquer que $\sup\limits_n\int_{|g_n|\ge M}|g_n|\xrightarrow[M\to+\infty]{}0$, ce qui est une conséquence de (DP1)).

d) La proposition 5 découle alors d'un résultat analogue, plus précis, dans L^2 :

PROPOSITION 6.- *Soit* $u\in L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)$ *à support compact. On suppose que* $Tu\in L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)$. *Alors*

$$\int u\,dv\in H^{1/2}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)\ .$$

En effet, supposons prouvée la proposition 6 ; pour tout n et tout $M>0$, on résout

$$Tu_n = Tg_n\,1_{|Tg_n|\le M}\quad ,\quad Th_n = Tg_n\,1_{|Tg_n|\ge M}$$

avec $u_n|_{t=0}=h_n|_{t=0}=0$, de sorte que $g_n=u_n+h_n$. La compacité faible des Tg_n et les estimations L^1 pour le champ de vecteurs T assurent que $\|h_n\|_{L^1}\xrightarrow[M\to+\infty]{}0$ uniformément en n ; par ailleurs, les estimations L^2 sur T assurent que (u_n) et (Tu_n) sont des suites bornées de L^2, donc $\left(\int u_n\,dv\right)$ est bornée dans $H^{1/2}$, donc compacte dans L^2 et dans L^1, puisqu'elle est supportée dans un compact fixe. Ceci achève la preuve de la proposition 5.

6.2. Preuve de la proposition 6

On note $\hat u=\hat u(\tau,\xi,v)$ la transformée de Fourier en (t,x) de u ; alors $\hat u$ et $(\tau+v.\xi)\hat u$ appartient à $L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)$, à support compact en v, et on étudie le comportement de $\left|\int\hat u(\tau,\xi,v)\,dv\right|^2$ lorsque $\lambda=(\tau^2+|\xi|^2)^{1/2}$ tend vers l'infini. On pose $\tau_o=\frac{\tau}{\lambda}$, $\xi_o=\frac{\xi}{\lambda}$, et on écrit

$$\int\hat u\,dv=\int_{|\tau_o+v.\xi_o|\le 1/\lambda}\hat u\,dv+\int_{|\tau_o+v.\xi_o\ \ge 1/\lambda}\hat u\,dv\equiv I_n+I_e\ .$$

Or 0 est une valeur régulière de l'application $v\longmapsto\tau_o+v.\xi_o$ pour tout $(\tau_o,\xi_o)\in S^d$; donc, pour tout compact K de $\mathbb{R}^d$, il existe $\varepsilon_o>0$ et $C>0$ tels que

$$\forall\varepsilon\in\,]0,\varepsilon_o[\ ,\quad \sup_{(\tau_o,\xi_o)\in S^d} m\{v\in K\ ,\ |\tau_o+v.\xi_o|\le\varepsilon\}\le C\varepsilon\ ,$$

m désignant la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.
Dès lors, par l'inégalité de Schwarz :

$$|I_n|^2 \leq \frac{C}{\lambda} \int |\hat{u}|^2 \, dv$$

$$|I_e|^2 \leq \frac{1}{\lambda^2} \left(\int_{|\tau_o + v.\xi_o| > 1/\lambda} \frac{dv}{|\tau_o + v.\xi_o|^2} \right) \left(\int |\tau + v.\xi|^2 |\hat{u}|^2 \, dv \right) \leq \frac{C'}{\lambda} \int |\tau + v.\xi|^2 |\hat{u}|^2 \, dv ,$$

On en déduit que

$$\int d\xi d\tau \, (|\xi|^2 + |\tau|^2) \, \left| \int \hat{u}(\xi,\tau,v) \, dv \right|^2 < +\infty ,$$

ce qui achève la démonstration.

