Astérisque

FRANÇOIS RODIER

Représentations de $GL(n,k)$ où k est un corps p-adique

Astérisque, tome 92-93 (1982), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 587, p. 201-218

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1981-1982__24__201_0>

Séminaire BOURBAKI
34e année, 1981/82, n° 587 Février 1982

REPRÉSENTATIONS DE GL(n,k) OÙ k EST UN CORPS p-ADIQUE

par François RODIER

Introduction

Les travaux de Harish-Chandra et H. Jacquet ont montré que l'étude des représentations irréductibles d'un groupe réductif sur un corps p-adique se ramène à deux problèmes : d'une part l'étude des représentations induites à partir d'un sous-groupe parabolique, d'autre part l'étude des représentations cuspidales (ce sont celles qu'on n'obtient pas par le procédé précédent). On expose ici le travail récent de I.N. Bernstein et A.V. Zelevinsky qui résolvent le premier problème pour les groupes $GL(n,k)$. Ils en déduisent comment la classification de toutes les représentations lisses irréductibles de ces groupes se ramène à celle des représentations cuspidales.

Leur méthode consiste à étudier la restriction des représentations du groupe $GL(n,k)$ à un sous-groupe P_n . Cette restriction est liée à la construction des modèles de Kirillov et de Whittaker. Une telle méthode avait déjà été utilisée pour l'étude des représentations du groupe $GL(2,k)$ (cf. [21]).

1. Les représentations lisses

1.1 Définitions

On se place dans cet exposé du point de vue des représentations lisses. Si G est un groupe localement compact et totalement discontinu, une *représentation lisse* (algébrique dans la terminologie de [13]) de G dans un espace vectoriel complexe E est un homomorphisme de G dans le groupe linéaire de E , tel que le stabilisateur de tout point de E soit un sous-groupe ouvert de G . La notion d'irréductibilité est la notion algébrique la plus simple : une représentation non nulle de G dans E est dite *irréductible* si E n'admet pas d'autre sous-espace invariant que $\{0\}$ et E . Si π_1 et π_2 sont deux représentations d'un groupe G , on note $\mathrm{Hom}_G(\pi_1,\pi_2)$ l'espace des opérateurs d'entrelacement de π_1 dans π_2 . La *contragrédiente* $\check{\pi}$ d'une représentation lisse π est la représentation $g \longmapsto (\pi(g^{-1}))^t$ de G dans l'espace $\check{E}$ des formes linéaires sur E invariantes par un sous-groupe ouvert de G .

Si une représentation lisse π d'un groupe G admet une suite de composition dont les quotients sont des représentations π_i, on dit que π est *composée* des π_i.

On appelle *caractère* d'un groupe G une représentation lisse de dimension 1.

Une représentation de G dans un espace E est dite *admissible* si l'ensemble des éléments de E fixés par un sous-groupe ouvert de G est de dimension finie. H. Jacquet a montré (cf. [18]) que toute représentation lisse irréductible d'un groupe réductif p-adique est admissible.

1.2. Les représentations induites

Pour construire des représentations d'un groupe, on dispose du procédé d'induction. Si G est un groupe, notons δ_G la *racine carrée positive de son module* : c'est l'homomorphisme de G dans $\mathbb{R}^+$ tel que, si dg est une mesure de Haar à gauche sur G, alors $\delta_G^{-2}dg$ est une mesure de Haar à droite. Soit H un sous-groupe fermé du groupe G et soit π une représentation lisse de H dans un espace vectoriel E. Alors le groupe G opère par translations à droite dans l'espace des fonctions f sur G à valeurs dans E vérifiant

(i) $f(hg) = \delta_G\delta_H^{-1}(h)\pi(h)f(g)$ si $h \in H$ et $g \in G$,

(ii) f est invariante à droite par un sous-groupe ouvert de G.

La représentation de G ainsi définie est lisse. C'est la *représentation induite* par π. On la note $\widetilde{\mathrm{Ind}}_H^G\pi$. Cette représentation admet un sous-espace invariant : c'est l'ensemble des f à support compact modulo H. La représentation de G dans ce sous-espace est la représentation induite au sens compact. On la note $\mathrm{Ind}_H^G\pi$. Si G/H est compact, les deux notions coïncident. Rappelons quelques propriétés de ces représentations (cf. [1], [8], [11]).

PROPOSITION 1.— (i) *On a* $(\mathrm{Ind}_H^G\pi)^\vee \simeq \widetilde{\mathrm{Ind}}_H^G\pi^\vee$.

(ii) *(Réciprocité de Frobenius) Si* ρ *est une représentation lisse de* G, *on a*

$$\mathrm{Hom}_G(\rho,\widetilde{\mathrm{Ind}}_H^G\pi) \simeq \mathrm{Hom}_H(\rho_{|H},\delta_G\delta_H^{-1}\otimes\pi) .$$

1.3. Le foncteur de Jacquet

Soit P un groupe localement compact totalement discontinu qui soit produit semi-direct d'un sous-groupe fermé M par un sous-groupe fermé distingué U. Supposons de plus que U soit la réunion de ses sous-groupes compacts. Soit ϑ un caractère de U stable par l'action de M et soit π une représentation lisse de P dans un espace E. On note $E_{U,\vartheta}$ le quotient de E par le sous-espace engendré par les éléments $\pi(u)x - \vartheta(u)x$ ($u \in U$, $x \in E$). La représentation π passe au quotient et définit une représentation $\pi_{U,\vartheta}$ de P dans l'espace $E_{U,\vartheta}$; la restriction de $\pi_{U,\vartheta}$ à U est un multiple de ϑ. On note $r_{U,\vartheta}(\pi)$ la restriction à M de la représentation $\delta_P\delta_M^{-1}\otimes\pi_{U,\vartheta}$. Le foncteur $\pi \longmapsto r_{U,\vartheta}(\pi)$ ainsi défini a les propriétés suivantes (cf. [2], [8], [11]).

PROPOSITION 2.— (i) *Le foncteur* $\pi \longmapsto r_{U,\vartheta}(\pi)$ *est exact.*

(ii) *Si* ρ *est une représentation lisse de* M

$$\mathrm{Hom}_P(\pi,\rho \otimes \vartheta) = \mathrm{Hom}_M(r_{U,\vartheta}(\pi),\delta_P\delta_M^{-1} \otimes \rho) .$$

Si ϑ est le caractère trivial de U, on note $r_{U,1} = r_U$.

2. Construction de représentations de GL(n)

2.1. Induction à partir de sous-groupes paraboliques

Soit k un corps local non archimédien. Si n est un entier positif ou nul, on note G_n le groupe $GL(n,k)$: c'est un groupe localement compact et totalement discontinu.

Une *partition* (ordonnée) de l'entier n est une suite $\alpha = (n_1,\ldots,n_r)$ d'entiers positifs tels que $n = n_1 + \ldots + n_r$. A une telle partition correspond une décomposition en blocs des matrices carrées d'ordre n. On notera G_α le groupe formé des matrices inversibles diagonales par blocs, par P_α le groupe formé des matrices triangulaires supérieures par blocs, et par U_α le sous-groupe de P_α formé des éléments dont les blocs diagonaux sont des matrices unités. Les groupes P_α seront appelés sous-groupes *paraboliques standards* de G_n. Le groupe U_α est le radical unipotent de P_α. On a la décomposition de Levi : $P_\alpha = G_\alpha.U_\alpha$.

Si α et β sont deux partitions de l'entier n, on dit que α est *plus fine* que β si $G_\alpha \subset G_\beta$.

