HAÏM BREZIS

Points critiques dans les problèmes variationnels sans compacité

Astérisque, tome 161-162 (1988), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 698, p. 239-256

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1987-1988__30__239_0>

Séminaire BOURBAKI
40ème année, 1987-88, n° 698

Juin 1988

POINTS CRITIQUES DANS LES PROBLÈMES VARIATIONNELS SANS COMPACITÉ

par Haïm BREZIS

0. INTRODUCTION

Ce titre recouvre un *vaste sujet* motivé par la résolution d'équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires issues, entre autres, de la géométrie différentielle (problèmes de courbure, applications harmoniques, etc.) et de la physique (problème de Yang-Mills, problème des trois corps, etc.) ; voir la bibliographie détaillée à la fin de cet exposé.

Les solutions de ces problèmes apparaissent comme les points critiques d'une fonctionnelle F , c'est-à-dire les solutions de l'équation $F'(u) = 0$. Une difficulté commune à tous ces problèmes est que l'espace de base n'est *pas* compact et que la fonctionnelle F ne vérifie pas la condition de Palais-Smale, forme déguisée de compacité qui sera précisée dans la suite.

Je me bornerai, dans cet exposé, à expliquer les difficultés, les progrès réalisés et les problèmes ouverts sur un *exemple modèle* :

$$(1) \qquad \begin{cases} -\Delta u + q(x)\, u = u^p & \text{sur } \Omega \subset \mathbf{R}^N, \\ u > 0 & \text{sur } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbf{R}^N$ avec $N \geq 3$, $q(x)$ est une fonction donnée et $p = (N+2)/(N-2)$ est l'exposant de Sobolev critique. Cet exposant joue un rôle très particulier lié à l'invariance par le groupe des dilatations du quotient de Sobolev. (Lorsque $N = 2$, on remplace u^p par une fonction exponentielle ; on rencontre des phénomènes intéressants dont je ne parlerai pas - voir la bibliographie.)

Malgré sa simplicité apparente, le problème (1) présente une structure très riche et peut servir de "laboratoire" pour tester des méthodes nouvelles, que l'on peut ensuite essayer d'appliquer à d'autres problèmes. Bien entendu, on peut remplacer le domaine Ω par une variété riemannienne M compacte, sans bord, de dimension N . Le problème (1) s'écrit alors

$$(2) \qquad \begin{cases} -\Delta u + q(x)\, u = u^p & \text{sur } M, \\ u > 0 & \text{sur } M. \end{cases}$$

Dans le cas particulier où $q(x)$ est la fonction $q(x) = [(N-2)/(4(N-1)] R(x)$ et $R(x)$ est la courbure scalaire de M, le problème (2) correspond au célèbre *problème de Yamabe qui sera noté* (Y). Ce problème intéresse les géomètres car s'il possède une solution, alors il existe une nouvelle métrique g' conforme à la métrique initiale g telle que, pour la nouvelle métrique, la courbure scalaire soit constante (voir par exemple [A 3]).

Quelques mots d'histoire :

i) En 1960, Yamabe [Y] publie un article où il énonce comme théorème l'existence d'une solution du problème (Y).

ii) En 1967, Trudinger [T] découvre une erreur dans la démonstration de Yamabe. Le théorème de Yamabe devient la conjecture de Yamabe.

iii) En 1976, Th. Aubin [A 2] publie un travail important où il prouve la conjecture de Yamabe pour les variétés de dimension $N \geq 6$ non localement conformément plates.

iv) En 1984, R. Schoen [Sc] annonce la solution complète de la conjecture de Yamabe dans tous les cas restants. Il présente une démonstration complète seulement pour $N = 3$. Sa méthode utilise le théorème difficile de la masse positive de Schoen et Yau ([Sc-Y 1], [Sc-Y 2]).

Récemment, nous avons obtenu, en collaboration avec A. Bahri, un résultat d'existence pour le problème (2) qui s'applique en particulier au problème de Yamabe. Avant d'énoncer ce résultat, notons que si le problème (1) ou (2) admet une solution, alors *nécessairement* la première valeur propre de l'opérateur $-\Delta + q$ est strictement positive (ceci est facile à voir en multipliant l'équation (1) ou (2) par φ_1). Dans *toute la suite*, on fera donc cette hypothèse qui équivaut à la *coercivité* de l'opérateur $-\Delta + q$, c'est-à-dire

$$\int |\nabla\varphi|^2 + q\,\varphi^2 \geq \alpha \int \varphi^2 \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \quad (\text{resp. } H^1(M)),\ \alpha > 0 .$$

THÉORÈME 1 ([Ba-Br]).- *On suppose que* $N < 6$. *Alors il existe une solution de* (2).

La démonstration est fortement inspirée par un travail fondamental de Bahri-Coron [Ba-C 1], [Ba-C 2]. Notre approche utilise des *outils topologiques* et évite entièrement le théorème de la masse positive, ce qui permet de considérer des fonctions $q(x)$ *générales*.

Remarque 1.- La restriction $N < 6$ provient de difficultés techniques dans la démonstration. Il est naturel de conjecturer que le Théorème 1 s'étend au cas $N \geq 6$.

Encore un peu d'histoire sur le problème (1) :

En 1965, Pohozaev découvre un résultat négatif surprenant concernant le problème (1) :

THÉORÈME 2 ([Po]).- *On suppose que* Ω *est étoilé. Alors, il n'existe pas de solution du problème*

$$(3) \qquad \begin{cases} -\Delta u = u^p & \text{sur } \Omega, \\ u > 0 & \text{sur } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Ce résultat facile à démontrer a un impact désastreux. Il donne à penser que les problèmes avec exposant critique n'ont, en général, pas de solution (alors que si $p < (N+2)/(N-2)$, il est facile de voir que (1) ou (2) possède une solution). Il faudra attendre une quinzaine d'années avant de réaliser, d'abord, que la présence de la fonction $q(x)$ et, ensuite, que la topologie ou la géométrie de Ω permettent d'obtenir des solutions de (1).

THÉORÈME 3 ([Br-N]).- *Soit* Ω *un ouvert borné régulier de* $\mathbf{R}^N$ *avec* $N \geq 4$. *On suppose*
(4) *il existe* $x_0 \in \Omega$ *tel que* $q(x_0) < 0$.
Alors, le problème (1) *admet une solution.*

Remarque 2.- Lorsque $q(x) \geq 0$ sur Ω, il peut se produire que le problème (1) admette une solution, mais on ne connaît aucun résultat général d'existence. Ceci est un problème ouvert très intéressant.

