JEAN LANNES

La conjecture des immersions

Astérisque, tome 92-93 (1982), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 594, p. 331-346
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1981-1982__24__331_0>

Séminaire BOURBAKI
34e année, 1981/82, n° 594 Juin 1982

LA CONJECTURE DES IMMERSIONS
[d'après R.L. Cohen, E.H. Brown, F.P. Peterson et al.]

par Jean LANNES

Le problème considéré dans ce rapport est le suivant : soit n un entier, quel est le plus petit entier $k(n)$ tel que toute variété X de dimension n, C^∞, compacte sans bord, s'immerge dans l'espace euclidien de dimension $n+k(n)$?

0. Préhistoire du problème et origine de la conjecture des immersions

La position générale donne l'inégalité $k(n) \leq n$. En 1944, H. Whitney [16] montre l'inégalité $k(n) \leq n-1$ $(n \geq 2)$. Par la méthode employée par Whitney on obtient en fait le résultat plus général que voici : soient Y^{2n-1} une variété sans bord de dimension $2n-1$ et $f : X^n \longrightarrow Y^{2n-1}$ une application continue alors f est homotope à une immersion. Rappelons brièvement cette méthode. Toujours par un argument de position générale on peut supposer que f est une application C^∞ qui est une immersion sauf en un nombre fini de points singuliers d'un type bien particulier (parapluie de Whitney), ces points sont en nombre pair et on les élimine deux par deux en déformant f par homotopie.

La théorie des immersions de la fin des années 50 va permettre d'attaquer le problème sous un autre angle. Considérons une immersion $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ alors le fibré normal ν_f de cette immersion est un fibré vectoriel de dimension k qui est sous-jacent au fibré normal stable ν_X de X ; les travaux de M. Hirsch [11] consécutifs à ceux de S. Smale [14] montrent que la réciproque est vraie : X s'immerge dans $\mathbb{R}^{n+k}$ si et seulement si le fibré normal stable ν_X de X se réduit à la dimension k $(k \geq 1)$. A partir de ce moment là le problème quittait le domaine de la topologie différentielle pour entrer dans celui de la topologie algébrique.

Une condition nécessaire pour que ν_X se réduise à la dimension k est que les classes de Stiefel-Whitney $w_i(\nu_X)$ soient nulles pour $i > k$, aussi est-on amené à se poser la question suivante : quel est le plus petit entier $k'(n)$ tel que, pour toute variété X, C^∞, compacte sans bord, de dimension n, $w_i(\nu_X) = 0$ pour $i > k'(n)$? La réponse est donnée en 1960 par W. Massey [13] :

$k'(n) = n - \alpha(n)$, $\alpha(n)$ désignant le nombre de 1 dans l'écriture dyadique de n . Pour montrer l'inégalité $k'(n) \geq n - \alpha(n)$ on écrit

$$n = 2^{p_1} + 2^{p_2} + \ldots + 2^{p_r}$$

avec $0 \leq p_1 < p_2 < \ldots < p_r$ (si bien que $\alpha(n) = r$) et on considère le produit d'espaces projectifs réels

$$X = \mathbb{R}P^{2^{p_1}} \times \mathbb{R}P^{2^{p_2}} \times \ldots \times \mathbb{R}P^{2^{p_r}}$$

on vérifie facilement que la classe $w_{n-\alpha(n)}(\nu_X)$ est non nulle. On a donc du même coup l'inégalité $k(n) \geq n - \alpha(n)$.

Je pense qu'il faut faire remonter au papier de Massey cité ci-dessus la naissance de la conjecture des immersions dont voici l'énoncé :

CONJECTURE A.— *Toute variété,* C^∞ *, compacte sans bord, de dimension* n *s'immerge dans l'espace euclidien de dimension* $2n - \alpha(n)$ $(n \geq 2)$.
Ou sous une forme équivalente

CONJECTURE B.— *Le fibré normal stable de toute variété,* C^∞ *, compacte sans bord, de dimension* n *, se réduit à la dimension* $n - \alpha(n)$.

Cette naissance est difficile à dater, en 1960 cette conjecture n'est pas formulée explicitement dans le papier de Massey, en 1970 plusieurs auteurs la qualifient de classique.

R.L. Cohen vient de donner une preuve de la conjecture des immersions, conjecture dont on va vous conter l'agonie.

Dans ce rapport le mot variété, sans autre précision, signifiera variété, C^∞ , compacte sans bord, et n-variété signifiera variété de dimension n .

1. Généralités sur la théorie d'obstruction à la réduction à la dimension k

Soit ξ un fibré stable dont la base X est un CW-complexe de dimension n , on se propose de montrer que les obstructions à réduire ξ à la dimension k sont 2-primaires sous l'hypothèse $k > \frac{n}{2}$ ce qui permettra par la suite d'ignorer superbement les nombres premiers impairs. On note encore $\xi : X \longrightarrow BO$ l'application qui classifie ce fibré stable, il s'agit donc de relever ξ en une application $X \longrightarrow BO(k)$:

$$\begin{tikzcd} & V_k = O/O(k) \arrow[d] \\ & BO(k) \arrow[d] \\ X \arrow[r, "\xi"] \arrow[ur, dashed] & BO \end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme on a noté V_k la "variété" de Stiefel $O/O(k)$ qui est la fibre de l'application naturelle : $BO(k) \longrightarrow BO$, on peut obtenir des renseignements sur les groupes d'homotopie $\pi_i V_k$ pour $i \leq 2k$ de la façon suivante. En associant à une droite de $\mathbb{R}^{\ell+1}$ la symétrie par rapport à l'hyperplan perpendiculaire à cette droite on définit une application : $\mathbb{R}P^{\ell} \longrightarrow O(\ell+1)$ et en passant à la limite inductive une application notée $\lambda : \mathbb{R}P^{\infty} \longrightarrow O$; on vérifie que l'application : $\mathbb{R}P^{\infty}/\mathbb{R}P^{k-1} \longrightarrow V_k$ induite par λ est $2k$-connexe. On distingue alors deux cas suivant la parité de k.

a) k impair

C'est le cas "facile" et ceci pour deux raisons, d'une part la fibration $V_k \longrightarrow BO(k) \longrightarrow BO$ est simple et d'autre part puisque $H_*(\mathbb{R}P^{\infty}/\mathbb{R}P^{k-1};\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]) = 0$ les groupes d'homotopie $\pi_i V_k$ sont des 2-groupes finis pour $i \leq 2k$. On en déduit que l'on peut factoriser la fibration : $BO(k) \longrightarrow BO$ en une suite finie de fibrations :

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & & K(\mathbb{Z}/2,q_j) & & & & \\ & & & & & & \downarrow & & & & \\ BO(k) & \longrightarrow & B_r & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & B_j & \longrightarrow & B_{j-1} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & B_o = BO \\ & & & & & & & & \downarrow & & \\ & & & & & & & & K(\mathbb{Z}/2,q_j+1) & & \end{array}$$

où chaque fibration $B_j \longrightarrow B_{j-1}$ est l'image réciproque de la fibration des chemins sur un espace d'Eilenberg-MacLane du type $K(\mathbb{Z}/2,q_j+1)$, de telle sorte que l'application $BO(k) \longrightarrow B_r$ soit $(2k+1)$-connexe.

