Astérisque

JEAN-MARIE TRÉPREAU

Systèmes différentiels à caractéristiques simples et structures réelles-complexes

Astérisque, tome 92-93 (1982), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 595, p. 347-364
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1981-1982__24__347_0>

Séminaire BOURBAKI
34e année, 1981/82, n° 595 Juin 1982

SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS A CARACTÉRISTIQUES SIMPLES ET STRUCTURES RÉELLES-COMPLEXES [d'après M.S. Baouendi et F. Trèves ; M. Sato, T. Kawaï et M. Kashiwara]

par Jean-Marie TRÉPREAU

Un système de champs de vecteurs complexes effectivement intégrable est localement isomorphe au système induit sur une sous-variété M de $\mathbb{C}^n$ par le système d'apparence très simple $(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial \bar{z}_n},\frac{\partial}{\partial z_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial z_p})$. Une telle représentation peut aider à l'étude de tels systèmes, à condition que l'on connaisse les rapports entre les propriétés du système induit (S_i) et celles du système ambiant (S_a) .

Dans les § 1 et 2, où nous suivrons de près le cours de F. Trèves [28], nous montrerons (d'après M.S. Baouendi et F. Trèves) que les solutions de (S_i) peuvent être approchées par celles de (S_a) . Ce résultat permet d'interpréter la régularité des solutions de (S_i) en termes de propriétés de prolongement - lié à la propagation le long des feuilles intégrales de $(\frac{\partial}{\partial z_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial z_p})$ mais aussi au phénomène de Hartogs - des solutions de (S_a) . Dans le cas particulier d'un système analytique de rang $n-1$ sur $\mathbb{R}^n$, on en déduit un critère très simple d'hypoellipticité analytique (Théorème 10).

Dans le § 3, en nous limitant aux systèmes analytiques, nous présenterons un résultat de représentation (d'après [S-K-K] et M. Kashiwara, T. Kawaï [13] : on obtient la cohomologie de (S_i) en prenant la cohomologie à support sur M du faisceau des solutions de (S_a) . Cette représentation, en général abstraite, devient tout à fait suggestive - valeur au bord - lorsque M est une hypersurface. Dans la catégorie analytique, il n'y a pas lieu de se cantonner à l'étude des systèmes vectoriels ; nous montrerons, dans le § 4, que la belle idée de M. Kashiwara, T. Kawaï [13], déjà utilisée dans [14] en 1974, de remplacer l'étude microlocale d'un système sur $\mathbb{R}^n$ par l'étude d'un système - si possible plus simple - à la frontière d'un ouvert de $\mathbb{C}^n$, permet, dans le cas d'un système à caractéristiques simples, de se ramener à l'étude de $(\frac{\partial}{\partial z_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial z_p})$ à la frontière d'un ouvert strictement pseudoconvexe. En guise d'illustration, nous démontrerons l'analogue microlocal du Théorème 10 évoqué ci-dessus. La théorie de [13] de la quantification des transformations canoniques doit être rapprochée des conceptions de J. Sjöstrand dans son cours d'analyse microlocale [24].

Pour terminer, mentionnons que M.S. Baouendi, C.H. Chang et F. Trèves ont tout récemment développé un calcul microlocal adapté aux structures réelles-complexes ([31]).

1. Structures réelles-complexes (en bref R-C)

Notations.— M : une variété $\mathcal{C}^\infty$; TM , T^*M , $\mathbb{C}TM$, $\mathbb{C}T^*M$ ses fibrés tangents et cotangents, réels et complexes, et $\Lambda\mathbb{C}T^*M$ l'algèbre extérieure de $\mathbb{C}T^*M$. Si E est un fibré au-dessus de M , $\underline{E}$ le faisceau de ses sections $\mathcal{C}^\infty$, nous noterons $u \in \underline{E}$ pour une section locale de $\underline{E}$. Rappelons la formule, où $\varphi \in \underline{\mathbb{C}T^*M}$ et $\vartheta_1 , \vartheta_2 \in \underline{\mathbb{C}TM}$:

$$(1) \qquad \langle d\varphi,\vartheta_1 \wedge \vartheta_2\rangle + \langle\varphi,[\vartheta_1,\vartheta_2]\rangle = \vartheta_1\langle\varphi,\vartheta_2\rangle - \vartheta_2.\langle\varphi,\vartheta_1\rangle .$$

1.1. Structures R-C formelles

DÉFINITION 1.— *Une* structure R-C formelle *sur* M *est définie par la donnée d'un sous-fibré (vectoriel complexe* $\mathcal{C}^\infty$ *)* $\mathbb{L}$ *de* $\mathbb{C}TM$ *, formellement intégrable : i.e.,* $\underline{\mathbb{L}}$ *est stable par crochet.*

Il revient au même, d'après (1), de se donner un sous-fibré $\mathbb{T}$ de $\mathbb{C}T^*M$, tel que l'idéal engendré par $\underline{\mathbb{T}}$ dans $\underline{\Lambda\mathbb{C}T^*M}$ soit stable sous l'action de la différentielle extérieure, via : $\mathbb{T}^\perp = \mathbb{L} \leftrightarrow \mathbb{T} = \mathbb{L}^\perp$.

Nous parlerons indifféremment de la structure définie par $\mathbb{L}$, ou $\mathbb{T}$, ou un système $(L_1,\dots,L_n)$ (resp. $(\omega_1,\dots,\omega_m)$) de générateurs de $\mathbb{L}$ (resp. $\mathbb{T}$).

Une *distribution R-C* sur un ouvert U de M est une distribution sur U annulée par les sections de $\mathbb{L}$ au-dessus de U ; si $u \in C^\infty(U)$, il revient au même de dire que $du \in \underline{\mathbb{T}}(U)$. Soit $m+n$ la dimension de M , n le rang de $\mathbb{L}$ et m celui de $\mathbb{T}$; il ne peut exister plus de m fonctions R-C fonctionnellement indépendantes. Le célèbre contre-exemple de L. Nirenberg [20] montre qu'il peut ne pas y en avoir m et qu'il n'y a pas de pléonasme dans la

DÉFINITION 2.— *Une* structure R-C *sur* M *est une structure R-C formelle sur* M *localement intégrable : pour tout* $x_0 \in M$ *, il existe* m *fonctions* $\mathcal{C}^\infty$ $z_1,\dots,z_m$ *telles que* $dz_1,\dots,dz_m$ *engendrent* $\mathbb{T}$ *près de* x_0 .

Exemple.— Si les données M , $\mathbb{L}$ sont analytiques, il résulte du théorème de Frobenius analytique, que la structure R-C formelle définie par $\mathbb{L}$ est localement intégrable.

1.2. Un complexe associé

Compte tenu de l'isomorphisme $\mathbb{L}^* \simeq \mathbb{C}T^*M/\mathbb{L}^\perp$ et de la propriété de $\mathbb{T} = \mathbb{L}^\perp$ mentionnée ci-dessus, le complexe de de Rham induit par passage au quotient le complexe :

$$(2) \qquad \underline{\Lambda^0\mathbb{L}^*} \xrightarrow{\delta^0} \underline{\Lambda^1\mathbb{L}^*} \longrightarrow \dots \xrightarrow{\delta^{n-1}} \underline{\Lambda^n\mathbb{L}^*} \longrightarrow 0 .$$

Le problème principal de la théorie est d'étudier le complexe (2) (exactitude sur un ouvert ou dans les germes...). Il se "trivialise" localement grâce au :

Lemme 3.— $x_0 \in M$; *on peut trouver près de* x_0 *un système de générateurs de* $\underline{\mathbb{L}}$, $L_1,\ldots,L_n$ *qui commutent.*

Démonstration.— Si $\mathbb{T} = \mathbb{L}^{\perp}$ est engendré près de x_0 par le système $(\omega_1,\ldots,\omega_m)$ et si $u_1,\ldots,u_n$ sont n fonctions $\mathcal{C}^\infty$ telles que $\omega_1,\ldots,\omega_m,du_1,\ldots,du_n$ engendrent $\mathbb{C}T^*M$, les champs L_j définis par $\langle L_j,\omega_k\rangle = 0$ et $\langle L_j,du_k\rangle = \delta_{jk}$ répondent à la question d'après la formule (1). □

Avec les notations précédentes soit $M_j, j = 1,\ldots,m$, les champs définis par $\langle M_j,du_k\rangle = 0$ et $\langle M_j,\omega_k\rangle = \delta_{jk}$. Si f est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ près de x_0, on a :

$$df = \sum_{j=1}^{n}(L_jf)du_j + \sum_{j=1}^{m}(M_jf)\omega_j .$$

En prenant comme générateurs de $\mathbb{C}T^*M/\mathbb{T}$ les classes de $du_1,\ldots,du_n$, on obtient la représentation locale

$$(2') \qquad \mathcal{C}^\infty \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda^0\mathbb{C}^n \xrightarrow{\delta^0} \mathcal{C}^\infty \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda^1\mathbb{C}^n \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\delta^{n-1}} \mathcal{C}^\infty \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda^n\mathbb{C}^n \longrightarrow 0$$

du complexe (2), où, $e_1,\ldots,e_n$ désignant la base canonique de $\mathbb{C}^n$:

$$(2'') \qquad \delta^q(f_{i_1\ldots i_q}e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_q}) = \sum_{j=1}^{n}(L_jf_{i_1\ldots i_q})e_j\wedge e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_q} .$$

En particulier, l'exactitude de (2) au premier cran, dans les germes en x_0, signifie que le système $L_ju = f_j$, $j = 1,\ldots,n$, possède une solution $u \in \mathcal{C}^\infty_{x_0}$ dès que les $f_j \in \mathcal{C}^\infty_{x_0}$ satisfont aux conditions de compatibilité $L_jf_k - L_kf_j = 0$.