Dans le cas où $N = 3$, la situation est plus compliquée. Rappelons quela fonction de Green $G(x,y)$ de l'opérateur $-\Delta + q$ est la solution de l'équation

$$\begin{cases} -\Delta G + qG = \delta_y & \text{sur } \Omega, \\ G(x,y) = 0 & \text{pour } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

On écrit

$$G(x,y) = \frac{1}{4\pi|x-y|} + g(x,y)$$

où g, la partie régulière de G, est continue sur $\Omega \times \Omega$. Voici un résultat dû à B. McLeod [Mc] et lié au travail de Schoen [Sc] sur le problème de Yamabe.

THÉORÈME 4.- *Soit* $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ *un ouvert borné régulier. On suppose*
(5) *il existe* $x_0 \in \Omega$ *tel que* $g(x_0,x_0) > 0$.
Alors, le problème (1) *admet une solution.*

Remarque 3.- La condition (5) n'est pas toujours facile à vérifier. Dans le cas particulier où Ω est une boule et $q(x)$ une constante, un calcul explicite montre que la condition (5) est vérifiée si et seulement si $-\lambda_1 < q < -\lambda_1/4$. Dans le cas du problème de Yamabe (Y), l'hypothèse (5) résulte du théorème de la masse positive.

Plus récemment, il a été découvert que la *topologie* ou la *géométrie* du domaine Ω peuvent être utilisés pour établir des théorèmes d'existence. La première remarque dans cette direction est due à Kazdan-Warner [K-W] qui ont observé que si Ω est un anneau,
$\Omega = \{x \in \mathbf{R}^N ; R_1 < |x| < R_2\}$, alors le problème (3) admet une solution (radiale).

En 1984, Coron [Co] a prouvé que si l'on fait un "petit trou" dans un domaine général, alors le problème (3) admet une solution. Ainsi on a, par exemple, le :

THÉORÈME 5.- *Soit* D *un ouvert borné régulier et soit* $\Omega = D \setminus B_r$ *où* B_r *est une boule de rayon* r *contenue dans* D *. Alors pour tout* r *assez petit, le problème* (3) *possède une solution.*

Dans un travail tout à fait remarquable, Bahri et Coron [Ba-C 2] ont réussi à supprimer l'hypothèse " r petit" et ils démontrent le résultat suivant :

THÉORÈME 6.- *On suppose que* Ω *a une topologie non triviale au sens suivant* :
(6) *L'homologie* $H_d(\Omega ; \mathbf{Z}_2)$ *est non nulle pour un certain entier* d .
Alors, il existe une solution de (3).

Il reste encore de nombreuses questions ouvertes. Ainsi, il est naturel de conjecturer que le problème (1) admet une solution sous l'hypothèse (6) pour une fonction q générale. D'autre part, il semblerait que la *géométrie* de Ω puisse jouer un rôle (même si Ω a une topologie triviale) comme le montre le résultat suivant de Ding [Di 1] :

THÉORÈME 7.- *Soit* $D = \{x \in \mathbf{R}^N ; r < |x| < 1\}$ *avec* $N \geq 4$ *et soit*
$C = \{x = (x',x_N) \in \mathbf{R}^{N-1} \times \mathbf{R} ; |x'| \leq \varepsilon$ *et* $0 \leq x_N \leq 1\}$ *. On pose* $\Omega = D \setminus C$ *(de sorte que* Ω *est contractile). Alors, pour* r *et* ε *assez petits, le problème* (3) *admet une solution.*

Dans la Section I, je présenterai un outil abstrait d'Analyse fonctionnelle qui est relativement simple mais fort utile : un principe de min-max sans la condition (PS). Dans les sections 2 et 3, j'expliquerai comment on peut l'appliquer à la résolution de problèmes décrits ci-dessus.

1. LE CADRE FONCTIONNEL ABSTRAIT

Les problèmes décrits ci-dessus ont une structure variationnelle, c'est-à-dire que les solutions correspondent aux points critiques d'une fonctionnelle F de classe C^1 définie sur un Banach E (ou sur une variété de dimension infinie). Pour résoudre l'équation $F'(u) = 0$, on peut commencer par minimiser F . L'espace de base n'étant pas compact, l'infimum n'est pas nécessairement atteint. Pour remédier à cette difficulté, on utilise très souvent une *forme déguisée de compacité introduite par Palais et Smale* [P-S], la célèbre condition (PS) :

(PS) $\left\{\right.$ Pour toute suite (u_n) de E telle que $F(u_n)$ reste borné et $\|F'(u_n)\| \to 0$, alors (u_n) est relativement compacte.

Voici un résultat simple, mais qui illustre bien le rôle de la condition (PS).

THÉORÈME A.- *Soit* F *une fonction bornée inférieurement et vérifiant la condition* (PS). *Alors* F *atteint son minimum.*

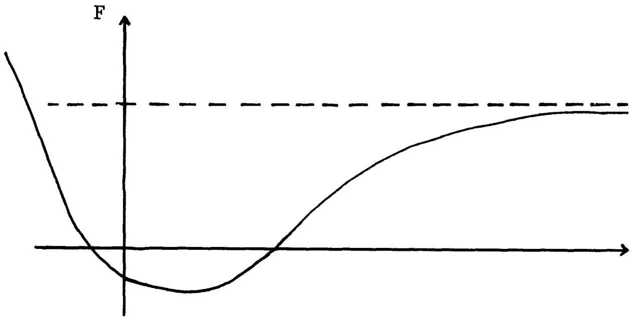
Pour démontrer le Théorème A, il est commode de faire appel au Lemme d'Ekeland [Ek] qui affirme que l'on peut toujours trouver une suite (u_n) telle que

$$F(u_n) \to \operatorname*{Inf}_E F \quad \text{et} \quad \|F'(u_n)\| \to 0 .$$

Si la condition (PS) est satisfaite, on conclut aisément que le minimum est atteint.

En fait, la condition (PS) est trop forte ; une fonction F peut atteindre son minimum sans vérifier la condition (PS).