Si $n \leq 2k+1$ tout relèvement de ξ à B_r se relève aussi à $BO(k)$, les obstructions à réduire ξ à la dimension k sont donc 2-primaires.

b) k pair

Il y a cette fois-ci deux difficultés. D'une part la fibration $V_k \longrightarrow BO(k) \longrightarrow BO$ n'est pas simple. D'autre part on voit en considérant la fibration

$$S^k = O(k+1)/O(k) \hookrightarrow O/O(k) \longrightarrow O/O(k+1)$$

que l'inclusion naturelle : $S^k \hookrightarrow V_k$, une fois "tensorisée" par $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$, est $(2k+2)$-connexe. Cependant, là encore, les obstructions à réduire ξ à la dim $k > \frac{n}{2}$ sont, en un sens à préciser, 2-primaires [9]. La raison essentielle de ce phénomène est que l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & & BO(k) \\ & \nearrow & \downarrow \\ BO(k-1) & \longrightarrow & BO \end{array}$$

où, d'après le cas a), l'application : $BO(k-1) \longrightarrow BO$ est $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$-$(2k-1)$-connexe.

2. Condition de dualité

En général un fibré stable dont la base est une n-variété X se réduit à la dimension n mais pas davantage, l'objet de ce paragraphe est de dégager la propriété essentielle qui distingue le fibré normal ν_X parmi les fibrés stables de base X et qui implique finalement que ν_X se réduit à la dimension $n-\alpha(n)$.

Rappelons tout d'abord la définition du spectre de Thom $M\xi$ d'un fibré stable ξ représenté par un fibré vectoriel ξ_0 de dimension d . On définit $M\xi$ par la formule $T\xi_0 = S^d M\xi$, $T\xi_0$ désignant l'espace de Thom de ξ_0 . On prendra soin de distinguer entre espace de Thom (notation T) et spectre de Thom (notation M) d'un fibré "instable", le spectre de Thom d'un fibré instable étant par définition le spectre de Thom du fibré stable sous-jacent.

Revenons à notre variété X . La composition φ :

$$S^n \xrightarrow{P} M\nu_X \xrightarrow{\Delta} M\nu_X \wedge X_+$$

où P désigne l'application de Thom-Pontryagin et Δ la "diagonale" correspondant au niveau des spectres de Thom au morphisme de fibrés : $\nu_X \longrightarrow \nu_X \times X$ produit de l'identité et de la projection, possède la propriété suivante. Le slant produit par la classe $\varphi_*[S^n]$

$$D : H^i(M\nu_X;\ ) \longrightarrow H_{n-i}(X;\ )$$

est un isomorphisme. [En fait la composition de l'isomorphisme de Thom

$$\Phi : H^i(X;\mathfrak{X}_X \otimes\ ) \longrightarrow H^i(M\nu_X;\ )$$

($\mathfrak{X}_X$ désigne les coefficients d'orientation de X) et de D est la dualité de Poincaré.] On dit dans ce cas que le n-dual de l'espace X_+ est le spectre $M\nu_X$.

On est donc conduit à poser la définition suivante.

DÉFINITION 2.— *Soit* M *un spectre, on dira que* M *vérifie la condition* (D_n) *s'il existe un* CW*-complexe pointé fini* Y *et une application* $\varphi : S^n \longrightarrow M \wedge Y$ *telle que le slant produit par* $\varphi_*[S^n]$

$$D : H^i(M;\mathbb{Z}/2) \longrightarrow \widetilde{H}_{n-i}(Y;\mathbb{Z}/2)$$

soit un isomorphisme, en d'autres termes si le n*-dual de* Y *a le même type d'homotopie localisé en* 2 *que* M . *On dira qu'un fibré stable* ξ *vérifie la condition* (D_n) *si son spectre de Thom* $M\xi$ *la vérifie.*

3. Conséquences cohomologiques de la condition de dualité

A partir de maintenant les symboles H^* et H_* , sans autre précision, désignent la cohomologie et l'homologie modulo 2 . Le degré d'un élément u d'un espace vectoriel gradué est noté $|u|$.

Soient A l'algèbre de Steenrod modulo 2 et $\chi : A \longrightarrow A$ la conjugaison canonique. On reprend les notations de la définition 2 ; soient en outre ϑ , u , v appartenant à A , H^*M , H^*Y , d'après la définition même de χ on a :

$$<\vartheta v, Du> = <v, D[(\chi\vartheta)u]> .$$

On en déduit

PROPOSITION 3.1.— *Soient* M *un spectre vérifiant la condition* (D_n) *et* u *une classe de* H^*M *, alors pour tout entier* i *tel que* $2i > n - |u|$ *on a* $\chi Sq^i u = 0$.

COROLLAIRE 3.2.— *Soient* ξ *un fibré stable vérifiant la condition* (D_n) *et* U *appartenant à* $H^oM\xi$ *la classe de Thom modulo* 2 *de* ξ *; alors pour tout entier* i *, tel que* $2i > n$ *on a* $\chi Sq^i U = 0$ *[ce qui équivaut à la nullité de la classe de Wu* $v_i(\xi)$ *puisque par définition* $\chi Sq^i U = \Phi v_i(\xi)$].

PROPOSITION 3.3.— *Tout élément de* A *de degré strictement supérieur à* $n - \alpha(n)$ *appartient à l'idéal à gauche de* A *, noté* J_n *, engendré par les* χSq^i *,* $2i > n$.

Démonstration.— Observons tout d'abord que l'on a la formule $n - \alpha(n) = \sum_{k=1}^{\infty} [\frac{n}{2^k}]$ ([ ] désigne la partie entière) et que par conséquent l'application : $n \mapsto n - \alpha(n)$ est croissante au sens large. On sait d'autre part que les opérations $Sq^{i_1}Sq^{i_2}\dots Sq^{i_r}$ avec $i_1 \geq 2i_2 \geq \dots \geq 2^{r-1}i_r$ forment une $\mathbb{Z}/2$-base de A , il en est donc de même pour les opérations $(\chi Sq^{i_r})\dots(\chi Sq^{i_2})(\chi Sq^{i_1})$ avec les mêmes conditions sur les indices $i_1, i_2, \dots, i_r$. Supposons maintenant que le degré de $(\chi Sq^{i_r})\dots(\chi Sq^{i_2})(\chi Sq^{i_1})$ soit strictement plus grand que $n - \alpha(n)$, on a :

$$n - \alpha(n) < i_1 + i_2 + \dots + i_r \leq i_1 + \sum_{k=1}^{\infty} [\frac{i_1}{2^k}] = 2i_1 - \alpha(2i_1) .$$

L'inégalité $n - \alpha(n) < 2i_1 - \alpha(2i_1)$ implique l'inégalité $n < 2i_1$ qui montre que $(\chi Sq^{i_r})\dots(\chi Sq^{i_2})(\chi Sq^{i_1})$ appartient bien à J_n ce qui achève la démonstration de la proposition.

