JEAN-LOUIS VERDIER

Algèbres de Lie, systèmes hamiltoniens, courbes algébriques

Séminaire N. Bourbaki, 1981, exp. nº 566, p. 85-94

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1980-1981__23__85_0>

Séminaire BOURBAKI
33e année, 1980/81, n° 566

ALGÈBRES DE LIE, SYSTÈMES HAMILTONIENS, COURBES ALGÉBRIQUES
[d'après M. Adler et P. van Moerbeke]

par Jean-Louis VERDIER

Des physiciens [3] [8] et des mathématiciens [5] [6] [9] ont étudié ces dernières années, des systèmes mécaniques associés aux algèbres de Lie semi-simples. Il s'agit de systèmes de points pesants situés sur une droite et soumis à des potentiels très particuliers. En utilisant systématiquement certaines algèbres de Lie de dimension infinie, Adler et van Moerbeke proposent [2] une autre approche de ces systèmes leur permettant d'utiliser à la fois les techniques d'algèbres de Lie et la description des flots hamiltoniens à l'aide des jacobiennes de courbes algébriques introduites dans [4]. Ces techniques leur permettent de traiter aussi certains problèmes classiques tels que le problème de Von Neumann, le problème du flot géodésique sur un ellipsoïde et le problème des mouvements de la toupie dans le cas d'Euler-Poinsot ou de Lagrange. Rappelons que c'est, dans un autre contexte, en utilisant une algèbre de Lie de dimension infinie qu'Adler propose [1] une interprétation des fonctionnelles intervenant dans l'étude de l'équation de Korteweg - De Vries.

A titre d'introduction à ces travaux et d'illustration, nous allons montrer comment ces considérations s'appliquent au cas classique et relativement facile des mouvements de la toupie. Nous renvoyons aux mémoires cités pour les études complètes et systématiques.

1. Les équations d'Euler

Soit S un solide, mobile autour d'un point fixe O, de centre de gravité G, de masse totale μ, placé dans un champ de pesanteur de vecteur unitaire γ et d'intensité $-g$. Notons I la matrice d'inertie de S : c'est un automorphisme symétrique positif séparant de l'espace mobile V attaché au solide. Posons $\ell = \mu g.\overrightarrow{OG}$. C'est un vecteur fixe de l'espace mobile V. Le vecteur ℓ et l'automorphisme I sont les données permettant d'écrire les équations du mouvement de S.

Pour écrire ces équations, introduisons le vecteur rotation instantanée Ω de S et le moment cinétique M et considérons Ω et M comme des vecteurs variables de l'espace mobile V. On a

1.1 $$M = I(\Omega)$$

En prenant le moment par rapport à O des équations de Newton des points pesants constituant S et en intégrant par rapport à $d\mu$, on obtient la première des équations d'Euler

1.2
$$\begin{cases} \dot{M} - M\wedge\Omega = \gamma\wedge\ell \ , \\ \dot{\gamma} - \gamma\wedge\Omega = 0 \ , \end{cases}$$

la deuxième s'obtenant en exprimant que la dérivée absolue de γ est nulle. Le système d'équations (1.1) et (1.2) est le système à résoudre pour décrire le mouvement de S .

Notons $\mathcal{G}$ l'algèbre de Lie de dimension 6 produit semi-direct $V \ltimes so(V)$. En associant à γ la rotation instantanée de vecteur γ que nous noterons encore γ , le couple (M,γ) peut être interprété comme un élément de $\mathcal{G}$, élément que nous noterons $\gamma + \varepsilon M$ $(\varepsilon^2 = 0)$. Les équations 1.1 et 1.2 s'écrivent alors

1.3
$$\begin{cases} \dot{\overline{\gamma + \varepsilon M}} = [\gamma+\varepsilon M , \Omega+\varepsilon\ell] \ , \\ M = I(\Omega) \ . \end{cases}$$

Il résulte de 1.3 que le vecteur vitesse $\dot{\overline{\gamma + \varepsilon M}}$ est tangent à l'orbite de $\gamma + \varepsilon M$ sous l'action adjointe de $\mathcal{G}$, de sorte que les trajectoires de 1.3 sont contenues dans les orbites de $\mathcal{G}$ sous l'action adjointe.

