JEAN-LUC BRYLINSKI

(Co)-homologie d'intersection et faisceaux pervers

Astérisque, tome 92-93 (1982), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 585, p. 129-157
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1981-1982__24__129_0>

Séminaire BOURBAKI
34e année, 1981/82, n° 585 Février 1982

($\mathcal{D}$) - HOMOLOGIE D'INTERSECTION ET FAISCEAUX PERVERS

par Jean-Luc BRYLINSKI

"Nourri dans le sérail, j'en connais les détours" (J. Racine, Bajazet)

Introduction.

Soit X une courbe algébrique lisse sur un corps k, soit ℓ un nombre premier distinct de la caractéristique de k, V un $\mathbb{Q}_\ell$-faisceau lisse sur X. On sait l'importance du "groupe de cohomologie parabolique"

$$\tilde{H}^1(X,V) = \operatorname{im} H^1_c(X,V) \longrightarrow H^1(X,V)$$

Pour V^* le $\mathbb{Q}_\ell$-faisceau lisse dual, on obtient une dualité parfaite

$$\tilde{H}^1(X,V) \times \tilde{H}^1(X,V^*) \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell(-1)$$

(voir [D1]). Dans l'exposé [D1] Deligne démontrait que pour X une courbe modulaire, et pour V le $\mathbb{Q}_\ell$-faisceau lisse obtenu comme puissance symétrique du faisceau $R^1p_* \mathbb{Q}_\ell$ (où $p : E \longrightarrow X$ est la courbe elliptique universelle), les valeurs propres du Frobenius sur $\tilde{H}^1(X,V)$ étaient toutes d'un poids prescrit, si on admettait la conjecture de Weil. En 1973-74, Deligne a non seulement démontré la conjecture de Weil [Weil I] , [S] ., mais l'a considérablement élargie [Weil II]. Dans la terminologie de loc. cit., si V est ponctuellement pur de poids i (comme c'est le cas plus haut) $\tilde{H}^1(X,V)$ est pur de poids $i + 1$. Ou plutôt : soit $j : X \hookrightarrow \hat{X}$ la compactification lisse ; alors $j_* V$ est un complexe pur de poids i donc $\tilde{H}^1(X,V) = H^1(\hat{X}, j_*V)$ est pur de poids $i + 1$ [Weil II, 6.2.4, 1.8.1, 6.2.6].

Sur une courbe lisse, il est donc possible de construire une quantité de complexes purs. On n'a longtemps rien su faire de semblable sur une variété de dimension plus grande. Toutefois, dans [Weil II, Théorème 6.2.13], Deligne généralisait le théorème de Lefschetz difficile à un complexe pur $K^\bullet$ sur un schéma projectif, tel que pour un entier fixé n , $K^\bullet$ et $D_X K^\bullet[-2n]$ vérifient la condition suivante : pour tout i , la dimension du support du faisceau $\mathcal{H}^i$ est $\leq n-i$. Ces conditions de support s'énoncent maintenant : $K^\bullet[n]$ est un faisceau pervers. La condition " $\dim \operatorname{Supp} \mathcal{H}^i \leq n-i$ " était déjà apparue dans le théorème de M. Artin sur la dimension cohomologique d'un espace affine [SGA IV, Exposé 14] et des conditions de support duales, sous le nom de "conditions de profondeur", jouent un grand rôle dans le cadre cohérent (SGA2).

Indépendamment, la notion de "perversité" en topologie apparaissait dans la thèse de Goresky. Dès lors, Goresky et MacPherson allaient en faire un usage systématique dans leurs nouvelles théories d'homologie pour les pseudo-variétés stratifiées. Pour eux, une perversité est une fonction $\bar{p}$ de $\{2,3,\dots\}$ vers $\mathbb{N}$ telle que les fonctions $\bar{p}$ et $\bar{q}(c) = c - 2 - \bar{p}(c)$ soient croissantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$; la perversité $\bar{q}$ est dite duale de $\bar{p}$. Pour X une pseudo-variété munie d'une stratification, ils considèrent un sous-complexe $IC_*^{\bar{p}}(X)$ du complexe $C_*(X)$ des chaînes localement finies de X , formé de chaînes assujetties ainsi que leur bord à des conditions sur la dimension de leur intersection avec les strates, d'autant plus strictes que $\bar{p}$ est plus petite. Si $\bar{t}$ est la perversité "maximale", duale de la perversité "nulle" en 0 , ces conditions sont innocentes[1] ; les groupes d'homologie de $IC_*^{\bar{p}}(X)$ sont notés $IH_i^{\bar{p}}(X)$. On a par exemple $IH_i^{\bar{o}}(X) = H^{n-i}(X)$. Goresky et MacPherson définissent une forme d'intersection

$$\cap : IH_i^{\bar{p}}(X) \times IH_j^{\bar{q}}(X) \longrightarrow H_{i+j-n}(X)$$

(où $n = \dim X$)

Par une jolie méthode, ils prouvent ensuite :

- que la forme-intersection augmentée vers $\mathbb{Z}$ induit, modulo torsion, une dualité parfaite entre $IH_i^{\bar{p}}(X)$ et $IH_{n-i}^{\bar{q}}(X)$
- que leurs groupes $IH_i^{\bar{p}}(X)$ sont indépendants de la stratification choisie [Go-M1].

Dans le cas où existe une stratification à strates de dimension paire, on peut, par abus de langage, parler de la "perversité intermédiaire" $\bar{m} : \bar{m}(c) = \frac{c-2}{2}$. Les groupes $IH_i^{\bar{m}}(X) \otimes \mathbb{Q}$ satisfont dès lors la "dualité de Poincaré".

Vers 1978-79, Kazhdan et Lusztig, ayant constaté l'"influence" du "défaut de dualité de Poincaré" des variétés de Schubert sur des représentations de groupes de Weyl ou d'algèbres de Lie semi-simples, cherchèrent à utiliser les groupes $IH_*^{\bar{m}}(X)$ pour expliquer ces phénomènes. Toutefois, il leur était nécessaire de travailler sur des variétés algébriques sur un corps fini, et ils cherchaient donc une adaptation à cette situation des constructions topologiques de Goresky - MacPherson. Ce leur fut fourni par Deligne, qui introduisit un complexe $\underline{IC}^\bullet_{\bar{p}}(X)$ construit à l'aide d'une stratification de X, par induction, à

[1] du moins lorsque X est normale, cf. [Go-M1].

l'aide d'opérations successives d'image directe dans la catégorie dérivée et de troncation [D2]. La forme d'intersection de Goresky-MacPherson devenait le reflet global d'une "dualité" entre complexes (au sens de Verdier). De plus la construction s'appliquait telle quelle, pour fournie un complexe de $\mathbb{Q}_\ell$-faisceaux pour X une variété sur $\mathbb{F}_q$. Kazhdan et Lusztig prouvèrent alors que ce complexe était pur, dans le cas d'une variété de Schubert [K-L]. Goresky et MacPherson établirent que cette construction de Deligne redonnait la leur dans le cas topologique, et donnèrent plusieurs caractérisations axiomatiques du complexe $\underline{IC}^{\bullet}_{\overline{p}}$ [Go-M2]. Vers juillet 1980, Gabber démontrait en général que $\underline{IC}^{\bullet}_{\overline{m}}(X)$ est un complexe pur [Ga1]. Un peu plus tard, la démonstration de la conjecture de Kazhdan-Lusztig, utilisant la "correspondance de Riemann-Hilbert" (au sens de Mebkhout) faisait apparaître un Module holonome à singularités régulières correspondant à un complexe du type $\underline{IC}^{\bullet}_{\overline{m}}(X)$, et posait la question de la description des complexes de faisceaux constructibles obtenus comme complexe de De Rham d'un Module holonome [Springer]. Deligne, en donnant la solution de cette question [Br1] fut conduit à axiomatiser la notion de faisceaux pervers. Ceux-ci, bien qu'étant des objets d'une catégorie dérivée de complexes de faisceaux (et non, à proprement parler, des faisceaux) forment une catégorie abélienne artinienne, dont les objets simples sont, en gros, du type $\underline{IC}^{\bullet}$ (mais à coefficients "tordus"). De plus, ce sont des objets "de nature locale" (ils se recollent exactement comme des faisceaux). Avec Gabber, il a appliqué ces techniques à une variété sur un corps fini, et obtenu de remarquables théorèmes de structure sur les complexes purs, les faisceaux pervers mixtes, impliquant un important théorème de décomposition pour $\mathbb{R}f_*(\underline{IC}^{\bullet}_{\overline{m}}(X))$, où $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme propre entre variétés algébriques, sur un corps algébriquement clos. Simultanément, Beilinson et Bernstein obtenaient, à Moscou, les mêmes résultats, et devaient donner en 1981 une nouvelle démonstration du théorème de pureté de Gabber, que j'essaye de présenter plus loin. [Ga1], [B-B1], [Luminy].

Cet exposé a pour seul but de recenser les résultats fondamentaux dans ce domaine, dont j'ai pu avoir connaissance. Je me contenterai d'un bref rappel sur la dualité de Verdier et les catégories dérivées, et d'un résumé préliminaire des résultats principaux de [Weil II]. N'ayant voulu sacrifier ni les aspects étales, ni les aspects "cristallins" de la théorie, j'ai dû renoncer souvent à donner des démonstrations.

§ 0. Rappels et notations

0.1. On utilisera librement le langage des catégories triangulées et des catégories dérivées [V1], [Ha]. Un triangle
$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] & & Y \arrow[dl] \\ & Z \arrow[ul, "+1"] & \end{tikzcd}$$
sera préférentiellement noté

$$\cdots \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow X[1] \longrightarrow \cdots$$

Pour obtenir un "diagramme octaédral" (axiome (TR4) des catégories triangulées) il suffit de se donner $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z$. On obtient un octaèdre [V1, p.3], [Ha, p.21] pour lequel on dispose de la représentation plane commode

$$\begin{tikzcd}
 & Y[1] & & & \\
\cdots & X[1] \arrow[u] \arrow[r, phantom, "4"] & X[1] \arrow[l, phantom, "="] & & \\
\cdots & Z' \arrow[u] \arrow[r] & Y' \arrow[u] \arrow[r] \arrow[dr, phantom, "3"] & X' \arrow[r] \arrow[dr, phantom, "1"] & Z'[1]\cdots \\
 & Y \arrow[u] \arrow[r, "v"] \arrow[dr, phantom, "2"] & Z \arrow[u] \arrow[r] & X' \arrow[u, equal] \arrow[r] & Y[1]\cdots \arrow[u] \\
\cdots & X \arrow[u, "u"] \arrow[r, phantom, "="] & X \arrow[u] \arrow[r] & 0 \arrow[u] & \vdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

On lit horizontalement et verticalement quatre triangles distingués non débiles (d'où quatre faces de l'octaèdre). Les carrés numérotés commutent, au signe près, d'où quatre autres faces. Les deux chemins de Y à Y' donnent la même flèche, ainsi que les deux chemins de Y' vers les deux habitats de $Y[1]$. On vérifie qu'un octaèdre a six sommets.

0.2. Pour X un espace topologique, R un anneau commutatif noethérien de Gorenstein, on notera $D(X,R)$ ou $D(X)$ la catégorie dérivée de la catégorie des faisceaux de R-modules sur X. On dispose de sous-catégories pleines $D^+(X,R)$, $D^-(X,R)$, $D^b(X,R)$. On supposera toujours que X est localement compact de dimension finie et vérifie les conditions (HLC), (HPF), (HDF) de [V3, §1.2] (c'est vrai si X est une pseudo-variété stratifiée, voir §1). Si $f : X \longrightarrow Y$ est une application continue, on dispose du foncteur exact $Rf_! : D^b(X) \longrightarrow D^b(Y)$ obtenu en dérivant à droite le foncteur "image directe à supports propres" [V2]. On a aussi le classique foncteur Rf_*. Dans toute la suite on notera $f_!$ et f_* au lieu de Rf_* et $Rf_!$. Le foncteur $f^! : D^b(Y) \longrightarrow D^b(X)$ a été introduit par Verdier [V2] ; si $I^\bullet$ est un complexe de faisceaux injectifs sur Y et U un ouvert de Y, on a :

$$\Gamma(U, f^! I^\bullet) = \mathrm{Hom}^\bullet(f_! K_U^\bullet , I^\bullet)$$

où $K_U^\bullet$ est la résolution injective standard du faisceau constant R_U. Le théorème de dualité de Verdier dit qu'on a un isomorphisme canonique dans $D^+(Y)$

$$f_* \mathbb{R}\, \underline{\mathrm{Hom}}^\bullet(A^\bullet, f^! B^\bullet) \cong \mathbb{R}\, \underline{\mathrm{Hom}}^\bullet(f_! A^\bullet, B^\bullet)$$

pour $A^\bullet$ dans $D^b(X)$ et $B^\bullet$ dans $D^b(Y)$.