6.3. Commentaires

a) Le résultat cité par la proposition 6 est de nature microlocale. Il dit essentiellement que l'ensemble caractéristique de l'opérateur $\partial_t + v.\partial_x$ varie suffisamment avec v pour qu'un point $(t_o, x_o, \tau_o, \xi_o)$ soit "rarement" dans le front d'onde H^1 de u , et finalement ne soit pas dans un certain front d'onde H^δ de $\int u \, dv$ (ici $\delta = \frac{1}{2}$). A ce titre, la proposition 6 possède un certain nombre de généralisations.

b) La généralisation la plus naturelle concerne une famille L^∞ d'opérateurs pseudodifférentiels d'ordre 1 $P(x, D_x, \omega)$, le paramètre ω variant dans un espace probabilisé (Ω, T, μ) . On peut alors mettre en évidence un gain de régularité δ sur la moyenne $\int u \, d\mu(\omega)$ lorsque u et Pu sont dans $L^2(X \times \Omega, dxd\mu)$; δ est relié à l'exposant de décroissance des quantités $\mu\{\omega , |p(x,\xi,\omega)| \leq \varepsilon\}$ lorsque ε tend vers 0 , (x,ξ) variant dans un voisinage du point (x_o, ξ_o) étudié dans $T^*X \setminus \{0\}$, p étant le symbole principal de P (voir [46]).

c) Une autre extension vise à donner une formulation intrinsèque de la proposition 7 dans le cadre d'une structure fibrée. Soit $P(x,y,D_x,D_y)$ un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 1 - où x décrit la base, y décrit la fibre - de symbole principal p "transversal à la fibration" au sens où son champ hamiltonien H_p n'est pas tangent à la variété des covecteurs horizontaux $\{\eta = 0\}$ en les points caractéristiques. Alors les conditions $u \in L^2_{loc}$, $Pu \in L^2_{loc}$ assurent que l'intégrale dans la fibre $\int u \, dy$ appartient à $H^{1/2}_{loc}$ (voir [47], [49]). L'usage des opérateurs intégraux de Fourier montre que ce résultat est une version du "théorème de trace" : $u \in L^2$, $\frac{\partial u}{\partial s} \in L^2 \Rightarrow u_{|s=0} \in L^2$ (voir [48]).

d) Enfin, toujours dans le cadre décrit en c), il est possible de distinguer la régularité "en x " et "en y " dans les hypothèses. Par exemple, si $u \in L^2_{loc}$ et $Pu \in L^2(dx, H^{-m}(dy))$ pour $m \geq 0$), alors $\int u \, dy \in H^{1/2(1+m)}$ (voir [45],[48]).

e) La proposition 5 se généralise aux cadres décrits en b) et c), pourvu que l'opérateur soit un champ de vecteurs.

6.4. Le résultat suivant permet d'appliquer la proposition 5 dans le cadre "renormalisé" de la définition 2 déjà utilisé en section 5.3.

PROPOSITION 7.- *Soit* (f_n) *une suite faiblement relativement compacte de* $L^1(]0,\theta[\times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$. *On suppose qu'il existe une suite* (β^ν) *de fonctions uniformément lipschitziennes d'une variable réelle, nulles en* 0 , *telle que*

(i) $\beta^\nu(s) \xrightarrow[\nu\to\infty]{} s$ *localement uniformément ;*

(ii) $\forall\nu$, *la suite* $T(\beta^\nu(f_n))$ *est faiblement relativement compacte dans* $L^1_{loc}(]0,\theta[\times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$.

Alors, si $f_n \xrightarrow{w} f$ *dans* L^1 , $\psi_n \longrightarrow \psi$ *presque partout et* (ψ_n) *est bornée dans* $L^\infty(]0,\theta[\times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, *on a*

$$\left\| \int f_n\psi_n \, dv - \int f\psi \, dv \right\|_{L^1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \; .$$

En effet, la proposition 6 s'applique pour tout ν à $g_n^\nu = \beta^\nu(f_n)$, et la compacité faible des f_n entraîne

(6.1)
$$\sup_n \|f_n - \beta^\nu(f_n)\|_{L^1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \; .$$

On en déduit que la suite $\left(\int f_n\psi_n \, dv\right)$ est contenue dans un compact de $(L^1, \| \; \|_{L^1})$.■