Comme $\gamma \neq 0$, les orbites de $\gamma + \varepsilon M$ sous l'action de $\mathcal{G}$ sont des sous variétés de dimension 4 d'équations

$$\mathcal{O}_c : \begin{cases} \langle\gamma,\gamma\rangle = 1 \ , \\ \langle\gamma,M\rangle = c = \text{constante} \ . \end{cases}$$

L'application $(\gamma+\varepsilon M) \longrightarrow (\gamma, M - c\gamma)$ identifie l'orbite $\mathcal{O}_c$ avec l'espace total $T(S_2)$ du fibré tangent à $S_2 \subset V$ muni de l'action canonique de $\mathcal{G}$.

On a vu que les fonctions $(\gamma+\varepsilon M) \longmapsto \langle\gamma,\gamma\rangle$ et $(\gamma+\varepsilon M) \longmapsto \langle\gamma,M\rangle$ sont constantes sur les trajectoires. Ce sont des intégrales premières. On vérifie facilement que l'énergie totale du système

1.4
$$H_1(\gamma,M) = \frac{1}{2}\langle\Omega,M\rangle + \langle\gamma,\ell\rangle$$

est constante sur les trajectoires. Nous allons dans le numéro suivant interpréter cette intégrale première.

2. La structure symplectique de Kostant-Kirilov

Soient $\mathcal{G}$ une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie, f et g deux fonctions de classe C^1 définies sur un ouvert U du dual $\mathcal{G}^*$ et notons $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial x} : U \to \mathcal{G}$ leurs différentielles respectives. Posons alors

2.1
$$\{f,g\}(x) = \left\langle x , \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial x}\right]\right\rangle \ , \quad x \in U \ .$$

On peut montrer que l'application $(f,g) \longmapsto \{f,g\}$ vérifie l'identité de Jacobi et que la formation du crochet commute aux opérations de $\mathcal{G}$.

Soient $\mathcal{O}$ une orbite de $\mathcal{G}^*$ pour la représentation coadjointe, $x \in \mathcal{O}$, T_x l'espace tangent à $\mathcal{O}$ en x , $\Pi_x : \mathcal{G} \to T_x$ la surjection canonique. Il existe sur

$\mathcal{O}$ une 2-forme différentielle $\omega_{\mathcal{O}}$, non dégénérée en chaque point, fermée, stable par g , telle que pour tout $x \in \mathcal{O}$, tout $X , Y \in g$ on ait

2.2 $$\omega_{\mathcal{O}}(\Pi_x(X) , \Pi_x(Y)) = \langle x,[X,Y]\rangle \ .$$

La structure symplectique $\omega_{\mathcal{O}}$ de $\mathcal{O}$ est appelée la <u>structure symplectique de Kostant-Kirilov</u>. Elle est reliée au crochet $(f,g) \longmapsto \{f,g\}$ de la manière suivante : On définit d'abord le flot <u>hamiltonien</u> défini par f sur U par

2.3 $$\mathrm{Ham}(f)(x) = - \mathrm{CoAd}(\frac{\partial f}{\partial x})(x) \ , \quad x \in \mathcal{O} \ .$$

On a alors pour tout $u \in T_x$,

2.4 $$d(f/\mathcal{O})(u) = -\omega_{\mathcal{O}}(\mathrm{Ham}(f),u) \ ,$$

et

2.5 $$\{f,g\}/\mathcal{O} = \omega_{\mathcal{O}}(\mathrm{Ham}(f),\mathrm{Ham}(g)) \ .$$

En d'autres termes, la restriction à chaque orbite $\mathcal{O}$ de $\{f,g\}$ est le crochet de Poisson de $f/\mathcal{O}$ et $g/\mathcal{O}$ relativement à la structure symplectique de Kostant-Kirilov.

Soit alors H une fonction de classe C^1 sur U . L'équation différentielle

2.6 $$\dot{X} = \mathrm{Ham}(H)$$

est appelée l'équation hamiltonienne associée à H . D'après 2.3 cette équation s'écrit encore

2.7 $$\dot{X} = - \mathrm{CoAd}(\frac{\partial H}{\partial x})(X) \ .$$

Comme le flot $\mathrm{Ham}(H)$ est tangent aux espaces H = constante , H est constant sur les trajectoires de 2.6. C'est une intégrale première.