En particulier Sq^i appartient à J_n pour $i > n - \alpha(n)$, on a donc obtenu le résultat de Massey [13].

COROLLAIRE 3.4.— *Soit* ξ *un fibré stable vérifiant la condition* (D_n) *alors* $w_i(\xi) = 0$ *pour* $i > n - \alpha(n)$.

Remarque.— Supposons que $n - \alpha(n)$ soit pair, alors la première obstruction à réduire un fibré stable ξ à la dimension $n - \alpha(n)$ est un élément $W_{n-\alpha(n)+1}(\xi)$ de $H^{n-\alpha(n)+1}(X;\mathcal{Z}_\xi)$ dont la réduction modulo 2 est la classe de Stiefel-Whitney $w_{n-\alpha(n)+1}(\xi)$ ($\mathcal{Z}_\xi$ désigne les coefficients d'orientation de ξ). On peut montrer par la même méthode que la condition (D_n) implique la nullité de $W_{n-\alpha(n)+1}(\xi)$.

3.5. On note MO le spectre de Thom du fibré stable universel de base BO . On sait depuis longtemps [15] que H^*MO est un A-module libre, soit $\{\beta\}$ une $\mathbb{Z}/2$-base de π_*MO et $\{u_\beta\}$ une A-base de H^*MO telle que :

$$< u_\beta, h\beta' > = \begin{cases} 1 \text{ si } \beta = \beta' \\ 0 \text{ si } \beta \neq \beta' \end{cases}$$

h désignant l'homomorphisme de Hurewicz modulo 2 : $\pi_*MO \longrightarrow H_*MO$. La proposi-

La proposition suivante résulte de la proposition 3.1.

PROPOSITION 3.5.— *Soit* ξ *un fibré stable de base* X *vérifiant la condition*

(D_n) *alors l'application naturelle* $H^*MO \longrightarrow H^*M\xi$ *est nulle sur le sous-A-module* $\tilde{I}_n$ *de* H^*MO *défini par*

$$\tilde{I}_n = \bigoplus_\beta J_{n-|\beta|} u_\beta$$

(*si* $n - |\beta|$ *est négatif* $J_{n-|\beta|} = A$). *De même l'application naturelle* $H^*BO \longrightarrow H^*X$ *est nulle sur le sous-espace* I_n *de* H^*BO *image réciproque de* $\tilde{I}_n$ *par l'isomorphisme de Thom.*

En 1963 E.H. Brown et F.P. Peterson ont montré que I_n est l'idéal des relations liant les classes de Stiefel-Whitney normales de toute n-variété [2] :

$$I_n = \{u \in H^*BO \ ; \ u(\nu_X) = 0 \text{ pour toute } n\text{-variété } X\} \ .$$

Ce résultat utilise essentiellement la connaissance du type d'homotopie de MO (voir ci-dessus et 4.3).

4. Résultats au niveau des spectres de Thom

4.1. La conjecture des immersions à cobordisme près

En 1971 R.L.W. Brown a montré que la conjecture des immersions est vraie à cobordisme près [6].

THÉORÈME 4.1.– *Toute* n-*variété est cobordante à une* n-*variété qui s'immerge dans* $\mathbb{R}^{2n-\alpha(n)}$ $(n \geq 2)$. *En d'autres termes l'application naturelle* $\pi_* MO(n-\alpha(n)) \longrightarrow \pi_* MO$ *est surjective* ($MO(n-\alpha(n))$ *désigne le spectre de Thom du fibré universel de base* $BO(n-\alpha(n))$).

La méthode de démonstration de ce théorème est la suivante. On observe tout d'abord que si deux variétés X^m et Y^n s'immergent respectivement dans $\mathbb{R}^{2m-\alpha(m)}$ et $\mathbb{R}^{2n-\alpha(n)}$ alors leur produit $X \times Y$ s'immerge dans $\mathbb{R}^{2(m+n)-\alpha(m+n)}$ puisque l'on a l'inégalité $\alpha(m+n) \leq \alpha(m) + \alpha(n)$. On utilise ensuite le fait que l'anneau de cobordisme non orienté $\pi_* MO$ est un anneau de polynômes avec un générateur en toute dimension n qui n'est pas de la forme $2^p - 1$ et on représente ce générateur par une n-variété qui s'immerge dans $\mathbb{R}^{2n-\alpha(n)}$.

4.2. Le spectre de Brown-Gitler

Soit ξ un fibré stable vérifiant la condition (D_n) ; on a vu en 3.3 que l'application : $A \longrightarrow H^*M\xi$, $\theta \mapsto \theta U$, U désignant la classe de Thom modulo 2 de ξ , se factorise à travers A/J_n . On va voir que l'on peut réaliser cette factorisation par une factorisation de l'application de spectres correspondante : $M\xi \longrightarrow \mathcal{K}$, $\mathcal{K}$ désignant le spectre d'Eilenberg-MacLane du groupe $\mathbb{Z}/2$. C'est un corollaire du profond résultat énoncé ci-dessous qui constitue le premier pas vers la solution de la conjecture des immersions.

On note $M_{(2)}$ le localisé en 2 d'un spectre M ; on dit que M est 2-local si $M = M_{(2)}$. On note respectivement $H^*(\ ;M)$ et $H_*(\ ;M)$ la cohomologie et l'homologie généralisées définies par M .

THÉORÈME 4.2.1 (E.H. Brown et S. Gitler 1973 [1]).— *Soit* n *un entier positif ; il existe un spectre* 2-*local* $L(n)$, *appelé spectre de Brown-Gitler, qui vérifie :*

(i) $H^*L(n) \simeq A/J_n$ *(isomorphisme de* A-*modules).*

(ii) *Soit* $\rho : L(n) \to \mathcal{K}$ *l'application de spectres représentant la surjection canonique :* $A \to A/J_n$, *alors l'application*

$$\rho_* : H_q(X;L(n)) \longrightarrow H_qX$$

est surjective pour tout CW-*complexe pointé* X *et tout entier* $q \leq n$.

4.2.2. <u>Remarques</u>

— La condition (ii) équivaut à :

(ii)' Pour toute n-variété X la classe de Thom : $M\nu_X \to \mathcal{K}$ se relève à $L(n)$.

— Brown et Peterson ont montré que les propriétés (i) et (ii) caractérisent le type d'homotopie de $L(n)$ [4]. Une autre caractérisation, qui leur est encore due, est donnée en 4.2.6.