Exemple.-



On voit d'ailleurs sur cet exemple que la condition (PS) a été conçue pour empêcher les points critiques de "fuir à l'infini". Cette condition étant trop restrictive en vue des applications, nous avons trouvé utile d'introduire (voir [Br-C-N]) une condition plus précise :

DÉFINITION.- *Soit* $c \in \mathbf{R}$ *fixé. On dit que* F *vérifie* la condition $(PS)_c$ *si pour toute suite* (u_n) *telle que* $F(u_n) \to c$ *et* $\|F'(u_n)\| \to 0$, *alors* (u_n) *est relativement compacte.*

Bien entendu, F vérifie (PS) si et seulement si F vérifie $(PS)_c$ pour tout $c \in \mathbf{R}$. On obtient alors facilement la variante suivante du Théorème A :

THÉORÈME A'.- *Soit* F *une fonction bornée inférieurement et soit* $c = \operatorname*{Inf}_E F$ *.On suppose que* F *vérifie la condition* $(PS)_c$ *pour cette valeur particulière de* c . *Alors* $\operatorname*{Inf}_E F$ *est atteint.*

Cette amélioration qui peut paraître négligeable est en fait extrêmement utile dans les applications. En pratique, on est conduit au programme suivant :

1) Identifier les valeurs de c pour lesquelles $(PS)_c$ tombe en défaut.

2) Montrer que Inf F n'est pas une telle valeur.

La mise en oeuvre de ce programme sur des exemples concrets n'est pas toujours simple, mais cette approche a permis, entre autres, à Th. Aubin [A 2] et R. Schoen [Sc] d'aborder (Y). Le théorème A' sert aussi à démontrer les Théorèmes 3 et 4.

Dans d'autres situations, il peut se produire que l' Inf ne soit véritablement pas atteint. On peut alors faire appel aux *méthodes de min-max* ou bien à la *théorie de Morse* pour détecter des points critiques. C'est cette approche qui est utilisée pour démontrer les Théorèmes 1, 5, 6 et 7.

Voici, à titre d'exemple, un résultat abstrait simple dans cette direction :

THÉORÈME B.- *Soit* K *un espace métrique compact et soit* $K^* \subset K$ *un fermé tel que* $K^* \neq \emptyset$ *et* $K^* \neq K$. *On fixe une application* f^* *continue de* K^* *dans* E *et on considère*

$$\mathcal{P} = \{f \in C(K;E) \,;\, f = f^* \text{ sur } K^*\}.$$

On pose

$$c = \operatorname*{Inf}_{f \in \mathcal{P}} \operatorname*{Max}_{a \in K} F(f(a)). \tag{7}$$

On suppose que

$$c > \operatorname*{Max}_{a \in K^*} F(f^*(a)) \tag{8}$$

et que

$$F \text{ vérifie } (PS)_c. \tag{9}$$

Alors c *défini par* (7) *est une valeur critique de* F.

Le cas particulier où $K = [0,1]$ et $K^* = \{0,1\}$ conduit au corollaire suivant dont l'interprétation géométrique est facile à saisir :

COROLLAIRE 1 (Ambrosetti-Rabinowitz [A-R]).- *On suppose que* F *vérifie* $F(0) = 0$ *et*

(10) *Il existe des constantes* $\rho > 0$ *et* $R > 0$ *telles que* $F(u) \geq \rho \quad \forall u \in E$ avec $\|u\| = R$,

(11) *Il existe* $v_0 \in E$ tel que $\|v_0\| > R$ *et* $F(v_0) \leq 0$.

Soit $\mathcal{P} = \{f \in C([0,1];E) \,;\, f(0) = 0 \text{ et } f(1) = v_0\}$. *On définit* c *par* (7) *et on suppose que* F *vérifie* $(PS)_c$. *Alors* c *est une valeur critique de* F.

La démonstration du Théorème B est assez élémentaire. On peut, par exemple, appliquer le Lemme d'Ekeland [Ek] comme dans [A-E], p. 272 ; voir aussi [N].

Remarque 4.- Il est clair que $c \geq \operatorname*{Max}_{a \in K^*} F(f^*(a))$.

L'inégalité stricte (8) n'est pas toujours commode à vérifier et peut nécessiter un argument de topologie. (Dans le cadre du Corollaire 1, c'est très simple puisque toute courbe continue joignant 0 à v_0 perce la sphère de rayon R.)

Remarque 5.- L'exemple suivant (construit avec L. Nirenberg) montre que la condition $(PS)_c$ joue un rôle essentiel. Sur $\mathbf{R}^2$ la fonction $F(x,y) = x^2 - (x-1)^3 y^2$ vérifie les hypothèses (10) et (11).

Elle vérifie aussi la propriété $(PS)_c$ pour tout $c \in \mathbf{R}$, sauf $c = 1$, et néanmoins la conclusion du Corollaire 1 tombe en défaut. La valeur $c = 1$ correspond à un "point critique à l'infini" de coordonnées $(1,\infty)$.

2. PRÉLIMINAIRES SUR LA MEILLEURE CONSTANTE DE SOBOLEV ET ANALYSE DU DÉFAUT DE LA CONDITION $(PS)_c$

Les solutions de (1), (2) ou (3) correspondent aux points critiques non nuls de la fonctionnelle

$$F(u) = \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 + qu^2 - \frac{1}{p+1}\int (u^+)^{p+1} \tag{12}$$

qui est bien définie sur l'espace de Sobolev H_0^1 (à cause de l'injection de Sobolev $H_0^1 \subset L^{p+1}$; noter que $p + 1 = 2N/(N-2)$.)

La difficulté essentielle provient du fait que F ne vérifie pas la condition (PS). La manière la plus directe de s'en convaincre est la suivante : si F vérifiait (PS), on pourrait appliquer le Corollaire 1 et on aurait ainsi *toujours* une solution de (1), (2) ou (3) - ce qui contredirait le Théorème de Pohozaev.

Pour comprendre comment la condition (PS) tombe en défaut, il est indispensable d'introduire *la meilleure constante de Sobolev* (dont le rôle fondamental avait déjà été mis en évidence dans [A 2]) ; on pose

$$S = \operatorname*{Inf}_{\varphi \in H_0^1} \left\{ \frac{\int |\nabla\varphi|^2}{\|\varphi\|_{p+1}^2} \right\}. \tag{13}$$

Les propriétés principales de S sont les suivantes :

1) S est indépendant du domaine Ω (ou de la variété M) ; ceci provient de l'invariance du quotient $Q(\varphi) = \int |\nabla\varphi|^2/\|\varphi\|_{p+1}^2$ par le groupe des dilatations $k \to \varphi(kx)$. S dépend seulement de N .

