Séminaire N. Bourbaki

Pierre Cartier

Les arrangements d'hyperplans : un chapitre de géométrie combinatoire

Séminaire N. Bourbaki, 1981, exp. n° 561, p. 1-22

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1980-1981__23__1_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

LES ARRANGEMENTS D'HYPERPLANS : UN CHAPITRE DE GÉOMÉTRIE COMBINATOIRE

par Pierre CARTIER

§ 1. Historique [1]

1. Le point de départ de la théorie est une question simple de géométrie : en combien de régions une famille finie $\underline{\underline{A}}$ de droites découpe-t-elle le plan ? La réponse générale est connue depuis le 19e siècle , sans qu'on puisse lui attribuer une paternité précise . Notons p_1 le nombre des droites dans $\underline{\underline{A}}$, p_o le nombre de leurs points d'intersection et p_{o1} le nombre de paires formées d'une de ces droites et d'un point d'intersection avec une autre droite . Les nombres p_o, p_1, p_{o1} dépendent des relations d'incidence de la famille $\underline{\underline{A}}$, mais ne suffisent pas à décrire le type topologique . Par ailleurs , notons f_1 le nombre de segments et f_2 le nombre de régions découpées par $\underline{\underline{A}}$. On a

$$(1) \qquad f_1 = p_1 + p_{o1} \quad , \quad f_2 = 1 - p_o + p_1 + p_{o1} \ .$$

Nous considérons aussi le nombre f_1^b (resp. f_2^b) de segments (resp. régions) <u>bornés</u> découpés par $\underline{\underline{A}}$; on a de manière analogue

$$(2) \qquad f_1^b = - p_1 + p_{o1} \quad , \quad f_2^b = 1 - p_o - p_1 + p_{o1} \ .$$

Supposons par exemple que les droites de $\underline{\underline{A}}$ soient en position générale : deux droites distinctes de $\underline{\underline{A}}$ ne sont pas parallèles et un point du plan ne peut appartenir à trois droites de $\underline{\underline{A}}$. Si r est le nombre des droites de $\underline{\underline{A}}$, on a

$$\begin{aligned} p_o &= r(r-1)/2 \quad , & p_1 &= r \quad , & p_{o1} &= r(r-1) \\ f_1 &= r^2 \quad , & f_2 &= (r^2 + r + 2)/2 & & \\ f_1^b &= r(r-2) \quad , & f_2^b &= (r-1)(r-2)/2 & & . \end{aligned}$$

Par raison d'uniformité , nous poserons $f_o = f_o^b = p_o$. Les droites de $\underline{\underline{A}}$ définissent une décomposition cellulaire du plan , et f_k (resp. f_k^b) est le nombre de cel-

[1] Je remercie tous ceux qui m'ont permis de mettre mes informations à jour , en particulier Zaslavsky , Las Vergnas , Springer et A'Campo . Mes remerciements vont aussi à Deligne et Serre qui m'ont guidé parmi les écueils de la géométrie algébrique .

lules (resp. bornées) de dimension k . Des relations précédentes , on déduit

(3) $$f_o - f_1 + f_2 = 1 \quad , \quad f_o^b - f_1^b + f_2^b = 1 \quad .$$

De manière analogue , sur une droite D , g_o points découpent $g_1 = g_o + 1$ intervalles , dont $g_1^b = g_o - 1$ sont bornés , et l'on a donc

(4) $$g_o - g_1 = -1 \quad , \quad g_o^b - g_1^b = 1 \quad .$$

Inversement , les relations (1) et (2) découlent aussitôt des relations (3) et (4). Notons B la réunion des cellules bornées et $\chi(X)$ la caractéristique d'Euler-Poincaré d'un espace compact X . Comme un plan est homéomorphe au complémentaire d'un point dans la sphère S^2 , les relations (3) se traduisent sous la forme

(5) $$\chi(S^2) = 2 \quad , \quad \chi(B) = 1 \ .$$

Ce résultat indique la voie des généralisations : soit E un espace affine réel de dimension finie $d \geq 1$; un ensemble fini $\underline{\underline{H}}$ d'hyperplans dans E définit une décomposition cellulaire de E , et l'on peut montrer que la réunion B des cellules bornées est <u>contractile</u> . Compte tenu de théorèmes connus , on a donc

(6) $$\chi(S^d) = 1 + (-1)^d \quad , \quad \chi(B) = 1 \quad ;$$

si l'on note $f_k(\underline{\underline{H}})$ le nombre des k-cellules, et $f_k^b(\underline{\underline{H}})$ le nombre des k-cellules bornées, on a donc la formule générale