Dans le cas de la toupie la forme bilinéaire sur g

2.8 $$(u+\varepsilon v),(u'+\varepsilon v') \longmapsto \langle u,v'\rangle + \langle v,u'\rangle$$

est séparante et invariante par g . Elle identifie donc g^* avec g . Avec cette identification $\frac{\partial f}{\partial x}$ est le gradiant de f par rapport à 2.8. On a (1.4)

2.9 $$\frac{\partial H_1}{\partial x} = \Omega + \varepsilon \ell$$

et par suite l'équation différentielle 2.7 s'écrit $\dot{X} = [X , \frac{\partial H_1}{\partial x}]$ et on retrouve ainsi l'équation (1.3). On a montré en particulier que H_1 est une intégrale première.

3. <u>Complète intégrabilité</u>

Soit W une variété symplectique de dimension $2n$. Un système hamiltonien complètement intégrable est constitué par n fonctions H_i , $1 \leq i \leq n$, en "involution" c'est-à-dire telles que

3.1 $$\{H_i,H_j\} = 0 \qquad \forall\, i,j \ ,$$

et telles que de plus les flots hamiltoniens associés soient linéairement indépendants en tous les points d'un ouvert dense. Le système en question est alors celui des n équations différentielles

3.2 $$\dot{X}_i = \mathrm{Ham}(H_i) \qquad 1 \leq i \leq n .$$

Les fonctions H_i , $1 \leq i \leq n$, sont des intégrales premières de chacune de ces équations différentielles.

Une équation hamiltonienne est dite complètement intégrable si elle fait partie d'un système complètement intégrable.

On sait classiquement que l'équation de la toupie (1.3) est complètement intégrable sur les orbites $\mathcal{O}_c$ dans les trois cas suivants :

1) Le centre de rotation est au centre de gravité (Euler-Poinsot 1750). On peut prendre $H_2(\gamma,M) = \langle M,M\rangle$ (on écarte le cas trivial $I = \lambda\, \mathrm{Id}_V$).

2) Le solide possède un axe de symétrie de rotation passant par le centre de rotation (Lagrange 1788). On peut prendre $H_2 = \langle M,\ell\rangle$.

3) Le cas de S. Kowalevska (1881) [7]. C'est le cas où il existe un repère orthonormé de V où $I = \mathrm{diag}(2\lambda,2\lambda,\lambda)$, $\ell = (x_o,0,0)$. On peut prendre
$H_2(\gamma,M) = |(m_1 + im_2)^2 - 4\lambda x_o(\gamma_1 + i\gamma_2)|^2$.

On a montré que s'il existe un polynôme $H_2(M,\gamma)$ tel que $\{H_1,H_2\} = 0$, et $\mathrm{Ham}\, H_1$, $\mathrm{Ham}\, H_2$ linéairement indépendants en au moins un point, alors on est dans l'un des trois cas cités ci-dessus.

4. Le théorème d'Adler-Kostant-Symes

Il s'agit d'un théorème général permettant de construire des systèmes complètement intégrables sur les orbites coadjointes d'une algèbre de Lie.

Soient L une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie (de dimension finie), somme directe de deux sous-algèbres K et N , munie d'une forme bilinéaire symétrique séparante Ad_L-invariante notée $(X,Y) \longmapsto \langle X,Y\rangle$. Soient $K^\perp$ et $N^\perp$ l'orthogonal de K et N respectivement. Comme $N^\perp$ est stable par $\mathrm{Ad}_L(N)$, la projection $L \to K^\perp$ munit $K^\perp$ d'une structure de N-module qui n'est autre que la structure coadjointe pour N . Soit $\Gamma \subset K^\perp$ une orbite sous N localement fermée, munie de sa structure de Kostant-Kirilov et notons $\mathcal{H}(\Gamma)$ l'ensemble des germes de fonctions numériques de classe C^1 au voisinage de $\Gamma \subset L$, Ad_L-invariantes. Pour toute fonction f de classe C^1 définie au voisinage de Γ , on peut écrire, pour $(u,v) \in K^\perp \oplus N^\perp$, $df(u,v)$ sous la forme $\langle \frac{\partial f}{\partial k^\perp}, u\rangle + \langle \frac{\partial f}{\partial n^\perp}, v\rangle$. Les gradients partiels $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial k^\perp}$ et $x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial n^\perp}$ sont à valeurs dans N et K respectivement.