6.5. <u>Remarque</u>

Par hypothèse, quitte à extraire une sous-suite de (f_n) , on peut supposer que $\forall\nu$, $(\beta^\nu(f_n))$ converge faiblement dans L^1 , vers une limite g^ν . Il est bien sûr faux en général que $g^\nu = \beta^\nu(f)$, mais (6.1) assure que

$$\|f - g^\nu\|_{L^1} \xrightarrow[\nu\to+\infty]{} 0 \; .$$

7. LE PASSAGE A LA LIMITE

7.1. Nous reprenons les notations de la section 5.3.

PROPOSITION 8.- *Après extraction d'une sous-suite, on a, pour tout* $\theta > 0$:

(i) $\int f_n \, dv \longrightarrow \int f \, dv$ *dans* $(L^1(]0,\theta[\times \mathbb{R}^d), \| \; \|_{L^1})$ *et presque partout ;*

(ii) $A_n * f_n \longrightarrow A * f$ *dans* $(L^1(]0,\theta[\times \mathbb{R}^d \times B_R), \| \; \|_{L^1})$ *pour tout* $R > 0$ *et presque partout ;*

(iii) *Pour toute fonction* $\varphi \in L^\infty(]0,\theta[\times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ *à support compact en* v ,

$$\frac{\int Q_\pm^n(f_n, f_n)\,\varphi \, dv}{1 + \int f_n \, dv} \longrightarrow \frac{\int Q_\pm(f,f)\,\varphi \, dv}{1 + \int f \, dv}$$

dans $(L^1(]0,\theta] \times \mathbb{R}^d), \| \; \|_{L^1})$.

Preuve.- On applique la proposition 7 avec $\beta^\nu(t) = \nu \, \mathrm{Log}\left(1 + \frac{t}{\nu}\right)$, $\nu \longrightarrow +\infty$, compte tenu de la proposition 4. (i) est une conséquence immédiate, (ii) en est une variante "à valeurs vectorielles" (on prend

$$\psi_n(v_*) = A_n(v - v_*) \; 1_{|v|\le R} \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^d, L^1(B_R))$$

et l'on utilise les estimations (2.1) et $\sup_n \int f_n(1 + |v|^2) \, dv < +\infty$ pour éliminer le terme à l'infini en v_*). Dans le cas de Q_- , (iii) en est également une conséquence en posant $\psi_n = \frac{A_n * f_n}{1+\int f_n\,dv}\,\varphi$, et le cas de Q_+ s'obtient de même, une fois fait le changement de variables $(v,v_*) \longmapsto (v',v'_*)$.■

7.2. Remarque

Dans l'assertion (iii), la quantité $\frac{1}{1+\int f_n\,dv}$ permet de modérer la croissance et d'obtenir ainsi un multiplicateur L^∞ dont on connaît la limite presque partout (d'après (i) et (ii)). On ne peut hélas pas procéder directement de la même manière avec $\frac{Q_\pm(f_n,f_n)}{1+f_n}$ car le "facteur renormalisant" $\frac{1}{1+f_n}$ introduit une "non linéarité parasite" que l'on ne peut pas contrôler en topologie faible. (On ignore *a priori* la limite faible de $\frac{f_n}{1+f_n}$.) Il est donc nécessaire de passer à la limite dans une formulation "intermédiaire" de l'équation de Boltzmann, sans non linéarité parasite, mais ne faisant apparaître que des termes interprétables en tant que distributions.