1.3. Structures induites

Si $(M,\mathbb{L})$ est une structure R-C formelle, N une sous-variété de M et que $\mathbb{L}_{|N} \cap \mathbb{C}TN$ est un fibré au-dessus de N, ce dernier est clairement formellement intégrable et définit donc une structure R-C formelle sur N. Le cas suivant a une importance particulière :

DÉFINITION 4.— *Un morphisme* $\mathcal{C}^\infty$ $f : N \to M$ *est dit* fortement non-caractéristique *pour la structure R-C formelle* $(M,\mathbb{T})$ *si* $\mathbb{C}N_f \cap \mathbb{T} \subset T^*_MM$ *(section nulle), où* $\mathbb{C}N_f = \{(f(y),\xi) \in \mathbb{C}T^*M ,\ {}^tf'(y).\xi = 0\}$. *La structure R-C formelle* $(N,f^*(\mathbb{T}))$ *est dite* induite *par* $\mathbb{T}$ *sur* N. *Une sous-variété* N *de* M *est dite fortement non-caractéristique si l'injection* $i : N \to M$ *l'est.*

1.4. Exemples

Notons $\overline{\mathbb{L}}$, $\overline{\mathbb{T}}$ les fibrés conjugués de $\mathbb{L}$, $\mathbb{T}$; $\mathbb{T}^0 = \mathbb{T} \cap T^*M$ la "variété caractéristique" de la structure (ce n'est pas en général un fibré !).

α) Si $\mathbb{L} = \overline{\mathbb{L}}$ (*structure essentiellement réelle*) $(M,\mathbb{L})$ est localement isomorphe à $\mathbb{R}^m_x \times \mathbb{R}^n_t$ muni du système $(\frac{\partial}{\partial t_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial t_n})$ d'après le théorème de Frobenius.

β) Si $\mathbb{C}TM = \mathbb{L} \oplus \overline{\mathbb{L}}$ (*structure complexe formelle*), $m = n$ et $(M,\mathbb{L})$ est localement isomorphe à $\mathbb{C}^n$ (comme variété $\mathscr{C}^\infty$) muni du système $(\frac{\partial}{\partial\bar{z}_1},\dots,\frac{\partial}{\partial\bar{z}_n})$, d'après le théorème - difficile - de Newlander-Nirenberg.

γ) Si $\mathbb{T}^o = 0$ (*structure elliptique*), on montre aisément (voir [28]) en combinant α) et β) que $(M,\mathbb{L})$ est localement isomorphe à $\mathbb{R}^p \times \mathbb{C}^q$ muni du système $(\frac{\partial}{\partial t_1},\dots,\frac{\partial}{\partial t_p},\frac{\partial}{\partial\bar{z}_1},\dots,\frac{\partial}{\partial\bar{z}_q})$; ici $n = p+q$ et p est le rang de $\mathbb{L}\cap\overline{\mathbb{L}}$.

Dans ces trois exemples, la suite (2) est exacte ; c'est une extension facile des lemmes de Poincaré et de Dolbeault-Grothendieck.

δ) Si $\mathbb{L}\cap\overline{\mathbb{L}} = 0$ (*structures C-R* - pour Cauchy-Riemann induites - *formelles*). Les exemples de structures non localement intégrables de L. Nirenberg [20] et de H. Jacobowitz et F. Trèves [10] appartiennent à cette famille. Dans ce cas, $m = n+q$ et q est appelé la codimension de la structure. On obtient de telles structures en prenant la structure induite sur une sous-variété M de dimension $m+n$, fortement non caractéristique pour la structure complexe de $\mathbb{C}^{n+q}$, par celle-ci. Rappelons qu'une telle sous-variété est dite *générique* et, lorsque $m = q$, *totalement réelle*.

1.5. Représentation locale des structures R-C

Le résultat suivant est élémentaire mais suggestif :

THÉORÈME 5.— *Pour qu'une structure R-C formelle* $(M,\mathbb{L})$ - M *de dimension* $m+n$, $\mathbb{L}$ *de rang* n - *soit intégrable près de* $x_0 \in M$, *il faut et il suffit qu'elle soit localement isomorphe à la structure induite sur une sous-variété totalement réelle* M_0 *de* $\mathbb{C}^{m+n}$ *par le système* $(\frac{\partial}{\partial\bar{z}_1},\dots,\frac{\partial}{\partial\bar{z}_{m+n}};\frac{\partial}{\partial z_{m+1}},\dots,\frac{\partial}{\partial z_{m+n}})$.

Démonstration.— La structure induite sur M_0 est intégrable puisque, si $i : M_0 \longrightarrow \mathbb{C}^{m+n}$ est l'injection, elle est définie par le système $(i^*dz_1,\dots,i^*dz_m)$ de formes exactes. Réciproquement supposons $(M,\mathbb{T})$ intégrable et soit $Z_1,\dots,Z_{m+n}$ $m+n$ fonctions complexes $\mathscr{C}^\infty$ près de x_0 telles que $dZ_1,\dots,dZ_m$ engendrent $\mathbb{T}$ et $dZ_1,\dots,dZ_{m+n}$ engendrent $\mathbb{C}T^*M$. L'immersion (locale) $i : x \longmapsto (Z_1(x),\dots,Z_{m+n}(x)) \in \mathbb{C}^{m+n}$ est fortement non caractéristique pour la structure complexe de $\mathbb{C}^{m+n}$ et $\mathbb{T} = \mathbb{L}^\perp$ est engendré par $(i^*dz_1,\dots,i^*dz_m)$. □

Remarque.— Si $n' = 2 \operatorname{rang} \mathbb{L} - \operatorname{rang}_{x_0}(\mathbb{L}+\overline{\mathbb{L}})$, on peut, en jouant sur le rang (réel) de $x \longmapsto (Z_1(x),\dots,Z_m(x))$ prendre pour M_0 une sous-variété générique de $\mathbb{C}^{m+n'}$ munie de la structure induite par le système $(\frac{\partial}{\partial\bar{z}};\frac{\partial}{\partial z_{m+1}},\dots,\frac{\partial}{\partial z_{m+n'}})$.

1.6. La forme de Lévi

DÉFINITION 6.— $(M,\mathbb{T})$ *une structure R-C formelle et* $x_0 \in M$ *; la forme de Lévi associée est l'application de* $\mathbb{T}^o_{x_0} = \mathbb{T}_{x_0} \cap T^*_{x_0}M$ *dans l'espace des formes hermitiennes sur* $\mathbb{L}_{x_0}$ *définie par :*

$$\mathscr{L}_\omega(\vartheta_1,\vartheta_2) = \langle \underset{\sim}{\omega}, \tfrac{1}{i}[\underset{\sim}{\vartheta}_1,\underset{\sim}{\bar\vartheta}_2]\rangle(x_0) \tag{3}$$

où $\underset{\sim}{\omega} \in \underline{\mathbb{T}}$ *et* $\underset{\sim}{\vartheta}_j \in \underline{\mathbb{L}}$ *sont des prolongements de* $\omega \in \mathbb{T}^o_{x_o}$, $\vartheta_j \in \mathbb{L}_{x_o}$.

L'indépendance vis à vis des prolongements résulte de la formule (1) qui donne :

$$i\mathcal{L}_\omega(\vartheta_1,\vartheta_2) = \underset{\sim}{\vartheta}_1.\langle\underset{\sim}{\omega},\overline{\underset{\sim}{\vartheta}}_2\rangle(x_o) - \langle d\underset{\sim}{\omega},\underset{\sim}{\vartheta}_1\wedge\overline{\underset{\sim}{\vartheta}}_2\rangle(x_o) = -\overline{\underset{\sim}{\vartheta}}_2.\langle\overline{\underset{\sim}{\omega}},\underset{\sim}{\vartheta}_1\rangle(x_o) - \langle d\overline{\underset{\sim}{\omega}},\underset{\sim}{\vartheta}_1\wedge\overline{\underset{\sim}{\vartheta}}_2\rangle(x_o) .$$

Remarque.— Dans les § 3 et 4 la forme de Lévi sera définie sur $i\mathbb{T}^o_{x_o}$; il faut alors supprimer le $\frac{1}{i}$ dans (3).

Notons le résultat récent et profond de M. Kuranishi [17] : *une structure C-R formelle* $(M,\mathbb{T})$, M *de dimension* $2n+1$, $\mathbb{T}$ *de rang* $n \geq 3$, *telle que* $\mathcal{L}_\omega$ *soit pour* $\omega \neq 0$ *définie positive ou définie négative, est localement intégrable.*

2. Le théorème d'approximation

2.1. Le cas "sans équation"

Le résultat suivant est classique (R. Nirenberg et R.O. Wells [21] ; voir aussi [8], [30],...) ; nous l'énonçons, avec la rapide démonstration de M.S. Baouendi et F. Trèves, car il éclaire à notre avis le résultat général du § 2.2.

THÉORÈME 7.— *Soit* $x_o \in \mathbb{R}^n$ *et* $Z_1,\dots,Z_n$ n *fonctions* $\mathcal{C}^\infty$ *telles que* $dZ_1(x_o) \wedge \dots \wedge dZ_n(x_o) \neq 0$. *Il existe un voisinage* U *de* x_o *tel que tout* $u \in \mathcal{C}^k_{comp}(U)$ *(resp.* $\mathcal{E}'(U)$ *) est limite dans* $\mathcal{C}^k(U)$ *(resp.* $\mathcal{D}'(U)$ *) d'une suite de polynômes en* $Z_1(x),\dots,Z_n(x)$.