(7) $$\sum_{k=0}^{d} (-1)^k f_k(\underline{\underline{H}}) = (-1)^d \quad , \quad \sum_{k=0}^{d} (-1)^k f_k^b(\underline{\underline{H}}) = 1 \quad .$$

Ces relations ont été établies en 1975 par Zaslavsky [5] , qui a montré comment en déduire le calcul des nombres $f_k(\underline{\underline{H}})$ et $f_k^b(\underline{\underline{H}})$ au moyen de nombres généralisant les nombres p_o, p_1, p_{o1} et qui ne dépendent que des relations d'incidence des hyperplans de $\underline{\underline{H}}$. Auparavant , le cas de r hyperplans en position générale avait été traité par Buck [1] en 1943 , et un résultat substantiellement équivalent à celui de Zaslavsky avait été établi par Winder [4] en 1966 . L'immense progrès réalisé par Zaslavsky a été de reconnaître que la structure combinatoire sous-jacente à ce problème géométrique est constituée par les <u>matroïdes</u> ; il put ainsi donner une remarquable interprétation géométrique d'invariants numériques associés aux matroïdes par Whitney , Tutte , Rota et Crapo.

On se trouve ici au confluent avec une autre ligne de pensée mathématique , issue de la théorie des graphes et du problème de coloriage des cartes en quatre couleurs . Faute de place et de compétence , je renoncerai à analyser ici ces développements .

2. Nous allons par contre suivre en détail une autre voie , liée à la géométrie des variétés algébriques complexes . Le point de départ est un travail d'Arnold [15] : soient $z_1,\ldots,z_d$ les fonctions coordonnées dans $\underline{\underline{C}}^d$ et $D = \prod_{j<k} (z_j - z_k)^2$ le discriminant;

on note Ω l'ouvert de $\underline{\underline{C}}^d$ complémentaire de l'hypersurface d'équation $D = 0$. Arnold détermine la cohomologie de Ω et montre en particulier que le polynôme de Poincaré de Ω est donné par

$$P_\Omega(t) = (1 + t)(1 + 2t)\dots(1 + (d-1)t) \quad ; \tag{8}$$

de plus , l'anneau de cohomologie $H^*(\Omega;\underline{\underline{Z}})$ de Ω est engendré par les classes des formes différentielles holomorphes $\omega_{jk} = (2\pi i)^{-1} d(z_j-z_k)/(z_j-z_k)$ soumises aux relations

$$\omega_{jk}\omega_{jm} + \omega_{km}\omega_{kj} + \omega_{mj}\omega_{mk} = 0 \qquad \text{pour} \quad j < k < m \ .$$

Ces résultats furent généralisés en 1971 par Brieskorn [17] . Considérons un espace vectoriel réel V de dimension finie d , et un groupe fini G d'automorphismes de V , engendré par des réflexions par rapport à des hyperplans ; soit $\underline{\underline{H}}$ la famille de ces hyperplans . Notons $V_{\underline{\underline{C}}}$ le complexifié de V et Ω le complémentaire dans $V_{\underline{\underline{C}}}$ de la réunion des complexifiés des hyperplans appartenant à $\underline{\underline{H}}$. On a alors

$$P_\Omega(t) = \prod_{j=1}^{d} (1 + m_j t) \tag{9}$$

où $m_1,\dots,m_d$ sont les exposants associés de manière classique à G (voir par exemple Bourbaki [16]) . De plus , pour tout hyperplan H dans $\underline{\underline{H}}$, choisissons une forme linéaire u_H sur V , de noyau H , et posons

$$\omega_H = (2\pi i)^{-1} du_H/u_H \ . \tag{10}$$

Les classes de cohomologie entières de Ω sont alors représentées par les éléments de l'anneau de formes différentielles engendré par les ω_H .

Récemment , Orlik et Solomon ont complété les résultats d'Arnold et Brieskorn sur plusieurs points importants . Soit Ω le complémentaire , dans un espace vectoriel complexe W de dimension finie d , de la réunion d'une famille $\underline{\underline{H}}$ d'hyperplans . Dans leur premier travail [18] , Orlik et Solomon montrent que le polynôme de Poincaré $P_\Omega(t)$ coïncide avec le polynôme caractérisque associé par Zaslavsky à l'ensemble $\underline{\underline{H}}$ d'hyperplans . Ils montrent ensuite comment représenter comme plus haut les classes de cohomologie entières de Ω par les formes différentielles ω_H , mais ils donnent aussi les relations algébriques entre les ω_H . Ils font enfin le lien avec une théorie de l'homologie pour les ensembles ordonnés étudiée par Folkman [14] , Baclawski [13] et Rota [10] .