Soit $\alpha = (n_1,\ldots,n_r)$ une partition de l'entier n. Etant donné une représentation lisse ρ_i de chaque G_{n_i}, on construit une représentation du groupe G_n de la manière suivante. Le produit tensoriel $\rho_1 \otimes \ldots \otimes \rho_r$ est une représentation lisse de G_α ; on l'étend à P_α en lui imposant d'être triviale sur U_α. On l'induit ensuite à G_n. On note $\rho_1 \times \ldots \times \rho_r$ la représentation $\mathrm{Ind}_{P_\alpha}^{G_n}\rho_1 \otimes \ldots \otimes \rho_r \otimes 1_{U_\alpha}$ ainsi obtenue.

2.2. Les représentations cuspidales

Une représentation lisse irréductible π de G_n est dite *cuspidale* ("supercuspidale" dans la terminologie de [16], "absolutely cuspidal" dans celle de [8], [11], [14]) si π ne se plonge dans aucune représentation $\rho_1 \times \ldots \times \rho_r$ avec $r \geq 2$.

On peut montrer (cf. [18]) que toute représentation lisse irréductible π de G_n se plonge dans une représentation $\rho_1 \times \ldots \times \rho_r$ où les ρ_i sont des représentations cuspidales irréductibles de G_{n_i}.

Pour qu'une représentation lisse irréductible π de G_n soit cuspidale, il faut et il suffit que ses coefficients soient à support compact modulo les scalaires, ou encore que $r_{U_\alpha}(\pi) = 0$ pour toute partition de n sauf $\alpha = (n)$. On trouvera d'autres propriétés des représentations cuspidales dans [1], [7], [8],

[11], [16].

2.3. Décomposition des représentations induites

On va maintenant montrer comment la classification des représentations lisses irréductibles des groupes G_n se ramène à la classification des représentations cuspidales en étudiant les représentations qui apparaîssent comme sous-quotients des représentations $\rho_1 \times \ldots \times \rho_r$. Il convient d'abord d'étudier l'irréductibilité de ces représentations.

Soient $\alpha = (n_1,\ldots,n_r)$ et $\beta = (m_1,\ldots,m_s)$ deux partitions de l'entier n. Pour chaque n_i (resp. m_i), soit ρ_i (resp. σ_i) une représentation cuspidale irréductible de G_{n_i} (resp. G_{m_i}). On va d'abord calculer l'espace $\mathrm{Hom}_{G_n}(\rho_1 \times \ldots \times \rho_r, \sigma_1 \times \ldots \times \sigma_s)$ des opérateurs d'entrelacement de $\rho_1 \times \ldots \times \rho_r$ dans $\sigma_1 \times \ldots \times \sigma_s$.

Par réciprocité de Frobenius cet espace est isomorphe à $\mathrm{Hom}_{P_\beta}(\rho_1 \times \ldots \times \rho_{r\,|P_\beta}, \delta_{P_\beta}^{-1}\sigma_1 \otimes \ldots \otimes \sigma_s \otimes 1_{U_\beta})$. D'après la propriété caractéristique du foncteur de Jacquet, cet espace est encore isomorphe à $\mathrm{Hom}_{G_\beta}(r_{U_\beta}(\rho_1 \times \ldots \times \rho_r), \sigma_1 \otimes \ldots \otimes \sigma_s)$.

Le calcul des opérateurs d'entrelacement se ramène donc au calcul de $r_{U_\beta}(\rho_1 \times \ldots \times \rho_r)$ qui est donné par la proposition suivante ([2], lemme 2.12 ; [11]).

PROPOSITION 3.— *La représentation* $r_{U_\beta}(\rho_1 \times \ldots \times \rho_r)$ *est composée des représentations*

$$\mathrm{Ind}_{P_{z(\alpha)}\cap G_\beta}^{G_\beta}\left[\rho_{z(1)} \otimes \ldots \otimes \rho_{z(r)} \otimes 1_{G_\beta \cap U_{z(\alpha)}}\right]$$

pour les permutations z *des entiers* $1,\ldots,r$ *telles que la partition* $z(\alpha)$ *de* n *(donnée par* $n = n_{z(1)} + \ldots + n_{z(r)}$ *) soit plus fine que* β *et que* $z(i) < z(i+1)$ *si* $n_{z(1)} + \ldots + n_{z(i)}$ *n'est pas de la forme* $m_1 + \ldots + m_t$.

Indiquons brièvement comment se démontre ce résultat. Posons pour simplifier $\rho = \rho_1 \otimes \ldots \otimes \rho_r$. La représentation $r_{U_\beta}(\rho_1 \times \ldots \times \rho_r)$ ne dépend que de la restriction de ρ à P_β.

Soit $W_{\alpha,\beta}$ l'ensemble des matrices des applications linéaires $(x_1,\ldots,x_n) \longmapsto (x_{\bar{w}(1)},\ldots,x_{\bar{w}(n)})$ de k^n dans lui-même, où $\bar{w}$ est une permutation des entiers $1,\ldots,n$ vérifiant

$\bar{w}(i+1) \geq \bar{w}(i)$ si i n'est pas de la forme $m_1 + \ldots + m_t$,

$\bar{w}^{-1}(i+1) \geq \bar{w}^{-1}(i)$ si i n'est pas de la forme $n_1 + \ldots + n_t$.

La décomposition de Bruhat montre que G_n est réunion disjointe des doubles classes $P_\alpha w P_\beta$ où w parcourt $W_{\alpha,\beta}$.

Si $w \in W_{\alpha,\beta}$, soit $I(w)$ l'espace des fonctions f sur $P_\alpha w P_\beta$ à valeurs dans l'espace de ρ vérifiant

$$f(mug) = \delta_{P_\alpha}^{-1}(m)\rho(m)f(g) \quad \text{si } m \in G_\alpha,\ u \in U_\alpha,\ g \in P_\alpha w P_\beta$$

qui soient invariantes à droite par un sous-groupe ouvert de P_β et dont le support soit compact modulo P_α. Soit π_w la représentation de P_β par translations à droite dans l'espace $I(w)$.

De la décomposition de G_n en doubles classes localement fermées $P_\alpha w P_\beta$, on déduit que la restriction de ρ à P_β est composée des représentations π_w, et, comme le foncteur de Jacquet est exact, que $r_{U_\beta}(\rho)$ est composée des représentations $r_{U_\beta}(\pi_w)$. Remarquons qu'un élément de $I(w)$ est déterminé par sa restriction à wP_β. On en déduit facilement que π_w est isomorphe à la représentation induite

$$\mathrm{Ind}_{w^{-1}P_\alpha w\cap P_\beta}^{P_\beta}\left[\delta^{-1}_{w^{-1}P_\alpha w\cap P_\beta}\cdot(\rho\circ \mathrm{int}\ w)\Big|_{w^{-1}M_\alpha w\cap P_\beta}\otimes 1_{w^{-1}U_\alpha w\cap P_\beta}\right].$$

On en déduit que $r_{U_\beta}(\pi_w)$ est isomorphe à

$$\mathrm{Ind}_{w^{-1}P_\alpha w\cap G_\beta}^{G_\beta}\left[r_{w^{-1}M_\alpha w\cap U_\beta}(\rho\circ \mathrm{int}\ w)\otimes 1_{w^{-1}U_\alpha w\cap G_\beta}\right].$$

Comme $w^{-1}P_\alpha w\cap G_\beta$ est un sous-groupe parabolique standard de G_β et que ρ est une représentation cuspidale de G_β, on voit que cette représentation est nulle, à moins que $w^{-1}G_\alpha w\subset G_\beta$. Dans ce cas, l'action de w consiste à permuter les blocs constituant G_α, d'où le résultat.

Exemple.— Supposons sur le parabolique standard P_β soit associé à P_α (c'est-à-dire que β soit de la forme $y(\alpha)$ avec $y\in\mathfrak{S}_r$). Alors, la représentation $r_{U_\beta}(\rho_1\times\ldots\times\rho_r)$ est composée des représentations $\rho_{z(1)}\otimes\ldots\otimes\rho_{z(r)}$ où z décrit l'ensemble des éléments de $\mathfrak{S}_r$ tels que $n_{z(i)}=m_i$ pour tout i.