7.3. L'équation intégrale

On définit la résolvante T^{-1} de T par $u = T^{-1}g$ si $u|_{t=0} = 0$ et $Tu = g$. Bien entendu,

$$T^{-1}g(t,x,v) = \int_0^t g(s,x-(t-s)v,v)\,ds\ . \tag{7.1}$$

On vérifie aisément que T^{-1} envoie $L^1(]0,\theta[\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d_{loc})$ dans $C([0,\theta],L^1(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d_{loc}))$ continûment et faiblement continûment ; de plus, T^{-1} est positif (i.e. $f \geq 0 \Rightarrow T^{-1}f \geq 0$) . Si $F \in C([0,\theta],L^1(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d_{loc}))$ et $TF \geq 0$, l'opérateur $T_F^{-1} = e^{-F}T^{-1}e^F$ est bien défini de $L^1(]0,\theta[\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d_{loc})$ dans $C([0,\theta],L^1(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d_{loc}))$ et possède les mêmes propriétés de continuité. De plus, si (F_n) est une suite bornée de $C([0,\theta],L^1(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d_{loc}))$, $TF_n \geq 0$ et $F_n(t,x,v) \longrightarrow F(t,x,v)$ pour tout t et presque tout (x,v) , et si $g_n \xrightarrow{w} g$ dans $L^1(]0,\theta[\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d_{loc})$, alors $\forall t \in [0,\theta]$, $T_{F_n}^{-1}g_n(t) \xrightarrow{w} T_F^{-1}g(t)$ dans $L^1(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d_{loc})$.

Reprenant alors les notations des sections 7.1 et 7.2, posons

$$F_n = T^{-1}(A_n * f_n)\ . \tag{7.2}$$

Alors l'équation de Boltzmann tronquée vérifiée par f_n s'écrit

$$f_n = f_n^o\,e^{-F_n} + T_{F_n}^{-1}(Q^n(f_n,f_n))\ . \tag{7.3}$$

(On notera l'analogie avec la formulation de Carleman (0.14).)

D'après la proposition 8 (ii), la suite (F_n) est bornée dans $C(\mathbb{R}_+,L^1(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d_{loc}))$ et, pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, $F_n(t,x,v)$ converge vers $F(t,x,v)$ presque partout en (x,v) , avec $F = T^{-1}(A*f)$.

PROPOSITION 9.- $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $T_F^{-1}\,Q_+(f,f)(t) \in L^1(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d_{loc})$ *et*

$$f = f^o\,e^{-F} + T_F^{-1}\,Q_+(f,f)\ . \tag{7.4}$$

Preuve.- Notons que tous les termes présents dans (7.3) et (7.4) sont positifs. Nous allons prouver (7.4) par une double inégalité.

a) On note $\beta^\nu(t) = \mathrm{Min}\,(t,\nu)$, $\nu \geq 1$, $t \geq 0$. Alors on peut supposer que $g_n^\nu \equiv \beta^\nu(f_n) \xrightarrow{w} g^\nu$ dans $L^1(]0,\theta[\times \mathbb{R}^d)$ pour tout $\theta > 0$, et dès lors $g^\nu \xrightarrow[\nu\to+\infty]{} f$ dans $L^1(]0,\theta[\times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d), \|\ \|_{L^1})$, en croissant (voir la remarque (6.5). A ν fixé, g_n^ν vérifie les hypothèses de la proposition 5, et de plus $|g_n^\nu| \leq \nu$, $\forall n$; on en déduit que

$$Q_+^n(g_n^\nu,g_n^\nu) \xrightarrow{w} Q_+(g^\nu,g^\nu) \quad \text{dans} \quad L^1(]0,\theta[\times \mathbb{R}^d \times B_R)$$

pour tout $R > 0$. Par ailleurs (7.3) entraîne

$$f_n \geq f_n^o\, e^{-F_n} + T_{F_n}^{-1}\, Q_+(g_n^\nu,g_n^\nu) \tag{7.5}$$

et, en passant à la limite faible pour tout t si $n \longrightarrow \infty$,

$$f \geq f^o\, e^{-F} + T_F^{-1}\, Q_+(g^\nu,g^\nu) \ , \tag{7.6}$$

ce qui, compte tenu du théorème de convergence monotone, entraîne

$$T_F^{-1}\, Q_+(f,f) \in L^1(]0,\theta[\times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) \tag{7.7}$$

et

$$f \geq f^o\, e^{-F} + T_F^{-1}\, Q_+(f,f) \ . \tag{7.8}$$

b) On note cette fois $g_n^\nu = \nu\,\mathrm{Log}\,(1+f_n/\nu)$, de sorte que

$$g_n^\nu = \nu\,\mathrm{Log}\,(1+f_n^o/\nu)\ e^{-F_n} + T_{F_n}^{-1}\left(\frac{Q_+(f_n,f_n)}{1+f_n/\nu}\right) + T_{F_n}\left(A_n{*}f_n\left(g_n^\nu - \frac{f_n}{1+f_n/\nu}\right)\right) . \tag{7.9}$$