THÉORÈME.— 1) Soient $f \in \mathcal{H}(\Gamma)$ et $x \in \Gamma$. On a

4.1 $$\mathrm{Ham}(f/\Gamma)(x) = [x , \frac{\partial f}{\partial k^\perp}] = - [x , \frac{\partial f}{\partial n^\perp}] .$$

2) Soient f et $g \in \mathcal{A}(\Gamma)$. Alors

4.2 $$\{f/\Gamma, g/\Gamma\} = 0 \ .$$

On vérifie tout d'abord, par un calcul simple de crochet que si $f \in \mathcal{A}(\Gamma)$, on a, pour tout $x \in \Gamma$,

4.3 $$[x, \frac{\partial f}{\partial k^{\perp}}] = - [x, \frac{\partial f}{\partial n^{\perp}}]$$

et que ces deux vecteurs sont dans $K^{\perp}$. D'après (2.3) on a

$$\mathrm{Ham}(f/\Gamma)(x) = [x, \frac{\partial f}{\partial k^{\perp}}] \ ,$$

d'où 1). D'après (2.1), on a

$$\{f/\Gamma, g/\Gamma\} = \langle x, [\frac{\partial f}{\partial k^{\perp}}, \frac{\partial g}{\partial k^{\perp}}] \rangle \ .$$

En utilisant 4.3 et l'invariance de l'accouplement, on en déduit

$$\{f/\Gamma, g/\Gamma\} = \langle x, [\frac{\partial f}{\partial n^{\perp}}, \frac{\partial g}{\partial n^{\perp}}] \rangle \ .$$

Comme $\frac{\partial f}{\partial n^{\perp}}$, $\frac{\partial g}{\partial n^{\perp}}$ sont dans K , on a $[\frac{\partial f}{\partial n^{\perp}}, \frac{\partial g}{\partial n^{\perp}}] \in K$; d'où 2) car $x \in K^{\perp}$. C.Q.F.D.

5. Algèbres de Kac-Moody

L'idée développée systématiquement par Adler et van Moerbeke est d'appliquer, avec quelques précautions, le théorème de Adler-Kostant-Symes à certaines algèbres de Lie de dimension infinie. Reprenons les équations de la toupie (1.3) :

5.1 $$\dot{\overline{\gamma + \varepsilon M}} = [\gamma + \varepsilon M, \Omega + \varepsilon \ell] \ ;$$

équation différentielle dans l'algèbre $so(V) \otimes \mathbb{R}(\varepsilon)$, $(\varepsilon^2 = 0)$. On peut se demander si cette équation est la réduction modulo h^2 d'une équation différentielle dans $so(V) \otimes \mathbb{R}[h]$ où h est une variable formelle. On peut donc, par exemple, se demander si toute solution de 5.1 peut se prolonger en une solution d'un système de type

$$\dot{\overline{\gamma + hM + h^2 \sum_{o}^{m} \alpha_i h^i}} = [\gamma + hM + h^2 \sum_{o}^{m} \alpha_i h^i, \Omega + h\ell] \ .$$

On obtient alors, outre les équations 5.1, le système

5.2 $$\begin{cases} [\alpha_m, \ell] = 0 \ , \\ \dot{\alpha}_i = [\alpha_i, \Omega] + [\alpha_{i-1}, \ell] \ , \ i \neq 0 \ , \\ \dot{\alpha}_o = [\alpha_o, \Omega] + [M, \ell] \ , \end{cases}$$

et on constate, lorsque $\ell \neq 0$, que le système n'admet de solution pour tout M que si les projections de Ω et M sur le plan orthogonal à ℓ sont colinéaires, c'est-à-dire si la droite engendrée par ℓ est un axe de symétrie de rotation du solide. Dans ce cas le système 5.1 est équivalent au système

5.3 $$\dot{\overline{\gamma + hM + h^2\alpha}} = [\gamma + hM + h^2\alpha, \Omega + h\ell] \ ,$$

qui implique $\alpha = \text{constante} = \lambda\ell$ où λ est l'homothétie induite par I sur le plan orthogonal à ℓ .