COROLLAIRE.— *Soit ω un sous-quotient irréductible de $\rho_1\times\ldots\times\rho_r$. Alors il existe un parabolique standard P_β associé à P_α tel que $r_{U_\beta}(\omega)\neq 0$.*

En effet, ω se plonge dans une représentation $\sigma_1\times\ldots\times\sigma_s$ associée à une partition β de n avec les σ_i cuspidales. On a donc $r_{U_\beta}(\omega)\neq 0$, et la proposition implique que P_β soit associé à P_α.

Le résultat suivant est dû à R. Howe ([17]) avec des méthodes différentes.

PROPOSITION 4.— *Si les ρ_i sont des représentations cuspidales irréductibles de groupes G_{n_i}, la représentation $\rho_1\times\ldots\times\rho_r$ est de longueur finie, au plus égale à $r!$.*

En effet, une suite de composition de $\rho_1\times\ldots\times\rho_r$ induit une suite de composition de $r_{U_\beta}(\rho_1\times\ldots\times\rho_r)$ pour chaque parabolique standard P_β associé à $P_{n_1,\ldots,n_r}$. Le corollaire précédent montre que la longueur d'une suite de composition de $\rho_1\times\ldots\times\rho_r$ est au plus égale à la somme des longueurs des suites de composition des $r_{U_\beta}(\rho_1\times\ldots\times\rho_r)$, qui sont elles-mêmes données par l'exemple ci-dessus.

COROLLAIRE.— *Soient $\rho_1,\ldots,\rho_r$ des représentations de longueur finie de $G_{n_1},\ldots,G_{n_r}$. Alors la représentation $\rho_1\times\ldots\times\rho_r$ est de longueur finie.*

En effet, on peut supposer les ρ_i irréductibles ; on plonge alors chaque ρ_i dans une représentation $\tau_1\times\ldots\times\tau_s$ où les τ_i sont cuspidales irréductibles.

Voici encore une conséquence des résultats précédents (cf. [2], théorème 2.9).

PROPOSITION 5.— *Soient* $\alpha = (n_1,\dots,n_r)$ *et* $\beta = (m_1,\dots,m_s)$ *deux partitions de* n *, et soit* $\rho_1,\dots,\rho_r$ *(resp.* $\sigma_1,\dots,\sigma_s$ *) des représentations cuspidales irréductibles de* $G_{n_1},\dots,G_{n_r}$ *(resp.* $G_{m_1},\dots,G_{m_r}$ *). Alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) $r = s$ *et il existe* $z \in \mathfrak{S}_r$ *, tel que* $m_i = n_{z(i)}$ *et* $\sigma_i = \rho_{z(i)}$.

(ii) $\mathrm{Hom}_{G_n}(\rho_1 \times \dots \times \rho_r, \sigma_1 \times \dots \times \sigma_s) \neq 0$.

(iii) $\rho_1 \times \dots \times \rho_r$ *et* $\sigma_1 \times \dots \times \sigma_s$ *ont des suites de Jordan-Hölder équivalentes.*

(iv) $\rho_1 \times \dots \times \rho_r$ *et* $\sigma_1 \times \dots \times \sigma_s$ *ont un sous-quotient commun.*

Conséquence.— Si π est une représentation lisse irréductible d'un groupe G_n , il existe, à l'ordre près, une unique suite $\rho_1,\dots,\rho_r$ de représentations cuspidales irréductibles de groupes G_{n_i} telle que π soit un sous-quotient de $\rho_1 \times \dots \times \rho_r$. Il est commode d'exprimer cela de la manière suivante.

DÉFINITION.— *Soit* E *un ensemble. Deux suites* $(x_1,\dots,x_r)$ *et* $(y_1,\dots,y_s)$ *d'éléments de* E *sont dites équivalentes si elles sont égales à l'ordre près. On appelle* multiensemble *d'éléments de* E *une classe d'équivalence pour cette relation.*

Si π et les ρ_i sont comme ci-dessus, on dira que le multiensemble $(\rho_1,\dots,\rho_r)$ est le *support* de π .

Remarque.— Les propositions 3, 4 et 5 se généralisent à tous les groupes réductifs. Les démonstrations sont analogues (cf. [2], [11]). Une étude plus poussée permet d'améliorer la borne de la longueur d'une représentation de la forme $\mathrm{Ind}_P^G\rho$ avec ρ cuspidale irréductible (cf. [11], corollaire 7.2.3). Dans le cas des groupes G_n, ce résultat exprime que la longueur de la représentation $\rho_1 \times \dots \times \rho_n$ associée à la partition α est au plus égale au nombre de $z \in \mathfrak{S}_r$ tels que $z(\alpha) = \alpha$. Pour ce groupe, on verra cependant plus loin comment encore améliorer cette borne.

3. Restriction des représentations au sous-groupe P_n

Pour obtenir davantage d'informations sur les représentations $\rho_1 \times \dots \times \rho_r$, Bernstein et Zelevinsky étudient leur restriction au sous-groupe P_n de G_n formé des matrices dont la dernière ligne est égale à $(0,\dots,0,1)$. Ils exploitent ainsi systématiquement une méthode déjà utilisée par I.M. Gelfand et D.A. Kajdan [13].

3.1. Les représentations lisses de P_n

PROPOSITION 6.— *Soit* π *une représentation lisse du groupe* P_n . *Alors il existe une suite décroissante* $\pi = \pi_0 \supset \pi_1 \supset \dots \supset \pi_n = \{0\}$ *de sous-espaces invariants de* π *tels que les quotients* π_{i-1}/π_i *soient de la forme*

$$\mathrm{Ind}_{G_{n-i}\cdot V_n^i}^{P_n}\left[\delta_{P_n}^{-1} r_{V_n^i,\vartheta_n^i}(\pi)\otimes\vartheta_n^i\right]$$

où V_n^i *est le sous-groupe de* P_n *formé des matrices*

$$v=\begin{pmatrix} \boxed{1_{n-i}} & & & & * \\ & v_{n-i} & & & \\ & 1 & v_{n-i+1} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & v_{n-1} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

et ϑ_n^i *est le caractère de* V_n^i *défini par*

$$\vartheta_n^i(v)=\vartheta(v_{n-i+1})\ldots\vartheta(v_{n-1})$$

où ϑ *est un caractère additif non trivial de* k .

En effet, on remarque que P_n est le produit semi-direct de G_{n-1} par V_n^1. Des résultats analogues aux théorèmes de Mackey (cf. [1] § 5, [24]) permettent de décrire les représentations lisses d'un tel groupe. On est alors ramené à des représentations de G_{n-1} , ou de P_{n-1} , ce qui permet de conclure par induction.

COROLLAIRE.— *Les représentations lisses irréductibles de* P_n *sont les représentations de la forme*

$$\pi(\sigma,i)=\mathrm{Ind}_{G_{n-i}\cdot V_n^i}^{P_n}\left[\sigma\otimes\vartheta_n^i\right]$$

où σ *est une représentation lisse irréductible de* G_{n-i} .

Exemple.— Si π est la restriction à P_n d'une représentation cuspidale irréductible de G_n , on a $r_{V_n^i,\vartheta_n^i}(\pi)=0$ si $1\le i\le n-1$ car ϑ_n^i est trivial sur le radical unipotent du parabolique $P_{n-i,i}$. D'autre part, un résultat essentiel de [13] est que $r_{V_n^n,\vartheta_n^n}$ est de dimension 1 . Par conséquent π est irréductible et isomorphe à

$$\mathrm{Ind}_{V_n^n}^{P_n}\vartheta_n^n$$

On notera que V_n^n est le groupe des matrices triangulaires supérieures unipotentes et que ϑ_n^n est un caractère "en position générale" de V_n^n .