En particulier pour $f : X \longrightarrow pt$, le complexe $f^! R_{pt}$ est dualisant sur X : il est noté $D_X^\bullet$. Une incarnation du complexe dualisant $D_X^\bullet$ est fournie par le complexe $C^{\cdot}$ des chaînes singulières localement finies (sans condition de support):

$$\Gamma(U,C^{-p}) = C_p(X,X-U;\ R)$$ [V3] qu'on faisceautise.

On en déduit : $\underline{H}^{-p}(D_X^{\cdot})_x = H_p(X,X-x\ ;\ R)$ et que $D_X^{\cdot} \cong R_X[n]$ pour X une variété orientable de dimension n. Pour $A^{\cdot}$ dans $D^b(X)$, le complexe $B^{\cdot}=R\ \underline{Hom}^{\cdot}(A^{\cdot},D_X^{\cdot})$ est le <u>dual de Verdier</u> de $A^{\cdot}$, noté $D_X(A^{\cdot})$

Supposons X, Y, f analytiques complexes et que R est un anneau de Dedekind. On note $D_c(X)$, $D_c^b(X)$, etc... les sous-catégories formées des complexes à cohomologie <u>constructible</u> (cf.[V3]). On sait, entre autres que f^* et $f^!$ préservent les sous-catégories $D_c^b(-)$. Ainsi $D_X^{\cdot}$ est dans $D_c^b(X)$. De plus, pour $A^{\cdot}$ et $B^{\cdot}$ dans $D_c^b(X)$, $R\ \underline{Hom}(A^{\cdot},B^{\cdot})$ est dans $D_c^b(X)$ [V3 , Prop.2.5.1]. Donc pour $A^{\cdot}$ dans $D_c^b(X)$, on a $D_X(A^{\cdot}) \in D_c^b(X)$. De plus le morphisme naturel $A^{\cdot} \longrightarrow D_X(D_X A^{\cdot})$ est un isomorphisme [V3, corollaire 2.6.2]

Pour X un schéma noethérien séparé, et R un anneau commutatif noethérien de torsion, on parlera de faisceaux (étales) de R-modules sur X, et de faisceaux constructibles [SGA4, IX, §2] On peut construire une catégorie dérivée $D_c^b(X,R)$, etc... Pour R' local noethérien complet de caractéristique résiduelle ℓ (par exemple, la clôture intégrale de $\mathbb{Z}_\ell$ dans une extension finie de $\mathbb{Q}_\ell$) on peut définir la notion de R-faisceau constructible, par un procédé délicat de limite projective [SGA5, Exp.V, VI]. On peut encore définir une catégorie $D_c^b(X,R)$ mais il n'est pas clair qu'elle est triangulée ; tel est le cas toutefois pour X de type fini sur un corps fini ou algébriquement clos, cas auquel on se limitera [Weil II, §1.1.2]. On peut alors construire $D_c^b(X,\mathbb{Q}_\ell)$ et les variantes avec E_λ ou $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$.

Les foncteurs précédents ont encore un sens dans ce cadre et les résultats plus haut restent valables, mutatis mutandis (par exemple, pour X lisse, on a $D_X^{\cdot} \cong R_X(n)\ [2n]$) (voir [SGA4, Exposés XVII, XVIII]

Rappelons quelques isomorphismes dans les catégories dérivées $D_c^b(-)$, valables, dans les deux cas (pour R raisonnable). Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme, $A^{\cdot} \in D_c^b(X)$ et $B^{\cdot}$, $C^{\cdot}$, $D^{\cdot} \in D_c^b(Y)$

$$f^! B^{\cdot} \cong D_X(f^* D_Y B^{\cdot})$$

$$f_! A^{\cdot} \cong D_Y(f_* D_X A^{\cdot})$$

$$f^*(B^{\cdot} \overset{\mathbb{L}}{\otimes} C^{\cdot}) \cong (f^* B^{\cdot}) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} (f^* C^{\cdot})$$

$$\mathbb{R}\underline{Hom}^{\cdot}(B^{\cdot} \overset{\mathbb{L}}{\otimes} C^{\cdot},\ D^{\cdot}) \cong \mathbb{R}\ \underline{Hom}\ (B^{\cdot},\ \mathbb{R}\ \underline{Hom}^{\cdot}(C^{\cdot},\ D^{\cdot}))$$

$$f_* R\ \underline{Hom}^{\cdot}(f^* B^{\cdot},A^{\cdot}) \cong \mathbb{R}\ \underline{Hom}^{\cdot}(B^{\cdot},\ f_* A^{\cdot})$$

Pour f lisse de dimension relative n, on a $f^!(B^\cdot) = f^*(B^\cdot)(n)[2n]$.
Pour f une immersion ouverte, $f^! = f^*$ et $f_!$ est déjà exact au niveau des faisceaux.
Pour f une immersion fermée, on a $f^! = R\underline{\Gamma}_X$ (foncteur dérivé droit du foncteur $\underline{\Gamma}_X$; voir [SGA, 4, Exp. XVIII Prop. 3.1.8]). De plus $f_* = f_!$ est déjà exact au niveau des faisceaux.

0.3. Quelques résultats tirés de [Weil II]

Les méthodes et résultats de [Weil II] étant aujourd'hui bien connus, nous nous contenterons d'un bref rappel. Soit X_o une variété algébrique de type fini sur $\mathbb{F}_q$, $X = X_o \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q$. Soit F le frobenius géométrique sur X. On pose $D(X_o) = D^b_c(X_o, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. Un complexe $\mathcal{F}^\cdot$ de $D(X_o)$ est dit <u>mixte de poids</u> $\leq i$ si pour tout n, $\underline{H}^n(\mathcal{F}^\cdot)$ est mixte de poids $\leq n+i$; il est dit <u>mixte de poids</u> $\geq i$ si son dual est mixte de poids $\leq -i$. Soient $D_{mixte}(X_o)$, $D_{\leq i}(X_o)$, $D_{\geq i}(X_o)$ les sous-catégories triangulées dont les objets sont mixtes, resp. mixtes de poids $\leq i$, resp. mixtes de poids $\geq i$.

Soit $\mathcal{F} \in D_{mixte}(X_o)$. Alors :

$\mathcal{F}^\cdot \in D_{\leq i} \Longleftrightarrow \forall$ le point fermé $i_x : x \hookrightarrow X_o$, les poids de $i_x^* \mathcal{F}$ sont $\leq i$

$\mathcal{F}^\cdot \in D_{\geq i} \Longleftrightarrow \forall$ le point fermé $i_x : x \hookrightarrow X_o$, les poids de $i_x^! \mathcal{F}$ sont $\geq i$

<u>Théorème 0.3.1</u> a) $D_{\leq i}[1] = D_{\leq i+1}$ et $D_{\geq i}[1] = D_{\geq i+1}$.

b) $D_{\leq i} \overset{\mathbb{L}}{\otimes} D_{\leq j} \subset D_{\leq i+j}$ et $\underline{Hom}(D_{\leq i}, D_{\geq j}) \subset D_{\geq j-i}$.

Soit $f : X_o \to Y_o$ un morphisme de variétés sur $\mathbb{F}_q$.

c) f_*, $f^!(D_{\geq i}) \subset D_{\geq i}$ et $f_!$, $f^*(D_{\leq i}) \subset D_{\leq i}$

d) $\mathrm{Hom}_X(D_{\leq i-1}, D_{\geq i})^F = 0$ e) $\mathrm{Ext}^1_X(D_{\leq i}, D_{\geq i})^F = 0$

(voir [loc. cit., théorème 3.3.1] et, si nécessaire, 0.2)

<u>Théorème 0.3.2</u> Soit X_o une courbe, $i : U_o \hookrightarrow X_o$ un sous-schéma ouvert, $\mathcal{F}$ un faisceau lisse sur U_o de poids $\geq i$. Alors les poids de $R^1 i_* \mathcal{F}$ sont $\geq i+2$.

Cela résulte immédiatement de [loc. cit, Théorème 1.8.4].

§ 1. (Co)-<u>homologie d'intersection</u>

1.1. <u>La construction originale de Goresky-MacPherson</u> [Go-M1]

<u>Tous</u> les espaces seront supposés P.L., de même que les applications.

<u>Définition</u> 1.1.1 : Une <u>pseudo-variété de dimension</u> n est un espace compact X tel qu'il existe un sous-espace Σ de dimension $\leq n-2$, pour lequel $X-\Sigma$ soit une variété orientée de dimension n, dense dans X.

Une stratification de X est une chaîne de sous-espaces fermés

$$X = X_n \supset X_{n-1} = X_{n-2} = \Sigma \supset X_{n-3} \supset \ldots \supset X_1 \supset X_o$$

telle que pour tout point p de $X_i - X_{i-1}$ il existe un espace compact filtré

$$V = V_n \supset V_{n-1} \supset \ldots\ldots \supset V_i = pt$$

et une application $V \times B^i \longrightarrow X$ qui pour tout j envoie $V_j \times B^i$ (PL)-homéomorphiquement sur un voisinage de p dans X_j (ici B^i est la boule PL de dimension i).

(En particulier, chaque <u>strate</u> $X_i - X_{i-1}$ non vide est une variété de dimension i).

<u>Exemple</u> : X un espace analytique complexe, Σ son lieu singulier, $X = \coprod_\alpha Y_\alpha$ une stratification de Whitney, X_i l'union des Y_α de dimension réelle $\leq$ i . Dans ce cas, $X_i = X_{i-1}$ pour i impair.

Goresky et MacPherson travaillent avec le complexe $C_*(X)$ des chaînes PL [Go-M1,1.2]. A cause des singularités de X, on ne peut raisonnablement espérer intersecter deux cycles P.L. Mais on peut intersecter un cycle P.L. avec tout autre cycle transverse aux X_i (en fait si X est "normal" un tel cycle définit une classe de cohomologie). L'idée de Goresky et MacPherson est de mesurer par une "perversité" le défaut de transversalité d'un cycle aux X_i , et de montrer qu'on peut intersecter deux "cycles pervers", pourvu que la "somme" de leurs perversités ne soit pas trop grande.

<u>Définition 1.1.2</u> : Une <u>perversité</u> est une suite d'entiers $\overline{p} = (p_2, p_3, \ldots, p_n)$ telle que $p_2 = 0$ et $p_{k+1} = p_k$ ou p_k+1. Pour i un entier, un sous-espace Y de X est dit <u>$(\overline{p},i)$-admissible</u> si $\dim(Y) \leq i$ et $\dim(Y \cap X_{n-k}) \leq i-k+p_k$ pour tout $k \geq 2$. On définit $IC_i^{\overline{p}}(X)$ comme le sous-groupe de $C_i(X)$ formé des chaînes telles que $|\xi|$ (le support de ξ) soit $(\overline{p},i)$-admissible et que $|\partial\xi|$ soit $(\overline{p},i-1)$-admissible.

Le i-ème <u>groupe d'homologie d'intersection</u> (de perversité $\overline{p}$),noté $IH_i^{\overline{p}}(X)$, est le i-ème groupe d'homologie du complexe de chaînes $IC_*^{\overline{p}}(X)$.

Avec les notations de l'introduction, $\overline{t}$ est la perversité "maximale". Si $\overline{p}$ et $\overline{q}$ sont des perversités duales, on a $\overline{p}+\overline{q} = \overline{t}$. Pour $\overline{p}$ et $\overline{q}$ deux perversités telles que $\overline{p}+\overline{q} \leq \overline{t}$, il existe une perversité $\overline{r}$ minimale telle que $\overline{p}+\overline{q} \leq \overline{r}$.

<u>Définition 1.1.3</u>. Supposons $\overline{p}+\overline{q} = \overline{r}$ et $i+j-n=\ell$. Une chaîne $C \in IC_i^{\overline{p}}(X)$ et une chaîne $D \in IC_j^{\overline{q}}(X)$ sont dites <u>dimensionnellement transverses</u> si $|C| \cap |D|$ est $(\overline{r},\ell)$-admissible (on écrit $C \pitchfork D$).

On peut alors construire la chaîne $C \cap D \in IC_i^{\overline{r}}(X)$.

<u>Théorème 1.1.4</u>.Supposons $\overline{p}+\overline{q} = \overline{r}$. Il existe une unique forme bilinéaire

$$\cap : IH_i^{\overline{p}}(X) \times IH_j^{\overline{q}}(X) \longrightarrow IH_{i+j-n}^{\overline{r}}(X)$$

telle que $[C] \cap [D] = [C \cap D]$ lorsque C et D sont dimensionnellement transverses.

La preuve utilise un "P.L. moving lemma" dû à Mac Crory (voir [Go-M1, § 2.2-2.3]).

Soit T une triangulation de X, subordonnée à la filtration, T' sa subdivision barycentrique. Pour $\bar{p}$ et i entier donnés, il est intuitif que les strates $X_{n-\underline{c}}$ les plus importantes sont celles pour lesquelles une i-chaîne de perversité $\bar{p}$ doit couper X_{n-c-1} en dimension strictement plus petite que celle où elle est autorisée à couper X_{n-c}. Soit donc $Q_i^{\bar{p}}$ le sous-complexe de T' de sommets les barycentres des simplexes σ de T tels que $\underline{c} = \dim(\sigma)$ satisfasse la condition précédente [Go-M1,§3.1]. Pour $\bar{p}+\bar{q} = \bar{t}$, $Q_i^{\bar{p}}$ et $Q_{n-i+1}^{\bar{q}}$ se regardent en chiens de faïence.