2) S n'est jamais atteint si $\Omega \neq \mathbf{R}^N$.

3) Sur $\mathbf{R}^N$ l'infimum (13) est atteint et les fonctions extrémales, modulo translations et dilatations, sont de la forme $(1 + |x|^2)^{-(N-2)/2}$. On utilisera en particulier les fonctions

$$U_\lambda(x) = \frac{C\lambda^{(N-2)/2}}{(1+\lambda^2|x|^2)^{(N-2)/2}} \quad , \quad \lambda > 0$$

où $C = [N(N-2)]^{1/(p-1)}$ de sorte que U_λ vérifie

$$-\Delta U_\lambda = U_\lambda^p \qquad \text{sur } \mathbf{R}^N . \tag{14}$$

Modulo des translations, toutes les solutions positives de (14) sont données par les fonctions U_λ . On notera que quand $\lambda \to +\infty$, $U_\lambda(x) \to 0$ si $x \neq 0$ et $U_\lambda(0) \to \infty$. Autrement dit, les fonctions U_λ se "*concentrent*" *au voisinage de* $x = 0$ et plus précisément $(U_\lambda)^{p+1} \to S^{N/2}\,\delta_0$ et $|\nabla U_\lambda|^2 \to S^{N/2}\,\delta_0$ au sens des mesures. (Pour la démonstration de ces propriétés, voir par exemple [A 1], [Lie], [Ta], [G-N-N] et [O].)

A l'aide de ces fonctions, on peut construire facilement des suites qui violent la condition (PS). Soit, par exemple,

$$u_n(x) = \zeta(x)\ U_{\lambda_n}(x - \bar{x})$$

où $\bar{x} \in \Omega$ est fixé arbitrairement (c'est le "point de concentration"), (λ_n) est une suite quelconque qui tend vers l'infini (c'est la "vitesse de concentration") et $\zeta(x) \equiv 1$ au voisinage de $\bar{x}$. On vérifie aisément que $F(u_n) \to \Sigma$, que $\|F'(u_n)\| \to 0$ avec

$$\Sigma = (1/N)\ S^{N/2} \tag{15}$$

et que (u_n) n'est *pas* relativement compacte.

Plus généralement, on peut superposer de tels gadgets. On fixe k points de concentration, $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots \bar{x}_k$ dans Ω et k vitesses de concentration $\lambda_{1,n}, \lambda_{2,n}, \dots \lambda_{k,n}$ qui tendent vers l'infini quand $n \to \infty$. On pose

$$u_n(x) = u_o(x) + \sum_{i=1}^{k} \zeta_i(x)\ U_{\lambda_{i,n}}(x - \bar{x}_i)$$

où u_o est un point critique de F. Alors $F(u_n) \to F(u_o) + k\,\Sigma$, $\|F'(u_n)\| \to 0$ et (u_n) n'est *pas* relativement compacte. Il est remarquable que la condition $(PS)_c$ tombe en défaut *uniquement à ces niveaux quantifiés* :

THÉORÈME 8.- *La condition* $(PS)_c$ *est vérifiée* sauf *pour* $c = \sigma + k\,\Sigma$ *où* σ *est une valeur critique de* F *et* $k = 1,2,3,\dots$. *De plus, la formule* (16) *fournit une bonne description des "points critiques à l'infini".*

Le phénomène de défaut de compacité a été analysé pour la première fois par Sacks-Uhlenbeck [Sa-U] ; il a ensuite été rencontré par de nombreux auteurs (voir bibliographie). Plus précisément, le Théorème 8 est basé sur les travaux de Struwe [St 1], Brézis-Coron [Br-C 1], P.-L. Lions [Lio], etc. En particulier, comme on a toujours $\sigma \geq 0$, on voit que le premier niveau où la condition $(PS)_c$ tombe en défaut est $c = \Sigma$. Donc si l'on sait montrer que c défini par (7) est strictement inférieur à Σ, on peut conclure à l'existence d'une solution de (1), (2) ou (3). On notera aussi que si le problème (1), (2) ou (3) n'a pas de solution, alors $u_O = 0$ est le seul point critique de F et $(PS)_c$ tombe en défaut précisément pour $c = k\,\Sigma$.

Alternativement, pour trouver des solutions de (1), (2) ou (3), on peut aussi considérer la fonctionnelle

$$J(u) = 1 / \|u^+\|_{p+1}^N$$

sous la *contrainte* $u \in V = \{u \in H_0^1 ;\ \int |\nabla u|^2 + qu^2 = 1\}$, qui présente un défaut de compacité aux niveaux $k\,S^{N/2}$, $k = 1,2,\dots$. Appliquant alors le Théorème A, on voit que si

$$J = \inf_{\substack{\varphi \in H_0^1 \\ \varphi \neq 0}} \left\{ \frac{\int |\nabla \varphi|^2 + q\varphi^2}{\|\varphi\|_{p+1}^2} \right\} < S$$

alors cet infimum est atteint et on obtient ainsi une solution de (1) ou (2).

3. APPLICATIONS AUX THÉORÈMES D'EXISTENCE

Les théorèmes 3 et 4 se démontrent par *minimisation*, la partie technique de la démonstration consistant à vérifier l'hypothèse (17). Pour le Théorème 3, on peut supposer, quitte à faire une translation, que $q(0) < 0$. On considère $\varphi_\lambda(x) = \zeta(x)\, U_\lambda(x)$ où $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$ est une fonction fixée telle que $\zeta(x) \equiv 1$ au voisinage de $x = 0$. On pose

$$Q(\varphi) = \frac{\int |\nabla \varphi|^2 + q\varphi^2}{\|\varphi\|_{p+1}^2}.$$

Un développement limité, quand $\lambda \to \infty$, montre que

$$Q(\varphi_\lambda) = \begin{cases} S + \dfrac{q(0)}{\lambda^2} + 0\left(\dfrac{1}{\lambda^{N-2}}\right) & \text{si } N \geq 5 \\[2ex] S + \dfrac{q(0)\,|\log \lambda|}{\lambda^2} + 0\left(\dfrac{1}{\lambda^2}\right) & \text{si } N = 4 \end{cases}$$

ce qui permet de vérifier la condition (17) et de conclure.