DÉFINITION.— *Si* π *est une représentation lisse de* P_n *, on dira que* $r_{V_n^i,\vartheta_n^i}$ *est le* i*-ième* dérivé *de* π *(pour* $1\le i\le n$ *). C'est une représentation lisse de* G_{n-i} . *On le notera* $\pi^{(i)}$. *Si* π *est une représentation lisse de* G_n *, on appellera encore dérivés de* π *les dérivés de sa restriction à* P_n . *On posera* $\pi^{(o)}=\pi$ *, et* $\pi^{(i)}=0$ *si* $i>n$.

3.2. Restriction à P_n des représentations induites

Soit $n=n_1+n_2$ une partition de n et soient ρ_1 et ρ_2 deux représentations lisses de G_{n_1} et G_{n_2} respectivement.

On aura déjà des informations sur la restriction de $\rho_1\times\rho_2$ à P_n en calculant les dérivés de $\rho_1\times\rho_2$. Par définition, $(\rho_1\times\rho_2)^{(i)}=r_{V_n^i,\vartheta_n^i}(\rho_1\times\rho_2)$.

Par un calcul tout à fait analogue à celui fait en 2.3, on trouve que $(\rho_1 \times \rho_2)^{(i)}$ est composée des représentations

$$\rho_1^{(j)} \times \rho_2^{(n-i-j)}$$

pour $0 \leq j \leq n-i$.

PROPOSITION 7.— *La restriction à* P_n *d'une représentation lisse irréductible de* G_n *est de longueur finie.*

C'est une conséquence de l'exemple 3.1 et des calculs précédents.

Ce calcul s'interprète de manière agréable en introduisant l'anneau des représentations des groupes G_n . Soit $\mathcal{R}_n$ le groupe de Grothendieck de la catégorie des représentations lisses de longueur finie de G_n : c'est le groupe abélien libre ayant pour base l'ensemble des classes de représentations lisses irréductibles de G_n . On notera de la même manière une représentation lisse de longueur finie de G_n et son image dans $\mathcal{R}_n$. Soit $\mathcal{R} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{R}_n$. L'application $(\rho_1, \rho_2) \longrightarrow \rho_1 \times \rho_2$ s'étend en une multiplication sur $\mathcal{R}$ qui en fait un anneau gradué : c'est l'anneau des représentations des groupes G_n . La multiplication sur $\mathcal{R}$ est associative (c'est la transitivité de l'opération d'induction) et commutative (cf. [28], théorème 1.9).

Si π est une représentation lisse irréductible de G_n , posons $\mathcal{D}\pi = \pi^{(0)} + \ldots + \pi^{(n)}$. Cette opération s'étend en un homomorphisme de groupes $\mathcal{D} : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$.

PROPOSITION 8.— *$\mathcal{D}$ est un homomorphisme d'algèbres.*

Cela résulte du calcul de $(\rho_1 \times \rho_2)^{(i)}$ fait plus haut.

Exemple.— Soient $\rho_1 \ldots \rho_r$ des représentations cuspidales irréductibles de $G_{n_1}, \ldots, G_{n_r}$, alors la proposition 8 et l'exemple 3.1 permettent de calculer $\mathcal{D}(\rho_1 \times \ldots \times \rho_r)$. On en déduit dans $\mathcal{R}$ l'égalité

$$(\rho_1 \times \ldots \times \rho_r)^{(i)} = \Sigma\, \rho_{i_1} \times \ldots \times \rho_{i_s}$$

où la somme est étendue aux suites strictement croissantes $(i_1, \ldots, i_s)$ d'entiers telles que $n_{i_1} + \ldots + n_{i_s} = n_1 + \ldots + n_r - i$.

3.3. Un lemme crucial

On a cependant besoin de résultats plus précis sur la restriction à P_n de $\rho_1 \times \ldots \times \rho_r$. Ainsi on a des renseignements sur les sous-représentations de cette restriction : ils sont donnés par le lemme suivant, qui est crucial dans tout le travail de Bernstein et Zelevinsky.

Si π est une représentation lisse de G_n et s un nombre réel, on note $\pi(s)$ la représentation de G_n donnée par

$$\pi(s)(g) = |\det g|^s \pi(g) \quad \text{si} \quad g \in G_n .$$

Lemme 1.— *Soit* π *une représentation lisse de* G_n *et* ω *une représentation* *lisse irréductible de* P_n *dont le seul dérivé non nul soit* $\omega^{(n-m)} = \sigma$. *Si* ω *se plonge dans la restriction de* π *à* P_n *, alors* $\check{\sigma}(-1)$ *est un quotient de* $(\check{\pi})^{(n-m)}$.

Démonstration.— Posons $Q_m = G_m.V_n^{n-m}$. Remarquons que dans la décomposition des représentations de P_n (cf. proposition 6), le choix du caractère ϑ est indifférent. On peut remplacer ϑ par son complexe conjugué $\overline{\vartheta}$, cela remplace ϑ_n^{n-m} par $\overline{\vartheta}_n^{n-m}$ et on a donc

$$\omega \simeq \mathrm{Ind}_{Q_m}^{P_n}\left[\delta_{P_n}^{-1}\sigma \otimes \overline{\vartheta}_n^{n-m}\right] .$$

L'injection $\omega \to \pi_{|P_n}$ induit par transposition un homomorphisme non nul $\check{\pi}_{|P_n} \to \check{\omega}$:

$$0 \neq \mathrm{Hom}_{P_n}(\check{\pi}_{|P_n}, \check{\omega}) = \mathrm{Hom}_{P_n}(\check{\pi}_{|P_n}, \widetilde{\mathrm{Ind}}_{Q_m}^{P_n}\left[\delta_{P_n}^{+1}\check{\sigma} \otimes \vartheta_n^{n-m}\right]) .$$

Par réciprocité de Frobenius, on a donc

$$0 \neq \mathrm{Hom}_{Q_m}(\check{\pi}_{|Q_m}, \delta_{P_n}^{+2}\delta_{Q_m}^{-1}\check{\sigma} \otimes \vartheta_n^{n-m}) .$$

Par définition des dérivés, on a donc

$$0 \neq \mathrm{Hom}_{G_m}((\check{\pi})^{(n-m)}, \delta_{P_n}^{2}\check{\sigma}) .$$

Remarque.— Le point essentiel de ce lemme est le décalage $\delta_{P_n}^2$ qui apparaît sur $\check{\sigma}$.

3.4. Applications

Donnons tout de suite une application de ce lemme.

THÉORÈME 1.— *Soient* $\rho_1 \ldots \rho_r$ *des représentations cuspidales irréductibles de* $G_{n_1}, \ldots, G_{n_r}$. *Alors, si la représentation* $\pi = \rho_1 \times \ldots \times \rho_r$ *est réductible, il existe* i *et* j *tels que* $n_i = n_j$ *et* $\rho_j \simeq \rho_i(1)$.

Démonstration.— Soit $n = n_1 + \ldots + n_r$. L'exemple 3.3 montre que $\dim \pi^{(n)} = 1$. Par conséquent, si π est réductible, un de ses composants irréductibles τ est tel que $\tau^{(n)} = 0$. En modifiant au besoin l'ordre des ρ_i , on peut supposer que τ est une sous-représentation de π . Soit ω une sous-représentation irréductible de $\tau_{|P_n}$. Il existe donc un entier $m < n$ tel que $\omega^{(m)} \neq 0$. Alors $\sigma = \omega^{(m)}$ est une sous-représentation irréductible de $\pi^{(m)}$. D'autre part le lemme 1 montre que $\check{\sigma}(-1)$ est un quotient de $(\check{\pi})^{(m)}$. On conclut à l'aide de l'exemple 3.2 et des propositions 1 et 5.