<u>Proposition 1.1.5</u> $IH_i^{\bar{p}}(X)$ est l'image de $H_i(Q_i^{\bar{p}}) \longrightarrow H_i(Q_{i+1}^{\bar{p}})$

Goresky et MacPherson en déduisent :

<u>Théorème 1.1.6</u> $IH_i^{\bar{p}}(X)$ est de type fini et indépendant de la filtration de X choisie (voir [Go-M1, §3.2])

<u>Théorème 1.1.7</u> La forme d'intersection "augmentée"

$$IH_i^{\bar{p}}(X) \times IH_j^{\bar{q}}(X) \longrightarrow IH_o^{\bar{t}}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

induit, modulo torsion, une dualité parfaite lorsque $\bar{p} + \bar{q} = \bar{t}$ et $i + j = n$ (voir [Go-M1, §3.3])

<u>Remarque 1.1.8</u> On a $IH_i^{\bar{t}}(X) = H_i(X)$ et on a $IH_i^{\bar{o}}(X) = H^{n-i}(X)$ lorsque X est normal (i.e. pour une triangulation convenable, le link d'un simplexe de codimension ≥ 2 est connexe). Pour $\bar{p} = \bar{0}$ et $\bar{q} = \bar{t}$, on ne peut donc déjà pas faire mieux que le théorème 1.1.7 .

Lorsque X admet une stratification pour lesquelles toutes les strates sont de codimension paire, seule compte pour une perversité sa valeur sur les entiers pairs. En particulier, on peut considérer $\bar{m}_c = \frac{c-2}{2}$ comme une perversité auto-duale (c'est la <u>perversité intermédiaire</u>). On dispose de la forme intersection

$$\cap \ : \quad IH_i^{\bar{m}}(X) \times IH_{n-i}^{\bar{m}}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

et donc de la "dualité de Poincaré" pour ces groupes. Le cas d'un cône quadratique montre que cette dualité ne vaut que modulo torsion et que c'est irrémédiable (voir toutefois [Go-Si])

1.2. <u>L'approche faisceautique de Deligne</u> [D2], [Go-M2]

Deligne semble avoir été motivé par le calcul explicite des groupes d'homologie d'intersection d'une pseudo-variété à singularités isolées [G-M1,§6.1] et par le désir de prouver que les groupes $IH_i^{\bar{p}}(X)$ sont des invariants topologiques. Deligne et Verdier observent qu'en considérant le complexe $C_*(X)$ des chaînes localement finies (au lieu des seules chaînes P.L.) la construction des $IC_i^{\bar{p}}(X)$ est de nature faisceautique, d'où un complexe de faisceaux $\underline{IC}^{\bar{p}}_{\bullet}(X)$. Comme on préfère considérer des complexes de type cohomologique, on définit un complexe $\underline{IC}^{\bullet}_{\bar{p}}$ par $\underline{IC}^{-i}_{\bar{p}} = IC^{\bar{p}}_{i}(X)$.

On choisit une filtration de X (cf.1.1), on pose $U_k = X - X_{n-k}$ et $i_k : U_k \hookrightarrow U_{k+1}$

Théorème 1.2.1 [D 2], [Go-M2, Theorem 3.5] Dans $D^b(X, \mathbb{Z})$, on a un isomorphisme canonique

$$\underline{IC}^{\bullet}_{\bar{p}}(X) = \tau_{\leq p(n)-n} Ri_{n*} \cdots\cdots \tau_{\leq p(3)-n} Ri_{3*}\tau_{\leq p(2)-n} Ri_{2*}\mathbb{Z}_{U_2}[n]$$

La démonstration utilise et fournit la caractérisation suivante de $\underline{IC}^{\bullet}$, d'où a disparu la stratification [Go-M2, Theorem 4.1]

Théorème 1.2.2 Il existe un unique complexe constructible $K^{\bullet}$ dans $D^b(X)$ satisfaisant aux conditions suivantes :

(a) $K^{\bullet}{}_{/X-\Sigma} = \mathbb{Z}_{X-\Sigma}[n]$ pour un fermé Σ de X de dimension $\leq n-2$

(b) $\tau_{\leq -n-1}(K^{\bullet}) = 0$

(c) pour $m \geq -n+1$, $\dim \{x \in X / H^m(K^{\bullet}_x) \neq 0\} \leq n - \min \{c \mid p(c) = n+m\}$

(d) pour $m \leq -1$, $\dim \{x \in X \mid H^m_x(K^{\bullet}) \neq 0\} \leq n - \min \{c \mid c-2-p(c) = -m\}$

De plus $K^{\bullet} = \underline{IC}^{\bullet}_{\bar{p}}(X)$.

Corollaire 1.2.3. Pour $\bar{p} + \bar{q} = \bar{t}$, on a $\underline{IC}^{\bullet}_{\bar{p}}(X) \otimes \mathbb{Q} = D_X(\underline{IC}^{\bullet}_{\bar{q}}(X) \otimes \mathbb{Q})[2n]$ (voir [Go-M2, Theorem 5.3]).

Cet énoncé explique et renforce le Théorème 1.1.7. Goresky et MacPherson expliquent le comportement de $IC^{\bullet}_{\bar{p}}$ par un morphisme "normalement non-singulier" [Go-M2, §5.4]. Par exemple, une inclusion $\alpha : Y \hookrightarrow X$ transverse aux strates de X, est normalement non singulière.

Théorème 1.2.4 (Lefschetz "faible") Soit X une variété complexe, $\alpha : Y \hookrightarrow X$ l'inclusion d'une section hyperplane transverse, $\bar{p}$ une perversité telle que $p_c \leq \frac{c}{2}$. Le morphisme $\alpha_* : IH^{\bar{p}}_k(Y) \longrightarrow IH^{\bar{p}}_k(X)$ est bijectif pour $k < \acute{n}-1$ et surjectif pour $k = \acute{n}-1$. (voir [Go-M2, §7] ; cela résulte aussi de [SGA IV, Exposé 14]. Ici $\acute{n} = \dim_{\mathbb{C}}(X) = \frac{n}{2}$.

Remarque 1.2.5. Dans l'approche de Deligne, c'est plutôt la fonction $c \longmapsto p(c) - n + 1$ qui apparaît comme une perversité. D'autre part, Deligne considère une perversité comme une fonction sur l'ensemble des strates d'une stratification arbitraire (et non une fonction de la codimension). Dans une large mesure, il peut s'affranchir des conditions strictes imposées à $\bar{p}$ par Goresky et MacPherson [D2], [Luminy] .

Dans le cas analytique complexe, le complexe $\underline{IC}^{\bullet} = \underline{IC}^{\bullet}_{\bar{m}}[n]$ est particulièrement intéressant (il est "auto-dual" modulo torsion, et de ce fait $\underline{IC}^\bullet \otimes \mathbb{Q}$ admet une caractérisation assez simple [GO-M2,§6.1] ; on a un théorème de Kunneth). $\underline{IC}^\bullet$ est un objet de $D^b_c(X)$.

L'avantage de cette approche de Deligne est qu'elle s'adapte telle quelle au site étale d'une variété de type fini sur un corps fini ou algébriquement clos, et permet entre autres de construire un objet $\underline{IC}^\bullet(X,\mathbb{Q}_\ell)$ (ou simplement $\underline{IC}^\bullet(X)$) de $D^b_c(X,\mathbb{Q}_\ell)$ qui est "auto-dual" et pour lequel on dispose d'une caractérisation analogue [D2] [K-L] (pour X lisse, on a $\underline{IC}^\bullet(X,\mathbb{Q}_\ell) = \mathbb{Q}_{\ell,X}[+n]$).

Variante 1.2.6 [K-L] Soit V un système local de K-espace vectoriels sur un ouvert de X dont le complémentaire est de codimension réelle ≥ 2 (pour X une variété pseudo-stratifiée, $K = \mathbb{Z}/m$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ par exemple). La méthode de Deligne permet de construire un complexe $\underline{IC}^\bullet_{\underline{p}}(X,V)$; pour K un corps, $\underline{IC}^\bullet_{\underline{p}}(X,\check{V})$ est dual (au sens de Verdier) de $\underline{IC}^\bullet_{\underline{q}}(X,\check{V}(n))$, où $\check{V}$ est le système local contragrédient.

Construction similaire pour X une variété sur un corps fini ou algébriquement clos (avec $K = \mathbb{Z}/\ell^n$, $\mathbb{Z}_\ell$, $\mathbb{Q}_\ell$, E_λ ou $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$).

Notation 1.2.7 On pose $IH^k(X) = H^k(X,\underline{IC}^\bullet)$

1.3 Relation avec la théorie de Morse stratifié (d'après Goresky-MacPherson)

Définition 1.3.1 [La] Soit X un espace sous-analytique, muni d'une stratification de Whitney. Une fonction C^∞ sous-analytique $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Morse si pour toute strate A, $f_{|A}$ est une fonction de Morse et si pour tout point critique $x_o \in A$, on a $df(x_o)\ (\tau) \neq 0$ où τ est une limite en x_o d'espaces tangents pour une strate B telle que $A \subset \overline{B}$.
$\neq$

On peut parler de points et de valeurs critiques d'une fonction de Morse.

Théorème 1.3.2 [Pi] L'ensemble des fonctions de Morse est ouvert et dense dans $C^\infty(X, \mathbb{R})$ (défini à l'aide d'un plongement de X dans une variété lisse). Une fonction de Morse à valeurs critiques distinctes et topologiques stable.

Supposons maintenant X (et sa stratification) analytiques complexes. Soit x_o un point critique de la fonction de Morse f, soit A la strate contenant x_o , λ l'indice de $f_{|A}$ au point critique x_o. Soit $v = f(x_o)$ et supposons que v soit la seule valeur critique dans l'intervalle $[v-\varepsilon, v+\varepsilon]$.

Théorème 1.3.3 [G-M3] Sous ces hypothèses

$$IH^i(f^{-1}(-\infty,v+\varepsilon),\ f^{-1}(-\infty,v-\varepsilon)) \underset{\text{déf}}{=} \mathbb{H}^i(f^{-1}(-\infty,v+\varepsilon),\ f^{-1}(-\infty,v-\varepsilon),\ \underline{IC}^\bullet)$$

est nul sauf pour $i = \lambda$.

De même pour $\underline{IC}^\bullet(X,V)$ (notation de 1.2.6).

On peut se ramener au cas où f est une fonction du type Reg, pour $g : X \longrightarrow \mathbb{C}$ analytique. Le link complexe de X en x_o est la paire

$$(\mathcal{L},\ \partial\mathcal{L}) = (g^{-1}(t) \cap N \cap B_\varepsilon(x_o), g^{-1}(t) \cap N \cap S_\varepsilon(x_o)) \quad \text{pour } |t| << \varepsilon.$$

(où N est une "tranche transverse" à A dans X au point x_o).

Goresky - MacPherson construisent un morphisme "variation"

$$\mathrm{Var} : IH^0(\mathcal{L}) \longrightarrow IH^0(\mathcal{L}, \partial\mathcal{L})$$

(voir [SGA 7, Exp] pour Var, [G-M3] pour la situation présente) et prouvent son image isomorphe au groupe IH^λ relatif du théorème 1.3.3. Ils en déduisent le théorème de Lefschetz faible (pour $\overline{p} = \overline{m}$). Ces résultats constituent une des meilleures justifications de l'importance du complexe $\underline{IC}^\bullet$ dans l'étude de la topologie des variétés analytiques ou algébriques.

§ 2. Le formalisme des faisceaux pervers

2.1. "t-structures dans les catégories triangulées (d'après [B-B1, §1])

Soit C une catégorie. Dans ce § par "sous-catégorie de C" on entendra une sous-catégorie pleine, stable par isomorphisme. Décrire une sous-catégorie de C revient donc à décrire l'ensemble des classes d'isomorphie de ses objets. Soit $S \subset C$ un certain ensemble d'objets, on pose alors :

$$S^\perp = \{Y \in C \mid \forall\ X \in S,\ \mathrm{Hom}(X,Y) = 0\}$$

$$^\perp S = \{Y \in C \mid \forall\ X \in S,\ \mathrm{Hom}(Y,X) = 0\}$$

Supposons C triangulée. Pour $S \subset C$ une sous-catégorie, on note $\overline{S}$ la plus petite sous-catégorie qui contienne S et soit stable par extension (évidemment une extension est donnée par un triangle). Il est clair que $S^\perp = \overline{S}^\perp = (\overline{S})^\perp$. Idem à gauche. Soit $C^{\leq 0}$ une sous-catégorie de C et soit $C^{\geq 1} = (C^{\leq 0})^\perp$

Définition 2.1.1 On dit que $C^{\leq 0}$ définit une t-structure sur C si

(i) $C^{\leq 0}[1] \subset C^{\leq 0}$

(ii) pour tout $Y \in C$, il existe un triangle distingué $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow X[1]$ tel que $X \in C^{\leq 0}$ et $Z \in C^{\geq 1}$.