Dans la démonstration du Théorème 4, le choix de la fonction test φ est plus *global*. Quitte à faire une translation, on peut supposer que $g(0,0) > 0$. Soit φ_λ la solution du problème

$$(18) \qquad \begin{cases} -\Delta \varphi_\lambda + q\varphi_\lambda = -\Delta U_\lambda & \text{sur } \Omega, \\[2ex] \varphi_\lambda = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Quand $\lambda \to \infty$, on montre (voir [Br 1]) que

$$Q(\varphi_\lambda) = S - \frac{C}{\lambda} g(0,0) + o\left(\frac{1}{1}\right)$$

ce qui permet encore de conclure par *minimisation*.

Pour démontrer les Théorèmes 1, 5, 6 et 7, il est *impossible de procéder par minimisation*, l'infimum en (17) étant égal à S n'est pas atteint. (Sous les hypothèses du Théorème 1, il peut se produire, pour certaines fonctions $q(x)$, que $J < S$; mais comme on n'impose aucune restriction sur $q(x)$, on peut aussi avoir $J = S$, ce qui ne permet pas de conclure par minimisation.)

Voici, par exemple, l'idée de la démonstration du Théorème 5. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que $S^{N-1} \subset \Omega$. On applique le Théorème B avec $K = B^N$, $K^* = S^{N-1}$ et $J(u) = 1/\|u^+\|_{p+1}^N$ sous la contrainte $u \in V = \{u \in H_0^1 ; \int |\nabla u|^2 = 1\}$. En l'absence de solutions de (3), J vérifie $(PS)_c$ sauf pour $c = k\, S^{N/2}$. On définit l'application $f^* : S^{N-1} \to V$ comme suit

$$f^*(a) \;=\; \zeta(x)\, U_\lambda(x - a) \,/\, \|\nabla(\zeta\, U_\lambda)\|_2$$

où $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$ est convenablement choisi et λ sera fixé ultérieurement. Soit c défini par (7). Il faut vérifier deux choses :

i) La condition $(PS)_c$ (pour cette valeur de c).

ii) $C > \operatorname*{Max}_{a \in S^{N-1}} J(f^*(a))$.

Vérification de i) : il est clair que $c > S^{N/2}$. Pour montrer que l'on évite les mauvaises valeurs de c ($c = k\, S^{N/2}$, $k = 1,2,\dots$), il suffit de prouver que $c < 2\, S^{N/2}$.
C'est dans ce but que l'on fixe λ assez grand et que l'on suppose le trou assez petit.
Vérification de ii) : on suppose, par l'absurde, que $c \leq \operatorname*{Max}_{a \in S^{N-1}} J(f^*(a))$ et donc il existe une application $f : B^N \to V$ telle que $\operatorname*{Max}_{a \in B^N} J(f(a)) < 2S^{N/2}$. D'autre part, l'analyse des suites minimisantes (ou le Théorème 8 avec $k = 1$) montre que l'ensemble de niveau

$$J_{2S^{N/2}} = \left\{u \in V ; J(u) < 2S^{N/2}\right\}$$

se rétracte sur Ω. On obtiendrait alors une rétraction de B^N sur Ω et donc sur S^{N-1}, ce qui est impossible. On voit ainsi apparaître *le rôle de la topologie dans la vérification de la condition* (8).

La même idée est utilisée pour aborder le Théorème 7. Par contre, la démonstration du Théorème 1 est beaucoup plus compliquée. Comme dans [Ba-C 2], on introduit, pour tout entier $k \geq 1$, l'espace des barycentres formels

$$B_k(M) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} t_i\, \delta_{a_i} \;;\; t_i \geq 0 \;\text{ et }\; \sum_{i=1}^{k} t_i = 1 \right\}.$$

On pose $V = \{u \in H^1 ; \int |\nabla u|^2 + qu^2 = 1\}$ et $J(u) = 1/\|u^+\|_{p+1}^N$. On considère l'application $f_k(\lambda) : B_k(M) \to V$ définie par

$$f_k(\lambda) : \sum_{i=1}^{k} t_i \delta_{a_i} \to \sum_{i=1}^{k} t_i \varphi_{a_i,\lambda} \Big/ \Big\| \sum_{i=1}^{k} t_i \varphi_{a_i,\lambda} \Big\|$$

où $\varphi_{a,\lambda}$ est la solution de l'équation

$$-\Delta\varphi + q\varphi = -\Delta U_{a,\lambda} \qquad \text{sur } M$$

($U_{a,\lambda}$ correspond à la fonction $U_\lambda(x - a)$ convenablement localisée au voisinage de $x = a$). Les deux ingrédients essentiels de la démonstration sont les suivants :

i) On montre que si λ est assez grand, alors

$$f_k(\lambda) : B_k(M) \to J_{(k+1)\,S^{N/2}} .$$

Une analyse délicate des "termes d'interaction" (comme dans [Ba 1] montre que si $N = 3$, alors il existe un entier k_1 tel que $f_k(\lambda) : B_k(M) \to J_{kS^{N/2}}$ pour $k \geq k_1$ et $\lambda \geq \mu(k)$. Lorsque $N = 4$ et 5 , on sait seulement montrer qu'il existe un entier k_1 tel que pour tout $k \geq k_1$ et tout $\lambda \geq \mu(k)$ l'application de paires $f_k(\lambda) : (B_k(M), B_{k-1}(M)) \to (J_{(k+1)S^{N/2}}, J_{kS^{N/2}})$ est homotope à une application à valeurs dans $(J_{kS^{N/2}}, J_{kS^{N/2}})$ et est donc nulle en homologie.

ii) On montre à l'aide d'outils de topologie algébrique, comme dans [Ba-C 2], que si (1) n'a pas de solution, alors $f_k(\lambda)$ n'est pas nulle en homologie pour $k \geq 1$.

BIBLIOGRAPHIE

[A-R] A. AMBROSETTI, P. RABINOWITZ - *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal. 14 (1973), p. 349-381.

[A-E] J.-P. AUBIN, I. EKELAND - *Applied nonlinear analysis*, Wiley, New-York (1984).

[A 1] Th. AUBIN - *Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev*, J. Diff. Geom. 11 (1976), p. 573-598.