Démonstration.— Un changement de variables et une transformation linéaire en les Z_j permet de supposer $Z_j(x) = x_j + i\varphi_j(x)$, $j = 1,\dots,n$, avec $\sum_{j=1}^n (\varphi_j(x) - \varphi_j(\tilde{x}))^2 \leq \frac{1}{4n}(x-\tilde{x})^2$ pour tous $x , \tilde{x} \in U$. Posons, pour $u \in \mathcal{C}^o_{comp}(U)$

$$(*) \qquad \mathcal{E}_\tau u(x) = \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{n/2}\int e^{-\tau\sum_{j=1}^n (Z_j(x)-Z_j(\tilde{x}))^2} u(\tilde{x})dZ_1(\tilde{x}) \wedge \dots \wedge dZ_n(\tilde{x}) .$$

La démonstration se dévide comme une preuve bien connue du théorème de Stone-Weierstrass ! L'inégalité au-dessus assure que $\mathcal{E}_\tau u$ converge uniformément vers u lorsque $\tau \longrightarrow +\infty$; pour la convergence dans $\mathcal{C}^k$ on utilise le fait que $L_j\mathcal{E}_\tau = \mathcal{E}_\tau L_j$ où L_j est le champ défini par $\langle L_j,dZ_k\rangle = \delta_{jk}$ ... □

2.2. Le cas général

Voici, avec la formule (4), le résultat principal de ce § :

THÉORÈME 8 (M.S. Baouendi, F. Trèves [4], [28]).— *Soit* $(M,\mathbb{T})$ *une structure R-C définie près de* $x_o \in M$ *par le système* $(dZ_1,\dots,dZ_m)$. *Tout voisinage* U *de* x_o *en contient un autre* U' *tel que toute distribution R-C* $u \in \mathcal{C}^k(U)$ *(resp.* $\mathcal{D}'(U)$ *) est limite dans* $\mathcal{C}^k(U')$ *(resp.* $\mathcal{D}'(U')$ *) d'une suite de polynômes en* $Z_1(x),\dots,Z_m(x)$.

Idée de la preuve.— Soit N une sous-variété de dimension m de M , fortement non caractéristique et passant par x_o . Le choix des coordonnées et une transformation linéaire en les Z_j permet de supposer $M = \mathbb{R}^m_x \times \mathbb{R}^n_y$, $x_0 = (0,0)$, $N : y = 0$ et $Z_j(x,y) = x_j + i\varphi_j(x,y)$ avec $\varphi(0,0) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(0,0)$ et $\sum_{j=1}^m (\varphi_j(x,y) - \varphi_j(\tilde{x},y))^2 \le \frac{1}{4m}(x-\tilde{x})^2$ pour (x,y) , $(\tilde{x},y)$ assez voisins de 0 .

Soit L_j , $j = 1,\dots,n$, les champs définis par $<L_j, dZ_k> = 0$ et $<L_j, dy_k> = \delta_{jk}$; on a $\mathrm{Re}\, L_j(0,0) = \frac{\partial}{\partial y_j}$. D'après un résultat classique d'hypoellipticité partielle, une distribution R-C u sur un voisinage convenable $V \times W$ de $(0,0)$ – c'est une solution de $L_j u = 0$ – possède des traces $u_{|y=y_0}$.

Le théorème 7 s'applique à y fixé et donne, si $g \in \mathcal{D}(V)$ vaut 1 sur $V' \subset\subset V$, $u(x,y) = \lim_{\tau\to+\infty} u_\tau(x,y)$ pour $x \in V'$ et

$$(*) \qquad u_\tau(x,y) = (\tfrac{\tau}{\pi})^{m/2}\int_{V\times\{y\}} e^{-\tau\sum_{j=1}^m (Z_j(x,y)-Z_j(\tilde{x},\tilde{y}))^2} g(\tilde{x})u(\tilde{x},\tilde{y})\,dZ(\tilde{x},\tilde{y}) ,$$

où nous notons dZ pour $dZ_1 \wedge \dots \wedge dZ_m$. Remarquons que

$$(**) \qquad v_\tau(x,y) = (\tfrac{\tau}{\pi})^{m/2}\int_{V\times\{0\}} e^{-\tau\sum_{j=1}^m (Z_j(x,y)-Z_j(\tilde{x},\tilde{y}))^2} g(\tilde{x})u(\tilde{x},\tilde{y})\,dZ(\tilde{x},\tilde{y})$$

est une solution du problème de Cauchy :

$$L_j v_\tau = 0 , \quad j = 1,\dots,n \ ; \quad v_\tau(x,0) = u_\tau(x,0) .$$

Il est donc raisonnable d'espérer qu'au voisinage de 0 , on ait :

$$(4) \qquad u(x,y) = \lim_{\tau\to+\infty} (\tfrac{\tau}{\pi})^{m/2}\int_{V\times\{0\}} e^{-\tau\sum_{j=1}^m (Z_j(x,y)-Z_j(\tilde{x},\tilde{y}))^2} g(\tilde{x})u(\tilde{x},\tilde{y})\,dZ(\tilde{x},\tilde{y}) ,$$

ce qui donnerait le théorème.

Soit $I_\tau(x,y)$ la différence entre (**) et (*) ; la formule de Stokes donne :

$$\begin{aligned} I_\tau(x,y) &= (\tfrac{\tau}{\pi})^{m/2}\int_{V\times[0,y]} d\left(e^{-\tau\sum_{j=1}^m (Z_j(x,y)-Z_j(\tilde{x},\tilde{y}))^2} g(\tilde{x})u(\tilde{x},\tilde{y})\,dZ(\tilde{x},\tilde{y})\right) \\ &= \sum_{k=1}^n (\tfrac{\tau}{\pi})^{m/2}\int_{V\times[0,y]} e^{-\tau\sum_{j=1}^m (Z_j(x,y)-Z_j(\tilde{x},\tilde{y}))^2} L_k(g(\tilde{x})u(\tilde{x},\tilde{y}))\,d\tilde{y}_k \wedge dZ(\tilde{x},\tilde{y}) . \end{aligned}$$

Pour V , W , V' bien choisis, $\mathrm{Re}\sum_{j=1}^m (Z_j(x,y) - Z_j(\tilde{x},\tilde{y}))^2$ est $\ge c > 0$ sur le support de $L_k(gu)(\tilde{x},\tilde{y})$ et donc $I_\tau(x,y) = O(e^{-\tau c/2})$; d'où la formule (4) . □

2.3. Unicité du problème de Cauchy

La formule (4) montre que les structures R-C partagent avec les structures R-C analytiques la propriété d'unicité du problème de Cauchy fortement non caractéristique (dans le cas non intégrable, il y a les contre-exemples de Cohen [7]) et ses extensions géométriques, par exemple, [28] : le support d'une distribution R-C se propage le long des courbes intégrales des champs $\mathrm{Re}L$, pour $L \in \mathbb{L}$. Ceci généralise des résultats de [9] de propagation sur les structures CR.

2.4. Représentation des distributions R-C

Avec les notations de 2.2, soit M_i le champ défini par $<M_i, dy_k> = 0$ et

$\langle M_i, dZ_k\rangle = \delta_{ik}$; M_i est de la forme $M_i(x,y,\frac{\partial}{\partial x})$ et, près de 0 , $\Delta_M = \sum_{i=1}^{m} M_i^2$ est, pour y fixé, un opérateur elliptique en x .

THÉORÈME 9 [28], mêmes hypothèses que dans le théorème 8.— *Tout voisinage* U *de* x_0 *en contient un autre* U' *tel que toute distribution R-C* f *sur* U *soit sur* U' *de la forme* $f = \Delta_M^q u$, *où* u *est une fonction R-C de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* U' .

La preuve, dans ses grandes lignes.— On commence par résoudre $\Delta_M^q v = f$ avec, pour q assez grand, $v \in \mathscr{C}^\infty(W;\mathscr{C}^2(V))$ en utilisant l'ellipticité partielle de Δ_M . On est ainsi ramené à résoudre le système

$$(*)\qquad \Delta_M^q u = 0\ ,\quad L_j u = -L_j v\ ,\quad j = 1,\dots,n\ .$$

Remarquons que Δ_M commute avec les L_j et que c'est l'opérateur induit par $\frac{\partial}{\partial \bar z}$ et $\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2}{\partial z_j^2}$, via le plongement $(x,y) \longmapsto (Z(x,y),y)$. La méthode classique des ouverts emboîtés s'adapte ici et permet de montrer qu'une solution - disons continue - de $\Delta_M^q u = 0$, par exemple les $L_j v$ de (*), est développable en série entière de $Z_1(x,y),\dots,Z_m(x,y)$, à coefficients dépendant de y . Cette propriété permet de chercher, et de trouver, une solution de (*) de cette forme. □

2.5. Application à l'hypoellipticité analytique

Dans la catégorie $\mathscr{C}^\infty$, les arguments esquissés ci-dessous peuvent donner des conditions nécessaires mais pas, du moins de façon simple, des conditions suffisantes d'hypoellipticité $\mathscr{C}^\infty$.

Une structure R-C analytique, définie par un système analytique $(L_1,\dots,L_n)$ est hypoelliptique en x_0 si toute distribution u , telle que $L_j u$, $j = 1,\dots,n$, soit analytique près de x_0 est elle-même analytique près de x_0 . Le lemme 12 ci-dessous et le théorème 9 réduisent la question de l'hypoellipticité à celle de la régularité analytique des fonctions R-C continues, et le théorème 8 réduit cette dernière à la question du prolongement dans le complexe des fonctions R-C analytiques (voir [28]). Contentons-nous ici d'expliciter un exemple ; nous retrouverons plus tard le cas général au niveau microlocal.