La t-structure est dite non dégénérée si pour tout $X \in C$, il existe des entiers i,j tels que $X[i] \notin C^{\leq 0}$ et $X[j] \notin C^{\geq 1}$

On appelera t-catégorie une catégorie triangulée munie d'une t-structure

Exemple 2.1.2 A catégorie abélienne, $C = D(A)$, $C^{\leq 0}$ formé des complexes acycliques en degrés > 0 (trivial mais utile).

Lemme 2.1.3 Supposons que $C^{\leq 0}$ définit une t-structure sur C.

a) $^\perp(C^{\geq 1}) = C^{\leq 0}$ et $C^{\geq 1}[-1] \subset C^{\geq 1}$

b) "Choisissons" pour tout $Y \in C$ un triangle distingué $\tau_{\leq 0} Y \longrightarrow Y \longrightarrow \tau_{\geq 1} Y$ où $\tau_{\leq 0} Y \in C^{\leq 0}$ et $\tau_{\geq 1} \in C^{\geq 1}$. Alors le foncteur $\tau_{\leq 0} : C \longrightarrow C^{\leq 0}$ est adjoint à droite de l'inclusion $C^{\leq 0} \hookrightarrow C$ et $\tau_{\geq 1} : C \longrightarrow C^{\geq 1}$ est adjoint à gauche de $C^{\geq 1} \hookrightarrow C$.

En particulier, pour Y fixé, tous les triangles du type 2.1.1.(ii) sont canoniquement isomorphes.

On en déduit que $(C^{\geq 1}[1])^0$ définit sur C^0 une t-structure (d'où la notion de t-catégorie duale d'une t-catégorie).

On définit de manière évidente des foncteurs $\tau_{\leq i}$, $\tau_{\geq i}$: $C \longrightarrow C$. On a diverses relations entre ces foncteurs ; par exemple, pour $i \leq j$, on peut identifier $\tau_{\geq i} \circ \tau_{\leq j}$ à $\tau_{\leq j} \circ \tau_{\geq i}$, grâce à l'octaèdre adéquat.

On pose $C_\tau^{\geq i} = \tau_{\geq i}\, C = C^{\geq 1}[-i+1]$, $C_\tau^{\leq i} = C^{\leq 0}[-i]$. Pour tout intervalle $[a,b]$, on pose $C_\tau^{[a,b]} = C_\tau^{\geq a} \cap C_\tau^{\leq b} = \tau_{\geq a}\, \tau_{\leq b}\, C$, etc...

Théorème 2.1.4 a) C_τ^0 est une sous-catégorie abélienne de C.

b) Il existe un unique foncteur cohomologique H_τ: $C \longrightarrow C_\tau^0$ tel que $H_\tau|_{C_\tau^0} = \mathrm{Id}$, $H_\tau|_{C_\tau^{\leq -1}} = 0$, $H_\tau|_{C_\tau^{\geq 1}} = 0$. Ce foncteur vérifie :

$$H_\tau^i(\tau_{\leq j}X) = \begin{cases} H_\tau^i(X) \text{ si } i \leq j \\ 0 \text{ si } i > j \end{cases}$$

et

$$H_\tau^i(\tau_{\geq j}X) = \begin{cases} H_\tau^i(X) \text{ si } i \geq j \\ 0 \text{ si } i < j \end{cases}$$

c) la t-structure est non-dégénérée ssi H_τ est un foncteur strict. Dans ce cas on a $C_\tau^{[a,b]} = \{X \in C | H_\tau^i(X) = 0,\ \forall\, i \notin [a,b]\}$

Indications sur la preuve de a). Soit $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme dans C_τ^0, et considérons un triangle distingué $Z \longrightarrow Y \xrightarrow{f} X \longrightarrow Z[1]$. Alors $Z \in C^{[0,1]}_\tau$, d'où le fait que $\tau_{\leq 0} Z$ et $\tau_{\geq 0}(Z[1])$ sont dans C_τ^0 . Il est clair que $\tau_{\leq 0} Z \longrightarrow Y$ et $X \longrightarrow \tau_{\geq 0}(Z[1])$ sont un noyau et un conoyau pour f. L'isomorphisme Coim $f \longrightarrow$ Im f s'inscrit dans l'octaèdre déduit de ker $f \longrightarrow Z \longrightarrow Y$ (cf.0.1)

b) est plus fatiguant [B-B1, Théorème 1.6].

On peut définir des sous-t-catégories C_τ^+ , C_τ^- , C_τ^b .

Soient (C,τ) et (C',τ') deux t-catégories, $F : C \longrightarrow C'$ un foncteur exact.

Définition 2.1.5. On dira que la (τ,τ')-amplitude de f est contenue dans un intervalle $[a,b]$ si $F(C_\tau^{\leq 0}) \subset C'^{\leq b}_{\tau'}$ et $F(C_\tau^{\geq 0}) \subset C'^{\geq a}_{\tau'}$. Si l'amplitude de F est contenue dans $[0,+\infty]$(resp$[-\infty,0]$), F sera dit exact à gauche (resp à droite).

Lemme 2.1.6. a) Si $C = C^b$, l'amplitude du foncteur F est contenue dans $[a,b]$ ssi $\forall\, X \in C_\tau^0$, $H_{\tau'}^i$ $(FX) = 0$ pour $i \notin [a,b]$

b) Supposons F (τ,τ') exact(à gauche ou à droite). Alors $H_{\tau'}^0 \circ F$: $C_\tau^0 \longrightarrow C'^0_\tau$ est exact (à gauche ou à droite)

c) Soit $G : C' \longrightarrow C$ un foncteur exact, adjoint à gauche de F. Alors G est (τ',τ) exact à droite ssi F est (τ,τ') exact à gauche.

2.2. Perversités et faisceaux pervers (d'après [Luminy])

Soit $(X,\mathcal{O})$ un espace topologique annelé, $\mathcal{S}$ une partition finie de X en parties localement fermées (appelées strates), vérifiant l'axiome de frontière. Soit p une fonction $\mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{Z}$ (la perversité)

Définition 2.2.1 La sous-catégorie ${}^{\bar p}D^{+,\leq 0}(X,\mathcal{O})$ de $D^+(X,\mathcal{O})$ est formée des complexes $K^\cdot$ tels que pour $i_S : S \hookrightarrow X$ l'inclusion d'une strate, on ait $\underline{H}^n(i_S^* K) = 0$ pour $n > p(S)$.

Proposition 2.2.2 ${}^{\bar p}D^{+,\leq 0}(X,\mathcal{O})$ définit une t-structure sur $D^+(X,\mathcal{O})$. La catégorie ${}^{\bar p}D^{\geq 1}$ correspondante a pour objets les complexes $K^\cdot$ tels que $H^n(i_S^! K^\cdot) = 0$ pour $n \leq p(S)$.

La démonstration se fait par induction sur le nombre de strates, à l'aide du résultat suivant (loc.cit, Théorème 1.4.10)

Proposition 2.2.3 Soit $F \overset{i}{\hookrightarrow} X$ l'inclusion d'un fermé, et $j : V \hookrightarrow X$ l'ouvert complémentaire. Soient $D_U^{\leq 0}$ (resp. $D_F^{\leq 0}$) une t-structure sur $D_U = D^+(U,\mathcal{O})$ (resp. sur $D_F = D^+(F,\mathcal{O})$). Alors l'ensemble $D^{\leq 0}$ des complexes $K^\cdot$ de D_X tels que $j^* K \in D_U^{\leq 0}$ et $i^* K \in D_F^{\leq 0}$ définit une t-structure sur D_X, pour laquelle $D_X^{\geq 1}$ est formé des $K^\cdot$ tels que $j^* K \in D_U^{\geq 1}$ et $i^! K \in D_F^{\geq 1}$.

Définition 2.2.4. La catégorie $\mathcal{M}(\bar p, X, \mathcal{O})$ des faisceaux $\bar p$-pervers sur X est la catégorie abélienne déduite de ${}^{p}D^{+,\leq 0}(X,\mathcal{O})$ par le procédé 2.1.4.

Proposition 2.2.5 Soit U une partie localement fermée de X, réunion de strates, $j : U \hookrightarrow X$ l'inclusion. Alors $j_!$ et j^* sont $\bar p$-exacts à droite, leurs adjoints à droite $j^!$ et j_* sont $\bar p$-exacts à gauche.

Notation 2.2.6 On écrit $D^{\leq \bar p}$ (resp. $D^{\geq \bar p}$) au lieu de ${}^{\bar p}D^{\leq 0}$ (resp. ${}^{\bar p}D^{\geq 0}$) ; on écrit $\tau_{\leq \bar p}$ et $\tau_{\geq \bar p}$ pour ${}^{\bar p}\tau_{\leq 0}$ et ${}^{\bar p}\tau_{\geq 0}$, et $H^{\bar p}$ pour le H^0 au sens de la perversité $\bar p$.

On pose ${}^{\bar p}j_! A = H^{\bar p}(j_! A)$ pour A dans $\mathcal{M}(\bar p, U, \mathcal{O})$, etc...

On a alors une suite de morphismes $j_! A \longrightarrow {}^{\bar p}j_! A \longrightarrow {}^{\bar p}j_* A \longrightarrow j_* A$

On définit le foncteur ${}^{\bar p}j_{!}$ (ou simplement $j_{!*}$) par

$${}^{\bar p}j_{!*} A = \operatorname{Im}({}^{\bar p}j_! A \longrightarrow {}^{\bar p}j_* A)$$

Proposition 2.2.7 Pour A dans $\mathcal{M}(\bar p, U, \mathcal{O})$, $j_{!*} A$ est l'unique prolongement P de A dans $D^+(X,\mathcal{O})$ tel que, pour $i_S : S \hookrightarrow X$ l'inclusion d'une strate, on ait $H^n i_S^* P = 0$ pour $i \geq p(S)$ et $H^n i_S^! P = 0$ pour $i \leq p(S)$.

On caractérise de facon analogue ${}^{p}j_! A$ et ${}^{p}j_* A$.

Proposition 2.2.8 Soient $\bar p$ et $\bar q$ deux perversités. On a alors

$$D^{\leq \bar p} \overset{\mathbb{L}}{\otimes} D^{\leq \bar q} \subset D^{\leq \bar p + \bar q} \quad \text{et} \quad R\,\underline{\mathrm{Hom}}\,(D^{\leq \bar p}, D^{\geq \bar q}) \subset D^{\geq \bar q - \bar p}$$

Corollaire 1 : Pour $K^\cdot$ dans $D^{\leq \bar p}$ et $L^\cdot$ dans $D^{\geq \bar p}$, on a $\underline{H}^i(R\,\underline{\mathrm{Hom}}(K^\cdot, L^\cdot)) = 0$ pour $i < 0$. De plus le préfaisceau $U \longmapsto \mathrm{Hom}_{D(U,\mathcal{O})}(K^\cdot|_U, L^\cdot|_U)$ est un faisceau

Corollaire 2 : Les faisceaux $\bar p$-pervers sur les ouverts de X forment un champ. (ils se recollent exactement comme des faisceaux ordinaires)

Supposons maintenant que $\bar p$ vérifie $p(S) \geq p(T)$ pour $S \subset \bar T$. Soit U_n la réunion des strates S telles que $p(S) \leq n$, et soit $j_n : U_{n-1} \hookrightarrow U_n$ l'inclusion

Proposition 2.2.9. Soit a tel que $X = U_a$ et soit A un faisceau $\overline{p}$-pervers sur U_k, j l'inclusion de U_k dans X. On a

$$j_{!*} A = \tau_{\leq a-1}\, j_{a*} \cdots \tau_{\leq k} j_{k+1*}\, A$$

Supposons en outre que X est une pseudo-variété, que les complémentaires des U_n en soient une filtration au sens de 1.1. et que $\mathcal{O}$ soit constant de valeur un anneau R commutatif noethérien. Relativement à la stratification $\mathcal{S}$, on peut parler de faisceaux constructibles et définir une catégorie dérivée $D_c^+(X,R)$. Les constructions et opérations précédentes respectent la constructibilité. Pour R un corps, on dispose de la (bi) dualité de Verdier (0.2). La perversité duale de $\overline{p}$ est la perversité $\overline{p}^*$ donnée par $\overline{p}^*(S) = -p(S)-\dim(S)$. On a $D_X(D^{\geq\overline{p}}) = D^{\leq\overline{p}^*}$; D_X échange ${}^{\overline{p}}j_!$ et ${}^{\overline{p}^*}j_*$, ${}^{\overline{p}}j^!$ et ${}^{\overline{p}^*}j^*$, ${}^{p}j_{!*}$ avec ${}^{\overline{p}^*}j_{!*}$.