Remarque.— La condition du théorème est aussi suffisante. Cela résulte d'un argument classique de prolongement de séries complémentaires (cf. [28], 1.11).

Les résultats précédents permettent d'étudier les représentations de G_n de la forme $\pi = \rho \times \rho(1) \times \ldots \times \rho(r-1)$ où ρ est une représentation cuspidale irréductible de G_ℓ . Soit $\alpha = (\ell, \ldots, \ell)$ la partition correspondante de n .

PROPOSITION 9.— (i) π *admet un unique sous-espace invariant irréductible* π_0 . *On a*

$$r_{U_\alpha}(\pi_0) = \rho \otimes \ldots \otimes \rho(r-1) .$$

La restriction de π_0 *à* P_n *est irréductible et* $\pi_0^{(n-\ell)}$ *est l'unique sous-espace invariant irréductible de* $\rho \times \ldots \times \rho(r-2)$.

(ii) π *admet un unique quotient irréductible* π_1 . *On a*

$$r_{U_\alpha}(\pi_1) = \rho(r-1) \otimes \ldots \otimes \rho \;.$$

La représentation π_1 *est essentiellement de carré intégrable (i.e. les coefficients de* $\pi_1 \otimes \chi$ *sont de carré intégrable modulo le centre de* G_n *pour un certain caractère* χ *de* G_n *).*

(cf. [28], § 3 et § 9).

La proposition résulte facilement des résultats précédents si $r = 2$. Sinon on remarque que $r_{U_\alpha}(\pi)$ est composé de représentations irréductibles de G_α toutes distinctes. On en déduit que les quotients π_i d'une suite de Jordan-Hölder de π sont déterminés par les $r_{U_\alpha}(\pi_i)$. Un seul des π_i est une sous-représentation de π : c'est celui tel que $\rho \otimes \ldots \otimes \rho(r-1)$ soit un composant de $r_{U_\alpha}(\pi_i)$. Pour calculer $r_{U_\alpha}(\pi_0)$, on remarque que π_0 se plonge dans $\rho \times \ldots \times \rho(j-1) \times \omega \times \rho(j+2) \times \ldots \times \rho(r)$ où ω est le sous-espace invariant irréductible de $\rho(j) \times \rho(j+1)$. On fait de même pour π_1 . Pour voir que π_1 est essentiellement de carré intégrable, on peut utiliser un critère dû à Harish-Chandra (cf. [11]).

Exemple.— Si ρ est la représentation triviale de $G_1 (\simeq k^\times)$, on sait que la représentation π contient une sous-représentation de dimension 1 de G_n (donnée par $g \longmapsto |\det g|^{(n-1)/2}$) , et admet pour quotient la représentation de Steinberg de G_n (cf. [10]).

4. Les théorèmes de classification

4.1. Première forme du théorème de classification

A l'aide des constructions du paragraphe précédent, on est en mesure d'énoncer les théorèmes de classification.

On appelle *segment* un ensemble de classes de représentations cuspidales irréductibles de groupes G_n de la forme $\Delta = \{\rho, \rho(1), \ldots, \rho(r-1)\}$. On le notera $\Delta = [\rho, \rho(r-1)]$. Soient $\Delta_1 = [\rho_1, \rho_1']$ et $\Delta_2 = [\rho_2, \rho_2']$, deux segments. On dit que Δ_1 et Δ_2 sont *liés* si $\Delta_1 \not\subset \Delta_2$, $\Delta_2 \not\subset \Delta_1$ et $\Delta_1 \cup \Delta_2$ est un segment. Si Δ_1 et Δ_2 sont liés, on dit que Δ_1 *précède* Δ_2 si $\rho_2 = \rho_1(m)$ où m est un entier positif.

Si $\Delta = [\rho, \rho(r-1)]$ est un segment, on note $Z(\Delta)$ (resp. $L(\Delta)$) l'unique sous-représentation (resp. quotient) irréductible de $\rho \times \ldots \times \rho(r-1)$.

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble de tous les segments.

THÉORÈME 2.— a) *Soient* $\Delta_1 \ldots \Delta_r$ *des segments. Supposons que si* $i < j$, Δ_i *ne précède pas* Δ_j . *Alors la représentation* $Z(\Delta_1) \times \ldots \times Z(\Delta_r)$ *admet une unique sous-représentation irréductible. On la note* $Z(\Delta_1, \ldots, \Delta_r)$.

b) *Les représentations* $Z(\Delta_1,\ldots,\Delta_r)$ *et* $Z(\Delta'_1,\ldots,\Delta'_s)$ *sont équivalentes si et seulement si les suites* $(\Delta_1,\ldots,\Delta_r)$ *et* $(\Delta'_1,\ldots,\Delta'_s)$ *sont égales à l'ordre près.*

c) *Toute représentation lisse irréductible de* G_n *est de la forme* $Z(\Delta_1,\ldots,\Delta_r)$.

Ce théorème montre que les représentations lisses irréductibles des groupes G_n sont classées par les multiensembles de segments. Si a est le multiensemble $(\Delta_1,\ldots,\Delta_r)$, on note $Z(a)$ la classe de la représentation $Z(\Delta_1,\ldots,\Delta_r)$.

La partie a) du théorème est une conséquence du résultat suivant (cf. [28], 6.2).

PROPOSITION 10.— *Avec les mêmes hypothèses que dans la partie* a) *du théorème, si* $\pi = Z(\Delta_1) \times \ldots \times Z(\Delta_r)$ *est une représentation de* G_n *, alors sa restriction à* P_n *admet une unique sous-représentation irréductible.*

Soit m le plus grand entier tel que $\pi^{(m)} \neq 0$. Pour démontrer la proposition, on prouve d'abord que, si ω est une sous-représentation irréductible de $\pi_{|P_n}$, on a $\omega^{(m)} \neq 0$. Le calcul de $\mathcal{D}\pi$ montre que $\pi^{(m)} = Z(\Delta_1^-) \times \ldots \times Z(\Delta_r^-)$ où Δ_i^- est le segment $[\rho_i,\rho'_i(-1)]$ si $\Delta_i = [\rho_i,\rho'_i]$. On voit alors par récurrence que $\omega^{(m)}$ est l'unique sous-représentation irréductible de $\pi^{(m)}$, à savoir $Z(\Delta_1^-,\ldots,\Delta_r^-)$.

4.2. <u>Modèles des représentations</u>

La proposition 10 montre donc que m est encore l'ordre de la dérivée non nulle de $Z(\Delta_1,\ldots,\Delta_r)$ d'ordre maximal et que $Z(\Delta_1,\ldots,\Delta_r)^{(m)}$ admet un unique sous-module, à savoir $Z(\Delta_1^-,\ldots,\Delta_r^-)$. En fait on a $Z(\Delta_1,\ldots,\Delta_r)^{(m)} = Z(\Delta_1^-,\ldots,\Delta_r^-)$ (cf. [28], théorème 8.1). Par un argument de réciprocité de Frobenius, on en déduit que la restriction à P_n de $Z(\Delta_1,\ldots,\Delta_r)$ se réalise de manière unique comme sous-représentation de

$$\widetilde{\mathrm{Ind}}_{G_{n-m}V_n^m}^{P_n}\left[\delta_{P_n}^{-1} Z(\Delta_1^-,\ldots,\Delta_r^-) \otimes \vartheta_n^m\right] .$$

C'est le *modèle de Kirillov dégénéré* de $Z(\Delta_1,\ldots,\Delta_r)$ (cf. [28], 5.2).