— Par définition $J_{2n+1} = J_{2n}$ et donc $L(2n+1) = L(2n)$, c'est pourquoi on trouve souvent dans la littérature une numérotation différente des spectres de Brown-Gitler.

— Le spectre $L(n)$ est d'un type très simple, en fait le spectre $S^n(L(n))$ est le 2-localisé d'un CW-complexe fini ; on exhibera un tel CW-complexe en 5.1. Pour $n \leq 5$ on a : $L(0) = L(1) = (S^0)_{(2)}$; $L(2) = L(3) = S^{-1}\mathbb{R}P^2$; $L(4) = L(5) = S^{-3}(\mathbb{R}P^6/\mathbb{R}P^2)$ (i.e. le spectre de Thom de la somme de 3 exemplaires du fibré linéaire canonique de base $\mathbb{R}P^3$).

— A titre d'exemple considérons la condition (ii) du théorème 4.2.1 pour $n = 4$; en utilisant le fait que le 4-dual de $L(4)$ est $\mathbb{R}P^4$ on voit sans difficultés que cette condition est équivalente à la suivante :

Soit un CW-complexe pointé ; alors pour toute classe x de H_4X il existe une application stable $f : \mathbb{R}P^4 \to X$ telle que $x = f_*[\mathbb{R}P^4]$.

4.2.3. Dans leur papier Brown et Gitler démontrent en fait le résultat plus précis que voici (pour une formulation plus précise encore voir [8]).

THÉORÈME 4.2.3.— *Il existe une résolution de* A/J_n *par des* A-*modules libres :*

$$0 \longleftarrow A/J_n \longleftarrow C_0(n) \longleftarrow \cdots\ C_{i-1}(n) \longleftarrow C_i(n) \longleftarrow \cdots$$

et une tour de Postnikov de fibrations de spectres 2-*locaux*

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{K} = \mathcal{K}_0(n) & & \mathcal{K}_1(n) & & \mathcal{K}_{i-1}(n) & & \mathcal{K}_i(n) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{K} = L_0(n) & \xleftarrow{\rho_1} & L_1(n) & \longleftarrow \cdots & L_{i-1}(n) & \xleftarrow{\rho_i} & L_i(n) \longleftarrow \cdots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
S^1\mathcal{K}_1(n) & & S^1\mathcal{K}_2(n) & \cdots & S^1\mathcal{K}_i(n) & & S^1\mathcal{K}_{i+1}(n) \quad \cdots
\end{array}$$

qui possède les propriétés suivantes :

(i) $H^{*-i}\mathcal{K}_i(n) = C_i(n)$ *et l'application* $C_i(n) \longrightarrow C_{i-1}(n)$ *est réalisée par la composition* $\mathcal{K}_{i-1}(n) \longrightarrow L_{i-1}(n) \longrightarrow S^1\mathcal{K}_i(n)$

(ii) *Pour tout* $i > 0$ *, pour tout* CW-*complexe pointé* X *et tout entier* $q \leq n$ *, l'application*

$$\rho_{i*} : H_q(X;L_i(n)) \longrightarrow H_q(X;L_{i-1}(n))$$

est surjective.

(iii) $L(n) = \varprojlim L_i(n)$.

COROLLAIRE 4.2.4.— *Soient* M *un spectre vérifiant la condition* (D_n) *et* u *une classe de cohomologie modulo* 2 *de* M *que l'on considère comme une application :* $M \longrightarrow S^{|u|}\mathbb{K}$ *. Alors* u *se relève à* $S^{|u|}L(n-|u|)$ *, c'est-à-dire qu'il existe une application* $\tilde{u} : M \longrightarrow S^{|u|}L(n-|u|)$ *qui fait commuter le diagramme*

$$\begin{tikzcd} & S^{|u|}L(n-|u|) \arrow[d, "S^{|u|}\rho"] \\ M \arrow[ur, "\tilde{u}"] \arrow[r, "u"] & S^{|u|}\mathbb{K} \end{tikzcd}$$

Plus précisément, pour tout $i \geq 1$ *tout relèvement de* u *à* $S^{|u|}L_{i-1}(n-|u|)$ *se relève à* $S^{|u|}L_i(n-|u|)$.

Démonstration.— Soit Y un CW-complexe fini dont le n-dual a le même type d'homotopie localisé en 2 que M ; on considère le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} H^{|u|}(M;L_i(n-|u|)) \arrow[r, phantom, "\simeq"] \arrow[d, "\rho_{i*}"] & H_{n-|u|}(Y;L_i(n-|u|)) \arrow[d, "\rho_{i*}"] \\ H^{|u|}(M;L_{i-1}(n-|u|)) \arrow[r, phantom, "\simeq"] & H_{n-|u|}(Y;L_{i-1}(n-|u|)) \end{tikzcd}$$

où les isomorphismes horizontaux proviennent de la n-dualité. Le théorème 4.2.3 donne la surjectivité de la flèche verticale de droite et l'énoncé ci-dessus équivaut à la surjectivité de la flèche verticale de gauche.

4.2.5. On va voir que l'énoncé ci-dessus reste valable si l'on remplace la condition (D_n) par la condition plus faible que voici.

DÉFINITION 4.2.5.— *Soit* M *un spectre, on dira que* M *vérifie la condition* (D'_n) *s'il existe un spectre* M' *vérifiant la condition* (D_n) *et une application* $f : M' \longrightarrow M$ *telle que* $f^* : H^*M \longrightarrow H^*M'$ *soit injective. On dira qu'un fibré stable vérifie la condition* (D'_n) *si son spectre de Thom la vérifie.*

THÉORÈME 4.2.5 [4].— *L'énoncé* 4.2.4 *reste valable si l'on remplace la condition* (D_n) *par la condition* (D'_n) .

Démonstration.— On considère le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} & & S^{|u|}L_i(n-|u|) \arrow[d, "S^{|u|}\rho_i"] & \\ M' \arrow[r, "f"] \arrow[urr, dashed] & M \arrow[r, "u_{i-1}"] \arrow[ur, dashed] & S^{|u|}L_{i-1}(n-|u|) \arrow[r] & S^{|u|+1}\mathbb{K}_i(n-|u|) \end{tikzcd}$$

où u_{i-1} désigne un relèvement de u à $S^{|u|}L_{i-1}(n-|u|)$. L'obstruction à relever u_{i-1} à $S^{|u|}L_i(n-|u|)$ est un élément c de $H^{|u|+1}(M;\mathcal{K}_i(n-|u|))$ c'est-à-dire une famille de classes de cohomologie modulo 2 . D'après 2.4 l'obstruction à relever $u_{i-1}\circ f$ est nulle donc $f^*c = 0$ dans $H^{|u|+1}(M';\mathcal{K}_i(n-|u|))$ et $c = 0$ puisque f^* est injective en cohomologie modulo 2 .