Supposons désormais qu'on soit dans le cas de Lagrange et introduisons l'algèbre de Lie

5.4 $$L = so(V)[[h^{-1},h] = \{ \sum_{-\infty}^{m} A_i h^i \mid A_i \in so(V) \ , \ m \text{ arbitraire}\} \ ,$$

munie du crochet

$$[\sum_i A_i h^i , \sum_j B_j h^j] = \sum_p (\sum_{i+j=p} [A_i,B_j])h^p \ .$$

L'algèbre L est appelée l'<u>algèbre de Kac-Moody</u> associée à $so(V)$.

Posons

5.5 $$\begin{cases} K = so(V)[h] = \{ \sum_{i=0}^{m} A_i h^i \mid A_i \in so(V) \ , \ m \text{ arbitraire}\} \\ N = \{ \sum_{-\infty}^{-1} A_i h^i \mid A_i \in so(V) \} \ . \end{cases}$$

On a

$$L = K \oplus N \ .$$

Posons

5.6 $$< \sum_{-\infty}^{m} A_i h^i , \sum_{-\infty}^{m'} B_j h^j > \ = \sum_{i+j=-1} <A_i,B_j> \ .$$

On obtient ainsi une forme bilinéaire symétrique séparante, Ad_L-invariante. Pour cette forme on a $K = K^{\perp}$, $N = N^{\perp}$ et le dual de K s'identifie à N . Notons $X \longmapsto X_+$ la projection sur K parallèlement à N . La sous-algèbre N opère sur $K^{\perp} = K$, par l'opération

5.7 $$(n,X) \longmapsto [n,X]_+ \ , \quad n \in N \ , \quad X \in K^{\perp} = K \ .$$

Le sous-espace $E = \{ \sum_0^2 A_i h^i\}$ de dimension 9 de $K^{\perp} = K$, est stable par cette action. La sous-algèbre $N_3 = \{\sum_{-\infty}^{-3} A_i h^i\}$ opère trivialement sur E . Donc l'action de N sur E se factorise par N/N_3 , algèbre de Lie nilpotente de dimension 6 . Soit Γ une orbite de N/N_3 dans E . On notera que A_2 est un invariant orbital. On le supposera $\neq 0$. On constate alors que Γ est une sous-variété de dim 4 de E . Pour trouver des fonctions $f \in \mathcal{A}(\Gamma)$ on opère de la manière suivante. Plongeons $L = so(V)[[h^{-1},h]$ dans $End(V)[[h^{-1},h]$. Pour tout entier n et tout $A \in L$ posons

5.8 $$A^n = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_{n,k}(A)h^k \ ,$$

avec $C_{n,k}(A) \in End(V)$. Les fonctions $A \longmapsto f_{n,k}(A) = Tr(C_{n,k}(A))$ sont Ad_L-invariantes comme on le constate aussitôt.

On s'intéresse aux orbites de A sous N telles que $A_2 = \lambda\ell$. On a pour $A = \gamma + Mh + \lambda\ell h^2 \in E$,

$$A^2 = \gamma^2 + (M\gamma + \gamma M)h + (M^2 + \lambda\gamma\ell + \lambda\ell\gamma)h^2 + (\lambda M\ell + \lambda\ell M)h^3 + \lambda^2\ell^2 h^4 \ .$$

On obtient donc comme intégrales premières

5.9 $$\begin{aligned} C_{2,0}(A) &= \gamma^2 & f_{2,0}(A) &= -2<\gamma,\gamma> \ , \\ C_{2,1}(A) &= M\gamma + \gamma M & f_{2,1}(A) &= -4<M,\gamma> \ , \\ C_{2,2}(A) &= M^2 + \lambda\gamma\ell + \lambda\ell\gamma & f_{2,2}(A) &= -2<M,M> - 4\lambda<\gamma,\ell> \ , \\ C_{2,3}(A) &= M\alpha + \alpha M & f_{2,3}(A) &= -4\lambda<M,\ell> \ . \end{aligned}$$