Exemple.— Soit u une solution continue près de 0 dans $\mathbb{R}^4$ du système :

$$(*)\qquad \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2} + 2i(x_1+ix_2)\frac{\partial}{\partial x_3}\right)u = \left(\frac{\partial}{\partial x_4} - 2ix_4\frac{\partial}{\partial x_3}\right)u = 0\ .$$

$Z_1(x) = x_1 + ix_2$ et $Z_2(x) = x_3 + i(x_4^2 - x_1^2 - x_2^2)$ sont deux solutions indépendantes de (*) et l'image via (Z_1,Z_2) d'un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^4$ est un voisinage de 0 dans :

$$F = \{(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2\ ,\quad \operatorname{Im} z_2 \geq -|z_1|^2\}$$

Or, u est limite uniforme d'une suite de polynômes $P_k(Z_1(x),Z_2(x))$ et il est bien connu que la suite $P_k(Z_1,Z_2)$, qui converge près de 0 dans F , converge nécessairement près de 0 dans $\mathbb{C}^2$ vers une fonction holomorphe $f(z_1,z_2)$, et $u(x) = f(Z_1(x),Z_2(x))$ est donc analytique près de 0 . □

Cette approche résoud complètement le problème dans le cas suivant :

THÉORÈME 10 (M.S. Baouendi, F. Trèves [3]).— *Soit* $(M;\mathbb{T})$ *une structure R-C analytique définie par le système* (dZ) . *Elle est hypoelliptique en* $x_0 \in M$ *si et seulement si l'image par* Z *de tout voisinage de* x_0 *est un voisinage de* $Z(x_0)$ *dans* $\mathbb{C}$.

La simplicité du cas vient du fait que tout ouvert de $\mathbb{C}$ est d'holomorphie. La condition sur Z ne dépend, dans un complexifié de M , que de l'hypersurface $Z(x) = Z(x_0)$, qui est la feuille intégrale du complexifié de $\mathbb{T}^{\perp}$ (voir théorème 20).

Démonstration.— Pour la suffisance, il suffit de remarquer qu'une limite uniforme sur un ouvert d'une suite de fonctions holomorphes est holomorphe. Pour la nécessité, on se ramène au cas où $Z(x) = x_1 + i\varphi(x_1,x')$; si la condition sur Z de l'énoncé n'est pas vérifiée, on peut choisir un voisinage U de x tel que $Z(U)$ ne coupe pas $]0,i\varepsilon[$ ou $]0,-i\varepsilon[$. Une branche convenable de $Z(x)^{1/2}$ fournit une fonction R-C singulière.

F. Trèves a résolu pour de telles structures, $\mathbb{T}$ analytiques de rang 1 , le problème de la résolubilité $\mathscr{C}^\infty$; il pense d'ailleurs que l'étude du complexe (2') doit être abordable. Nous n'entrerons pas ici dans les difficultés de la démonstration de son :

THÉORÈME 11 (F. Trèves [28]).— *Soit* $(M;\mathbb{T})$ *une structure R-C analytique définie par le système* (dZ) . *Pour que le complexe* (2') *soit exact au cran* 1, *dans les germes en* x_0 , *il faut et il suffit qu'il existe une base* $(U_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *de voisinages de* x_0 , *telle que, pour chaque* j , *les fibres de* $Z_{|U_j}$ *soient connexes dans* U_j .

3. <u>Le problème aux limites</u> (théorie analytique)

Rappels et notations.— $(X,\mathcal{O}_X)$ une variété holomorphe, $X_{\mathbb{R}}$ la variété analytique sous-jacente, $\pi : T^*X \longrightarrow X$ la projection canonique, ω la 1-forme canonique, $\mathcal{D}_X$ (resp. $\mathcal{E}_X$) le faisceau des opérateurs (micro-) différentiels, $\sigma(P)$ le symbole principal d'un opérateur P . Notons que $T^*X \subset \mathbb{C}T^*X_{\mathbb{R}}$ définit la structure complexe de X au sens du § 1. Un système (micro-) différentiel est un $\mathcal{D}_X$-module (resp. $\mathcal{E}_X$-module) cohérent. Nous noterons encore $\mathcal{M}$ le $\mathcal{E}_X$-module $\mathcal{E}_X \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{D}_X} \mathcal{M}$ associé à un $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{M}$ et $\operatorname{supp}\mathcal{M}$ ($\overset{\text{déf}}{=} \operatorname{supp}\mathcal{E}_X \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{D}_X} \mathcal{M}$) sa variété caractéristique. Si

$$(*)\qquad 0 \longleftarrow (\mathcal{M}) \longleftarrow \mathcal{D}_X^{N_0} \longleftarrow \mathcal{D}_X^{N_1} \longleftarrow \dots \longleftarrow \mathcal{D}_X^{N_q} \longleftarrow 0$$

est une résolution projective de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{D}_X$-module, on obtient l'analogue de (2') en appliquant à $(*)$ le foncteur $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(.,\mathcal{F})$; la classe du complexe obtenu

$$(**)\qquad 0 \longrightarrow \mathcal{F}^{N_0} \longrightarrow \mathcal{F}^{N_1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathcal{F}^{N_q} \longrightarrow 0$$

dans la catégorie dérivée de celle des $\mathcal{D}_X$-modules est indépendante de la résolution (*) et notée $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\mathcal{F})$. Ses groupes de cohomologie sont les faisceaux $\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\mathcal{F})$, $j \geq 0$.

L'isomorphisme $\varphi : (T^*X)_{\mathbb{R}} \longrightarrow T^*X_{\mathbb{R}}$ - $\varphi(\vartheta) = \mathrm{Re}\vartheta$ - permet de définir le conormal $T^*_MX = \varphi^{-1}(T^*_MX_{\mathbb{R}})$ dans X à une sous-variété M de $X_{\mathbb{R}}$. Pour une variété analytique M , de complexifiée X , nous noterons $\mathcal{A}_M$, $\mathcal{B}_M$, $\mathcal{C}_M$ les faisceaux des fonctions analytiques et des hyperfonctions sur M et des microfonctions sur T^*_MX . Nous identifierons les opérateurs analytiques sur M aux sections de $\mathcal{D}_{X|M}$ (resp. $\mathcal{E}_{X|T^*_MX}$). Enfin, nous noterons $\mathrm{Car}\,\mathcal{M}$ la variété caractéristique "réelle" d'un système $\mathcal{M}$: $\mathrm{Car}\,\mathcal{M} = \mathrm{Supp}\,\mathcal{M} \cap T^*_MX$.

3.1. Structures R-C et $\mathcal{D}_X$-modules

Une structure R-C holomorphe sur X se définit comme dans 1.1 (fibrés $\mathbb{L}$, $\mathbb{T}$ holomorphes, sections holomorphes ; bien-sûr $\mathbb{C}T^*X = T^*X$ et $\mathbb{C}TX = TX$) ; on lui associe le système $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X/\mathcal{J}$ où $\mathcal{J}$ est l'idéal de $\mathcal{D}_X$ engendré par $\underline{\mathbb{L}}$. Une telle structure est localement isomorphe à celle que définit sur un espace $\mathbb{C}^{n+m}$ un système $(\frac{\partial}{\partial z_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial z_n})$ (théorème de Frobenius) ; on en déduit que $\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\mathcal{O}_X)$ est nul pour $j > 0$ et, par complexification, le :

Lemme 12 (de Poincaré analytique).— *Si* $(M,\mathbb{T})$ *est une structure R-C analytique, la suite* (2) *(sections analytiques) est exacte.*

La définition 4 s'étend aux structures R-C holomorphes (dans ce cas, on dit seulement "non-caractéristique") et est compatible avec les notions générales de morphisme $F : Y \longrightarrow X$ non caractéristique pour un système $\mathcal{M}$ sur X et de système induit $\mathcal{M}_Y$, définies par [S-K-K]. Notons l'extension suivante du théorème de Cauchy-Kovalewsky, d'ailleurs élémentaire lorsque $\mathcal{M}$ est associé à une structure R-C :

THÉORÈME 13 (M. Kashiwara [11]).— *Soit* $F : Y \longrightarrow X$ *non caractéristique pour un système* $\mathcal{M}$ *sur* X . *Il existe un isomorphisme canonique :*

$$F^{-1}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\mathcal{O}_X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y,\mathcal{O}_Y) .$$

3.2. Le $\bar{\partial}_b$ et les systèmes différentiels de Toeplitz

Nous identifierons $X_{\mathbb{R}}$ à la diagonale de $X \times \overline{X}$, $\overline{X}$ étant muni de la structure "antiholomorphe", et ainsi $X \times \overline{X}$ à un complexifié de $X_{\mathbb{R}}$. A la structure complexe de X est associé le système $\mathcal{M}_{\bar{\partial}}$ sur $X \times \overline{X}$. Soit M une sous-variété générique de X et $i : M \longrightarrow X_{\mathbb{R}}$ l'injection. Si Y est un complexifié de M et $I : Y \longrightarrow X$ (submersion), $I^{\mathbb{C}} = Y \longrightarrow X \times \overline{X}$ (immersion) les complexifiés naturels de i , le système $\mathcal{M}_{\bar{\partial}_b}$ associé à la structure C-R induite sur M est le $\mathcal{D}_Y$-module induit par $\mathcal{D}_X$ via I , aussi bien que par $\mathcal{M}_{\bar{\partial}}$ via

$I^{\mathbb{C}}$; I^* induit un isomorphisme de $T^*_M X$ sur $\mathrm{Car}\, \mathcal{M}_{\bar\partial_b}$ (il suffit de revenir aux définitions). Nous ferons l'identification :

(5) $$T^*_M X = \mathrm{Car}\, \mathcal{M}_{\bar\partial_b}$$

et considérerons que les faisceaux $\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{E}_Y}(\mathcal{M}_{\bar\partial_b}, \mathcal{C}_M)$ sont portés par $T^*_M X$.