Dans leur deuxième travail [19] , Orlik et Solomon considèrent le cas où G est un groupe fini d'automorphismes de W engendré par des pseudo-réflexions (de tels groupes ont été classifiés par Shephard et Todd [21]) . Si $\underline{\underline{H}}$ est l'ensemble des hyperplans fixés par une pseudo-réflexion de G , on a

$$P_\Omega(t) = \prod_{j=1}^{d} (1 + n_j t) \tag{11}$$

où $n_1,\ldots,n_d$ sont de nouveaux invariants associés au groupe G ; lorsque G provient par complexification d'un groupe de transformations linéaires réelles engendré par des réflexions , on a $m_j = n_j$.

Le développement le plus récent est dû à Saito [20] et Terao [22,23] . Ces auteurs introduisent une notion de diviseur sur une variété analytique complexe qui est plus générale que celle de diviseur à croisements normaux ; la caractérisation se fait au moyen de différentielles logarithmiques . Ils étendent la formule (11) au cas d'une famille $\underline{\underline{H}}$ d'hyperplans complexes dont la réunion est un diviseur de Saito , et donnent dans ce cas une caractérisation des exposants n_j . Les calculs d'Orlik et Solomon permettent de faire complètement le lien entre ces deux méthodes .

§ 2. Outils combinatoires

3. Soit L un ensemble ordonné fini et soient x,y deux éléments de L tels que $x \leq y$. Pour tout entier $p \geq 0$, on appelle <u>chaîne de longueur</u> p joignant x à y toute suite d'éléments $x_o,\ldots,x_p$ de L telle que $x = x_o < x_1 < \ldots < x_{p-1} < x_p = x$. Soit $c_p(x,y)$ le nombre de ces chaînes ; on a $c_o(x,x) = 1$ et $c_o(x,y) = 0$ si $x < y$; de plus , on a la relation de récurrence

$$c_{p+1}(x,y) = \sum_{x \leq z < y} c_p(x,z) = \sum_{x < z \leq y} c_p(z,y) \qquad (12)$$

Selon Rota [10] , on définit la <u>fonction de Möbius</u> μ_L de l'ensemble ordonné L par la formule

$$\mu_L(x,y) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p c_p(x,y) \qquad (13)$$

On a donc les relations de récurrence

$$\mu_L(x,x) = 1 \qquad (14)$$

$$\sum_{x \leq z \leq y} \mu_L(x,z) = \sum_{x \leq z \leq y} \mu_L(z,y) = 0 \quad \text{(lorsque } x < y) . \qquad (15)$$

Lorsque L a un plus petit élément 0 et un plus grand élément 1 , on pose pour abréger $\mu_L(x) = \mu_L(0,x)$ et $\mu(L) = \mu_L(0,1)$.

Soit f une application de L dans un groupe commutatif ; la fonction sommatoire de f est définie par $g(x) = \sum_{y \leq x} f(y)$. On a alors la <u>formule d'inversion de Rota</u>

$$f(x) = \sum_{y \leq x} \mu_L(y,x).g(y) \quad ; \qquad (16)$$

il y a aussi une relation duale , car on ne change pas la fonction de Möbius en renversant l'ordre dans L . La formule d'inversion est bien connue dans les cas particuliers suivants :

a) si L est un intervalle d'entiers, ordonné de la manière usuelle , on a $\mu_L(i,i) = 1$,

$\mu_L(i,i+1) = -1$ et $\mu_L(i,j) = 0$ si $j > i+1$;

b) si L est l'ensemble des diviseurs d'un entier N, ordonné par la relation de divisibilité, on a $\mu_L(m,n) = \mu(n/m)$ où μ est la fonction de Möbius classique ;

c) si L est l'ensemble $P(S)$ des parties d'un ensemble fini S, ordonné par inclusion, on a $\mu_L(A,B) = (-1)^{|B|-|A|}$ (ici et dans la suite, on note $|X|$ le cardinal d'un ensemble fini X).