[A 2] Th. AUBIN - *Equations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire*, J. Math. Pures Appl. 55 (1976), p. 269-293.

[A 3] Th. AUBIN - *Nonlinear analysis on manifolds. Monge-Ampère equations*, Springer (1982).

[Ba 1] A. BAHRI - *Critical points at infinity in some variational problems*, Lecture Notes Longman (à paraître).

[Ba-Br] A. BAHRI, H. BREZIS - *Equations elliptiques non linéaires sur des variétés avec exposant de Sobolev critique*, C.R. Acad. Sc. Paris (1988) et article détaillé à paraître.

[Ba-C 1] A. BAHRI, J.-M. CORON - *Sur une équation elliptique non linéaire avec l'exposant critique de Sobolev,* C.R. Acad. Sc. Paris 301 (1985), p. 345-348).

[Ba-C 2] A. BAHRI, J.-M. CORON - *On a nonlinear elliptic equation involving the critical Sobolev exponent : the effect of the topology of the domain*, Comm. Pure Appl. Math. 41 (1988), p. 253-294.

[Br 1] H. BREZIS - *Elliptic equations with limiting Sobolev exponents - The impact of the topology*, Comm. Pure Appl. Math. 39 (1986), p. 517-539.

[Br-C 1] H. BREZIS, J.-M. CORON - *Convergence of solutions of* H-*systems or How to blow bubbles*, Archive Rat. Mech. Anal. 89 (1985), p. 21-56.

[Br-C-N] H. BREZIS, J.-M. CORON, L. NIRENBERG - *Free vibrations for a nonlinear wave equation and a theorem of P. Rabinowitz,* Comm. Pure Appl. Math. 33 (1980), p. 667-689.

[Br-N] H. BREZIS, L. NIRENBERG - *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math. 36 (1983), p. 437-477.

[Co] J.-M. CORON - *Topologie et cas limite des injections de Sobolev*, C.R. Acad. Sc. Paris 299 (1984), p. 209-212.

[Di 1] W.Y. DING - *Positive solutions of* $\Delta u + u^{(n+2)(n-2)} = 0$ *on contractible domains* (à paraître).

[Ek] I. EKELAND - *On the variational principle*, J. Math. Anal. Applic. 47 (1984), p. 324-353.

[G-N-N] B. GIDAS, W.M. NI, L. NIRENBERG - *Symmetry and related properties via the maximum principle*, Comm. Math. Phys. 68 (1979), p. 209-243.

[K-W] J. KAZDAN and F. WARNER - *Remarks on some quasilinear elliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math. 28 (1975), p. 567-597.

[Lie] E. LIEB - *Sharp constants in the Hardy-Littlewood-Sobolev and related inequalities*, Ann. Math. 118 (1983), p. 349-374.

[Lio] P.L. LIONS - *The concentration compactness principle in the calculus of variations, the limit case*, Rev. Mat. Iberoamericana 1 (1985), p. 145-201 et 1 (1985), p. 45-121.

[Mc] B. McLEOD - Communication personnelle.

[N] L. NIRENBERG - *Variational methods in nonlinear problems*, Montecatini CIME Lectures Notes (1987).

[O] M. OBATA - *The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds*, J. Diff. Geom. 6 (1972), p. 247-258.

[P-S] R. PALAIS, S. SMALE - *A generalized Morse theory*, Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1984), p. 165-171.

[Po] S. POHOZAEV - *Eigenfunctions of the equation* $\Delta u + \lambda f(u) = 0$, Soviet Mat. Dokl. 6 (1965), p. 1408-1411.

[Sa-U] J. SACKS, K. UHLENBECK - *The existence of minimal immersions of 2-spheres*, Ann. Math. 113 (1981), p. 1-24.

[Sc] R. SCHOEN - *Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature*, J. Diff. Geom. 20 (1984), p. 479-495.

[Sc-Y 1] R. SCHOEN, S.T. YAU - *On the proof of the positive mass conjecture in general relativity*, Comm. Math. Phys. 65 (1979), p. 45-76.

[Sc-Y 2] R. SCHOEN, S.T. YAU - *Proof of the positive action conjectures in quantum relativity*, Phys. Rev. Lett. 42 (1979), p. 547-548.

[St 1] M. STRUWE - *A global compactness result for elliptic boundary value problems involving limiting nonlinearities*, Math. Z. 187 (1984), p. 511-517.

[Tal] G. TALENTI - *Best constants in Sobolev inequality*, Annali di Mat. 110 (1976), p. 353-372.

[Tr] N. TRUDINGER - *Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 22 (1968), p. 265-274.

[Y] H. YAMABE - *On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, Osaka Math. J. 12 (1960), p. 21-37.

Références supplémentaires sur le problème de Yamabe :

[J-L] D. JERISON, J. LEE - *The Yamabe problem on CR manifold*, preprint.

[L-P] J. LEE, T. PARKER - *The Yamabe problem*, Bull. Amer. Math. Soc. 17 (1987), p. 37-81.

Équations de Yang-Mills et défaut de compacité :

[Do] S. DONALDSON - *An application of gauge theory to four-dimensional manifolds*, J. Diff. Geom. 18 (1983), p. 279-315.

[Se] S. SEDLACEK - *A direct method for minimizing the Yang-Mills functional over 4-manifolds*, Comm. Math. Phys. 86 (1982), p. 515-528.

[Tau 1] C. TAUBES - *The existence of a non-minimal solution to the* SU(2) *Yang-Mills-Higgs equations on* $\mathbf{R}^3$, Comm. Math. Phys. 86 (1982), p. 257-320.

[Tau 2] C. TAUBES - *Path connected Yang-Mills moduli spaces*, J. Diff. Geom. 19 (1984), p. 337-392.

[Tau 3] C. TAUBES - *Min-max theory for the Yang-Mills-Higgs equations*, preprint.

[Tau 4] C. TAUBES - *A framework for Morse theory for the Yang-Mills functional*, preprint.

[U] K. UHLENBECK - *Variational problems for gauge fields*, in Seminar on Differential Geometry (Yau ed.), Princeton Univ. Press (1982), p. 455-464.

Applications harmoniques et défaut de compacité :

[Be-C] V. BENCI, J.-M. CORON - *The Dirichlet problem for harmonic maps from the disk to the Euclidean* n-*sphere*, Ann. IHP, Anallyse non-linéaire 2 (1985), p. 119-141.