On retrouve ainsi 1.2 (mais la perversité a subi un décalage). Lorsque toutes les strates sont de dimension paire, on dispose de la perversité auto-duale : $p_{1/2}(S) = -\frac{1}{2}\dim S$. Il résulte de 2.2.7 et des remarques précédentes que si A est un faisceau pervers auto-dual sur un ouvert U, alors $j_{!*}(A)$ est l'unique prolongement auto-dual P de A (dans $D_c(X)$) tel que, pour $S \overset{i_s}{\hookrightarrow} X-U$ l'inclusion d'une strate, les H^iP soient nuls sur S pour $i \geq -\frac{1}{2}\dim S$. Pour $A = \mathbb{Q}_U[n]$, on a par exemple $j_{!*} A = \underline{IC}^\bullet(X)$

2.3 Faisceaux (1/2)-pervers sur les variétés algébriques. (d'après [B-B1, §3])

Soit X une variété algébrique sur $\mathbb{C}$, ou sur un corps fini ou algébriquement clos. On travaillera dans une catégorie dérivée du type $D_c^b(X,\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{C})$ ou $D_c^b(X,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ (voir 0.2) et on parlera de faisceaux (1/2)-pervers, en utilisant la perversité auto-duale $p_{1/2}(S) = -\dim(S)$. On complètera dans ce cas les résultats de 2.2. On pose pour simplifier $\mu = \overline{p}_{1/2}$, on notera ${}^{\mu}D(X)^{\leq 0}$ la t-structure sur $D_c^b(X)$ définie comme en 2.2.1, etc...

Lemme 2.3.1 Pour $K^\bullet \in D_c^b(X)$, posons :

$$a_\mu(K^\bullet) = \sup_x\, (\dim x + a_\tau(i_x^* K^\bullet))$$

$$\text{et} \quad b_\mu(K^\bullet) = \inf\, (-\dim x + b_\tau(i_x^! K^\bullet))$$

où x parcourt les points (non supposés fermés) de X et où $[b_\tau L^\bullet, a_\tau L^\bullet]$ est l'amplitude d'un complexe d'espaces vectoriels $L^\bullet$.

Alors ${}^{\mu}D(X)^{\leq\ell}$ est l'ensemble des $K^\bullet$ tels que $a_\mu(K^\bullet) \leq \ell$, et ${}^{\mu}D(X)^{\geq\ell}$ est l'ensemble des $K^\bullet$ tels que $b_\mu(K^\bullet) \geq \ell$.

On note $\mathcal{M}(X)$ (ou $\mathcal{M}(X,\mathbb{Q}_\ell)$, etc...) la catégorie abélienne ${}^{\mu}D(X)^{0}$.

Proposition 2.3.2 Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de variétés, d la dimension maximale des fibres de f.

a) La μ-amplitude de $f_!$ est contenue dans $[-\dim X,d]$, celle de f_* dans $[-d,\dim X]$, celle de f^* dans $[-\dim Y,d]$, celle de $f^!$ dans $[-d,\dim Y]$

b) Si f est affine, f_* est μ-exact à droite et $f_!$ est μ-exact à gauche.

c) Si f est lisse (à dimension des fibres constantes), $f^{-1}=f^*[d] = f^!(-d)[-d]$ est μ-exact.

<u>Corollaire 1</u> : Soit $i : Y \hookrightarrow X$ un sous-schéma. Les foncteurs i_* et $i^!$ sont μ-exacts à gauche, et $i_!$ et i^* sont μ-exacts à droite. Si i est un morphisme affine, alors i_* et $i_!$ sont μ-exacts.

<u>Corollaire 2</u> (version relative de "Lefschetz faible"). Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme projectif, $i : Z \hookrightarrow X$ une section hyperplane, $M \in \mathcal{M}(X)$. Considérons le morphisme canonique $M \longrightarrow i_* i^* M$. Le morphisme correspondant $H^a_\mu(f_*M) \longrightarrow H^a_\mu(foi)_* i^* M$ est un isomorphisme pour $a < -1$, et un monomorphisme pour $a = -1$.

On a dualement un énoncé relatif à $i_! i^! M \longrightarrow M$.

Soit $i : Y \hookrightarrow X$ un sous-schéma fermé, $j : U = X-Y \hookrightarrow X$. Les catégories $\mathcal{M}(X)$, $\mathcal{M}(Y)$, $\mathcal{M}(U)$ sont reliées par uhe collection de foncteurs, qui satisfont entre autres ${}^\mu i^! \circ {}^\mu j_* = {}^\mu i^* \circ {}^\mu j_! = {}^\mu j^* \circ {}^\mu i_* = 0$. Les suites naturelles $0 \longrightarrow {}^\mu i_! \circ {}^\mu i^! M \longrightarrow M \longrightarrow {}^\mu j_* (M|_U)$ et ${}^\mu j_!(M|_U) \longrightarrow M \longrightarrow {}^\mu i_* M \longrightarrow 0$ sont exactes. Les foncteurs ${}^\mu i_!$ et ${}^\mu i^!$ définissent une équivalence de catégories entre $\mathcal{M}(Y)$ et la sous-catégorie pleine $\mathcal{M}_Y(X)$ de $\mathcal{M}(X)$ formée des faisceaux pervers de restriction nulle à U. Pour $M \in \mathcal{M}(X)$, ${}^\mu i_! \circ {}^\mu i^! M \hookrightarrow M$ et $M \longrightarrow {}^\mu i_* \circ {}^\mu i^* M$ sont les sous-objets (resp. quotient) maximaux de M, qui appartiennent à $\mathcal{M}_Y(X)$.

<u>Théorème 2.3.3</u> Le foncteur $j_\mu = j_{!*}$(cf.2.2) transforme monomorphismes en monomorphismes et épimorphismes en épimorphismes. Les foncteurs j_μ et ${}^\mu j^*$ définissent une équivalence de catégories entre $\mathcal{M}(U)$ et $\mathcal{M}_U(X) = \{M \in \mathcal{M}(X) \text{ t.q. } {}^\mu i^* M = {}^\mu i^! M = 0\}$

Le résultat suivant se prouve élémentairement par dévissage.

<u>Lemme 2.3.4</u> La catégorie $\mathcal{M}(X)$ est noethérienne

Grâce à l'involution D_X de $\mathcal{M}(X)$, on en déduit le

<u>Théorème 2.3.5</u> La catégorie $\mathcal{M}(X)$ est artinienne.

Il est alors facile de décrire les objets simples de $\mathcal{M}(X)$. Soit $i : Y \hookrightarrow X$ un sous-schéma fermé irréductible, $j : U \hookrightarrow Y$ l'inclusion d'un ouvert lisse, $\mathfrak{F}$ un système local (resp. faisceau lisse) <u>irréductible</u> sur U. Alors ${}^\mu(ioj)_{!*}(\mathfrak{F}[\dim Y]) = {}^\mu i_*(\underline{IC}^\cdot(Y,\mathfrak{F}))$ est un objet simple de $\mathcal{M}(X)$ et tout objet simple est de ce type. Un tel faisceau pervers est appelé "complexe D-G-M"

Soit S une courbe algébrique, s un point lisse de S, $f : X \longrightarrow S$ un morphisme. Pour $K^\cdot \in D^b_c(X-X_s)$ (où $X_s = f^{-1}(s)$), Deligne a construit [SGA7, Exposé 14] un complexe de faisceau $\Psi K^\cdot$ sur X_s (complexe des cycles évanescents)

Proposition 2.3.6 (Gabber, [Ga2] et [Luminy])

Si $K^\cdot$ est pervers, alors $\Psi\ K^\cdot[-1]$ est pervers. La démonstration utilisé les techniques de [SGA4 1/2, Th. de finitude] et le fait suivant

Proposition 2.3.7 $\Psi(D\ K^\cdot) = D(\Psi\ K^\cdot)$ (1) [2].

Soit $K^\cdot \in \mathcal{M}(X-X_s)$. Le groupe d'inertie I de S en s agit sur le faisceau pervers $\Psi\ K^\cdot[-1]$; on supposera cette action quasi-unipotente (c'est vrai si l'on est au-dessus d'un corps fini [SGA7, Exp.I et XIV] et [Weil II,§1.7.] et probablement toujours si $K^\cdot$ est du type 2.3.5 avec $\mathfrak{F}$ constant). D'où une action finie $\rho : I \longrightarrow \mathrm{Aut}\ \Psi\ K^\cdot[-1]$ et un morphisme "nilpotent" $(\Psi K^\cdot[-1])^{\rho(I)} \xrightarrow{N} (\Psi K^\cdot[-1])^{\rho(I)}$ (1) [Weil II, §1.6.1.7] (N est le logarithme de la monodromie).

Proposition 2.3.8 (Gabber, loc. cit.) On a un triangle distingué dans $D^b_c(X_s)$: $i^* j_* K^\cdot \longrightarrow (\Psi K^\cdot[-1])^{\rho(I)} \xrightarrow{N} (\Psi K^\cdot[-1])^{\rho(I)}$ (1). En particulier,

$H^{-1}_\mu(i^* j_* K^\cdot) = \ker N$ et $H^0_\mu(i^* j_* K^\cdot) = \mathrm{coker}\ N$. On a de plus $H^{-1}_\mu(i^* j_* K^\cdot) = i^*(j_{!*}K^\cdot)[-1]$

Corollaire 2.3.9 Pour $F^\cdot$ un faisceau pervers sur X, $\Phi\ F^\cdot[-1]$ est pervers.

§ 3. Théorème de pureté de Gabber et applications

3.1. Le théorème fondamental (d'après [B-B1, §3])

Les notations de 0.3 sont en vigueur. On applique 2.3 à la catégorie $D_{Weil}(X_o)$ et on note $\mathcal{M}_{Weil}(X_o)$ la catégorie abélienne des faisceaux pervers (de Weil) correspondante. On obtient de même $\mathcal{M}_{mixte}(X_o)$.

Théorème fondamental 3.1.1 [B-B1, Théorème 3.6] Soit $M \in \mathcal{M}_{\geq i}(X_o)$. Alors tout sous-quotient de M appartient à $\mathcal{M}_{\geq i}(X_o)$. La même chose est vraie pour $\mathcal{M}_{\leq i}(X_o)$

Corollaire 1 : Soit $i : Y_o \hookrightarrow X_o$ une immersion affine localement fermée. Alors $i_\mu : \mathcal{M}_{mixte}(Y_o) \longrightarrow \mathcal{M}_{mixte}(X_o)$ conserve les poids.

Le cas où i est une immersion fermée est clair. Le cas où i est une immersion ouverte résulte de 0.3.1 d), de la définition de i_μ et du fait que $i_!$ et i_* sont μ-exacts (d'après 2.3.2).

Corollaire 2 : Tout faisceau pervers mixte irréductible est pur.
Résulte du théorème et de la classification des objets irréductibles de $\mathcal{M}_{Weil}(X_o)$ (cf.2.3.5) (et du fait que tout ouvert contient un ouvert affine!)

Démonstration du théorème Pour $M \in \mathcal{M}_{mixte}(X_o)$, on considère le préfaisceau $\int M$ sur les ouverts affines de $(X_o)_{ét}$ défini par la formule : $\int M(U_o) = H^0(U,M)$. D'après 2.3.2 b), $\int$ est un foncteur exact à droite à valeurs dans les préfaisceaux de $\mathbb{Q}_\ell$-vectoriels munis d'un opérateur F. On dit que les poids de $\int M$ sont $\geq$ i s'il en est toujours ainsi de $\int M(U_o)$.

<u>Lemme 3.1.2</u> Soit $M \in \mathcal{M}_{\mathrm{mixte}}(X_o)$. Alors $M \in \mathcal{M}_{\geq i}(X_o)$ ssi les poids de $\int M$ sont $\geq i$.

Il est agréable de prouver que 3.1.2 $\Rightarrow$ 3.1.1 (il y a une astuce triviale et diabolique). Reste à prouver 3.1.2.

$\Rightarrow$ résulte de 0.3.1. d)

Prouvons $\Leftarrow$. Soit N le plus grand sous-faisceau pervers de M, à support ponctuel.

A) Supposons $\dim X = 1$. Soit $i : U_o \hookrightarrow X_o$ une immersion ouverte dense telle que M est <u>lisse</u> sur U (en tant qu'objet de $D_{\mathrm{Weil}}(X_o)$). Alors $M|_{U_o} = \mathfrak{F}[1]$ où $\mathfrak{F}$ est un faisceau lisse et $M/N \hookrightarrow i_*(M|_{U_o})$

A1) Prouvons que $M|_{U_o} \in \mathcal{M}_{\geq i}(U_o)$, i.e $\mathfrak{F} \in D_{\geq i-1}$. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. On peut alors trouver un sous-faisceau lisse non nul $G \subset \mathfrak{F}$ tel que les poids de G sont $< i-1$, et ceux de $\mathfrak{F}|G$ sont $\geq i-1$ (si nécessaire, voir [Weil II, Théorème 3.4.1]). Il est facile de trouver un morphisme étale $\widetilde{U}_o \longrightarrow U_o$ avec $\widetilde{U}$ irréductible et affine, de degré suffisamment grand pour que $\dim \widetilde{H}^1(\widetilde{U},G) > \mathrm{rk}(\mathfrak{F}|G)$ (cf. l'introduction) (au besoin, on agrandit le corps de base). Alors l'image de $H^1_c(\widetilde{U},G)$ dans $H^1(\widetilde{U},\mathfrak{F}) = \int M(\widetilde{U}_o)$ est non nulle. Mais les poids de $H^1_c(\widetilde{U},G)$ sont $< i$ d'après 0.3.1. d), contradiction.