4. Rappelons qu'un <u>treillis</u> est un ensemble ordonné possédant un plus petit élément 0 et un plus grand élément 1, dans lequel deux éléments x et y ont une borne inférieure notée $x \wedge y$ et une borne supérieure notée $x \vee y$. Un <u>atome</u> est un élément minimal parmi les éléments non nuls. Un <u>treillis géométrique</u> est un treillis fini L satisfaisant aux axiomes suivants :

a) tout élément de L est de la forme $x = a_1 \vee \ldots \vee a_r$, où $a_1, \ldots, a_r$ sont des atomes ; le plus petit r possible s'appelle le <u>rang</u> de x, noté $r(x)$ (ou $r_L(x)$) ;

b) on a $r(x) < r(y)$ si $x < y$;

c) on a $r(x \wedge y) + r(x \vee y) \leq r(x) + r(y)$ pour x,y dans L ("inégalité semi-modulaire").

Le <u>rang</u> $r(L)$ de L est alors l'entier $r(1)$. Si x, y sont deux éléments de L, tels que $x \leq y$, toute chaîne joignant x à y peut se compléter en une chaîne de longueur $r(y) - r(x)$ avec les mêmes extrémités ("théorème de Jordan-Hölder") ; de plus, l'intervalle $L' = [x,y]$ de L est un treillis géométrique de rang $r(y) - r(x)$ et l'on a $r_{L'}(z) = r_L(z) - r_L(x)$ pour tout z dans L'. Le <u>polynôme caractéristique</u> de L est défini par la formule

$$p_L(t) = \sum_{x \in L} \mu_L(x) . t^{r(L)-r(x)} \quad ; \tag{17}$$

on a donc $\mu(L) = p_L(0)$, et $p_L(1)$ est nul sauf lorsque L a un seul élément.

5. Voici quelques exemples fondamentaux de treillis géométriques.

a) Soit V un espace vectoriel de dimension finie d sur le corps fini $\mathbb{F}_q$ à q éléments. L'ensemble $\underline{L}(V)$ des sous-espaces vectoriels de V est un treillis géométrique avec $E \wedge E' = E \cap E'$ et $E \vee E' = E + E'$; le rang d'un sous-espace de V est sa dimension. Pour déterminer le polynôme caractéristique de $\underline{L}(V)$, introduisons un espace vectoriel F de dimension finie n sur $\mathbb{F}_q$, et pour chaque $E \in \underline{L}(V)$, notons $f(E)$ le nombre des applications linéaires de V dans F dont le noyau est égal à E. Les applications linéaires de V dans F dont le noyau contient E forment un espace vectoriel isomorphe à $\mathrm{Hom}(V/E,F)$, de dimension $n(d - r(E))$ sur le corps $\mathbb{F}_q$. On obtient donc la formule sommatoire

$$\sum_{E' \supset E} f(E') = q^{n(d-r(E))} \tag{18}$$

que l'on inverse par la formule de Rota . On obtient en particulier

(19) $$f(0) = \sum_E \mu_{\underline{L}(V)}(E).q^{n(d-r(E))} = p_{\underline{L}(V)}(q^n) \quad ;$$

or $f(0)$ est le nombre des applications linéaires injectives de V dans F, donc est égal à $(q^n-1)(q^n-q)\ldots(q^n-q^{d-1})$. On a donc

(20) $$p_{\underline{L}(V)}(t) = \prod_{i=0}^{d-1} (t-q^i)$$

et en particulier $\mu(\underline{L}(V)) = (-1)^d q^{d(d-1)/2}$.

b) Soient S un ensemble fini à s éléments et $\Pi(S)$ l'ensemble des partitions de S, ordonné par la relation " π est plus fine que π' " . Si la partition π possède $b(\pi)$ blocs , on a $r(\pi) = s - b(\pi)$. Introduisons un ensemble H à h éléments et appelons noyau d'une application u de S dans H la partition formée des images réciproques par u des points de H . Raisonnant comme plus haut , on voit que $h.p_{\Pi(S)}(h)$ est le nombre des applications injectives de S dans H , d'où

(21) $$p_{\Pi(S)}(t) = \prod_{i=1}^{s-1} (t-i) \quad .$$

En particulier , on a $r(\Pi(S)) = s-1$ et $\mu(\Pi(S)) = (-1)^{s-1}(s-1)!$.