4.2.6. Une caractérisation des spectres de Brown-Gitler

On verra en 4.3.2 que $L(n)$ vérifie la condition (D_n') , l'énoncé ci-dessous donne donc une caractérisation de $L(n)$.

COROLLAIRE 4.2.6 [4].— *Soit* L *un spectre vérifiant* $H^*L = A/J_n$ *et la condition* (D_n') *, alors* $L_{(2)}$ *a le type d'homotopie de* $L(n)$.

Démonstration.— L'application $L \longrightarrow L(n)$ donnée par le théorème 4.2.5 induit une équivalence d'homotopie $L_{(2)} \simeq L(n)$.

4.3. Le spectre MO/I_n

On reprend les notations de 3.5. Soit ξ un fibré stable vérifiant la condition (D_n') , il résulte de 3.5 que l'application naturelle $H^*MO \longrightarrow H^*M\xi$ se factorise à travers $(H^*MO)/\tilde{I}_n$ on va voir que l'on peut réaliser cette factorisation par une factorisation de l'application de spectres : $M\xi \longrightarrow MO$; pour cela on va définir un spectre, noté MO/I_n , qui est à MO ce que le spectre de Brown-Gitler, $L(n)$, est au spectre d'Eilenberg-MacLane du groupe $\mathbb{Z}/2$, $\mathcal{K}$.

Le choix de la A-base $\{u_\beta\}$ de H^*MO détermine une équivalence d'homotopie entre MO et le bouquet $\bigvee_\beta S^{|\beta|}$. On pose :

$$MO/I_n = \bigvee_{|\beta|\le n} S^{|\beta|}L(n-|\beta|)$$

$$M_i(n) = \bigvee_{|\beta|\le n} S^{|\beta|}L_i(n-|\beta|)$$

On note encore $\rho : MO/I_n \longrightarrow MO$ et $\rho_i : M_i(n) \longrightarrow M_{i-1}(n)$ les applications induites par les applications $\rho : L(m) \longrightarrow \mathcal{K}$ et $\rho_i : L_i(m) \longrightarrow L_{i-1}(m)$.

Comme en 4.2.3, MO/I_n est la limite projective $\varprojlim M_i(n)$ et la fibre de $\rho_i : M_i(n) \longrightarrow M_{i-1}(n)$ est un spectre 2-local dont la cohomologie modulo 2 est libre sur l'algèbre de Steenrod.

THÉORÈME 4.3.1.— *Soient* ξ *un fibré stable vérifiant la condition* (D_n') *et* f *l'application naturelle :* $M\xi \longrightarrow MO$. *Alors* f *se relève à* MO/I_n . *Plus précisément, pour tout* $i \geq 1$ *, tout relèvement de* f *à* $M_{i-1}(n)$ *se relève à* $M_i(n)$.

Démonstration.— On applique le théorème 4.2.5 aux classes f^*u_β .

PROPOSITION 4.3.2.— *Les spectres* MO/I_n *et* $L(n)$ *vérifient la condition* (D_n') .

Démonstration.— Il est clair qu'il suffit de montrer que MO/I_n la vérifie. Soit u un élément non nul de $(H^*MO)/\tilde{I}_n$, d'après le caractère minimal de $\tilde{I}_n$ (voir la fin du paragraphe 3) on sait qu'il existe une n-variété X_u telle que l'image de u dans $H^*M\nu_{X_u}$ est non nulle. On considère la réunion disjointe $X = \coprod_u X_u$

u décrivant l'ensemble fini $[(H^*MO)/\tilde{I}_n] - \{0\}$, alors par construction l'application $(H^*MO)/\tilde{I}_n \longrightarrow H^*M\nu_X$ est injective. L'application $M\nu_X \longrightarrow MO/I_n$ qui relève l'application naturelle $M\nu_X \longrightarrow MO$ induit bien une application injective en cohomologie modulo 2 et $M\nu_X$ vérifie bien la condition (D_n) .

Question.— $L(n)$ et MO/I_n vérifient-ils la condition (D_n) ? (vrai pour $n \leq 7$).

4.3.3. <u>La conjecture des immersions au niveau des espaces de Thom</u>

Dans [3] Brown et Peterson montrent que le théorème 4.1 et le fait que la dimension cohomologique de $L(n)$ soit $n - \alpha(n)$ entraînent que l'application $\rho : MO/I_n \longrightarrow MO$ se factorise à travers $MO(n-\alpha(n))$. Ce résultat et le théorème précédent montrent que la conjecture des immersions est vraie au niveau des espaces de Thom :

THÉORÈME 4.3.3.— *Soit* X *une* n*-variété ; l'application naturelle :* $M\nu_X \longrightarrow MO$ *se factorise à travers* $MO(n-\alpha(n))$.

5. <u>Déthomification</u>

La déthomification n'a rien à voir avec une réaction contre un excès du culte de la personnalité ; il s'agit du problème suivant : étant donné un spectre M , trouver un fibré stable ξ dont le spectre de Thom $M\xi$ a le type d'homotopie de M . Si on demande seulement que $M\xi$ ait le même type d'homotopie localisé en 2 que M il s'agit de déthomification en 2 (2-déthomification).

5.1. <u>2-Déthomification des spectres de Brown-Gitler</u>

Soit $\mathbb{C}^{(n)}$ l'ouvert de $\mathbb{C}^n$ formé des n-uples $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ tels que les z_i soient deux à deux distincts. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ opère librement par permutation des facteurs sur les espaces $\mathbb{C}^{(n)}$ et $\mathbb{C}^{(n)} \times \mathbb{R}^n$. On note ξ_n le fibré vectoriel : $\mathbb{C}^{(n)} \times_{\mathfrak{S}_n} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}^{(n)}/\mathfrak{S}_n$.

THÉORÈME 5.1 [4] [7].— *Le spectre de Brown-Gitler* $L(n)$ *est le localisé en* 2 *du spectre de Thom* $M\xi_n$.

Démonstration.— On montre tout d'abord $H^*M\xi_n \simeq A/J_n$ [12].

Signalons que ce calcul peut être relié à celui de la cohomologie modulo 2 du groupe $\mathfrak{B}_n$ des tresses à n brins. En effet l'espace $B(n) = \mathbb{C}^{(n)}/\ {}_n$ est un classifiant pour $\mathfrak{B}_n$: $B(n) = K(\mathfrak{B}_n, 1)$ et la formule $H^*M\xi_n = A/J_n$ est reliée à un calcul de $H^*B(n)$ en fonction des classes de Stiefel-Whitney de ξ_n [10].

On montre ensuite que le spectre $M\xi_n$ vérifie la condition (D'_n) et on applique 4.2.6. La condition (D'_n) se vérifie par récurrence sur n , pour cela on utilise les applications naturelles : $\xi_r \times \xi_s \longrightarrow \xi_{r+s}$,
$S^1 \times_{\mathfrak{S}_2} (\xi_r \times \xi_r) \longrightarrow \xi_{2r}$ ($\mathfrak{S}_2$ opère sur S^1 par antipodie et sur $\xi_r \times \xi_r$ par permutation des facteurs).