On peut supposer que $g_n^\nu \xrightarrow[n\to\infty]{w} g^\nu$, $f_n/(1+f_n/\nu) \xrightarrow[n\to\infty]{w} h^\nu$, et $g^\nu \xrightarrow[\nu\to\infty]{} f$, $h^\nu \xrightarrow[\nu\to\infty]{} f$ dans $(L^1, \|\ \|_{L^1})$ (remarque 6.5). Par ailleurs $\dfrac{Q_+(f_n,f_n)}{1+f_n/\nu} \xrightarrow[n\to\infty]{} Q_{+,\nu}$, et, en divisant par $(1+\int f_n\, dv)$ et en utilisant la proposition 8 (iii),

$$\frac{Q_{+,\nu}}{1+\int f\, dv} \leq \frac{Q_+(f,f)}{1+\int f\, dv} \ , \tag{7.10}$$

donc

$$Q_{+,\nu} \leq Q_+(f,f) \ . \tag{7.11}$$

Passant à la limite faible dans (7.9) lorsque $n \longrightarrow +\infty$, et utilisant (7.11),

$$g^\nu \leq \nu\,\mathrm{Log}\,(1+f^o/\nu)\ e^{-F} + T_F^{-1}\, Q_+(f,f) \tag{7.12}$$

et l'inégalité cherchée s'obtient en faisant tendre ν vers $+\infty$.∎

7.4. Fin de la preuve du théorème

a) On prouve d'abord que $\dfrac{Q_-(f,f)}{1+f} \in L^1(\mathbb{R}_{+,\mathrm{loc}} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d_{\mathrm{loc}})$, ce qui est aisé compte tenu de (2.1) et de l'estimation sur f pour v grand déduite de (3.4). On montre ensuite la même chose pour $\dfrac{Q_+(f,f)}{1+f}$, ce qui est une conséquence de

$$Q_\pm(f,f) \leq 2Q_\mp(f,f) + E \ , \tag{7.13}$$

avec $E \in L^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$.

Pour obtenir (7.13), il suffit de diviser (5.1) et (5.2) (avec $K=2$) par $1+\delta\int f_n\,dv$, de passer à la limite vague dans $L^1(]0,\theta[\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)$ compte tenu de la proposition 8 (iii) et de (3.6), puis de prendre la partie absolument continue du membre de droite, et enfin de faire tendre δ vers 0.

b) Le fait que $\forall t$, $T_F^{-1}Q_+(f,f)(t)\in L^1(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d_{loc})$ et que $F(t)\in L^1(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d_{loc})$ entraîne que, pour presque tout (x,v),

$$Q_+(f,f)\in L^1(0,\theta)\quad\forall\theta>0\,.$$

(7.13) assure qu'il en est de même pour $Q_-(f,f)$. Alors (7.4) permet de conclure que f est une solution tempérée de (B), donc, par a) et la proposition 2, une solution renormalisée.

c) *Estimations sur* f. Il reste à établir (1.7) à partir de (5.11). Pour cela, on note que la preuve de la proposition 8 (iii) donne

$$\forall\delta>0\,,\quad \frac{f_nf_{n*}}{1+\delta\int f_n\,dv}\xrightarrow{w}\frac{ff_*}{1+\delta\int f\,dv}\,,\quad \frac{f'_nf'_{n*}}{1+\delta\int f_n dv}\xrightarrow{w}\frac{f'f'_*}{1+\delta\int f\,dv}$$

dans $L^1(]0,\theta[\times\mathbb{R}^d_x\times\mathbb{R}^d_v\times\mathbb{R}^d_{v_*}\times S^{d-1})$.