A2) Prouvons que $M/N \in \mathcal{M}_{\geq i}(X_o)$. Comme $M/N \hookrightarrow i_*(M|_{U_o})$, pour tout point fermé x de $X_o - U_o$, on a :

$$i_x^! (M/N)[1] = i_x^!(i_*(M|_{U_o})/(M/N)) = i_x^*(i_*(M|_{U_o})/(M/N))$$

Ceci est un espace vectoriel, quotient de $(H^1_\tau i_* \mathfrak{F})_x$, lequel est de poids $\geq i+1$ d'après 0.3.2. Les poids de $i_x^!(M|N)$ sont donc $\geq i$ et on conclut grâce à 0.3.1. a)

A3) Reste à prouver que les poids de N sont $\geq i$. Soit $x \in \mathrm{supp}(N)$. Quitte à localiser un peu, on peut supposer $\mathrm{supp}(N) = \{x\}$. Soit $V_o \longrightarrow X_o$ un revêtement étale galoisien au point x, de degré $d > \mathrm{rg}\, \mathfrak{F}$, avec V irréductible et affine. On a une suite exacte $H^{-1}(V,M/N) \longrightarrow \overset{d}{\underset{1}{\oplus}} N_x^{(j)} \longrightarrow H^0(V,M)$. On voit tout de suite que l'image de $H^{-1}(V,M/N)$, invariante par le groupe de Galois, ne rencontre pas $N_x^{(j)} (\forall j)$, d'où $N_x^{(j)} \hookrightarrow H^i(V,M) = \int M(V_o)$ et on conclut.

B) <u>Le cas général</u> On se ramène aisément à supposer $X_o = \mathbb{A}^n_o$, et on procède par récurrence sur n.

B1) Supposons d'abord $N = 0$. Quitte à agrandir le corps de base, on peut choisir une projection linéaire $\pi_o : \mathbb{A}^n_o \longrightarrow \mathbb{A}^1_o$ et un voisinage U_o de x, de sorte que ${}^\mu j_o^! \; M = 0$ pour $j_o : \pi_o^{-1}(y) \cap U_o \hookrightarrow U_o$ (il est facile, en utilisant 2.3.5 et un dévissage de M, de trouver π_o tel que ${}^\mu j_o^! \; M$ soit supporté en x_o ; mais alors ${}^\mu j_{o,!} \, {}^\mu j_o^!(M) \hookrightarrow M$ et comme $N = 0$, on conclut que ${}^\mu j_o^! \; M = 0$). On a alors $j^! M = (H^1_\mu \, j^! M)[-1]$. On vérifie aisément que $\int \circ {}^\mu\pi_* = \pi_* \circ \int$, d'où ${}^\mu\pi_*(M|_{V_o}) \in D_{\geq i}(\mathbb{A}^1_o)$ (d'après A)) pour V_o un ouvert affine de $\mathbb{A}^n_o$. Si $V_o \subset U_o$, on a :

$$\int(H^1_\mu j^! M)\ (V_o \cap \pi_o^{-1}(y)) = H^1(V \cap \pi^{-1}(y),\ j^! M) = H^1(i_y^{\ !}\pi_*(M|_{V_o}))$$

(où $i_y : y \hookrightarrow A^1_o$) .

D'après 0.3.1.d), $i_y^{\ !}\ {}^\mu\pi_*(M|_{V_o})$ est de poids $\geq$ i, donc son H^1 est de poids $\geq i+1$.

On vérifie que $H^1(i_y^{\ !}\ \pi_*(M|_{V_o})) = H^1(i_y^{!\mu}\pi_*(M|_{V_o}))$. Par l'hypothèse de récurrence, appliquée à $\pi_o^{-1}(y)$, $H^1_\mu j^!\ M$ est dans $D_{\geq i+1}(\pi^{-1}(y)\cap U_o)$, donc $j^! M$ est dans $D_{\geq i}$, donc par 0.3.1 a) les poids de $i_x^{\ !} j^! M = i_x^! M$ sont $\geq$ i, d'où encore le fait que $M \in \mathcal{M}_{\geq i}$.

B2) Soit N quelconque. Il est clair que $M|N \in \mathcal{M}_{\geq i}$ d'après B1). Il reste à prouver que $N \in \mathcal{M}_{\geq i}$. On le déduira du lemme suivant :

Lemme 3.1.3 Il existe un voisinage étale affine U_1 de x , et des revêtements étales connexes U_k de U_1 , de degrés d_k , avec $d_k \to \infty$ et

$$\dim H^i(U_k, M|N) = o(d_k) \quad \text{pour } k \to \infty \text{ , si } i < 0 \text{ .}$$

Une fois le lemme prouvé, la même méthode qu'en A2) prouve que $N \in \mathcal{M}_{\geq i}$. Pour établir le lemme, on se ramène au cas où X est un ouvert de A^n puis, en prenant un ouvert U_1 étale affine contenant x , au cas où U_1 est un ouvert affine de C^n , où C est une courbe propre et lisse de genre $g > 1$. Notant j l'inclusion de U_1 dans C^n , X_k un revêtement étale surjectif de C^n de degré d_k , $U_k \in U_1 \times_{C^n} X_k$, on voit que $H^i(U_k, M|N)$ est dual de $H^{-i}(X_k, j_! D(M|N))$. On est donc ramené à prouver le lemme suivant (où le corps de base est algébriquement clos).

Lemme 3.1.4 Soient $C_1,\ldots,C_n$ des courbes projectives lisses, $K^\bullet \in D^{\leq 0}(\prod_1^n C_a)$. Il existe A tel que pour tout système $\widetilde{C}_a$ de revêtements étales connexes des C_a , de degrés d_a , on ait pour $\widetilde{Y} = \prod \widetilde{C}_a$ et pour tout entier i :

$$\dim H^i(\widetilde{Y}, K^\bullet) \leq A . \sup_{\substack{S \subset [1,\ldots,n] \\ |S| \leq n-i}} \prod d_a \text{ .}$$

On procède par récurrence sur n . Relativement à la projection $Y \xrightarrow{p_1} C_1$, $K^\bullet$ est localement acyclique en dehors d'une partie finie T de C_1 . L'hypothèse de récurrence, et un dévissage, permettent de supposer que $K^\bullet$ est le prolongement par zéro de sa restriction à $p_1^{-1}(C_1 - T)$. On peut supposer $T \neq \emptyset$. On notera $\sim$ les objets relatifs à $\widetilde{C}_1$, $\widetilde{Y}$, etc... On procèdera à une majoration des dimensions de $H^p(\widetilde{C}_1, R^q\widetilde{p}_{1,*}\widetilde{K}^\bullet)$. Par hypothèse de récurrence, le rang du système local $R^q p_{1,*}\widetilde{K}$ sur $\widetilde{C}_1 - \widetilde{T}$ est majoré par $A_1 . \sup_{\substack{S_1 \subset [2,\ldots,n] \\ |S_1| \leq n-q-2}} (\prod_{a \in S_1} d_a)$. On a donc la même majoration pour $\dim H^2(\widetilde{C}_1, R^q\widetilde{p}_{1,*}\widetilde{K}^\bullet)$ qui est du type voulu. Le H^0 étant nul, reste à majorer la dimension du H^1. Or la caractéristique d'Euler est donnée par la formule (voir [Ray])

$$\chi(\widetilde{C}_1, R^q p_{1,*}\widetilde{K}^\bullet) = \chi(\widetilde{C}_1 - \widetilde{T}) . \operatorname{rg} R^q\widetilde{p}_{1,*}\widetilde{K}^* - \sum_{\widetilde{t}\in\widetilde{T}} Sw_{\widetilde{t}}(R^q p_{1,*}\widetilde{K}^\bullet) .$$

Il s'agit donc de majorer $Sw_{\widetilde{t}}(R^q p_{1,*}\widetilde{K})$. Remarquons que le complexe $(\psi\widetilde{K})_{\widetilde{t}}$ habite dans $D^{\leq -1}(\widetilde{p}_1^{-1}(\widetilde{t}))$ (cf. 2.3.6) et qu'on peut définir $Sw_{\widetilde{t}}(\psi\widetilde{K})_{\widetilde{t}}$ par un Hom externe ; pour t l'image dans C_1 de $\widetilde{t}$, c'est l'image inverse de $Sw_t(\psi K)_t$, qui habite dans $D^{\leq -1}(p_1^{-1}(t))$. $Sw_{\widetilde{t}}(R^q p_{1,*}\widetilde{K})$ n'est bien sûr autre que $\dim H^q(\prod_2^n \widetilde{C}_a, Sw_t(\psi K^\bullet)_t)$ et au titre de la récurrence, est majoré par $A_2. \sup_{\substack{S_2\subset[2,\ldots,n] \\ |S_2|\leq n-q-2}} (\prod_{a\in S_2} d_a)$. Comme

$|\widetilde{T}| = d_1.|T|$ et $\chi(\widetilde{C}_1 - \widetilde{T}) = d_1.\chi(C_1 - T)$, on majore la caractéristique d'Euler par le produit d'une constante et de $\sup_{\substack{S\subset[1,\ldots,n] \\ |S|\leq n-q-1}} (\prod_{a\in S} d_a)$. Cela établit le lemme 3.1.4 et

par suite 3.1.2.

<u>Remarque</u> : Je remercie Beilinson de m'avoir communiqué sa démonstration inédite de l'étape 2B), dont l'importance est cruciale.

3.2. Applications

<u>Théorème 3.2.1</u> a) Tout faisceau pervers de Weil <u>pur</u> sur X_o est semi-simple en tant que faisceau pervers <u>sur X</u>

b) Tout faisceau pervers de Weil mixte est muni d'une unique filtration croissante (<u>filtration par le poids</u>) $W.(M)$ telle que, pour tout i, $Gr_i^W(M)$ soit pur de poids i. Les morphismes de $\mathcal{M}_{mixte}(X_o)$ sont <u>strictement compatibles</u> à la filtration par le poids

a) résulte de 3.1.1 (corollaire 2) et de 0.3.1 c) et d).

b) résulte de 2.3.5, 3.1.1 et 0.3.1 e)

<u>Théorème 3.2.2</u> a) Soit $K^\bullet \in D_{mixte}(X_o)$. Alors

$$(K^\bullet \in D_{\leq i}) \Leftrightarrow (\forall a,\ H^a_\mu(K^\bullet) \in \mathcal{M}_{\leq i+a}(X_o))$$

$$(K^\bullet \in D_{\geq i}) \Leftrightarrow (\forall a,\ H^a_\mu(K^\bullet) \in \mathcal{M}_{\geq i+a}(X_o))$$

$$(K^\bullet \in D_{i}) \Leftrightarrow (\forall a,\ H^a_\mu(K^\bullet) \in \mathcal{M}_{i+a}(X_o))$$

b) Si $K^\bullet \in D_{mixte}(X_o)$ est pur alors $K^\bullet$ est isomorphe, dans $D^b_c(X)$, à $\bigoplus_a H^a_\mu(K^\bullet)[-a]$

c) Pour j une immersion localement fermée, $j_{!*}$ conserve les poids.

a) et b) résultent aisément de 0.3.1 c) et d) et de 3.2.1. c) est alors immédiat, grâce à 3.1.1, corollaire 1 : c'est le <u>théorème de pureté de Gabber</u> [Ga1]

Corollaire 3.2.3. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme propre. Alors $f_* IC^\bullet(X)$ est somme directe de complexes D.G.M. décalés. (un tel complexe est dit "μ-complètement réductible").

Corollaire 3.2.4. Idem pour des variétés complexes.

Deligne a donné, à Luminy, des indications pour déduire le corollaire 3.2.4 de 3.2.3. Ce "théorème de décomposition" avait été conjecturé par Gelfand et MacPherson [Ge-M]. Voir [Go-M4] pour une discussion de ce théorème.

Exemple 3.2.5 Si f est une résolution des singularités, $f_*(\mathbb{Q}_X)$ (resp. $f_*(\mathbb{Q}_{\ell,X})$) contient $\underline{IC}^\bullet(Y)$ [-n] en facteur direct (c'était une conjecture de Kazhdan)

Lemme 3.2.6 Soit $K^\bullet \in D^b_c(X)$, μ-complètement réductible. Pour η un point générique de X, $\bar{\eta}$ un point géométrique correspondant, le morphisme naturel $H^a(X,K^\bullet) \longrightarrow H^a_\tau(K^\bullet_{\bar{\eta}})^{Gal(\bar{\eta}|\eta)}$ est un épimorphisme pour tout a.

Lemme 3.2.7 Sous les hypothèses de 3.2.6, soit x un point géométrique de X et $\tilde{X}^x$ le spectre du localisé strict de X en x. Soit η le point générique de X^x. Alors $H^a(K^\bullet_x) \longrightarrow H^a(K^\bullet_{\bar{\eta}})^{Gal(\bar{\eta}|\eta)}$ est un épimorphisme pour tout a.