Remarques. — En passant à la limite inductive en n on voit que le spectre $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathbb{Z}/2)$ est le localisé en 2 du spectre de Thom $M\xi_\infty$. En fait $M\xi_\infty$ est 2-local d'où le fameux résultat de Mahowald [12] : $\mathcal{K}(\mathbb{Z}/2)$ est un spectre de Thom. On obtient ainsi une section de l'homomorphisme $H_*(\ ;MO) \longrightarrow H_*(\ ;\mathbb{Z}/2)$ du bordisme non orienté vers l'homologie modulo 2 .

— On montre également que $\mathcal{K}(\mathbb{Z})$ est 2-déthomifiable (mais pas déthomifiable puisque l'homomorphisme $H_*(\ ;MSO) \longrightarrow H_*(\ ;\mathbb{Z})$ n'est pas surjectif). Par contre $\mathcal{K}(\mathbb{Z}/4)$ n'est pas 2-déthomifiable puisque si une classe de Thom modulo 2 est la réduction d'une classe modulo 4 elle est aussi la réduction d'une classe entière.

— Soit η la somme de trois exemplaires du fibré linéaire canonique sur $\mathbb{R}P^3$, alors $M\eta = L(4) = (M\xi_4)_{(2)}$; or $w_1^2(\eta) \neq 0$ et $w_1^2(\xi_4) = 0$. Cet exemple montre qu'on ne peut espérer en général une quelconque "unicité" pour la 2-déthomification.

5.2. 2-Déthomification de MO/I_n

On rappelle que l'on note I_n l'idéal des relations liant les classes de Stiefel-Whitney normales de toute n-variété X . L'application $\nu_X^* : H^*BO \longrightarrow H^*X$ se factorise donc à travers $(H^*BO)/I_n$, on va voir que l'on peut réaliser cette factorisation par une factorisation de l'application $\nu_X : X \longrightarrow BO$. Pour cela on va 2-déthomifier MO/I_n .

THÉORÈME 5.2 (Brown et Peterson, 1979 [5]).— *Il existe un CW-complexe fini de dimension* n *, noté* BO/I_n *, et une application* $\rho : BO/I_n \longrightarrow BO$ *qui possèdent les propriétés suivantes :*

(i) *L'application naturelle :* $M\rho \longrightarrow MO$ *se factorise par une application :* $M\rho \longrightarrow MO/I_n$ *qui induit un isomorphisme :* $H^*(MO/I_n) \simeq H^*M\rho$ *et donc une équivalence d'homotopie :* $(M\rho)_{(2)} \simeq MO/I_n$.

[*Ceci montre que la suite*

$$0 \longrightarrow I_n \hookrightarrow H^*BO \xrightarrow{\rho^*} H^*(BO/I_n) \longrightarrow 0$$

est exacte et justifie la notation.]

(ii) *Le fibré stable* ρ *vérifie la condition* (D_n') .

(iii) *Soient* X *un CW-complexe de dimension* n *et* ξ *un fibré stable sur* X *vérifiant la condition* (D_n') *; alors il existe une application* $\tilde{\xi} : X \longrightarrow BO/I_n$ *telle que* $\xi \simeq \tilde{\xi}^*\rho$.

En particulier pour toute n*-variété* X *il existe une application* $\tilde{\nu}_X : X \longrightarrow BO/I_n$ *telle que* $\nu_X \simeq \tilde{\nu}_X^*\rho$.

Indications sur la démonstration.— Soit V un $\mathbb{Z}/2$-espace vectoriel gradué on note respectivement $K(V)$ et $\mathcal{K}(V)$ l'espace et le spectre d'Eilenberg-MacLane tel que $\pi_*K(V) = V$ et $\pi_*\mathcal{K}(V) = V$.

(i) Le spectre MO/I_n est la limite projective d'une tour de Postnikov de fibrations de spectres :

$$MO = M_0 \longleftarrow \ldots \longleftarrow M_{i-1} \longleftarrow M_i \longleftarrow \ldots$$

où M_i est la fibre d'une application $M_{i-1} \longrightarrow \mathcal{K}(W_i)$ pour un certain $\mathbb{Z}/2$-espace vectoriel gradué W_i. On construit de même une tour de Postnikov de fibrations d'espaces :

$$BO = B_0 \longleftarrow \ldots \longleftarrow B_{i-1} \longleftarrow B_i \longleftarrow \ldots$$

où B_i est la fibre d'une application : $B_{i-1} \longrightarrow K(V_i)$, pour un certain $\mathbb{Z}/2$-espace vectoriel gradué V_i, de telle sorte que le spectre de Thom, noté MB_i, de la flèche de B_i dans BO ressemble beaucoup à M_i. Plus précisément on montre qu'il existe des applications $f_i : MB_i \to M_i$ (avec $f_0 = 1$) faisant commuter les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} MB_i & \longrightarrow & M_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ MB_{i-1} & \longrightarrow & M_{i-1} \end{array}$$

avec $f_i^* : H^q M_i \longrightarrow H^q MB_i$ isomorphisme pour $q \leq m$.

Le problème essentiel pour trouver cette tour de Postnikov est le choix des V_i. Pour cela il faut analyser comment change la cohomologie d'un spectre de Thom quand on tue des classes de cohomologie de la base.

Soient γ un fibré stable de base B et $v : B \to K$ une application de B dans un espace pointé $(d-1)$ connexe. On note $\overline{B}$ la fibre de v et $\overline{\gamma}$ le fibré stable sur $\overline{B}$ induit par γ. On note w la composition,

$$M\gamma \longrightarrow M(\gamma \times 0) = M\gamma \wedge B_+ \xrightarrow{1 \wedge v} M\gamma \wedge K .$$

On vérifie que la composition

$$M\overline{\gamma} \longrightarrow M\gamma \xrightarrow{w} M\gamma \wedge K$$

est triviale et que l'application induite : $M\gamma/M\overline{\gamma} \longrightarrow M\gamma \wedge K$ est $(2d-1)$-connexe. C'est cette approximation de $M\gamma/M\overline{\gamma}$ qui conduit Brown et Peterson à leur choix pour V_i.

On définit ensuite une "limite projective convenable" B_∞ des B_i et une application $f_\infty : MB_\infty \longrightarrow MO/I_n$ telle que $f_\infty^* : H^q(MO/I_n) \longrightarrow H^q MB_\infty$ est un isomorphisme pour $q \leq n$.

On montre enfin par des arguments standard qu'il existe un CW-complexe fini de dimension n, noté BO/I_n, et une application $t : BO/I_n \longrightarrow B_\infty$ qui possèdent les propriétés suivantes :

– $t^* : H^q B_\infty \longrightarrow H^q BO/I_n$ est un isomorphisme pour $q \leq n$,

– toute application d'un CW-complexe de dimension n dans B_∞ se factorise par t.