Les deux premières sont déjà connues, la quatrième est propre au mouvement de Lagrange. Une combinaison linéaire convenable de $f_{2,2}$ et $f_{2,3}$ redonne $\frac{1}{2}\langle M,\Omega\rangle + \langle\gamma,\ell\rangle$. Remarquons que $\langle M,\ell\rangle$ et $\frac{1}{2}\langle M,\Omega\rangle + \langle\gamma,\ell\rangle$ sont dans ce cas les invariants orbitaux de N agissant sur E et que $\langle\gamma,\gamma\rangle$ et $\langle M,\gamma\rangle$ ne sont pas constants sur ces orbites. Le flot hamiltonien correspondant à $\langle M,\gamma\rangle$ est le flot produit par les rotations d'axe $\mathbb{R}\ell$. Pour obtenir le flot (5.3) :

$$(\gamma + Mh + \lambda\ell h^2) \longmapsto [\gamma + Mh + \lambda\ell h^2 , \Omega + h\ell] ,$$

il faut prendre une combinaison linéaire convenable des flots produits par $\langle\gamma,\gamma\rangle$ et $\langle M,\gamma\rangle$.

La méthode des algèbres de Kac-Moody peut être utilisée pour traiter le cas d'Euler-Poinsot ($\ell = 0$) . À la connaissance du rédacteur on ne sait pas encore traiter par cette méthode le cas de Kowalevska.

6. Linéarisation

Il s'agit maintenant d'intégrer le système différentiel du mouvement de la toupie dans les cas où il est complètement intégrable. Classiquement on sait exprimer le mouvement en termes de fonctions elliptiques. Plus précisément, dans le cas d'Euler-Poinsot et de Lagrange, ce sont des fonctions abéliennes attachées à une courbe elliptique, dans le cas de Kowalevska, des fonctions théta de deux variables. Nous nous limiterons au cas de Lagrange. Le cas d'Euler-Poinsot peut être traité de manière analogue. On ne sait pas encore traiter le cas de Kowalevska par les méthodes que nous allons décrire.

Le formalisme des Hamiltoniens de Kac-Moody n'est pas seulement une machine à fabriquer des intégrales premières. Il permet aussi de linéariser les systèmes différentiels, c'est-à-dire de décrire les espaces définis par la constance des intégrales premières et les flots dont ils sont pourvus à l'aide de jacobiennes de courbes algébriques.

Dans le n° 5, on a été amené à considérer des équations différentielles du type

6.1 $$\dot{A} = [A,\Phi(A)] ,$$

où A est un polynôme en h à coefficient dans une algèbre $\mathfrak{g}$ (dans notre cas $so(V)$). Soit ρ une représentation de $\mathfrak{g}$ dans un espace vectoriel complexe (dans notre cas on peut prendre la représentation canonique dans $V \otimes \mathbb{C}$). Posons

$$Q_{A,\rho}(z,h) = \det(z - \rho(A)) .$$

La courbe algébrique complexe projective, d'équation affine

$$Q_{A,\rho}(z,h) = 0$$

est appelée le spectre de $\rho(A)$ ou simplement de A lorsqu'il n'y a pas de confusion. Le spectre de A est un invariant de la trajectoire de A sous le flot 6.1 : en effet on déduit de 6.1 que pour tout n , $\mathrm{Tr}(\rho(\dot{\overline{A^n}})) = 0$. En d'autres termes, l'équation différentielle 6.1 décrit des déformations isospectrales.

Dans le cas du mouvement de Lagrange, on a, d'après (5.9), en posant $s_2(A) = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(A)$

6.2 $$s_2(A) = <\gamma,\gamma> + 2ch + \tilde{H}_1(M,\gamma)h^2 + H_2(M,\gamma)h^3 + \lambda^2<\ell,\ell>h^4$$

en posant

6.3 $$\left\{\begin{array}{l} c = <M,\gamma> \\ \tilde{H}_1(M,\gamma) = <M,M> + 2\lambda<\gamma,\ell> \\ H_2(M,\gamma) = 2\lambda<M,\ell> \end{array}\right.$$

Comme $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A^3) = 0$, on a

6.4 $$Q_A(z,h) = z(z^2 + s_2(A)) ,$$

de sorte que le spectre de A est constitué de la droite $(z = 0)$ et de la courbe elliptique d'équation :

6.5 $$z^2 + s_2(A) = 0 ,$$

que nous appellerons encore, abusivement, spectre de A .