On en déduit également l'existence d'un *modèle de Whittaker dégénéré* : il existe un caractère ψ de V_n^n (le groupe des matrices triangulaires unipotentes supérieures) tel que $Z(\Delta_1,\ldots,\Delta_r)$ se réalise de manière unique comme sous-représentation de

$$\widetilde{\mathrm{Ind}}_{V_n^n}^{G_n}\psi$$

(cf. [28], 8.3).

4.3. <u>Deuxième forme du théorème de classification</u>

THÉORÈME 3.— a) *Soient* $\Delta_1,\ldots,\Delta_r$ *des segments. Supposons que si* $i < j$, Δ_i *ne précède pas* Δ_j . *Alors la représentation* $L(\Delta_1) \times \ldots \times L(\Delta_r)$ *admet un unique quotient irréductible. On le note* $L(\Delta_1,\ldots,\Delta_r)$.

b) *Les représentations* $L(\Delta_1,\ldots,\Delta_r)$ *et* $L(\Delta'_1,\ldots,\Delta'_s)$ *sont équivalentes si et seulement si les suites* $(\Delta_1,\ldots,\Delta_r)$ *et* $(\Delta'_1,\ldots,\Delta'_s)$ *sont égales à l'ordre* *près.*

c) *Toute représentation lisse irréductible de* G_n *est de la forme* $L(\Delta_1,\dots,\Delta_r)$.

Ce théorème est une conséquence des résultats suivants.

PROPOSITION 11.— *Toute représentation de carré intégrable de* G_n *est de la forme* $L(\Delta)$ *pour un segment* $\Delta = [\rho,\rho(r)]$ *où* ρ *est une représentation cuspidale irréductible telle que* $\rho(\frac{r}{2})$ *soit unitaire.*

C'est un résultat non publié de I.N. Bernstein (cf. proposition 9).

PROPOSITION 12.— *Toute représentation tempérée de* G_n *est de la forme* $L(\Delta_1) \times \dots \times L(\Delta_r)$ *où les* Δ_i *sont des segments comme dans l'énoncé précédent.*

Cf. [19], § 3.

PROPOSITION 13.— *Soient* $\Delta_1,\dots,\Delta_r$ *des segments. Pour que la représentation* $L(\Delta_1) \times \dots \times L(\Delta_r)$ *soit irréductible, il faut et il suffit que deux segments quelconques ne soient pas liés.*

Cf. [28], théorème 9.7.

Le théorème 2 est alors une reformulation du théorème du quotient de Langlands (cf. [5], [23], [25]).

4.4. Liens avec la correspondance de Langlands

Soit W_k le groupe de Weil du corps k (cf. [12], [27]). Si σ est une représentation de W_k et $s \in \mathbb{Z}$, on note $\sigma(s)$ la représentation donnée par $z \longrightarrow |z|^s\sigma(z)$ ($z \in W_k$). Soit $\mathcal{W}$ la catégorie des couples (σ,N) où σ est une représentation lisse semi-simple de dimension finie de W_k dans un espace vectoriel complexe V et N un endomorphisme nilpotent de V tel que $N \in \mathrm{Hom}_{W_k}(\sigma(1),\sigma)$.

R.P. Langlands a conjecturé (cf. [3], [4]) l'existence d'une bijection $(\sigma,N) \longmapsto \pi(\sigma,N)$ de l'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets (σ,N) de la catégorie $\mathcal{W}$ tels que $\dim\sigma = n$ sur l'ensemble des classes de représentations lisses irréductibles de G_n , vérifiant les conditions suivantes

a) le caractère central de $\pi(\sigma,N)$ est $\pi(\det\sigma)$,

b) $\pi(\sigma \otimes \chi,N) = \pi(\sigma,N) \otimes \pi(\chi)$ si χ est un caractère de W_k ,

c) $L(\pi(\sigma,N)) = L(\sigma,N)$

$\varepsilon(\pi(\sigma,N)) = \varepsilon(\sigma,N)$.

Aux premiers membres des égalités dans c), les facteurs L et ε sont ceux définis par Jacquet et Godement (cf. [14]), aux deuxièmes membres, ce sont les facteurs L et ε d'Artin et Langlands associés à (σ,N) (cf. [27]).

Pour $n = 1$, cette bijection est donnée par la théorie du corps de classe : on note $\pi(\sigma)$ le caractère de G_1 associé au caractère σ de W_k .

Le théorème 3 permet de ramener la démonstration de la correspondance de Langlands au cas des représentations cuspidales. Soit pour chaque entier n ,

$\sigma \longmapsto \pi(\sigma)$ une application de l'ensemble des classes de représentations lisses irréductibles de dimension n de W_k dans l'ensemble des classes de représentations irréductibles cuspidales du groupe G_n. On prolonge cette application aux objets de $\mathcal{W}$ comme suit.

On peut construire des objets de $\mathcal{W}$ de la manière suivante. Soit (e_i) la base canonique de $\mathbb{C}^n$. On note $sp(n)$ l'objet (σ,N) de $\mathcal{W}$ défini par

$$\begin{aligned} \sigma(z).e_i &= |z|^{i-1}.e_i \quad \text{si} \quad 1 \leq i \leq n \\ N.e_i &= e_{i+1} \quad \text{si} \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ N.e_n &= 0 \end{aligned}$$

On montre (cf. [12]) que tout objet indécomposable de $\mathcal{W}$ est de la forme $\tau \otimes sp(n)$ où τ est une représentation lisse irréductible de W_k, et que tout objet de $\mathcal{W}$ est somme directe (de manière unique à isomorphisme près) d'objets indécomposables. Si (σ,N) est un objet de $\mathcal{W}$, qui admet la décomposition suivante en objets indécomposables : $(\sigma,N) = (\tau_1 \otimes sp(n_1)) \oplus \ldots \oplus ((\tau_r \otimes sp(n_r))$, on lui associe la représentation $\pi(\sigma,N) = L(\Delta_1,\ldots,\Delta_r)$ où Δ_i est le segment $[\pi(\tau_i),\pi(\tau_i(n_i-1))]$.

THÉORÈME 4.— *Si l'application* $\sigma \longmapsto \pi(\sigma)$ *est une bijection vérifiant les conditions* a), b), c), *alors la correspondance* $(\sigma,N) \longmapsto \pi(\sigma,N)$ *induit une bijection de l'ensemble des classes d'objets de* $\mathcal{W}$ *tels que* $\dim \sigma = n$ *sur l'ensemble des classes de représentations lisses irréductibles de* G_n, *vérifiant les conditions* a), b), c).

Pour vérifier la condition c), on peut utiliser le calcul des facteurs $L(\pi(\sigma,N))$ et $\varepsilon(\pi(\sigma,N))$ effectué par H. Jacquet (cf. [20]).

Remarque.— La construction d'une bijection $\sigma \longmapsto \pi(\sigma)$ comme ci-dessus est encore à l'état embryonnaire. Pour $n = 2$, on a cependant des résultats assez complets (cf. [9]).

5. Structure de l'algèbre $\mathcal{R}$

5.1. Multiplicités dans les représentations induites

Afin de préciser la structure de l'algèbre $\mathcal{R}$, il est utile d'avoir quelques informations sur la décomposition des représentations $Z(\Delta_1) \times \ldots \times Z(\Delta_r)$.

THÉORÈME 5.— a) *La multiplicité de* $Z(\Delta_1,\ldots,\Delta_r)$ *dans* $Z(\Delta_1) \times \ldots \times Z(\Delta_r)$ *est égale à* 1.

b) *Pour qu'une représentation* $Z(\Delta'_1,\ldots,\Delta'_s)$ *soit isomorphe à un sous-quotient irréductible de* $Z(\Delta_1) \times \ldots \times Z(\Delta_r)$, *il faut et il suffit que le multiensemble* $(\Delta'_1,\ldots,\Delta'_s)$ *se déduise de* $(\Delta_1,\ldots,\Delta_r)$ *par une suite d'"opérations élémentaires", consistant à remplacer deux segments liés* Δ *et* Δ' *par* $\Delta \cup \Delta'$ *et* $\Delta \cap \Delta'$.