La convexité de $(x,y)\longmapsto(x-y)\,\mathrm{Log}\frac{x}{y}$ sur $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$ entraîne alors que

$$\forall\theta>0\,,\quad\int_0^\theta\iint\frac{1}{1+\delta\int f\,dv}\,e(f)\,dtdxdv\le\liminf_{n\to\infty}\int_0^\theta\iint\frac{1}{1+\delta\int f_n dv}\,e_n(f_n)\,dtdxdv$$

et on conclut par le théorème de convergence monotone, en faisant tendre δ vers 0. ■

7.5. Remarque

On peut se demander si f vérifie aussi les lois de conservation de la section 1. C'est le cas pour tout multiplicateur ψ tel que

$$\forall t\,,\quad\frac{\psi(t,x,v)}{1+|x|^2+|v|^2}\xrightarrow[|x|+|v|\to+\infty]{}0\,,$$

compte tenu de (1.6).

Dans les autres cas ($\psi=|v|^2$ ou $|x-tv|^2$), la convergence faible ne permet de conclure que par une inégalité :

$$\iint f\psi\,dxdv\le\liminf_{n\to\infty}\iint f_n\psi\,dxdv\,,$$

que nous avons déjà utilisée pour établir (5.10).

BIBLIOGRAPHIE

Nous ne donnons ici que quelques titres, et renvoyons par exemple à [3] pour une bibliographie plus complète.

[1a] L. BOLTZMANN - *Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen*, Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften, Wien 66 (1872), 275-370. Voir aussi *Kinetic theory*, Ed. S.G. Brush, Bergamon (1966).

[1b] L. BOLTZMANN - *Leçons sur la théorie des gaz*, Gauthier-Villars, 1902.

[2] J.C. MAXWELL - *On the dynamical theory of gases*, Phil. Trans. Roy. Soc., 157 (1866), réimprimé dans "Scientific Papers", Vol. 2, Londres, 1890 et par Dover, New York, 1965.

Traités généraux et articles de synthèse

[3] C. CERCIGNANI - *The Boltzmann equation and its applications*, Applied Mathematical Sciences 67, Springer-Verlag, 1988 (2e édition).

[4] S. CHAPMAN, T.G. COWLING - *The mathematical theory of non-uniform gases*, Cambrigde University Press, 1958.

[5] H. GRAD - *Principles of the kinetic theory of gases*, in Handbuch der Physik, XII, 205-294, Springer, 1958.

[6] C. TRUESDELL, R.G. MUNCASTER - *Fundamentals of Maxwell's kinetic theory of a simple monatomic gaz*, Academic Press, 1980.

[7] P.F. ZWEIFEL - *The Boltzmann equation and its properties*, in Kinetic theories and the Boltzmann equation, Lectures Notes in Math. 1048, Springer-Verlag, 1984.

Équation de Boltzmann spatialement homogène

[8] L. ARKERYD - *On the Boltzmann equation*, Part I, Part II, Arch. Rat. Mech. Anal. 45 (1972), 1-16, 17-34.

[9] L. ARKERYD - L^∞ *estimates for the space homogeneous Boltzmann equation*, J. Stat. Phys. 31 (1983), 347-361.

[10] T. CARLEMAN - *Sur la théorie de l'équation intégrodifférentielle de Boltzmann*, Acta Mathematica 60 (1932), 91-146, réimprimé dans "Édition complète des articles de Torsten Carleman", Institut Mittag-Leffler, 1960.

[11] T. CARLEMAN - *Problèmes mathématiques dans la théorie cinétique des gaz*, notes rédigées par L. Carleson et O. Frostman, Almqvist et Wikselles, Uppsala, 1957.

[12] M. KAC - *Foundation of kinetic theory*, Proc. Third Berkeley Sympos. on Math. Statist. and Probab. 3, 171-197, Univ. Calif., 1956.

[13] H.P. Mc KEAN - *Speed of approach to equilibrium for Kac's caricature of a Maxwellian gaz*, Arch. Rat. Mech. Anal. 21 (1966), 347-367.