[Br-C 2] H. BREZIS, J.-M. CORON - *Large solutions for harmonic maps in two dimensions*, Comm. Math. Phys. 92 (1983), p. 203-215.

[Br-C-L] H. BREZIS, J.-M. CORON, E. LIEB - *Harmonic maps with defects*, Comm. Math. Phys. 107 (1986), p. 649-705.

[Cha] K.C. CHANG - *Heat flow and boundary value problems for harmonic maps*, preprint.

[J] J. JOST - *The Dirichlet problem for harmonic maps from a surface with boundary onto a* 2-*sphere*, J. Diff. Geom. 19 (1984), p. 393-401.

[Sa-U] J. SACKS, K. UHLENBECK - *The existence of minimal immersions of* 2-*spheres*, Ann. Math. 113 (1981), p. 1-24.

[St 2] M. STRUWE - *On the evolution of harmonic mappings*, Comm. Math. Helv. 60 (1985), p. 558-581.

[St 3] M. STRUWE - *The evolution of harmonic maps*, Part I, II, preprints.

Problème des trois corps et défaut de compacité :

[Ba-R] A. BAHRI, P. RABINOWITZ - *Periodic solutions of the three body problem via the critical points at infinity*, preprint.

Défaut de compacité en géométrie de contact et en géométrie symplectique :

[Ba 2] A. BAHRI - *Pseudo-orbits of contact forms*, Lecture Notes, Longman (1988).

[F] A. FLOER - *The Conley index for the symplectic action*, preprint.

[H] H. HOFER - *Symplectic rigidity, holomorphy and Hamiltonian dynamics : a survey*, preprint.

Problèmes de courbure et défaut de compacité :

[Ba-C 3] A. BAHRI, J.-M. CORON - *Une théorie des points critiques à l'infini pour l'équation de Yamabe et le problème de Kazdan-Warner*, C.R. Acad. Sc. Paris 300 (1985), p. 513-516.

[Ba-C 4] A. BAHRI, J.-M. CORON - *The scalar curvature equation on the standard three-dimensional sphere*, preprint

[B-E] J.-P. BOURGUIGNON, J.-P. EZIN - *Scalar curvature functions in a conformal class of metrics and conformal transformations*, à paraître.

[Br-C 2] H. BREZIS, J.-M. CORON - *Multiple solutions of* H-*systems and Rellich's conjecture*, Comm. Pure Appl. Math. 37 (1984), p. 149-187.

[C-Y 1] S.Y.A. CHANG, P.C. YANG - *Prescribing Gaussian curvature on* S^2, Acta Math. 159 (1987), p. 215-259.

[C-Y 2] S.Y.A. CHANG, P.C. YANG - *Conformal deformation of metrics on* S^2, J. Diff. Geom. 27 (1988), p. 259-296.

[C-D] W. CHEN, W.Y. DING - *Scalar curvatures on* S^2, Trans. Amer. Math. Soc. 303 (1987), p. 365-382.

[E-S] J. ESCOBAR, R. SCHOEN - *Conformal metrics with prescribed scalar curvature*, Invent. Math. 86 (1986), p. 243-254.

[Ho] C.W. HONG - *A best constant and the Gaussian curvature*, Proc. Amer. Math. Soc. 97 (1986), p. 737-747.

[K] J. KAZDAN - *Prescribing the curvature of a Riemannian manifold*, CBMS Reg. Conf. Vol. 57, Amer. Math. Soc. (1985).

[St 4] M. STRUWE - *Large H-surfaces via the mountain pass lemma*, Math. Ann. 270 (1985), p. 441-459.

[St 5] M. STRUWE - *Non uniqueness in the Plateau problem for surfaces of constant mean curvature*, Archive Rat. Mech. Anal. 93 (1986), p. 135-157.

[W] H. WENTE - *Large solutions to the volume constrained Plateau problem,* Archive Rat. Mech. Anal. 75 (1980), p. 59-77.

Références supplémentaires sur les équations elliptiques avec exposant de Sobolev critique :

[A-Sr] A. AMBROSETTI, P. SRIKANTH - *Superlinear elliptic problems and the dual principle in critical point theory*, J. Math. and Phys. Sc. 18 (1984), p. 441-451.

[A-St] A. AMBROSETTI, M. STRUWE - *A note on the problem* $-\Delta u = \lambda u + u\,|u|^{2^*-2}$, Manuscripta Math. 54 (1986), p. 373-379.

[At] F. ATKINSON - *Asymptotics of eigenfunctions for some nonlinear elliptic problems,* preprint.

[A-B-P] F. ATKINSON, H. BREZIS, L. PELETIER - *Solutions d'équations elliptiques avec exposant de Sobolev critique qui changent de signe*, C.R. Acad. Sc. Paris 306 (1988), p. 711-714.

[A-P 1] F. ATKINSON, L. PELETIER - *Emden-Fowler equations involving critical exponents*, J. Nonlinear Analysis 10 (1986), p. 755-776.

[A-P 2] F. ATKINSON, L. PELETIER - *Large solutions of elliptic equations involving critical exponents*, Asymptotic Analysis 1 (1988), à paraître.

[A-P 3] F. ATKINSON, L. PELETIER - *Elliptic equations with nearly critical growth*, J. Diff. Eq. 70 (1987), p. 349-365.

[B-P] C. BANDLE, L. PELETIER - *Nonlinear elliptic problems with critical exponents in shrinking annuli*, Math. Annalen, à paraître.

[Be-C] V. BENCI, G. CERAMI - *Existence of positive solutions of the equation* $-\Delta u + a(x)u = u^{(N+2)/(N-2)}$ in $\mathbf{R}^N$, J. Funct. Anal., à paraître.

[Br-O] H. BREZIS, L. OSWALD - *A maximization problem involving critical Sobolev exponents*, Mat. Aplic. Comp. 6 (1987), p. 47-56.

[Br-P] H. BREZIS, L. PELETIER - *Asymptotics for elliptic equations involving critical growth*, preprint.

[Bu 1] C. BUDD - *Semilinear elliptic equations with near critical growth rates*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 107 (1987), p. 249-270.

[Bu 2] C. BUDD - *Bifurcation in elliptic systems*, preprint.

[Bu-N] C. BUDD, J. NORBURY - *Symmetry breaking in semilinear elliptic equations with critical growth rates*, preprint.