Ces deux lemmes (triviaux) donnent des théorèmes globaux et locaux sur les cycles invariants (par exemple dans la situation 3.2.3 ou 3.2.4). 3.2.7 généralise [Weil II, Théorème 6.2.9].

Théorème 3.2.8 Soit $f : X_o \longrightarrow Y_o$ un morphisme projectif, $L \in H^2(X, \mathbb{Q}_\ell(1))$ la classe d'une section hyperplane. La multiplication par L induit pour tout $K^\bullet \in D(X)$ un morphisme $K^\bullet \longrightarrow K^\bullet(1)$ [2] Si $K^\bullet$ est un faisceau pervers pur, alors $L^i : H^{-i}_\mu(f_*M) \longrightarrow H^i_\mu(f_*M)$ (i) est un isomorphisme pour tout $i \geq 0$

Ce "théorème de Lefschetz difficile relatif" est dû à Beilinson et Bernstein [B-B1, Théorème 4.5]

Revenons à la situation de 2.3.6-2.3.7, supposée réalisée sur un corps fini ; supposons de plus $K^\bullet$ pur de poids n.

Théorème 3.2.9 (Gabber, [Ga2] et [Luminy] La filtration de monodromie M. du faisceau pervers $\Psi K^\bullet[-1]$ au sens de [Weil II, § 1.6] coincide avec la filtration par le poids (au sens de 3.2.1.b) à un décalage près : plus précisément $Gr^M_i(\Psi K^\bullet[-1])$ est pur de poids n-1+i. 2.3.8 et 3.1.1 (Corollaire 1) montrent que $((\Psi K^\bullet[-1]^{\rho(I)})^N$ est mixte de poids $\leq$ n-1. Passant à un revêtement fini pour avoir $\rho = Id$, on applique ce résultat à $X_o \underset{S_o}{\times} X_o$, en observant : $\Psi(K^\bullet \underset{S_o}{\boxtimes} K^\bullet) = (\Psi K^\bullet) \boxtimes (\Psi K^\bullet)$ (faisceaux pervers sur $X_s \times X_s$ placés en degré -2). On peut alors recopier les arguments de la preuve de [Weil II, Théorème 1.8.4]

Corollaire 3.2.10 Supposons seulement $K^{\bullet}$ mixte (de filtration par le poids $W.$), alors la filtration de monodromie de $\Psi K^{\bullet}[-1]$, relativement à $\Psi W.K^{\bullet}[-1]$ existe (au sens de [Weil II, Proposition 1.6.13]) et coincide, à un décalage près, avec la filtration par le poids.

§ 4. Faisceaux pervers et Modules holonomes réguliers

4.1 Propriétés fondamentales des $\mathcal{D}_X$-Modules holonomes

Soit X une variété analytique complexe lisse, $\mathcal{O}_X$ le faisceau des fonctions holomorphes, $\mathcal{D}_X$ le faisceau des opérateurs différentiels d'ordre fini. $\mathcal{D}_X$ est un faisceau cohérent d'anneaux, "réunion" croissante des faisceaux $\mathcal{D}_X(m)$ des opérateurs différentiels d'ordre $\leq m$. Le faisceau d'anneaux commutatifs $\mathrm{gr}\,\mathcal{D}_X = \bigoplus_m \mathcal{D}_X(m)/\mathcal{D}_X(m-1)$ est cohérent, et s'identifie à $q_*\mathcal{O}_{T^*(X)}$, où $q: T^*(X) \longrightarrow X$ est le fibré cotangent, vu comme schéma relatif sur X au sens de [HaK]. Soit $\mathcal{M}$ un faisceau cohérent de $\mathcal{D}_X$-Modules (à gauche ou à droite) ; localement, en choisissant une bonne filtration $\{\mathcal{M}_n\}$ de $\mathcal{M}$ (cf.[K1], [Ma1]) on obtient un faisceau cohérent $\mathrm{gr}\mathcal{M}$ sur $\mathrm{gr}\mathcal{D}_X = q_*\mathcal{O}_{T^*(X)}$. Son support est la variété caractéristique de $\mathcal{M}$, notée $\mathrm{Ch}(\mathcal{M})$ (une sous-variété homogène de $T^*(X)$) ; il ne dépend pas de la bonne filtration, non plus que sa multiplicité en chacun de ses points génériques [K1], [Ma1], [Bj].

Théorème 4.1.1 [S-K-K], [Ma1], [Ga3] $\mathrm{Ch}(\mathcal{M})$ est une sous-variété involutive de $T^*(X)$ (en particulier $\dim \mathrm{Ch}(\mathcal{M}) \geq \dim(X)$)

Définition et lemme 4.1.2. $\mathcal{M}$ est dit holonome si $\dim \mathrm{Ch}(\mathcal{M}) = \dim(X)$. Si $\mathcal{M}$ est holonome, $\mathrm{Ch}(\mathcal{M})$ est une variété lagrangienne, et $\mathcal{M}$ est localement de longueur finie

Exemple 4.1.3 $\mathcal{O}_X$(plus généralement, un fibré vectoriel holomorphe à connection intégrable) est holonome à gauche ; $\Omega_X = \Omega_X^{\dim X}$ est holonome à droite.

Les Modules holonomes ont de remarquables propriétés de stabilité (par image inverse, image directe par un morphisme propre,...). Il est commode d'introduire la notion de complexe holonome : objet de la catégorie dérivée bornée des faisceaux de $\mathcal{D}_X$-Modules à cohomologie holonome. Tout d'abord un utile sorite.

Définition 4.1.4 Pour Z sous-espace fermé de V lisse, et $\mathfrak{J}$ un faisceau de $\mathcal{O}_V$-Modules, on pose $\underline{H}^i_{[Z]}(\mathfrak{J}) = \varinjlim_n \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{O}_V|\mathfrak{J}_Z^{n+1}, \mathfrak{J})$. C'est un faisceau de $\mathcal{O}_X$-Modules, supporté par Z.

Proposition 4.1.5 [Me1, ChapII] Si $\mathfrak{J}$ est un faisceau de $\mathcal{D}_V$-Modules, il en est de même de $\underline{H}^i_{[Z]}(\mathfrak{J})$.

Définition 4.1.6 Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme entre variétés lisses. Soit Δ_f le graphe de f, identifié à X. On définit deux faisceaux sur X :

$$\mathcal{D}_{X \longrightarrow Y} = \underline{H}^{\dim Y}_{[\Delta_f]} \ (X \times Y \ ; \ p_2^* \, \Omega_Y)$$

$$\mathcal{D}_{Y \longleftarrow X} = \underline{H}^{\dim Y}_{[\Delta_f]} \ (X \times Y \ ; \ p_1^* \, \Omega_X)$$

On a $\mathcal{D}_{X \longrightarrow pt} = \mathcal{O}_X$, $\mathcal{D}_{pt \longleftarrow X} = \Omega_X$, $\mathcal{D}_{X \longrightarrow X} = \mathcal{D}_X$.

Dans la situation $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ on a des homomorphismes $\mathbb{C}$-bilinéaires de faisceaux sur X

$$\mathcal{D}_{X \longrightarrow Y} \times f^{-1} \mathcal{D}_{Y \longrightarrow Z} \longrightarrow \mathcal{D}_{X \longrightarrow Z}$$

$$f^{-1}\mathcal{D}_{Z \longleftarrow Y} \times \mathcal{D}_{Y \longleftarrow X} \longrightarrow \mathcal{D}_{Z \longleftarrow X}$$

Définition 4.1.7 Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme entre variétés lisses. Pour $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_Y$-Module, on pose $\mathbb{L}f^* \mathcal{M} = \mathcal{D}_{X \longrightarrow Y} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{D}_Y} f^{-1}\mathcal{M}$ (bien défini dans la catégorie dérivée des complexes de $\mathcal{D}_X$-Modules).

Théorème 4.1.8 Si $\mathcal{M}$ est holonome, les faisceaux de cohomologie de $\mathbb{L}f^* \mathcal{M}$ sont des $\mathcal{D}_X$-Modules holonomes.

Remarque 4.1.8bis On a en fait $\mathbb{L}f^* \mathcal{M} = \mathcal{O}_X \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f^{-1}(\mathcal{O}_Y)} f^{-1}(\mathcal{M})$ (cf. l'image inverse d'une connexion)

Définition 4.1.9 Pour $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-Module, on définit le complexe de $\mathcal{D}_Y$-Modules

$$\int_f \mathcal{M} = \mathbb{R}f_* \ (\mathcal{D}_{Y \longleftarrow X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M})$$

Théorème 4.1.10 a) Si f est projectif, et $\mathcal{M}$ holonome, admettant une bonne filtration globale, $\int_f \mathcal{M}$ est un complexe holonome [K1]

b) Si f est une immersion fermée, $\int_f$ induit un isomorphisme entre la catégorie des $\mathcal{D}_X$-Modules (resp. cohérents, resp. holonomes) et la catégorie des $\mathcal{D}_Y$-Modules supportés par X(resp. cohérents, resp. holonomes) [K1]

Voir [Pham] pour une vision "humaine" du foncteur $\int_f$

Théorème 4.1.11 Si Z est un sous-espace analytique fermé de V lisse, et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_V$-Module holonome, les $\mathcal{D}_V$-Modules $\underline{H}^i_{[Z]}(\mathcal{M})$ sont holonomes [K4]

Les constructions et résultats 4.1.7. à 4.1.11 s'étendent évidemment aux complexes holonomes et sont compatibles à la composition des morphismes (cf.4.1.6).

Théorème 4.1.12 [K1], [K3], [Bj] Soit $\mathcal{M}$ un Module holonome à gauche, alors $\underline{\mathrm{Ext}}^{\dim X}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\mathcal{D}_X)$ est un $\mathcal{D}_X$-Module holonome à droite et $\mathcal{M}^* = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X, \underline{\mathrm{Ext}}^{\dim X}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\mathcal{D}_X))$

est un $\mathcal{D}_X$-Module holonome à gauche. On a $\mathcal{M} \sim (\mathcal{M}^*)^*$; le foncteur $*$ est exact, et préserve variétés caractéristiques et multiplicités d'icelles aux points génériques.

Définition 4.1.13 Pour $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-Module holonome, on pose :

$$DR(\mathcal{M}) = \Omega_X \overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{D}_X}{\otimes}} \mathcal{M} = \mathbb{R}\ \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X,\mathcal{M})\ [\dim X]\ (\text{objet de } D^b(X,\mathbb{C}))$$

Ce n'est pas la normalisation habituelle cf. [K2], [Me1].

N.B. : $DR(\mathcal{M})$ est le complexe de De Rham de $\mathcal{M}$.

Théorème 4.1.14 [K2] Pour $\mathcal{M}$ holonome, $DR(\mathcal{M})$ est un faisceau (1/2)-pervers.
(le résultat de Kashiwara est en fait beaucoup plus précis)

Théorème 4.1.15 [Me1, Chap.2] Pour $\mathcal{M}$ holonome, $DR(\mathcal{M}^*)$ est canoniquement isomorphe à $D_X\ DR(\mathcal{M})$

Remarque 4.1.16 A un décalage près, $DR(\mathcal{M}^*)$ est le complexe $Sol(\mathcal{M}) = \mathbb{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\mathcal{O}_X)$ des solutions de $\mathcal{M}$ [K1], [K3], [Me1]

Proposition 4.1.17 Avec les hypothèses de 4.1.10 a),
$DR(\int_f \mathcal{M}) = f_*\ DR(\mathcal{M})$ (cf. convention 0.2).

4.2. Modules holonomes réguliers. Correspondance de Riemann-Hilbert

Soit $D(\mathcal{D}_X)_h$ la catégorie dérivée de la catégorie des complexes de bornés de $\mathcal{D}_X$-Modules à cohomologie holonome.

Définition 4.2.1 [Me1], [R] Un complexe $\mathcal{M}^\cdot$ de $D(\mathcal{D})_h$ est dit régulier si pour tout sous-espace analytique fermé Y de X, le morphisme naturel

$$DR\ (R\underline{\Gamma}_{[Y]}(\mathcal{M}^\cdot)) \longrightarrow R\underline{\Gamma}_Y\ (DR(\mathcal{M}^\cdot))\ \text{est un isomorphisme}$$

Proposition 4.2.2 (i) $\mathcal{M}^\cdot$ holonome est régulier ssi les $\underline{H}^i(\mathcal{M}^\cdot)$ le sont [Me2]
(ii) Si $\mathcal{M}$ holonome est régulier, $\mathcal{M}^*$ l'est aussi, et tout sous-quotient de $\mathcal{M}$ est régulier [Me2].

Soit $D(\mathcal{D})_{h.r}$ la sous-catégorie triangulée de $D(\mathcal{D})_h$ formée des complexes réguliers.

Théorème 4.2.3 [Me1], [Me2], [Lê-Me], [K5], [K-K]

Le foncteur DR induit une équivalence entre $D(\mathcal{D})_{h-r}$ et $D^b_c(X,\mathbb{C})$.
C'est la solution au "problème de Riemann-Hilbert", due à Kashiwara et à Mebkhout, qui utilisent tous les deux de facon essentielle les $\mathcal{D}^\infty_X$-Modules; on trouvera dans [K5] la construction d'un foncteur inverse du foncteur DR. Beilinson et Bernstein ont prouvé une variante algébrique du théorème "δ e z $\mathcal{D}^\infty$" : à (ne pas?) paraître.