Soit $\mathcal{C}' = \mathcal{E}nd_{\mathcal{D}_Y} \mathcal{M}_{\bar\partial_b}$ et $\mathcal{C} = \mathcal{E}nd_{\mathcal{E}_Y} \mathcal{M}_{\bar\partial_b}$, munis de la structure d'anneau définie par $a.b = b \circ a$; $\mathcal{M}_{\bar\partial_b}$ est un $\mathcal{C}$-module à droite et les $\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{E}_Y}(\mathcal{M}_{\bar\partial_b}, \mathcal{C}_M)$ sont des $\mathcal{C}$-modules à gauche. Suivant [6], nous appellerons opérateurs de Toeplitz les sections de $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}$. On a des isomorphismes canoniques :

(6) $$\vartheta' : \mathcal{D}_{X|M} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}'_{|M} \quad ; \quad \vartheta : \mathcal{E}_{X|T^*_M X} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_{|T^*_M X}$$

Expression concrète.— $X = \mathbb{C}^n$, M de codimension $n-d$ et $(z_1,\ldots,z_n,\bar w_1,\ldots,\bar w_n)$ les coordonnées canoniques sur $\mathbb{C}^n \times \overline{\mathbb{C}^n}$. On a $\mathcal{M}_{\bar\partial} = \mathcal{D}_{\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n} / \sum_{j=1}^n \mathcal{D}_{\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n} \frac{\partial}{\partial \bar w_j}$. On peut choisir localement $n+d$ champs de vecteurs analytiques sur M , $\vartheta_1,\ldots,\vartheta_d,\ell_1,\ldots,\ell_n$, qui commutent, tels que $\vartheta_1,\ldots,\vartheta_d$ engendrent $\overline{TX} \cap \mathbb{C}TM$ et que $\frac{\partial}{\partial z_j} - \ell_j$ soit antiholomorphe au-dessus de M ; on a :

$$\mathcal{M}_{\bar\partial_b} = \mathcal{D}_Y / \mathcal{J}_{\bar\partial_b} \quad ; \quad \mathcal{J}_{\bar\partial_b} = \sum_{j=1}^d \mathcal{D}_Y \vartheta_j \ .$$

Une section $\widetilde{Q}$ de $\mathcal{C}'$ peut être représentée comme la classe modulo $\mathcal{J}_{\bar\partial_b}$ d'un élément Q de $\mathcal{D}_Y$ vérifiant $\mathcal{J}_{\bar\partial_b} Q \subset \mathcal{J}_{\bar\partial_b}$. ϑ' s'écrit ainsi :

$$\vartheta' : P(z;\tfrac{\partial}{\partial z}) \longmapsto \widetilde{P}(z_{|M};\ell) = P(z_{|M};\ell) \bmod. \mathcal{J}_{\bar\partial_b} \ ,$$

où $P(z;\frac{\partial}{\partial z}) = \sum a_\alpha(z) (\frac{\partial}{\partial z})^\alpha$.

Exemples.— i) $M = \mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$, $Y = \mathbb{C}^n \times \overline{\mathbb{C}^n}$; alors $\mathcal{M}_{\bar\partial_b} = \mathcal{M}_{\bar\partial}$ et $\mathcal{C}' = \mathcal{D}_{\mathbb{C}^n}$.
ii) $M = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{C}^n$; alors $\mathcal{M}_{\bar\partial_b} = \mathcal{D}_{\mathbb{C}^n}$ et $\mathcal{C}' = \mathcal{D}_{\mathbb{C}^n}$.

Remarque 14.— Le cas où la forme de Lévi est non dégénérée. Supposons que la forme de Lévi de M , i.e. muni de la structure C-R associée à $\mathcal{M}_{\bar\partial_b}$, soit non dégénérée en $x^* \in T^*_M X$. Dans ce cas, et dans ce cas seulement, T^*X est au voisinage de x^* un complexifié de $T^*_M X$, cf. [23], $T^*_M X$ (resp. $\mathrm{Car}\, \mathcal{M}_{\bar\partial_b}$) est symplectique pour la 2-forme $\mathrm{Im}\, d\omega_X$ (resp. $\mathrm{Im}\, d\omega_Y$) et l'identification (5) est canonique. Un opérateur $P \in \mathcal{E}_{X|T^*_M X}$ est alors entièrement déterminé (complexification) par la trace sur $T^*_M X$ de son symbole total. Ceci permet d'identifier sans danger $\mathcal{E}_{X|T^*_M X}$ et $\mathcal{C}_{|T^*_M X}$, toujours au voisinage de x^* , ce que nous ferons, et de définir pour les opérateurs de Toeplitz un calcul symbolique, sur $T^*_M X$, tout à fait analogue au calcul symbolique pour les opérateurs microdifférentiels sur $T^*_{\mathbb{R}^n}\mathbb{C}^n$.

3.3. Le problème aux limites

Donnons-nous de plus un système différentiel $\mathcal{M}$ sur X . On lui associe, en "rajoutant les équations de Cauchy-Riemann", le système $\hat{\mathcal{M}} = \mathcal{M}_{\bar\partial} \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}$ sur $X \times \overline{X}$, et sur Y le système $\hat{\mathcal{M}}_Y$, induit, tant par $\mathcal{M}$ via $I : Y \longrightarrow X$, que par $\hat{\mathcal{M}}$ via $I^{\mathbb{C}} : Y \longrightarrow X \times \overline{X}$. On lui associe encore le $\mathcal{C}'$-module $\mathcal{M}_Y = \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_{\bar\partial_b}, \hat{\mathcal{M}}_Y)$; En retour, on a $\hat{\mathcal{M}}_Y = \mathcal{M}_{\bar\partial_b} \otimes_{\mathcal{C}'} \mathcal{M}_Y$.

Concrètement, avec les notations de 3.2, on a, si $\mathcal{M}$ est présenté par :

$$\mathcal{M} \ : \ \sum_{j=1}^{N} P_{ij}(z,\frac{\partial}{\partial z})u_j = 0 \ , \quad i=1,\dots,M \ ;$$

$$\hat{\mathcal{M}} \ : \ \sum_{j=1}^{N} P_{ij}(z,\frac{\partial}{\partial z})u_j = 0 \ , \quad i=1,\dots,M \ ; \quad \frac{\partial}{\partial \bar{w}_k}u_\ell = 0 \ , \quad k=1,\dots,n \ , \quad \ell=1,\dots,N \ ;$$

$$\hat{\mathcal{M}}_Y \ : \ \sum_{j=1}^{N} P_{ij}(z_{|M},\ell)u_j = 0 \ , \quad i=1,\dots,M \ ; \quad \vartheta_k u_\ell = 0 \ , \quad k=1,\dots,d \ , \quad \ell=1,\dots,N \ ;$$

$$\mathcal{M}_Y \ : \ \sum_{j=1}^{N} \widetilde{P}_{ij}(z_{|M},\ell)u_j = 0 \ , \quad i=1,\dots,M \ .$$

Solutions de $\mathcal{M}_Y$ et solutions de $\hat{\mathcal{M}}_Y$. Si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{D}_Y$-module, l'isomorphisme canonique $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\hat{\mathcal{M}}_Y,\mathcal{F}) = \mathcal{H}om_{\mathcal{C}'}(\mathcal{M}_Y,\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_{\bar\partial_b},\mathcal{F}))$ induit un isomorphisme :

$$(7) \qquad \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\hat{\mathcal{M}}_Y,\mathcal{F}) = \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{C}'}(\mathcal{M}_Y,\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_{\bar\partial_b},\mathcal{F})) \ .$$

Solutions de $\mathcal{M}$ et solutions de $\hat{\mathcal{M}}_Y$. Notons $\omega_{M|X}$ le faisceau des orientations relatives de M dans X , $\pi_{M|X} : (X\backslash M) \sqcup T^*_M X \longrightarrow X$ la projection canonique, le premier membre étant muni de la topologie de co-éclaté, et a l'application antipodale. Nous pouvons enfin ! énoncer le résultat important suivant :

THÉORÈME 15 (M. Kashiwara, T. Kawaï [12]).— *Soit* M *une sous-variété générique de* X *,* Y *un complexifié de* M *,* $\mathcal{M}$ *un système sur* X *et* $\hat{\mathcal{M}}_Y$ *le système induit. On a des isomorphismes :*

(i) $\quad \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\hat{\mathcal{M}}_Y,\mathcal{A}_M) = \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\mathcal{O}_X)_{|M}$;

(ii) $\quad \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\hat{\mathcal{M}}_Y,\mathcal{B}_M)[-\operatorname{codim}_X M] = \mathbb{R}\Gamma_M\, \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\mathcal{O}_X) \otimes \omega_{M|X}$;

(iii) $\quad \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_Y}(\hat{\mathcal{M}}_Y,\mathcal{C}_M)[-\operatorname{codim}_X M] = \mathbb{R}\Gamma_{T^*_M X}(\pi^{-1}_{M|X}(\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\mathcal{O}_X))^a \otimes \omega_{M|X}$.

Indications sur la preuve.— C'est un cas particulier des résultats de [12] sur le problème aux limites pour les systèmes elliptiques. On peut toutefois le déduire (voir S. Tagima [25]) de l'isomorphisme (i), qui résulte du théorème 13 et de la définition cohomologique des hyperfonctions et des microfonctions. □

Dans le cas des structures R-C, $\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\mathcal{O}_X)$ est nul pour $j > 0$, d'où le :

COROLLAIRE 16.— *On suppose de plus* $\mathcal{M}$ *associé à une structure R-C holomorphe sur* X *. Soit* $\mathcal{O}'_X$ *le faisceau des fonctions holomorphes R-C ; on a :*

(ii) $\quad \mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_Y}(\hat{\mathcal{M}}_Y,\mathcal{B}_M) = \mathcal{H}^{j+\operatorname{codim}_X M}_M(\mathcal{O}'_X) \otimes \omega_{M|X}$, $\quad j \geq 0$;

(iii) $\quad \mathcal{E}xt^j_{\mathcal{E}_Y}(\hat{\mathcal{M}}_Y,\mathcal{C}_M) = \mathcal{H}^{j+\operatorname{codim}_X M}_{T^*_M X}(\pi^{-1}_{M|X}\mathcal{O}'_X)^a \otimes \omega_{M|X}$, $\quad j \geq 0$.