(ii) Déjà vérifié en 4.3.2.

(iii) Soit ξ un fibré stable de base un CW-complexe de dimension n ; on suppose que ξ se relève à B_{i-1}. L'analyse précédente montre que si la composée $M\xi \longrightarrow MB_{i-1} \longrightarrow M_{i-1}$ se relève à M_i alors ξ se relève à B_i. En appliquant

4.2.5 on voit donc que si ξ vérifie la condition (D_n') tout relèvement de ξ à B_{i-1} se relève à B_i.

Remarque.— La 2-déthomification de BO/I_n est loin d'être aussi explicite que celle des spectres de Brown-Gitler, signalons modestement que l'on a $BO/I_0 = BO/I_1 = *$, $BO/I_2 = BO/I_3 = \mathbb{R}P^2$ et que dans ces deux derniers cas le fibré ρ est le fibré linéaire canonique.

Ayant déjà montré que l'application naturelle : $M\rho \longrightarrow MO$ se relève à $MO(n-\alpha(n))$ [3], Brown et Peterson formulent dans [5] la conjecture suivante :

CONJECTURE C.— *Le fibré* ρ *se réduit à la dimension* $n - \alpha(n)$.

Le théorème 5.2 montre que cette conjecture implique la conjecture des immersions (forme B). On va donner quelques indications sur la façon dont R.L. Cohen prouve la conjecture C.

7. L'idée de R.L. Cohen pour achever le programme de Brown et Peterson

7.1. Réduction à un lemme

R.L. Cohen réduit la démonstration de la conjecture C au lemme suivant.

Lemme 7.1.— *Il existe un* CW-*complexe* X_n, *un fibré stable* η *sur* X_n, *et des relèvements* $f : X_n \longrightarrow BO(n-\alpha(n))$ *et* $g : X_n \longrightarrow BO/I_n$ *de* η *qui possèdent les propriétés ci-dessous.*

(i) *Il existe une application* $\sigma : MO/I_n \longrightarrow (M\eta)_{(2)}$ *telle que la composition :*

$$MO/I_n \xrightarrow{\sigma} (M\eta)_{(2)} \xrightarrow{(Mg)_{(2)}} (M\rho)_{(2)} = MO/I_n$$

est homotope à l'identité.

(ii) *Le diagramme suivant commute à homotopie près*

$$\begin{tikzcd}
(M\eta)_{(2)} \arrow[r, "(Mf)_{(2)}"] \arrow[d, "(Mg)_{(2)}"] & (MO(n-\alpha(n)))_{(2)} \\
MO/I_n = (M\rho)_{(2)} \arrow[r, "\sigma"] & (M\eta)_{(2)} \arrow[u, "(Mf)_{(2)}"']
\end{tikzcd}$$

(Dans l'énoncé ci-dessus Mf et Mg désignent les applications induites au niveau des espaces de Thom par f et g, $(Mf)_{(2)}$ et $(Mg)_{(2)}$ les localisées en 2 correspondantes.)

On va montrer ci-dessous pourquoi le lemme 7.1 implique la conjecture C et donc la conjecture des immersions. On donnera quelques indications sur la preuve de ce lemme en 7.2.

Pour éviter des difficultés techniques nous allons nous limiter au cas où $n - \alpha(n)$ est impair (voir paragraphe 1). On a vu que dans ce cas il existe une suite finie de fibrations

$$BO = B_0 \longleftarrow \dots \longleftarrow B_{i-1} \longleftarrow B_i \longleftarrow \dots \longleftarrow B_r \longleftarrow BO(n-\alpha(n))$$

où chaque fibration $B_i \longrightarrow B_{i-1}$ $(1 \le i \le r)$ est l'image réciproque de la fibration des chemins sur un espace d'Eilenberg-MacLane du type $K(\mathbb{Z}/2,q_i+1)$ de telle sorte que l'application $BO(n-\alpha(n)) \longrightarrow B_r$ soit $[2(n-\alpha(n))+1]$-connexe (attention, en dépit de la notation, la tour de Postnikov ci-dessus n'a rien à voir avec celle considérée en 5.2). Comme BO/I_n est un CW-complexe de dimension n, pour relever ρ à $BO(n-\alpha(n))$ il suffit de relever ρ à B_r (on suppose $n>3$ le cas $n\leq 3$ est trivial).

En fait le lemme 7.1 implique qu'il existe une application $\tilde{\rho}_r : BO/I_n \longrightarrow B_r$ telle que la composition $X_n \xrightarrow{g} BO/I_n \xrightarrow{\tilde{\rho}_r} B_r$ soit homotope à la composition $X_n \xrightarrow{f} BO(n-\alpha(n)) \longrightarrow B_r$ notée f_r. Autrement dit pour résoudre le problème absolu : trouver un relèvement $\tilde{\rho}_r$ de ρ à B_r, on va résoudre le problème relatif : trouver un relèvement $\tilde{\rho}_r$ prolongeant le relèvement f_r. Un problème relatif semble a priori plus difficile qu'un problème absolu, et pourtant là est la clef de la réussite.

On raisonne par récurrence sur i ; on suppose qu'il existe un relèvement $\tilde{\rho}_{i-1} : BO/I_n \longrightarrow B_{i-1}$ de ρ qui fait commuter homotopiquement le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
BO(n-\alpha(n)) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & B_i \arrow[r] & B_{i-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & B_o = BO \\
X_n \arrow[u, "f"] \arrow[urr, "f_i"] \arrow[rrr, "g"'] & & & BO/I_n \arrow[ul, dashed, "\tilde{\rho}_i"] \arrow[u, "\tilde{\rho}_{i-1}"'] & &
\end{tikzcd}$$

où f_i désigne la composition : $X_n \xrightarrow{f} BO(n-\alpha(n)) \longrightarrow B_i$. Il faut construire un relèvement $\tilde{\rho}_i : BO/I_n \longrightarrow B_i$ qui fasse commuter le diagramme ci-dessus. Puisque la fibration : $B_i \longrightarrow B_{i-1}$ est principale de fibre $K(\mathbb{Z}/2,q_i)$ il suffit de prouver que l'application

$$H^*(B_{i-1},B_i) \longrightarrow H^*(BO/I_n,X_n)$$

induite en cohomologie modulo 2 par $(\tilde{\rho}_{i-1},f_i)$ est nulle. Ce qui équivaut par isomorphisme de Thom à montrer que l'application

$$H^*(M\rho,M\eta) \longrightarrow H^*(MB_{i-1},MB_i)$$

induite par $(M\tilde{\rho}_{i-1},Mf_i)$ est nulle (MB_i désigne l'espace de Thom de l'application : $B_i \longrightarrow BO$). Pour cela il suffit de montrer que l'application $(M\tilde{\rho}_{i-1})_{(2)}$ se relève en une application $\lambda_i : MO/I_n \longrightarrow (MB_i)_{(2)}$ telle que $\lambda_i \circ (Mg)_{(2)} \simeq (Mf_i)_{(2)}$. Les conditions (i) et (ii) du lemme 7.2. assurent que $\lambda_i = (Mf_i)_{(2)} \circ \sigma$ convient.