Cf. [28], théorème 7.1.

Remarque.— Si $(\Delta_1,\ldots,\Delta_r) = a$ est un multiensemble de segments, on lui associe une fonction d_a sur l'ensemble des segments : si Δ est un segment, $d_a(\Delta)$ est le nombre d'indices i tels que Δ_i contient Δ. Si b est le multiensemble $(\Delta'_1,\ldots,\Delta'_s)$, la condition b) est encore équivalente à

$$d_a(\Delta) \leq d_b(\Delta) \quad \text{pour tout segment } \Delta,$$
$$d_a(\Delta) = d_b(\Delta) \quad \text{pour tout segment } \Delta \text{ réduit à un élément.}$$

Cf. [29], proposition 2.5.

COROLLAIRE.— *Pour que la représentation* $Z(\Delta_1) \times \ldots \times Z(\Delta_r)$ *soit irréductible, il faut et il suffit que* Δ_i *et* Δ_j *ne soient pas liés, quels que soient* i *et* j.

Plus généralement, on a la proposition suivante.

Si $a = (\Delta_1,\ldots,\Delta_r)$ et $b = (\Delta'_1,\ldots,\Delta'_s)$ sont deux multiensembles de segments, notons $a+b$ le multiensemble $(\Delta_1,\ldots,\Delta_r,\Delta'_1,\ldots,\Delta'_s)$.

PROPOSITION 14.— *Soient* $a_1,\ldots,a_r$ *des multiensembles de segments. Supposons que si* $i \neq j$, *aucun segment* Δ *de* a_i *ne soit lié à un segment* Δ' *de* a_j. *Alors*

$$Z(a_1+\ldots+a_r) = Z(a_1) \times \ldots \times Z(a_r).$$

Cf. [28], proposition 8.5.

5.2. Structure de l'algèbre $\mathcal{R}$

Si ρ est une représentation cuspidale irréductible d'un groupe G_n, appelons *droite de représentations* l'ensemble $\rho(\mathbb{Z})$ des classes de représentation de G_n de la forme $\rho(s)$ pour $s \in \mathbb{Z}$. Notons $\mathcal{R}(\rho(\mathbb{Z}))$ le sous-groupe de $\mathcal{R}$ engendré par les représentations $Z(a)$ où a est un multiensemble de segments portés par $\rho(\mathbb{Z})$. A l'aide des résultats de 5.1, on montre le théorème suivant.

THÉORÈME 6.— (i) *L'algèbre* $\mathcal{R}$ *est une algèbre de polynômes sur* $\mathbb{Z}$ *en les indéterminées* $Z(\Delta)$ *où* Δ *décrit l'ensemble des segments.*

(ii) $\mathcal{R}(\rho(\mathbb{Z}))$ *est une sous-algèbre de* $\mathcal{R}$, *isomorphe à l'algèbre des polynômes sur* $\mathbb{Z}$ *en les indéterminées* $Z(\Delta)$ *où* Δ *décrit l'ensemble des segments portés par* $\rho(\mathbb{Z})$.

(iii) $\mathcal{R} = \otimes\, \mathcal{R}(\rho(\mathbb{Z}))$ *où le produit tensoriel est indexé par les droites* $\rho(\mathbb{Z})$.

5.3. Comparaison des deux classifications : l'involution de l'algèbre $\mathcal{R}$

Les théorèmes 2 et 3 donnent deux classifications différentes de l'ensemble des classes de représentations lisses irréductibles des groupes G_n, et on en déduit donc une bijection t de cet ensemble sur lui-même tel que $t(Z(a)) = L(a)$

pour tout multiensemble de segments a .

THÉORÈME 7.— *La bijection* t *s'étend en un automorphisme involutif de l'alègbre* $\mathcal{R}$.

Soit t' l'endomorphisme de $\mathcal{R}$ tel que $t'(Z(\Delta)) = L(\Delta)$ pour tout segment Δ . Alors t' est un automorphisme involutif de l'algèbre $\mathcal{R}$ (cf. [28], proposition 9.12). I.N. Bernstein a montré le résultat suivant (non publié) : $t'(Z(a))$ est une représentation irréductible, pour tout multiensemble de segments a . A l'aide du théorème 5, on montre alors que $t'(Z(a)) = L(a)$.

Remarque.— En particulier les énoncés de 5.1 restent vrais si on remplace les $Z(a)$ par des $L(a)$.

5.4. Conjectures

A.V. Zelevinsky a énoncé une conjecture précisant les suites de Jordan-Hölder des représentations $Z(\Delta_1) \times \ldots \times Z(\Delta_r)$.

Remarquons d'abord que d'après la proposition 14, l'étude d'une telle représentation se ramène immédiatement au cas où les segments Δ_i sont portés par une même droite $\rho^{\mathbb{Z}}$ de représentations cuspidales irréductibles, ce que nous supposerons désormais.

Fixons un multiensemble $a = (\Delta_1,\ldots,\Delta_r)$ de tels segments. Les sous-quotients irréductibles de $Z(a)$ ont tous même support, qui est un multiensemble $(\rho_1,\ldots,\rho_n)$ de représentations cuspidales irréductibles. On dira encore que $(\rho_1,\ldots,\rho_n)$ est le support de $(\Delta_1,\ldots,\Delta_r)$. Avec les notations de 5.1 on a
$\Delta_1 + \ldots + \Delta_r = \{\rho_1\} + \ldots + \{\rho_n\}$.

Pour chaque entier m , soit $V(m)$ un espace vectoriel complexe dont la dimension soit le nombre d'indices i tels que $\rho_i = \rho(m)$. Soit $V = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} V(m)$: c'est un espace vectoriel gradué. Le groupe G des automorphismes de degré 0 de V opère sur l'ensemble X des endomorphismes de V de degré 1 . On peut classer les orbites de G dans X par des multiensembles de segments de la manière suivante.

Si $T \in X$, il existe un multiensemble de segments $b(T)$ tel que $d_{b(T)}([\rho(\ell),\rho(m)]) = \dim T^{m-\ell}(V(\ell))$ pour tout couple d'entiers tels que $m \geq \ell$ (cf. [29], proposition 2.4 ; $d_{b(T)}$ est la fonction définie en 5.1). Le multiensemble $b(T)$ ainsi associé à T ne dépend que de l'orbite de T par G et l'application $T \longmapsto b(T)$ induit une bijection de l'ensemble des orbites de G dans X sur l'ensemble des multiensembles de segments $(\Delta'_1,\ldots,\Delta'_s)$ de support $(\rho_1,\ldots,\rho_n)$.

Soient $a = (\Delta_1,\ldots,\Delta_r)$ et $b = (\Delta'_1,\ldots,\Delta'_s)$ des multiensembles comme plus haut. Soient X_a et X_b les orbites de G dans X associées à a et b respectivement. L'adhérence $\overline{X}_b$ de X_b dans X est une variété algébrique complexe. On note $\mathcal{H}^i(\overline{X}_b)$ les faisceaux de cohomologie du complexe de Deligne-Goresky-McPherson défini sur $\overline{X}_b$ (cf. [6], [15], [26]).

PROPOSITION 15 (cf. [29]).— $Z(b)$ *est isomorphe à un sous-quotient de* $Z(\Delta_1) \times \ldots \times Z(\Delta_r)$ *si et seulement si* $X_a \subset \overline{X}_b$.