La cohomologie à support dans (ii), (iii) n'est pas nécessairement facile à calculer ; on peut toutefois se faire une représentation "valeur au bord" de (iii) dans le cas suivant :

3.4. Un exemple fondamental

Soit $\Omega : f(z,\bar{z}) < 0$ un ouvert strictement pseudo-convexe de $\mathbb{C}^n$ à frontière analytique M , $x \in M$ et $x^* = (x, \frac{\partial f}{\partial z}(x,\bar{x})) \in T^*_M X$. Choisissons $\mathcal{M}: \frac{\partial u}{\partial z_1} = \ldots = \frac{\partial u}{\partial z_p} = 0$, $\mathcal{O}' = \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\mathbb{C}^n}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$; (iii) s'écrit :

$$\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{E}_Y}(\hat{\mathcal{M}}_Y, \mathcal{C}_M)_{x^*} = \varinjlim_{U \ni x} H^{j+1}_{U \cap \complement\Omega}(\mathcal{O}') .$$

On en déduit (suite de Mayer-Vietoris et nullité de $H^j(U,\mathcal{O}')$ pour U convexe, $j \geq 1$) :

$$(*) \qquad \begin{cases} \mathcal{H}om_{\mathcal{E}_Y}(\hat{\mathcal{M}}_Y, \mathcal{C}_M)_{x^*} = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{O}'(U \cap \Omega)/\mathcal{O}'(U) , \\ \mathcal{E}xt^j_{\mathcal{E}_Y}(\hat{\mathcal{M}}_Y, \mathcal{C}_M)_{x^*} = \varinjlim_{U \ni x} H^j(U \cap \Omega, \mathcal{O}') , \quad j \geq 1 . \end{cases}$$

La première égalité traduit l'hypoellipticité de $\hat{\mathcal{M}}_Y$ en x^* en termes de prolongement à travers M des fonctions holomorphes dans $U \cap \Omega$, indépendantes de $z_1, \ldots, z_p$. Lorsque Ω est strictement pseudoconvexe, $H^j(U \cap \Omega, \mathcal{O})$ est nul pour $j \geq 1$ et U convexe ; on en déduit que $H^j(U \cap \Omega, \mathcal{O}')$ est le j-ième groupe de cohomologie du complexe associé au système $(\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_p})$:

$$\mathcal{O}(\Omega \cap U) \longrightarrow \mathcal{O}(\Omega \cap U) \otimes \Lambda^1 \mathbb{C}^p \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathcal{O}(\Omega \cap U) \otimes \Lambda^p \mathbb{C}^p \longrightarrow 0 .$$

Autrement dit l'étude microlocale de $\hat{\mathcal{M}}_Y$ en x^* est "ramenée" à l'étude globale de $(\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_p})$ dans les ouverts d'holomorphie $U \cap \Omega$. Pour $p = 0$, on obtient $\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{E}_Y}(\mathcal{M}_{\bar\partial_b}, \mathcal{C}_M) = 0$ pour $j \geq 1$ et le faisceau $\tilde{\mathcal{C}}_M$ des solutions du $\bar\partial_b$ est donné par $\tilde{\mathcal{C}}_{M,x^*} = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{O}(\Omega \cap U)/\mathcal{O}(U)$. L'analogue microlocal de la formule (7) permet d'en déduire :

$$(8) \qquad \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}}(\mathcal{M}_Y, \tilde{\mathcal{C}}_M)_{x^*} = \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_Y}(\hat{\mathcal{M}}_Y, \mathcal{C}_M)_{x^*} .$$

Remarque.— A. Andreotti et C. Denson Hill [1], ont prouvé des théorèmes de représentation, du type (*), pour la cohomologie $\mathcal{C}^\infty$ du $\bar\partial_b$ sur une hypersurface $\mathcal{C}^\infty$ et les ont appliqués à l'étude du $\bar\partial_b$ (pour l'étude du $\bar\partial_b$ sur une sous-variété C-R de codimension supérieure, en relation avec la signature de la forme de Lévi, voir [2], [19] et [S-K-K], ch. 3).

4. Transformations canoniques complexes

4.1. Systèmes de Lewy-Mizohata

Le système de Lewy-Mizohata $\mathcal{M} = \mathcal{M}(n-d; d-p, p)$ de codimension $(n-d)$, signature $(d-p, p)$ est le $\mathcal{E}_{\mathbb{C}^{n+d}}$-module défini par les équations :

$$(*) \qquad \begin{cases} Q_j u = (\frac{\partial}{\partial x_{j+n}} + i x_{j+n} \frac{\partial}{\partial x_n}) u = 0 , \quad j = 1, \ldots, p , \\ Q_j u = (\frac{\partial}{\partial x_{j+n}} - i x_{j+n} \frac{\partial}{\partial x_n}) u = 0 , \quad j = p+1, \ldots, d . \end{cases}$$

sur l'ouvert $\eta_n > 0$ de $T^*_{\mathbb{R}^{n+d}} \mathbb{C}^{n+d}$. Le complexe associé s'écrit :

$$(**) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{R}^{n+d}} \otimes \Lambda^0 \mathbb{C}^d \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}_{\mathbb{R}^{n+d}} \otimes \Lambda^1 \mathbb{C}^d \longrightarrow \ldots \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}_{\mathbb{R}^{n+d}} \otimes \Lambda^d \mathbb{C}^d \longrightarrow 0 .$$

Identifions, par $h : (x', x_n; i\eta', i\eta_n) \longmapsto (x', x_n, 0, i\eta', i\eta_n, 0)$ l'ouvert $\eta_n > 0$ de $T^*_{\mathbb{R}^n} \mathbb{C}^n$ à la variété caractéristique Σ^+ de $\mathcal{M}$. Sur $T^*_{\mathbb{R}^{n+d}} \mathbb{C}^{n+d}$, l'anneau $\mathcal{C} = \mathcal{E}nd_{\mathcal{E}_{\mathbb{C}^{n+d}}} \mathcal{M}$ est porté par Σ^+ et, $\mathcal{J}$ étant l'idéal engendré par les Q_j , on voit aisément que

$$H : P(x',x_n;\frac{\partial}{\partial x'},\frac{\partial}{\partial x_n}) \longmapsto P(x',x_n - \frac{i}{2}\sum_{j=n+1}^{n+p} x_j^2 + \frac{i}{2}\sum_{j=n+p+1}^{n+d} x_j^2;\frac{\partial}{\partial x'},\frac{\partial}{\partial x_n}) \text{ modulo } \mathcal{J}$$

induit un isomorphisme :

$$H : \mathcal{E}_{\mathbb{C}^n}|_{\Sigma+} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}|_{\Sigma+}$$

On démontre ([S-K-K], ch. 3) que la suite (**) est exacte, sauf au cran p , et qu'on a un isomorphisme, compatible avec H (i.e. : $\widetilde{H}(Pu) = H(P)\widetilde{H}(u)$) :

$$\widetilde{H} : \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}|_{\Sigma+} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}xt^p_{\mathcal{E}_{\mathbb{C}^{n+d}}}(\mathcal{M},\mathcal{C}_{\mathbb{R}^{n+d}})|_{\Sigma+} .$$

$\widetilde{H}$ associe à $u(x',x_n)$ la classe de

$$\delta(x_{n+1},\ldots,x_{n+p}) \otimes u(x',x_n + \frac{i}{2}\sum_{j=n+p+1}^{n+d} x_j^2)e_1 \wedge \ldots \wedge e_p \quad \text{modulo } \delta(\mathcal{C}_{\mathbb{R}^{n+d}} \otimes \Lambda^{p-1}\mathbb{C}^d) ,$$

où le "changement de variable" dans u, défini par un opérateur intégral à phase complexe, prend un sens très concret lorsqu'on écrit u comme valeur au bord de fonction holomorphe.

Remarque.— Dans la catégorie $\mathcal{C}^\infty$, une étude analogue est faite par L. Boutet de Monvel et V. Guillemin dans [6]. $\widetilde{H}$ y est défini comme un opérateur d'Hermite ; la construction de H y est plus délicate, puisqu'on ne dispose plus du prolongement holomorphe.

4.2. Structures C-R non dégénérées

Soit maintenant M une sous-variété générique de $\mathbb{C}^n$, de codimension $n-d$ et $x^* \in T^*_M\mathbb{C}^n = \mathrm{Car}\,\mathcal{M}_{\bar\partial_b}$ (notation du § 3). On suppose que la forme de Lévi de M en x^* est non dégénérée de signature $(d-p,p)$. On a le résultat décisif suivant :

THÉORÈME 17 ([S-K-K], ch. 3).— *Sous les hypothèses précédentes, il existe une transformation canonique réelle quantifiée* $(\psi,\Psi,\widetilde{\Psi})$ *définie au voisinage de* $x^* \in T^*_MY$ *et qui échange le système* $\mathcal{M}_{\bar\partial_b}$ *avec le système* $\mathcal{M}(n-d;d-p,p)$.

Ce théorème est encore vrai dans la catégorie $\mathcal{C}^\infty$ (L. Boutet de Monvel [5] ; voir aussi M. Kuranishi [16]).