[C-F-P] A. CAPOZZI, D. FORTUNATO, G. PALMIERI - *An existence result for nonlinear elliptic problems involving critical Sobolev exponents*, Ann. IHP, Analyse non-linéaire, 2 (1985), p. 463-470.

[C-S-S] G. CERAMI, S. SOLIMINI, M. STRUWE - *Some existence results for superlinear elliptic boundary value problems involving critical exponents*, J. Funct. Anal. 69 (1986), p. 289-306.

[Da] E. DANCER - *A note on an equation with critical exponent*, Bull. London Math. Soc., à paraître.

[Di 2] W.Y. DING - *On a conformally invariant elliptic equation on* $\mathbf{R}^N$, Comm. Math. Phys. 107 (1986), p. 331-335.

[Eg 1] H. EGNELL - *Semilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, preprint.

[Eg 2] H. EGNELL - *Elliptic boundary value problems with singular coefficients and critical nonlinearities*, preprint.

[Eg 3] H. EGNELL - *Existence and nonexistence results for* m-*Laplace equations involving critical Sobolev exponents*, preprint.

[Es] J. ESCOBAR - *Positive solutions for some semilinear elliptic equations with critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math. 40 (1987), p. 623-657.

[F-J] D. FORTUNATO, E. JANELLI - *Infinitely many solutions for some nonlinear elliptic problems in symmetrical domains*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 105 (1987), p. 205-213.

[Jo] C. JONES - *Radial solutions of a semilinear elliptic equation at a critical exponent*, Archive Rat. Mech. Anal., à paraître.

[Le] R. LEWANDOWSKI - *Little holes and convergence of solutions of* $-\Delta u = u^{(N+2)/(N-2)}$, preprint.

[M-M] G. MANCINI, R. MUSINA - *Holes and obstacles*, preprint.

[Ni] W.M. Ni - *On the elliptic equation* $-\Delta u + K(x)\, u^{(N+2)/(N-2)} = 0$, *its generalizations and applications in geometry*, Indiana Univ. Math. J. 31 (1982), p. 493-529.

[R 1] O. REY - *Le rôle de la fonction de Green dans une équation elliptique non linéaire avec exposant critique de Sobolev*, C.R. Acad. Sc. Paris 305 (1987), p. 591-594. *The role of Green's function in a nonlinear elliptic equation involving the critical Sobolev exponent*, J. Funct. Anal., à paraître.

[R 2] O. REY - *Un résultat de multiplicité dans un problème variationnel non compact*, C.R. Acad. Sc. Paris 305 (1987), p. 591-594. *A multiplicity result for a variational problem with lack of compactness*, J. Nonlinear Anal.

[R 3] O. REY - *Sur un problème variationnel non compact : l'effet de petits trous dans le domaine*, C.R. Acad. Sc. Paris, à paraître.

[So] S. SOLIMINI - *On the existence of infinitely many radial solutions for some elliptic problems*, Rev. Mat. Apl. (Univ. de Chile) 9 (1987), p. 75-86.

[Z] D. ZHANG - *On multiple solutions of* $\Delta u + \lambda u + |u|^{4/(n-2)}u = 0$, preprint.

Défaut de compacité en dimension deux et meilleures constantes dans l'inégalité de Moser-Trudinger :

[A-P 4] F. ATKINSON, L. PELETIER - *Ground states and Dirichlet problems for* $-\Delta u = f(u)$ *in* $\mathbf{R}^2$, Archive Rat. Mech. Anal. 96 (1986), p. 147-165.

[Ca-Ch] L. CARLESON, S.Y.A. CHANG - *On the existence of an external function for an inequality of J. Moser,* Bull. Sc. Math., 110 (1986), p. 113-127.

[Ch] S.Y.A. CHANG - *Extremal functions in a sharp form of Sobolev inequality*, Proc. Intern. Congress Berkeley (1986), p. 715-723.

[Mc-Mc] B. McLEOD, K. McLEOD - *The critical Sobolev expònent in two dimensions*, preprint.

[Mc-P] B. McLEOD, L. PELETIER - *Observations on Moser's inequality*, preprint.

[St 6] M. STRUWE - *Critical points of embeddings of* $H^{1,n}$ *into Orlicz spaces*, preprint.

Divers :

[B-L] H. BRÉZIS, E. LIEB - *Sobolev inequalities with remainder terms*, J. Funct. Anal. 62 (1985), p. 73-86.

[Che] P. CHERRIER - *Problèmes de Neumann non-linéaires sur les variétés riemanniennes*, J. Funct. Anal. 57 (1984), p. 154-206.

[Ja] S. JACOBS - *An isoperimetric inequality for functions analytic in multiply connected domains*, Report Mittag-Leffler Inst. (1970).

[Me-Y] W. MEEKS, S.T. YAU - *Topology of three-dimensional manifolds and the embedding problems in minimal surface theory*, Annals of Math. 112 (1980), p. 441-484.

[Si-Y] Y.T. SIU, S.T. YAU - *Compact Kähler manifolds of positive bisectional curvature*, Invent. Math. 59 (1980), p. 189-204.

Exposés de synthèse :

[Ba 1] A. BAHRI - *Critical points at infinity in some variational problems*, Lecture Notes Longman (à paraître).

[Ba-C 5] A. BAHRI, J.-M. CORON - *Vers une théorie des points critiques à l'infini*, Sém. Bony-Sjöstrand-Meyer 1984-85.

[Br 2] H. BREZIS - *Some variational problems with lack of compactness*, Proc. Symp. Pure Math. 45 (1986), Part 1, Amer. Math. Soc., p. 165-201.

[Br 3] H. BREZIS - *Nonlinear elliptic equations involving the critical Sobolev exponent - Survey and perspectives* in Directions in Partial Differential Equations (M. Crandall, P. Rabinowitz, R. Turner ed.), Acad. Press (1987), p. 17-36.

[Lio] P.L. LIONS - *The concentration compactness principle in the calculus of variations, the limit case*, Rev. Mat. Iberoamericana 1 (1985), p. 145-201 et 1 (1985), p. 45-121.

Haïm BREZIS

Université Pierre et Marie Curie (Paris 6)
Laboratoire associé 189 du CNRS
Analyse Numérique
Tour 55-65 - 5ème étage
4 place Jussieu
F-75230 PARIS Cedex 05