Soient $\mathcal{V}$ une orbite de N dans E d'invariants orbitaux $A_2 = \lambda\ell$, $H_2(M,\gamma)$, $\tilde{H}_1(M,\gamma)$. Soit X une courbe elliptique non singulière d'équation

6.6 $$0 = z^2 + 1 + 2ch + \tilde{H}_1(M,\gamma)h^2 + H_2(M,\gamma)h^3 + \lambda^2<\ell,\ell>h^4 .$$

Notons $\mathcal{C}(X,\mathcal{V})$ l'ensemble des A dans $\mathcal{V}$ de spectre X . Notons $\mathcal{R}$ le groupe des rotations de V d'axe $\mathbb{R}\ell$. Ce groupe agit sur E et laisse $\mathcal{V}$ et $\mathcal{C}(X,\mathcal{V})$ invariants. Le flot qu'il engendre est le flot hamiltonien produit par $(M,\gamma) \mapsto <M,\gamma>$. On peut montrer que $\mathcal{C}(X,\mathcal{V})$ est compact connexe et que pour C , H_1 , H_2 appartenant à un ouvert de Zariski, dense convenable, X est une courbe elliptique non singulière et $\mathcal{C}(X,\mathcal{V})$ est une variété vide ou difféomorphe à $S^1 \times S^1$. Nous supposerons dans la suite qu'on est dans ce cas.

Tout $A \in \mathcal{C}(X,\mathcal{V})$ peut être interprété comme une famille polynomiale de degré 2 d'endomorphisme de V . Donc un tel A est un morphisme de fibrés sur $\mathbb{P}^1$

$$A : V \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow V \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) .$$

Le noyau de A est un sous-fibré de rang 1 de $V \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$. En posant $F = V \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}/\mathrm{Ker}(A)$, on a un diagramme commutatif

6.7 $$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2) & \longrightarrow & V \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} & \longrightarrow & F & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle 0} & & \downarrow{\scriptstyle A} & & \downarrow{\scriptstyle u} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} & \longrightarrow & V \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) & \longrightarrow & F(2) & \longrightarrow & 0 \end{array} .$$

Interprétons h comme un morphisme de X dans $\mathbb{P}^1$. En tout point y de $\mathbb{P}_1 - \{\infty\}$, u possède deux valeurs propres qui sont les valeurs de la fonction z sur X en les deux points de X au dessus de y . En associant à $x \in X$, le sous-espace propre de $u_{h(x)}$ pour la valeur propre $z(x)$, on obtient un fibré sur X que nous noterons $\mathcal{L}(A)$. On a

6.8 $$F = h_*(\mathcal{L}(A)) \ , \quad u = h_*(z) \ , \quad \deg \mathcal{L}(A) = 4 \ .$$

Soit $\mathrm{Jac}_4(X)$ la variété des fibrés inversibles de degré 4 sur X . Comme X est une courbe réelle, $\mathrm{Jac}_4(X)$ est une courbe réelle. L'involution σ de X qui préserve h opère sur $\mathrm{Jac}_4(X)$. Posons

6.9 $$Y = \{\mathcal{L} \in \mathrm{Jac}_4(X) \mid \overline{\mathcal{L}} = \sigma\mathcal{L}\} \ .$$

Comme A est réel, on a $\mathcal{L}(A) \in Y$. On a défini ainsi une application

6.10 $$\Phi : \mathcal{C}(X,\mathcal{V}) \rightarrow Y \ .$$

La variété Y , de dimension réelle 1 , est un espace principal homogène sous l'ensemble des points réels d'une courbe elliptique réelle.

THÉORÈME.— 1) Lorsque $\mathcal{C}(X,\mathcal{V})$ est non vide, Φ est invariant sous l'action de $\mathcal{R}$ et définit par passage au quotient un isomorphisme de $\mathcal{C}(X,\mathcal{V})/\mathcal{R}$ sur Y .

2) Le flot (5.3) passe au quotient par Φ et donne sur Y un flot invariant par translation.

Démontrons 1). Comme $\mathcal{C}(X,\mathcal{V})$ est non vide, X n'a pas de points réels. Soient $\mathcal{L}$ de degré 4 sur X tel que $\sigma\mathcal{L} = \overline{\mathcal{L}}$. Il existe alors un couple de morphismes (Φ_1,Φ_2) de X dans $\mathbb{P}(V_{\mathbb{C}})$ tel que

1) $\overline{\Phi}_1 = \Phi_2 \circ \sigma$

2) $= \Phi_1^*(O(1))$

3) $\Phi_1(X) = \Phi_2(X)$ et $\Phi_1(X)$ est une conique réelle Q de $\mathbb{P}(V_{\mathbb{C}})$.