4.3. Quantification

En regroupant les résultats précédents, on obtient le :

THÉORÈME 18 (M. Kashiwara, T. Kawaï [13]).— *Soit* M *une sous-variété générique de* $\mathbb{C}^n$ *, de codimension* $n-d$ *; on suppose la forme de Lévi de* $\mathcal{M}_{\bar\partial_b}$ *en* $x_o^* \in T^*_M\mathbb{C}^n$ *non dégénérée de signature* $(d-p,p)$ *et l'on note* $\widetilde{\mathcal{C}}_M = \mathcal{E}xt^p_{\mathcal{E}_Y}(\mathcal{M}_{\bar\partial_b},\mathcal{C}_M)$.

Si φ *est une transformation canonique complexe définie au voisinage de* $x^* \in T^*_{\mathbb{R}^n}\mathbb{C}^n$*, qui échange* x_o^* *avec* x^* *et (au voisinage)* $T^*_{\mathbb{R}^n}\mathbb{C}^n$ *avec* $T^*_M\mathbb{C}^n$*, et si :*

$$\Phi : \mathcal{E}_{\mathbb{C}^n} \xrightarrow{\sim} \varphi^{-1}\mathcal{E}_{\mathbb{C}^n}$$

est une quantification de φ *, il existe (localement) un isomorphisme :*

$$\widetilde{\Phi} : \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n} \xrightarrow{\sim} \varphi^{-1}\widetilde{\mathcal{C}}_M$$

compatible avec Φ (*cf. Remarque* 14) : $\widetilde{\Phi}(Pu) = \Phi(P)\widetilde{\Phi}(u)$.

Démonstration.— Il suffit de construire un triplet $(\varphi',\Phi',\tilde{\Phi}')$ vérifiant les conditions de l'énoncé, car alors, si $\tilde{G} : \mathcal{E}_{\mathbb{R}^n} \longrightarrow \varphi'^{-1} \circ \varphi \mathcal{E}_{\mathbb{R}^n}$ est une quantification de la transformation canonique *réelle* $(\varphi'^{-1} \circ \varphi, \Phi'^{-1} \circ \Phi)$, $\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}' \circ \tilde{G}$ répondra à la question. En composant les triplets $(h,H,\tilde{H})$ de 4.1 et $(\psi,\Psi,\tilde{\Psi})$ de 4.2, on obtient une transformation canonique (pour $\operatorname{Im} d\omega$), près de $(0;0,\ldots,0,i)$:

$$\varphi'' : T^*_{\mathbb{R}^n}\mathbb{C}^n \longrightarrow T^*_M\mathbb{C}^n$$

et des isomorphismes compatibles :

$$\Phi'' : \mathcal{E}_{\mathbb{C}^n}|_{T^*_{\mathbb{R}^n}\mathbb{C}^n} \xrightarrow{\sim} (\varphi'')^{-1}\mathcal{E}_{\mathbb{C}^n}|_{T^*_M\mathbb{C}^n} , \quad \tilde{\Phi}'' : \mathcal{E}_{\mathbb{R}^n} \xrightarrow{\sim} (\varphi'')^{-1}\tilde{\mathcal{E}}_M$$

où (remarque 14) $\sigma(\Phi''(P)) = \sigma(\Psi \circ H(P))|_{T^*_M\mathbb{C}^n} = \sigma(P) \circ (\varphi'')^{-1}$. On choisit pour $\varphi' : T^*\mathbb{C}^n \longrightarrow T^*\mathbb{C}^n$ le complexifié de φ'' ; Φ'' est la restriction à $T^*_{\mathbb{R}^n}\mathbb{C}^n$ d'une quantification de φ' , $\Phi' : \mathcal{E}_{\mathbb{C}^n} \xrightarrow{\sim} (\varphi')^{-1}\mathcal{E}_{\mathbb{C}^n}$ (l'isomorphisme Θ^{-1} du § 3 s'étend en un isomorphisme $\mathcal{C} \longrightarrow \varkappa^{-1}\mathcal{E}_X$ où $\varkappa : \operatorname{Supp} \mathcal{M}_{\bar{\partial}_b} \simeq Y \times_X T^*X \longrightarrow T^*X$ est la projection canonique ; nous avons omis de le signaler). Le triplet $(\varphi',\Phi',\tilde{\Phi}' = \tilde{\Phi}'')$ a toutes les propriétés voulues. □

Applications.— Ce théorème montre qu'il y a une "équivalence de catégorie" entre les systèmes microdifférentiels sur $\mathbb{R}^n$ et les systèmes microdifférentiels de Toeplitz sur M . Ce point de vue a été utilisé pour la première fois par M. Kashiwara, T. Kawaï et T. Oshima [14], (1974) dans l'étude d'une classe d'opérateurs à caractéristiques doubles ; pour d'autres applications, voir M. Kashiwara et P. Schapira [15], P. Schapira [23], et J.-M. Trépreau [26], [27].

4.3. Représentation des systèmes à caractéristiques simples

Un système de type principal est un système à un générateur $\mathcal{E}_X u = \mathcal{E}_X/\mathcal{J}$ de support Λ lisse et régulier $(\omega_{|\Lambda} \neq 0)$ et dont l'idéal des symboles $J = \{p \in \mathcal{O}_{T^*X} , \exists\, P \in \mathcal{J} , \sigma(P) = p\}$ est réduit. On peut toujours présenter un tel système, localement et pour un bon choix de u , par des équations $P_1u = \ldots = P_du = 0$, avec $[P_j,P_k] = 0$ et $d\sigma(P_1) \wedge \ldots \wedge d\sigma(P_d) \wedge \omega \neq 0$.

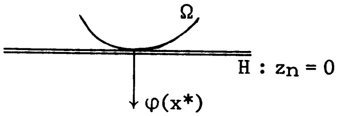
THÉORÈME 19.— *Soit* $\mathcal{M}$ *un système de type principal au voisinage de* $x^* \in T^*_{\mathbb{R}^n}\mathbb{C}^n\backslash 0$, p *la codimension de* $\operatorname{Supp} \mathcal{M}$. *Il existe une transformation canonique complexe quantifiée* (φ,Φ) *au voisinage de* x^* *qui échange* $\mathcal{M}$ *avec le système* $\mathcal{M}_0 = \mathcal{E}_{\mathbb{C}^n}/\sum_{j=1}^{p}\mathcal{E}_{\mathbb{C}^n}\frac{\partial}{\partial z_j}$ *et* $T^*_{\mathbb{R}^n}\mathbb{C}^n$ *avec le conormal extérieur* $\Sigma^+ = (T^*_M\mathbb{C}^n)^+$ *à la frontière* $M = \partial\Omega$ *d'un ouvert strictement pseudoconvexe* Ω .

Compte tenu du théorème 18, l'étude microlocale du système $\mathcal{M}$ est ramenée à l'étude de l'exemple fondamental 3.4. Ce théorème est appliqué dans [26], [27] à l'étude des opérateurs de type principal. Donnons l'application simple suivante (obtenue en collaboration avec P. Schapira), qui constitue l'analogue microlocal du théorème 10.

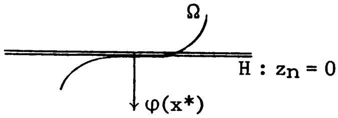
THÉORÈME 20.— *Soit* $\mathcal{M}$ *un système de type principal au voisinage de* $x^* \in T^*_{\mathbb{R}^n}\mathbb{C}^n\backslash 0$.

On suppose $x^* \in \operatorname{Supp} \mathcal{M}$ *et que* $\operatorname{Supp} \mathcal{M}$ *est de codimension* $n-1$. *Pour que* $\mathcal{M}$ *soit hypoelliptique en* x^* (*i.e.* $\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_{\mathbb{C}^n}}(\mathcal{M},\mathcal{C})_{x^*} = 0$), *il faut et il suffit que la variété lagrangienne* Λ , *réunion des feuilles bicaractéristiques de* $\operatorname{Supp} \mathcal{M}$ *issues des points* kx^* ($k \in \mathbb{C}$ *voisin de* 1), *ne soit pas positive par rapport à* $T^*_{\mathbb{R}^n}\mathbb{C}^n$ *en* x^* .

Démonstration.— La notion de positivité (A. Melin et J. Sjöstrand [18]) est invariante par transformation canonique complexe. Soit φ une transformation comme dans le théorème 19, dont nous conservons les notations : φ transforme $T^*_{\mathbb{R}^n}\mathbb{C}^n$ en $(T^*_M\mathbb{C}^n)^+$ et Λ en $T^*_H\mathbb{C}^n$ où H est l'hypersurface complexe $z_n = 0$ (nous supposons que $\varphi(x^*)$ est le point $(0;0,\dots,0,1)$). Or (cf. [23]) $T^*_H\mathbb{C}^n$ est positif par rapport à $(T^*_M\mathbb{C}^n)^+$ en $(0;0,\dots,0,1)$ si et seulement si H ne rencontre pas Ω au voisinage de 0 :



$(\Lambda;T^*_{\mathbb{R}^n}\mathbb{C}^n)$ *positif*



$(\Lambda;T^*_{\mathbb{R}^n}\mathbb{C}^n)$ *non positif*

Dans le premier cas, $\dfrac{1}{z_n}$ définit une solution singulière de $\mathcal{M}_0 : \dfrac{\partial u}{\partial z_1} = \dots = \dfrac{\partial u}{\partial z_{n-1}} = 0$. Dans le second, il est clair que toute fonction holomorphe $u(z_n)$ près de 0 dans Ω se prolonge au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^n$. □