Corollaire 4.2.4 (Deligne [Br1]) DR induit une équivalence de la catégorie des Modules holonomes réguliers avec la catégorie des faisceaux (1/2)-pervers (constructibles).

Cela conduit à un riche dictionnaire, pour lequel on réfère à [Me1], [Me2], [Lê-Me].

Proposition 4.2.5 [B-B2], [Br-K] Soit $i : Y \hookrightarrow X$ l'inclusion d'une sous-variété analytique fermée. Il existe un unique Module holonome régulier $\mathcal{L}(Y,X)$ sur X supporté par Y, et satisfaisant

$$\text{(a)} \quad \mathcal{L}(Y,X)|_{Y_{reg}} = H^{\operatorname{codim} Y}_{[Y_{reg}]}(\mathcal{O}_{X-Y_{sing}})$$

$$\text{(b)} \quad H^{0}_{[Y_{sing}]}(\mathcal{L}(Y,X)) = H^{0}_{[Y_{sing}]}(\mathcal{L}(Y,X)^{*}) = 0$$

On a alors $\mathcal{L}(Y,X) = \mathcal{L}(Y,X)^{*}$ et $DR\ \mathcal{L}(Y,X) = i_{*}\ \underline{IC}^{\cdot}(Y)$

On a aussi une version "à coefficients tordus" [B-B2], [Br1],

Pour des applications, voir l'exposé de Springer.

Complément 4.2.6 Soit $q : Y \longrightarrow X$ un fibré principal homogène (au sens analytique) sous l'action de $(\mathbb{C}^*)^k = T$. Le faisceau d'anneaux $\mathcal{A} = [q_{*}(\mathcal{D}_Y)]^T$ est cohérent, de centre le faisceau constant U(LieT). Pour J un idéal maximal de U(LieT), le faisceau $\mathcal{A} \underset{U(LieT)}{\otimes} U(LieT)/J$ est une forme filtrée tordue de $\mathcal{D}_X$, et on dispose d'une variante de 4.2.3 et 4.2.4 (on travaille avec des faisceaux constructibles ou pervers sur Y, T-équivariants) (Beilinson - Bernstein - Drinfeld). Pour les applications à la description du foncteur Ψ au moyen de $\mathcal{D}_X[S]$-Modules, on renvoie à un futur article de Beilinson - Bernstein (?) et aux conférences de Malgrange et Verdier à Luminy [Luminy].

Pour des méthodes micro-analytiques profondes, Kashiwara et Kawai prouvent la caractérisation remarquable suivante des Modules holonomes réguliers [K-K]

Théorème 4.2.7 Soit $\mathcal{M}$ holonome. Il est régulier ssi il existe une bonne filtration de $\mathcal{M}$ telle que l'annulateur de $gr\mathcal{M}$ dans $gr\mathcal{D}_X$ soit un faisceau d'idéaux réduit.

Pour les géomètres, l'analyse microlocale est un procédé pour étudier les cycles évanescents des faisceaux pervers ou des objets de $D^b_c(X)$

Théorème 4.2.8 Soit $\mathcal{M}^{\cdot} \in D(\mathcal{D})_h$ et posons $Ch(\mathcal{M}^{\cdot}) = \bigcup_i Ch\ \underline{H}^i(\mathcal{M}^{\cdot})$ Alors $Ch(\mathcal{M}^{\cdot}) - T^*_X X$ est l'ensemble des dérivées non nulles en $x \in X$ de germes de projections $(X,x) \longrightarrow (\mathbb{C},0)$ qui sont non acycliques pour $DR(\mathcal{M}^{\cdot})$ (voir [K3] ou [B-D-K])

Cela permet de définir la variété caractéristique d'un faisceau pervers (entre autres), de comprendre une estimation de $Ch(\int_f \mathcal{M})$ due à Kashiwara. L'estimation de $Ch(\mathcal{O}_Y \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{M})$, pour Y fermé dans X, donnée dans [K-S] a sûrement une signification topologique, qui reste à découvrir. Les multiplicités dans $Ch(\mathcal{M})$ s'interprètent en termes de cycles évanescents; 1.3.3 semble aussi très naturel dans ce cadre.

§ 5. Problèmes ouverts (dans le désordre)

5.1. Pour X variété projective sur $\mathbb{C}$, muni les $IH_i(X)$ de structures de Hodge pures (voir [C-G-M] et [Br] pour deux approches très différentes). Etudier la conjecture de Zucker [Z], que Borel aurait résolue pour des groupes de $\mathbb{Q}$-rang un.

5.2. Comprendre la géométrie du théorème de décomposition 3.2.4. Le prouver sur $\mathbb{C}$ par les $\mathcal{D}_X$-Modules ou (et) la théorie de Hodge.

5.3. Définir l'homologie d'intersection d'une variété affine (substitut à l'homologie d'intersection d'une compactification "minimale") (Kazhdan)

5.4. En quel sens l'homologie d'intersection serait-elle fonctorielle (ou bivariante)? (MacPherson, Fulton). Quels cycles algébriques ont une classe fondamentale dans IH_* (Dubson)

5.5. Formule de Lefschetz en (co)homologie d'intersection (d'abord pour un automorphisme, voire pour une "correspondance" du type Hecke)

5.6. Transcrire aux $\mathcal{D}$-Modules la théorie de Verdier de "spécialisation d'un faisceau pervers (au cône normal d'une sous-variété)". Idem dans le cadre étale. Lien avec la filtration par le poids.

5.7. Défricher d'éventuels analogues cristallins (en car $\neq 0$) au § 4. Développer les concepts "rigide-analytiques" nécessaires (Berthelot-Ogus)

5.8. Construire une théorie des déformations d'un $\mathcal{D}_X$-Module holonome (regarder peut-être des $\mathcal{D}_{X\times Y \to X}$-Modules "holonomes", plats sur $\mathcal{O}_Y$).
Généraliser 4.1.14, etc...

5.9. Relier à la topologie les Modules holonomes non réguliers (voir [Ma 2] en dimension 1) et (si ça a un sens) les non holonomes.

5.10. Indépendance de ℓ en cohomologie d'intersection ℓ-adique*.

* Gabber m'a informé en février 1982 qu'il avait résolu cette question.

Sigles :

[SGA4], Springer Lectures Notes 269, 270, 305
[SGA41/2], Springer Lecture Notes 569
[SGA5], Springer Lecture Notes 589
[SGA7], Springer Lecture Notes 288, 340
[Weil I] P. Deligne, la conjecture de Weil I, Publ. Math. I.H.E.S. 43 (1974), 273-308
[Weil II] P. Deligne, la conjecture de Weil II, Publ. Math. I.H.E.S. 52 (1979), 138-252.
[Luminy] Comptes-Rendus de la Conférence "Analyse et topologie sur les espaces singuliers, juillet 1981, à paraître dans Astérisque.

Bibliographie

[B-B.1] A.A Beilinson et J.N. Bernstein, Modules ℓ-adiques et filtrations par le poids (version préliminaire), manuscrit en russe (1981)

[B-B2] A.A Beilinson et J.N. Bernstein, Localisation des $\mathfrak{g}$-modules, C.R.A.S, t.292 (5-1-1981), 15-18

[B-D-K] J-L Brylinski, A.S. Dubson et M. Kashiwara : Formule de l'indice pour les Modules holonomes et obstruction d'Euler locale, C.R.A.S. t. (26-10-1981)

[B_j] J-E. Björk : Rings of differential operators North-Holland 1981

[Br 1,2] J-L Brylinski : Modules holonomes à singularités régulières et filtration de Hodge
I : à paraître dans les Comptes-Rendus de la conférence de La Rabida (Espagne) janvier 1981
II : Prépublication de l'Ecole Polytechnique (1981), à paraître dans [Luminy]

[Br-K] J-L Brylinski et M. Kashiwara : Kazhdan-Lusztig conjecture and holonomic systems, Invent. math. 64 (1981), 387-410

[Ca] H. Cartan, Séminaire de l'E.N.S. 48-49

[C-G-M] J. Cheeger, M. Goresky et R. MacPherson, the L^2-cohomology and singular intersection homology for singular algebraic varieties, preprint

[D1] P. Deligne, Exposé au Séminaire Bourbaki n° 355, février 1969, in Springer Lecture Notes

[D2] P. Deligne : Lettre à D. Kazhdan et G. Lusztig, Bures-sur-Yvette 20 avril 79

[Ga1] O. Gabber : Pureté de la cohomologie de MacPherson-Goresky rédigé par P. Deligne, prépublication I.H.E.S., 1981

[Ga2] O. Gabber : Cycles évanescents et faisceaux pervers, notes manuscrites de P. Deligne (1981)

[Ga3] O. Gabber : The integrability of the characteristic varieties, American Journal of Math. 103, n° 3(1981), 445-468.

[Ge-M] Gelfand et R. MacPherson : Verma modules and Schubert cells : a dictionary, prépublication I.H.E.S., 1980

[Go-M1] M. Goresky et R. MacPherson : Intersection homology theory I, Topology 19 (1980), 135-162

[Go-M2] M. Goresky et R. MacPherson. Intersection homology theory II

[Go-M3] M. Goresky et R. MacPherson : Stratified Morse theory, à paraître (dans [Luminy]?)

[Go-M4] M. Goresky et R. MacPherson : On the topology of complex algebraic maps, prépublication I.H.E.S. 1981

[Go-Si] M. Goresky et P. Siegel : Linking pairings on singular spaces, preprint 80

[Ha] R. Hartshorne : Residues and duality, Springer Lecture Notes 20

[HaK] M. Hakim : Topos annelés et schémas relatifs

[K1] M. Kashiwara : B-functions and holonomic systems, Invent. math. 38 (1976), 33-58.

[K2] M. Kashiwara : On the maximally overdetermined systems of partial differential equations I , Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ. 10 (1975), 563-579.

[K3] M. Kashiwara : Cours à Paris-Nord, rédigé par T.M. Fernandes, 1977 (épuisé)

[K4] M. Kashiwara : On the holonomic systems of linear differential equations II, Invent. math. 49 (1978), 121-135

[K5] M. Kashiwara : Faisceaux constructibles et systèmes holonomes d'équations aux dérivées partielles, in Séminaire Goulaouic-Schwartz 79-80

[K-K] M. Kashiwara et T. Kawai, On the holonomic systems of linear differential equations (systems with regular singularities) III, Publ. R.I.M.S., Kyoto University, vol. 17, n° 3(1981), 813-979.

[K-L] D. Kazhdan et G. Lusztig : Schubert varieties and Poincaré duality

[K-S] M. Kashiwara et P. Schapira : Variété caractéristique de la restriction d'un système micro-différentiel, Prépublication de l'Université de Paris-Nord

[La] F. Lazzari, Morse theory on singular spaces, in Astérisque vol. 7-8

[Lê, Me] Lê Dũng Trang et Z. Mebkhout : Introduction to linear differential systems, à paraître dans les Proceedings de "A.M.S. Summer Institute, july 1981 (Arcata)"

[Ma1] B. Malgrange : Exposé au Séminaire Bourbaki n° 522, février 1978, Springer Lecture Notes n°710

[Ma2] B. Malgrange : Equations irrégulières à une variable et faisceaux pervers avec structures de Stokes aux points singuliers (en préparation)

[Me1] Z. Mebkhout : Thèse d'Etat, Université de Paris VII, février 1979

[Me2] Z. Mebkhout : Une autre équivalence de catégories, prépublication 1981

[Pham] F. Pham, Singularité des systèmes différentiels de Gauss-Manin, Progress in Mathematics, Birkhaüser 1979

[Pi] R. Pignoni : Density and Stability of Morse functions on a stratified space Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl.Sci (4) 6 (1979) 593-608

[R] J.P. Ramis : Variations sur le thème "GAGA" Springer Lecture Notes 694, 228-289

[S] J.P. Serre : Exposé au Séminaire Bourbaki n° 446, février 1974, Springer Lecture Notes n°431

[S-K-K] M. Sato M. Kashiwara et T. Kawai ; Microfunctions and pseudo-differential equations, Springer Lecture Notes 287 (1973), 264-529

[Springer] T.A. Springer : Exposé au Séminaire Bourbaki (dans ce volume)

[V1] J.L. Verdier : Catégories dérivées (1963), reproduit dans [SGA41/2]

[V2] J.L. Verdier, Exposé au Séminaire Bourbaki n°300, novembre 1965, Springer Lecture Notes

[V3] J.L. Verdier, Classe d'homologie associé à un cycle Séminaire de l'E.N.S. 74-75, in Astérisque, vol. 36-37

[Z] S. Zucker : L_2-cohomology, warped products and arithmetic groups, à paraître dans Annals of Maths.

[Ray] M. Raynaud : Exposé au Séminaire Bourbaki n° 286, février 1965.

Jean-Luc BRYLINSKI

Ecole Polytechnique
Centre de Mathématiques
Plateau de Palaiseau
F-91128 PALAISEAU CEDEX