Un tel couple est unique modulo l'action de $G\ell(V)$. Quitte à faire une transformation linéaire de $V_{\mathbb{C}}$ on peut de plus supposer que

4) Q est la conique des points cycliques de $\mathbb{P}(V_{\mathbb{C}})$ pour le produit scalaire de V .

Le couple (Φ_1,Φ_2) est alors déterminé modulo l'action de $O(V)$. Le morphisme $\Phi_1 \wedge \Phi_2 : X \longrightarrow \mathbb{P}(\overset{2}{\wedge} V_{\mathbb{C}})$ a pour image une conique réelle Γ isomorphe au quotient de X par l'involution σ . Comme la fonction rationnelle h sur X est invariante par σ , on en déduit un plongement réel $\tilde{h} : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}(\overset{2}{\wedge} V_{\mathbb{C}})$ d'image Γ , c'est-à-dire un polynôme défini à un scalaire réel près $h \longmapsto w_o + w_1 h + w_2 h^2$, qu'on interprète, en utilisant l'injection $\overset{2}{\wedge} V \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ donnée par l'orientation et la structure euclidienne de V , comme une application

$$h \longmapsto A_o + A_1 h + A_2 h^2$$

à valeurs dans les endomorphismes antisymétriques de V . Ce polynôme est déterminé, en outre, modulo l'action de $SO(V)$. On peut alors réaliser $A_2 = \lambda\ell$ en effetuant une similitude convenable sur V et le polynôme

$$h \longmapsto A_o + A_1 h + \lambda\ell h^2$$

obtenu est un élément de $\mathcal{C}(X,\mathcal{V})$ déterminé modulo l'action de S^1 , d'où 1). Pour démontrer 2) on remarque que le flot obtenu est la trace sur Y d'un flot algébrique défini sur $\mathrm{Jac}_4(X)$. Par suite un tel flot est nécessairement invariant par translation.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. ADLER - *On a Trace Functional for Formal Pseudo Differential Operators and the symplectic structure of the Korteweg-De Vries Type Equations*, Inventiones Math. 50(1979), 219-248.

[2] M. ADLER and P. VAN MOERBEKE - *Linearization of Hamiltonian systems, Jacobi Varieties and representation theory*, Advances in Math., vol. 38, n°3 (1980), 267-317.
Linearization of Hamiltonian systems, Jacobi Varieties and Representation Theory, Advances in Math., vol. 38, n° 3(1980), 318-379.

[3] F. CALOGERO - *Exactly Solvable One-Dimensional Many Body Problems*, Letters al Nuovo Cimento, vol. 13, n° 11(1975), 411-416.

[4] P. VAN MOERBEKE - *The spectrum of Jacobi Matrices*, Inventiones Math., 37(1976), 45-81.

[5] D. KAZHDAN, B. KOSTANT and S. STERNBERG - *Hamiltonian Group Action and Dynamical Systems of Calogero Type*, Comm. in Pure and Applied Math., vol. XXXI (1978), 481-507.

[6] B. KOSTANT - *The solution to a Generalized Toda Lattice and Representation Theory*, Adv. in Math., vol. 34, n° 3(1979), 195-338.

[7] S. KOWALEVSKA - *Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe*, Acta Math., vol. 12(1888), 177-232.

[8] M.A. OLSHANETSKY and A.M. PERELOMOV - *Completely Integrable Hamiltonian Systems Connected with Semi Simple Lie Algebras*, Inventiones Math., 37(1976), 93-108.

[9] W.W. SYMES - *System of Toda Type, Inverse Spectral Problems, and Representation Theory*, Inventiones Math., 59(1980), 13-51.

Les lecteurs intéressés par l'oeuvre littéraire et scientifique de S. Kowalevska pourront consulter : Sofya Kowalevska : A Russian Chilhood, Springer-Verlag (1978).

Jean-Louis VERDIER

Ecole Normale Supérieure
Centre de Mathématiques
45 rue d'Ulm
F-75230 PARIS CEDEX 05