[14] D. MORGENSTERN - *General existence and uniqueness proof for spatially homogeneous solutions of Maxwell - Boltzmann equation in the case of Maxwellian molecules*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 40 (1954), 719-721.

[15] A. J. POVZNER - *The Boltzmann equation on the theory of gases*, Mat. Sb. 58 (1962), 56-86, AMS Transl. (2) 47 (1965), 193-216.

[16] A.S. SZNITMAN - *Équations du type de Boltzmann, spatialement homogènes*, Zeitsch. für Wahrscheinlichkeits. verw. Gebiete 66 (1984), 559-592.

[17] E. WILD - *On the Boltzmann equation in the kinetic theory of gases*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 47 (1951), 602-609.

Équation de Boltzmann avec dépendance spatiale (avec éventuellement des conditions aux limites)

[18] K. ASANO, Y. SHIZUTA - *Global solutions of the Boltzmann equation in a bounded domain*, Proc. Japan Acad. 53 (1977).

[19] C. BARDOS, R. CAFLISH, B. NICOLAENKO - *The Milne and Kramers problems for the Boltzmann equation of a hard spheres gas*, Comm. Pure Appl. Math., 49 (1986), 323-352.

[20] R. CAFLISH - *The Boltzmann equation with a soft potential*, Comm. Math. Phys. 74 (1980), 97-109.

[21] C. CERCIGNANI - *Half space problems in the kinetic theory of gases*, à paraître.

[22] F. CORON, F. GOLSE, C. SULEM - *A classification of well posed kinetic layers problems*, à paraître.

[23] R.J. DI PERNA, P.L. LIONS - *On the Cauchy problem for Boltzmann equations : global existence and weak stability*, à paraître.

[24] R.J. DI PERNA, P.L. LIONS - *Solutions globales de l'équation de Boltzmann*, Séminaire d'Équation aux Dérivées Partielles, 1987-1988, Exposé n° VI, École Polytechnique, Paris.

[25] H. GRAD - *Asymptotic equivalence of the Navier-Stokes and nonlinear Boltzmann equations*, in Applications of Nonlinear Partial Differential Equations in Mathematical Physics, Proc. Symp. Appl. Mat. 17 (1965), 154-183.

[26] J.-P. GUIRAUD - *An H-theorem for a gas of rigid spheres in a bounded domain*, Théories cinétiques et relativistes, CNRS, Paris (1975).

[27] K. HAMDACHE - *Existence in the large and asymptotic behaviour for the Boltzmann equation*, Japan J. Appl. Math. 2 (1985), 1-15.

[28] R. ILLNER, M. SHINBROT - *The Boltzmann equation. Global existence for a rare gas in an infinite vacuum*, à paraître aux Comm. Math. Phys.

[29] K. IMAI, T. NISHIDA - *Global solutions to the initial value problem for the nonlinear Boltzmann equation*, Publ. RIMS Kyoto Univ. 12 (1976), 229-239.

[30] S. KANIEL, M. SHINBROT - *The Boltzmann equation*, I. *Uniqueness and local existence*, Comm. Math. Phys. 58 (1978), 64-84.

[31] S. UKAI - *On the existence of global solution of mixed problem for non-linear Boltzmann equation*, Proc. Japan Acad. 50 (1974), 179-184.

Limite hydrodynamique

[32] C. BARDOS - *Une interprétation des relations existant entre les équations de Boltzmann, de Navier-Stokes et d'Euler à l'aide de l'entropie*, Mat. Aplic. Comp. 6 (1987), 97-117, Rio de Janeiro.

[33] R. CAFLISH - *Fluid dynamics and the Boltzmann equation*, in Non equilibrium phenomena I, 194-223, North-Holland, 1983.

[34] R. CAFLISH - *The fluid dynamic limit and the nonlinear Boltzmann equation*, Comm. Pure Appl. Math. 33 (1980), 651-666.