7.2. Construction de X_n

D'après le théorème 4.1 tout élément β de la base de $\pi_* MO$ peut être représenté par une variété X_β, de dimension $|\beta|$, dont le fibré normal ν_{X_β} se réduit à la dimension $|\beta| - \alpha(|\beta|)$. On prend pour X_n la réunion disjointe :

$$X_n = \coprod_{|\beta|\leq n} X_\beta \times B(n-|\beta|)$$

et pour fibré η la réunion disjointe

$$\eta = \coprod_{|\beta|\le n} \nu_{X_\beta} \times \xi_{n-|\beta|} \ .$$

On rappelle que $B(m)$ désigne l'espace $\mathbb{C}^{(m)}/\mathfrak{S}_m$ et ξ_m le fibré vectoriel de base $B(m)$ et d'espace total $\mathbb{C}^{(m)} \times_{\mathfrak{S}_m} \mathbb{R}^m$ (voir 5.1).

En raison de l'inégalité : $n-\alpha(n) \ge |\beta| - \alpha(|\beta|) + n - |\beta| - \alpha(n-|\beta|)$, pour montrer que η se réduit à la dimension $n-\alpha(n)$ il suffit de montrer que ξ_m se réduit à la dimension $m-\alpha(m)$. Ceci résulte des deux propriétés suivantes :

— $B(m)$ a le type d'homotopie d'un CW-complexe de dimension m . En effet $B(m)$ est une variété analytique de dimension (complexe) m qui est de Stein ($B(m)$ s'identifie à l'ouvert de $\mathbb{C}^{(m)}$ "discriminant $\neq 0$ " lequel se plonge proprement dans $\mathbb{C}^{m+1}$).

— $H^qB(m) = 0$ pour $q > m-\alpha(m)$. En effet $H^*B(m) \simeq H^*M\xi_m \simeq H^*L(m) = A/J_m$ et on a vu en 3.3 que $(A/J_m)^q$ est nul pour $q > m-\alpha(m)$.

Pour voir que η se relève à BO/I_n on applique le théorème 5.2 ; X_n a bien le type d'homotopie d'un CW-complexe de dimension n et η vérifie bien la condition (D_n') (les conditions (D_n') se comportent à merveille pour le produit ou la réunion disjointe de fibrés et ξ_m vérifie la condition (D_m') d'après 4.3.2).

Enfin on construit $\sigma : MO/I_n \longrightarrow (M\eta)_{(2)}$ de la façon suivante. On considère l'application τ :

$$\bigvee_{|\beta|\le n} S^{|\beta|} \wedge M\xi_{n-|\beta|} \xrightarrow{\tau_\beta \wedge 1} \bigvee_{|\beta|\le n} M\nu_{X_\beta} \wedge M\xi_{n-|\beta|} = M\eta \ ,$$

$\tau_\beta : S^{|\beta|} \longrightarrow M\nu_{X_\beta}$ désignant l'application de Thom-Pontryagin de X_β . Pour tout relèvement de η à BO/I_n , $g : X_n \longrightarrow BO/I_n$ la composée h :

$$MO/I_n = \Big(\bigvee_{|\beta|\le n} S^{|\beta|} \wedge M\xi_{n-|\beta|}\Big)_{(2)} \xrightarrow{\tau_{(2)}} (M\eta)_{(2)} \xrightarrow{(Mg)_{(2)}} (M\rho)_{(2)} = MO/I_n$$

fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} MO/I_n \arrow[rr, "h"] \arrow[dr] & & MO/I_n \arrow[dl] \\ & MO & \end{tikzcd} \ .$$

On en déduit que h induit l'identité en cohomologie modulo 2 et que h est une équivalence d'homotopie. On pose $\sigma = \tau_{(2)} \circ h^{-1}$.

Il reste à montrer que l'on peut choisir les variétés X_β et les relèvements f et g de η à $BO(n-\alpha(n))$ et BO/I_n de telle sorte que la condition (ii) du lemme 7.2 soit vérifiée. C'est ce que fait R.L. Cohen par une récurrence sur n extrêmement minutieuse (50 pages avant décantation) [8].

RÉFÉRENCES

[1] E.H. BROWN et S. GITLER - *A spectrum whose cohomology is a certain cyclic module over the Steenrod algebra,* Topology 12(1973), 283-295.

[2] E.H. BROWN et F.P. PETERSON - *Relations among characteristic classes I,* Topology 3(1964), 39-52.

[3] E.H. BROWN et F.P. PETERSON - *On immersions of* n*-manifolds,* Adv. in Math. 24(1977), 74-77.

[4] E.H. BROWN et F.P. PETERSON - *On the stable decomposition of* $\Omega^2 S^{r+2}$, Trans. A.M.S. 243(1978), 287-298.

[5] E.H. BROWN et F.P. PETERSON - *A universal space for normal bundles of* n*-manifolds,* Comment. Math. Helv. 54(1979), 405-430.

[6] R.L. BROWN - *Immersions and embeddings up to cobordism,* Canad. J. Math. Vol. 23 n° 6(1971), 1102-1115.

[7] R.L. COHEN - *Representations of Brown-Gitler spectra,* Proc. Top. Symp. at Siegen, 1979, Springer Lect. Notes 788(1980), 399-417.

[8] R.L. COHEN - *The immersion conjecture for differentiable manifolds*, preprint.

[9] A.H. COPELAND Jr et M. MAHOWALD - *The odd primary obstructions to finding a section in a* V_n*-bundle are zero,* Proc. A.M.S. 19(1968), 1270-1272.

[10] D.B. FUKS - *Cohomologies of the group* COS *mod.* 2, Functional Ana. Appl. 4(1970), 143-151.

[11] M.W. HIRSCH - *Immersions of manifolds,* Trans. A.M.S. 93(1959), 242-276.

[12] M. MAHOWALD - *A new infinite family in* ${}_2\pi_*^S$, Topology 16(1977), 249-256.

[13] W.S. MASSEY - *On the Stiefel-Whitney classes of a manifold,* Amer. J. Math. 82(1960), 92-102.

[14] S. SMALE - *Classification of immersions of spheres in Euclidean space,* Ann. of Math. vol. 69(1959), 327-344.

[15] R. THOM - *Quelques propriétés globales des variétés différentiables,* Comment. Helv. 28(1954), 17-86.

[16] H. WHITNEY - *The singularities of a smooth* n*-manifold in* (2n-1)*-space,* Ann. Math. 45(1944), 247-293.

Jean LANNES

Ecole Polytechnique
Centre de Mathématiques
Route de Saclay
F-91128 PALAISEAU CEDEX