<u>Géométrie I-R-symplectique</u> (cf. P. Schapira [23]). Si $(E,d\omega)$ est un espace symplectique complexe de dimension n , $E_{\mathbb{R}}$ est muni des formes symplectiques $\operatorname{Re} d\omega$ et $\operatorname{Im} d\omega$. Un sous-espace Σ de $E_{\mathbb{R}}$, lagrangien pour $\operatorname{Re} d\omega$ et symplectique pour $\operatorname{Im} d\omega$ (en bref I-R-symplectique) vérifie $E = \Sigma \oplus i\Sigma$ et l'on peut définir la conjugaison $u \mapsto \overline{u}^{\Sigma}$ par rapport à Σ . La formule $\gamma_\Sigma(u,v) = d\omega(u,\overline{v}^{\Sigma})$ définit sur E une forme hermitienne de signature (n,n) . Si L est une lagrangienne de E , $N = \Sigma \cap L$, γ_Σ induit une forme hermitienne sur $L/\mathbb{C}N$, notée $\gamma_{\Sigma|L/\mathbb{C}N}$. On dispose du critère suivant :

$\widetilde{\Sigma}$ *une sous-variété I-R-symplectique homogène de* $T^*\mathbb{C}^n$, $x^* \in \widetilde{\Sigma}$, $x = \pi(x^*)$ *et* Σ , L , N *les espaces tangents en* x^* *à* $\widetilde{\Sigma}$, $T^*_{\{x\}}\mathbb{C}^n$ *et* $\mathbb{R}x^*$ *; pour que* $\widetilde{\Sigma}$ *soit au voisinage de* x^* *le conormal extérieur à la frontière d'un ouvert strictement pseudoconvexe, il faut et il suffit que* $L \cap \Sigma = N$ *et que* $\gamma_{\Sigma|L/\mathbb{C}N}$ *soit définie positive.*

Démonstration du théorème 19.— L'existence de φ telle que

$$\varphi(\operatorname{Supp} \mathcal{M}) = \operatorname{Supp} \mathcal{M}_0 : \zeta_1 = \dots = \zeta_p = 0$$

est classique. Compte tenu de la structure des systèmes de type principal et de support $\zeta_1 = \dots = \zeta_p = 0$, il suffit de prouver le

Lemme.— *Soit* $\widetilde{\Sigma}$ *une sous-variété I-R-symplectique homogène de* $T^*\mathbb{C}^n$,

$\Lambda : \zeta_1 = \ldots = \zeta_p = 0$ $(p < n)$ *et* $y^* \in \Sigma \cap \Lambda$ *non nul ; il existe une transformation paraboloïde* φ *définie près de* y^* *telle que* $\varphi(\Lambda) = \Lambda$ *et que* $\varphi(\widetilde{\Sigma})$ *soit le conormal extérieur dans* $\mathbb{C}^n$ *à la frontière d'un ouvert strictement pseudoconvexe.*

Démonstration.— On peut supposer $y^* = (0;0,\ldots,0,1)$; soit $E = T_{y^*}T^*\mathbb{C}^n$, $\Sigma = T_{y^*}\widetilde{\Sigma}$, $(e_1,\ldots,e_n,f_1,\ldots,f_n)$ la base canonique de E, $N = \mathbb{R}f_n = T_{y^*}(\mathbb{R}^+y^*)$ et $L_1 = \mathbb{C}e_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}e_n$. Si $L_2 \subset N^\perp$ est une lagrangienne telle i) $L_2 \cap \Sigma = N$, ii) $\gamma_{\Sigma|L_2/\mathbb{C}N}$ est définie positive et iii) $E = L_1 \oplus L_2$, L_2 peut s'écrire :

$$L_2 = \mathbb{C}(f_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\lambda_1^k e_k) \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}(f_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1}\lambda_{n-1}^k e_k) \oplus \mathbb{C}f_n \qquad (\lambda_j^k = \lambda_k^j)$$

et, compte tenu du critère ci-dessus, la transformation paraboloïde φ :

$$\varphi(z,\zeta) = (z_1 - \sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k^1\zeta_k\zeta_n^{-1},\ldots,z_n + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n-1}\lambda_k^j\zeta_j\zeta_k\zeta_n^{-2};\zeta_1,\ldots,\zeta_n)$$

convient. L'existence de L_2 vérifiant i), ii), iii) est réduite, si l'on se place dans l'espace symplectique $N^\perp/\mathbb{C}N$, à l'assertion élémentaire :
si $(e,d\omega)$ *est un espace symplectique complexe,* σ *un sous-espace I-R-symplectique et* ℓ_1 *un plan lagrangien, il existe un plan lagrangien* ℓ_2 *tel que* $e = \ell_1 \oplus \ell_2$, $\ell_2 \cap \sigma = 0$ *et* $\gamma_{\sigma|\ell_1}$ *soit définie positive.* □

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. ANDREOTTI, C.D. HILL - *E.E. Levi Convexity and the H. Lewy problem, I, II,* Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 26(1972), 323-363 et 747-806.

[2] A. ANDREOTTI, G. FREDRICKS and M. NACINOVITCH - *On the absence of Poincaré lemma in Tangential Cauchy-Riemann complexes,* Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa (1981).

[3] M.S. BAOUENDI, F. TRÈVES - *A local constancy principle for the solutions of certain overdetermined systems of first order linear P.D.E,* Vol. in Honour of L. Schwartz, Adv. in Maths, North-Holland (1981).

[4] M.S. BAOUENDI, F. TRÈVES - *A property of the functions and distributions annihilated by a locally integrable system of complex vector fields,* Ann. Math. 113(1981), 341-421.

[5] L. BOUTET de MONVEL - *Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudodifferential operators,* Comm. Pure Appl. Math. 27(1974), 585-639.

[6] L. BOUTET de MONVEL, V. GUILLEMIN - *The spectral theory of Toeplitz operators,* Ann. of Math. Studies (1981).

[7] L. HÖRMANDER - *Linear Partial Differential Operators*, Grundl. Math. Wiss. Band 116, Springer, Berlin (1963).

[8] L. HÖRMANDER - *Approximation on compact sets in* $\mathbb{C}^n$, Math. Scand. 23(1968), 5-21.

[9] L.R. HUNT, J.C. POLKING, M.J. STRAUSS - *Unique continuation of solutions of the induced Cauchy-Riemann equations*, Jour. of Diff. Equ. 23(1977), 436-447.

[10] H. JACOBOWITZ, F. TRÈVES - *Non realizable C-R structures*, (preprint).

[11] M. KASHIWARA - *Algebraic study of systems of P.D.E*, Thèse Univ. Tokyo (1970) (en japonais), et *Systèmes d'équations microdifférentielles*, Publ. de l'Univ. Paris-Nord (1978) (Notes de T. Monteiro-Fernandes).

[12] M. KASHIWARA, T. KAWAÏ - *On the boundary value problem for elliptic systems of linear differential operators I, II*, Proc. Japan Ac. 48(1972), 712-715, et 49(1973), 164-168.

[13] M. KASHIWARA, T. KAWAÏ - *Some applications of boundary value problems for elliptic systems of linear differential equations*, in Ann. of Math. Studies n° 93(1980).

[14] M. KASHIWARA, T. KAWAÏ, T. OSHIMA - *Structure of cohomology groups whose coefficients are microfunction solution sheaves of pseudodifferential equations with multiple characteristics I, II*, Proc. Japan Ac. 50 (1974), 420-425 et 549-550.

[15] M. KASHIWARA, P. SCHAPIRA - *Microhyperbolic systems*, Acta Math. 142(1979), 1-55.

[16] M. KURANISHI - *On the equivalence of symbols of non degenerate CR structures*, Comm. Pure App. Math. 33(1978), 1-21.

[17] M. KURANISHI - *Strongly pseudoconvex CR structures over small balls III*, preprint.

[18] A. MELIN, J. SJÖSTRAND - *Fourier integral operators with complex valued phase function*, Lect. Notes in Maths. n° 459, Springer (1975), 120-223.

[19] I. NARUKI - *A localization principle for differential complexes and its applications*, Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ. 8(1972), 43-110.

[20] L. NIRENBERG - *On a question of Hans Lewy*, Uspekhi, English Transl. (1973), 251-262.

[21] R. NIRENBERG, R.O. WELLS Jr -*Approximation theorems on differentiable submanifolds of a complex manifold*, Trans. Amer. Math. Soc. 142(1969), 15-35.

[22] P. PALLU de la BARRIÈRE - *Existence et prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles*, J. Math. Pure et Appl. 55(1976), 21-46.

[S-K-K] M. SATO, T. KAWAÏ, M. KASHIWARA - *Hyperfunctions and Pseudodifferential Equations*, in Lect. Notes in Math. n° 287, Springer 1973, 265-529.

[23] P. SCHAPIRA - *Condition de positivité dans une variété symplectique complexe. Application à l'étude des microfonctions*, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 14(1981), 121-139.

[24] J. SJÖSTRAND - *Singularités analytiques microlocales*, Publ. Univ. Paris-Sud (1981).

[25] S. TAGIMA - *Analyse microlocale sur les variétés de Cauchy-Riemann et problème du prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles*, preprint.

[26] J.-M. TRÉPREAU - *Sur la régularité analytique des opérateurs de type principal*, C.R. Acad. Sc. Paris, 293(1981), Série 1, 561-564.

[27] J.-M. TRÉPREAU - *Sur la résolubilité microlocale des opérateurs analytiques de type principal*, en préparation.

[28] F. TRÈVES - *Approximation and representation of functions and distributions annihilated by a system of complex vector fields*, Publ. de l'Ecole Polytechnique (1981).

[29] F. TRÈVES - *On the local solvability and the local integrability of systems of vector fields*, preprint.

[30] R.O. WELLS Jr - *Function theory of differentiable submanifolds*, Contribution to Analysis, a collection of papers dedicated to Lipman Bers, Acad. Press New York (1974), 407-441.

[31] M.S. BAOUENDI, C.H. CHANG, F. TRÈVES - *Microlocal hypo-analyticity and extensions of CR functions*, preprint.

Jean-Marie TRÉPREAU

Université de Reims
U.E.R. de Mathématiques
Moulin de la Housse
B.P. 347
F-51062 REIMS CEDEX