[35] S. CHAPMAN - *On the law of distribution of molecular velocities and on the theory of viscosity and thermal conduction in a non uniform monatomic gas*, Phil. Trans. Roy. Soc. London, A 216 (1916), 279-348.

[36] F. CORON - *Derivation of slip boundary conditions for the Navier-Stokes system from the Boltzmann equation*, à paraître.

[37] D. ENSKOG - *Numer. Berechng. d. Vorgänge in mäß. verd. Gasen.*, Arkiv. Mat. Ast. och Fys. 16 (1921), 1, .

[38] H. GRAD - *Asymptotic theory of the Boltzmann equation*, in Rarefield Gas Dynamics, 3rd Symposium, Paris (1962), 26-59.

[39] H. GRAD - *Asymptotic theory of the Boltzmann equation*, Phys. Fluids, (1963), 147-182.

[40] D. HILBERT - *Begründung der kinetischen Gastheorie*, Math. Annalen 72 (1912), 562-577.

[41] S. KAWASHIMA, A. MATSUMURA, T. NISHIDA - *On the fluid dynamical approximation to the Boltzmann equation at the level of the Navier-Stokes equations*, Comm. Math. Phys. 70 (1979), 97-124.

[42] T. NISHIDA - *Fluid dynamical limit of the nonlinear Boltzmann equation at the level of the compressible Euler equation*, Comm. Math. Phys. 61 (1978), 119-148.

Autres équations cinétiques traitées par des méthodes analogues. Moyennisation

[43] C. BARDOS, F. GOLSE, B. PERTHAME, R. SENTIS - *The non-accretive radiative transfer equations ; existence of solutions and Rosseland approximation*, J. Funct. Anal. 76 (1988).

[44] R.J. DI PERNA, P.L. LIONS - *On the Fokker-Planck-Boltzmann equations*, à paraître aux Comm. Math. Phys.

[45] R.J. DI PERNA, P.L. LIONS - *Global weak solutions of Vlasov-Maxwell systems*, à paraître aux Comm. Pure Appl. Math.

[46] P. GÉRARD - *Moyennes de solutions d'équations aux dérivées partielles*, Séminaire d'Équations aux Dérivées partielles, 1986-87, exposé n° XI, Ecole Polytechnique, Paris.

[47] P. GÉRARD - *Régularité des moyennes de solutions d'équations aux dérivées partielles*, Actes des Journées de Saint-Jean-de-Monts, Juin 1987.

[48] P. GÉRARD, F. GOLSE - Travail en préparation.

[49] F. GOLSE - *Quelques propriétés de moyennisation pour des équations aux dérivées partielles*, à paraître aux Rendiconti del Seminario di Torino.

[50] F. GOLSE, B. PERTHAME, R. SENTIS - *Un résultat de compacité pour l'équation de transport et application au calcul de la valeur propre principale d'un opérateur de transport*, C.R.A.S., Paris 301 (1985), 341-344.

[51] F. GOLSE, P.L. LIONS, B. PERTHAME, R. SENTIS - *Regularity of the moments of the solution of a transport equation*, J. Funct. Anal. 76 (1988), 110-125.

Pour le critère de Dunford - Pettis, on pourra consulter par exemple

[52] A. GROTHENDIECK - *Espaces Vectoriels Topologiques*, S. Paulo, 1958.

Article paru en juin 1988

[53] K. HAMDACHE - *Problèmes aux limites pour l'équation de Boltzmann : existence globale de solutions*, Comm. Partial Diff. Equations 13 (1988), 813-845.

Patrick GÉRARD

École Normale Supérieure
U.A. n° 762 du CNRS
45 rue d'Ulm
F-75230 PARIS CEDEX 05

Ludwig BOLTZMANN [1844-1906]

"Je serais heureux si les remarques précédentes pouvaient avoir le résultat de dissiper les préventions de quelques-uns à l'égard de la théorie cinétique et de décider quelques mathématiciens à approfondir un sujet à la fois intéressant et fécond."

É. BOREL - *Sur les principes de la théorie cinétique des gaz*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 23 (1906) 9-32.