CONJECTURE (cf. [29]).— (i) *Les faisceaux* $\mathcal{H}^i(\overline{X}_b)$ *sont nuls pour* i *impair.*

(ii) *La multiplicité de* $Z(b)$ *dans une suite de Jordan-Hölder de* $Z(\Delta_1) \times \ldots \times Z(\Delta_r)$ *est égale à* $\sum_{i\geq 0} \dim \mathcal{H}^{2i}(\overline{X}_b)_x$ *si* $x \in X_a$.

Remarques.— 1) Notons que ρ n'intervient pas dans les constructions ci-dessus. En particulier, les multiplicités des quotients dans une suite de Jordan-Hölder de $Z(\Delta_1) \times \ldots \times Z(\Delta_r)$ ne dépendraient pas de ρ, mais des positions relatives des différents segments formant le multiensemble a .

2) Supposons vérifiée la correspondance de Langlands (cf. 4.4). Les représentations de support $(\rho_1,\ldots,\rho_n)$ sont alors classées par les classes d'isomorphismes d'objets (σ,N) de la catégorie $\mathcal{W}$ définie en 4.4, où la classe de la représentation σ est déterminée par le multiensemble $(\rho_1,\ldots,\rho_n)$. Fixons σ dans cette classe : c'est une représentation de W_k dans un espace vectoriel V . Si a est un multiensemble de segments de support $(\rho_1,\ldots,\rho_n)$, la variété X_a est isomorphe à l'ensemble des N tels que (σ,N) soit associé à la représentation $L(a)$, comme en 4.4.

Considérons maintenant l'ensemble Y des endomorphismes de V de degré (-1) . Comme plus haut, les orbites de G dans Y correspondent aux multiensembles de segments de support $(\rho_1,\ldots,\rho_n)$. Si a est un tel multiensemble, il existe une unique orbite Y_{a^*} dans Y telle que, si $T \in X_a$, $Y_{a^*} \cap Z(T)$ soit ouvert non vide dans $Z(T)$ ($Z(T)$ désigne le commutant de T dans Y) (cf. [29], 4.4).

CONJECTURE.— $Z(a^*) = L(a)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] I.N. BERNSTEIN, A.V. ZELEVINSKY - *Representations of the group* GL(n,F) *where* F *is a local non-archimedean field,* Uspekhi Mat. Nauk. vol.31, n° 3 (1976), 5-70.

[2] I.N. BERNSTEIN, A.V. ZELEVINSKY - *Induced representations of reductive* p-*adic groups* I, Ann. Scient. E.N.S., 4e série, t. 10(1977), 441-472.

[3] A. BOREL - *Formes automorphes et séries de Dirichlet (d'après R.P. Langlands),* Sém. Bourbaki 1974/75, exposé n° 466, Lect. Notes in Math. n° 514, Springer-Verlag, 1976.

[4] A. BOREL - *Automorphic* L-*functions,* in Automorphic forms, Representations and L-functions, Proc. Symp. pure Math. vol. 33, Amer. Math. Soc., Providence, 1979.

[5] A. BOREL, N. WALLACH - *Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations or reductive groups*, Annals of Math. Studies n° 94, Princeton University Press, Princeton (N.J.), 1980.

[6] J.L. BRYLINSKI - *(Co)homologie d'intersection et faisceaux pervers*, Sém. Bourbaki 1981/82, exposé n° 585.

[7] P. CARTIER - *Sur les représentations des groupes réductifs* p-*adiques et leurs caractères*, Sém. Bourbaki 1975/76, exposé n° 471, Lect. Notes in Math. n° 567, Springer-Verlag, 1977.

[8] P. CARTIER - *Representations of* p-*adic groups : a survey*, in Automorphic forms, Representations and L-functions, Proc. Symp. pure Math. vol. 33, Amer. Math. Soc., Providence (R.I.), 1979.

[9] P. CARTIER - *La conjecture locale de Langlands pour* GL(2) *et la démonstration de Ph. Kutzko*, Sém. Bourbaki 1979/80, exposé n° 550, Lect. Notes in Math. n° 842, Springer-Verlag, 1981.

[10] W. CASSELMAN - *The Steinberg character as a true character*, in Harmonic analysis on homogeneous spaces, Proc. Symp. pure Math. vol. 26, Amer. Math. Soc., Providence (R.I.), 1973, 413-417.

[11] W. CASSELMAN - *Introduction to the theory of admissible representations of* p-*adic reductive groups*, notes polycopiées, 1977.

[12] P. DELIGNE - *Formes modulaires et représentations de* GL(2) , in Modular Functions of One Variable II, Lect. Notes in Math. n° 349, Springer-Verlag, 1973.

[13] I.M. GELFAND, D.A. KAJDAN - *Representations of the group* GL(n,K) *where* K *is a local field*, in Lie groups and their representations, J. Wiley & Sons, Londres, 1975.

[14] R. GODEMENT, H. JACQUET - *Zeta functions of simple algebras*, Lect. Notes in Math. n° 260, Springer-Verlag, 1972.

[15] M. GORESKY, R. MAC-PHERSON - *Intersection homology theory*, Topology vol. 19, n° 2(1980), 135-162.

[16] HARISH-CHANDRA - *Harmonic analysis on reductive* p-*adic groups*, in Harmonic analysis on Homogeneous spaces, Proc. Symp. pure Math. n° 26, Amer. Math. Soc., Providence (R.I.), 1973.

[17] R.E. HOWE - *Some qualitative results on the representation theory of* GL(n) *over a* p-*adic field*, Pacific J. of Math. 73, n° 2(1977).

[18] H. JACQUET - *Sur les représentations des groupes réductifs* p-*adiques*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 280(1975), 1271-1272.

[19] H. JACQUET - *Generic representations*, in Non-Commutative Harmonic Analysis, Lect. Notes in Math. n° 587, Springer-Verlag, 1977.

[20] H. JACQUET - *Principal* L-*functions of the linear group*, in Automorphic forms, Representations and L-functions, Proc. Symp. pure Math. vol. 33, Amer.

Math. Soc., Providence (R.I.), 1979.

[21] H. JACQUET, R.P. LANGLANDS - *Automorphic forms on* GL(2) , Lect. Notes in Math. n° 114, Springer-Verlag, 1970.

[22] H. JACQUET, I.I. PIATETSKII-SHAPIRO, J.A. SHALIKA - *Automorphic forms on* GL(3) , Annals of Math. n° 109, 1979.

[23] R.P. LANGLANDS - *On the classification of irreducible representations of real algebraic groups,* notes polycopiées, Inst. for Adv. Study, Princeton (N.J.).

[24] F. RODIER - *Décomposition spectrale des représentations lisses,* in Non-Commutative Harmonic Analysis, Lect. Notes in Math. n° 587, Springer-Verlag, 1977.

[25] A.J. SILBERGER - *The Langlands Quotient Theorem for* p-*adic groups,* Math. Ann. n° 236(1978), 95-104.

[26] T.A. SPRINGER - *Quelques applications de la cohomologie d'intersection,* Sém. Bourbaki 1981/82, exposé n° 589.

[27] J. TATE - *Number theoretic background,* in Automorphic forms, Representations and L-functions, Proc. Symp. pure Math. vol. 33, Amer. Math. Soc., Providence (R.I.), 1979.

[28] A.V. ZELEVINSKY - *Induced representations of reductive* p-*adic groups* II. *On irreducible representations of* GL(n) , Ann. Scient. E.N.S., 4e série, t. 13(1980), 165-210.

[29] A.V. ZELEVINSKY - *Un analogue* p-*adique de la conjecture de Kajdan-Lusztig,* (en russe), Funkt. Anal. i ego Priloj. t. 15, n° 2(1981), 9-21.

François RODIER
Université de Paris VII
U.E.R. de Mathématiques
Tour 45-55, 5e étage
2 Place Jussieu
F-75251 PARIS CEDEX 05