c) Soit G un graphe fini (sans arête multiple) ayant S pour ensemble de sommets et A pour ensemble d'arêtes . Soit $L(G)$ l'ensemble des parties A' de A ayant la propriété suivante : il existe une partition π de S telle que A' se compose des arêtes qui joignent deux sommets appartenant à un même bloc de π . C'est un treillis géométrique . Le rang de A' est égal à $|S| - c(G')$, où G' est le graphe ayant S pour ensemble de sommets et A' pour ensemble d'arêtes et où $c(G')$ désigne le nombre des composantes connexes de G' . Soit C un ensemble fini , formé de c "couleurs" . Un <u>coloriage de</u> G est une application u de S dans C ; soit A_u l'ensemble des arêtes joignant deux sommets s et s' de même couleur $(u(s) = u(s'))$; c'est un élément de $L(G)$ qu'on peut appeler le noyau de u . En généralisant le raisonnement de b) , on voit que $c^{c(G)}p_{L(G)}(c)$ est le nombre de coloriages propres de G , pour lesquels deux sommets joints par une arête sont de couleurs différentes . C'est d'ailleurs par l'intermédiaire du problème du coloriage des graphes que s'est introduit le polynôme caractéristique .

d) Citons pour mémoire le treillis géométrique $P(S)$ des parties d'un ensemble fini S. Le rang d'une partie A de S est son cardinal $|A|$ et le polynôme caractéristique de $P(S)$ est $(t-1)^{|S|}$.

6. Un point de vue (presque) équivalent à celui des treillis géométriques est celui des matroïdes (appelés "prégéométries" par Crapo et Rota [8]) . Nous définirons un matroïde M comme un ensemble fini S de points muni d'un ensemble $\underline{\underline{H}}$ de parties appelées <u>hyperplans</u> ; les axiomes sont les suivants :

a) <u>tout hyperplan est distinct de</u> S ;

b) <u>deux hyperplans distincts ne sont pas comparables pour la relation d'inclusion</u> ;

c) <u>si</u> D <u>est l'intersection de deux hyperplans distincts</u> , S <u>est réunion des hyperplans contenant</u> D .

Appelons <u>variété</u> dans M toute partie de S qui est intersection d'hyperplans (y compris S lui-même) ; l'ensemble L des variétés , ordonné par inclusion , est un treillis géométrique . Pour toute partie E de S , il existe une plus petite variété $[E]$ contenant E . Le rang d'une variété V est le plus petit entier r tel qu'il existe une partie E à r éléments avec $[E] = V$; on appelle rang d'une partie E de S , et l'on note $r(E)$ le rang de la variété $[E]$. On a alors

$$r(E \cap E') + r(E \cup E') \leq r(E) + r(E') \tag{22}$$

si E et E' sont deux parties de S ; de plus , si E' est obtenu en ajoutant un point s à E , le rang $r(E')$ est égal à $r(E)$ ou $r(E) + 1$ selon que s appartient à $[E]$ ou non . Le <u>corang</u> de E est $cr(E) = r(M) - r(E)$ et la <u>nullité</u> de E est $n(E) = |E| - r(E)$; ce sont des entiers positifs .

La théorie des matroïdes est une synthèse de la géométrie linéaire et de la théorie des graphes (voir Whitney [12]) . En effet , soient V un espace vectoriel (ou projectif , ou affine) sur un corps K , et S une partie finie de V . Il existe sur S une structure de matroïde dont les variétés sont les traces sur S des sous-espaces vectoriels (ou projectifs , ou affines) de V ; pour toute partie E de S , l'ensemble $[E]$ se compose des points de S qui sont combinaison linéaire des points de E . D'autre part , à un graphe G sans arête multiple , on associe <u>le matroïde</u> M(G) <u>dont les points sont les arêtes de</u> G et dont le treillis géométrique des variétés n'est autre que le treillis L(G) introduit au n° 5 .

Par analogie avec l'algèbre linéaire , on dit qu'une partie E de S est <u>libre</u> si l'on a $[E'] \neq [E]$ pour toute partie E' de E distincte de E , que E est <u>génératrice</u> si l'on a $[E] = S$, et que E est une <u>base</u> si elle est à la fois libre et génératrice . Ces notions sont caractérisées respectivement par les égalités $n(E) = 0$, $cr(E) = 0$ et $n(E) = cr(E) = 0$.

A la théorie des graphes , on emprunte la notion de <u>circuit</u> , qui est une partie non-libre minimale , et de <u>lien</u> qui est le complémentaire d'un hyperplan . Un point s est appelé une <u>boucle</u> si $\{s\}$ est un circuit , et un <u>isthme</u> si $\{s\}$ est un lien .

7. Donnons les constructions fondamentales sur les matroïdes .

a) Soient M un matroïde et S l'ensemble de ses points . Le <u>matroïde dual</u> M^* a mêmes points que M et pour hyperplans les complémentaires des circuits de M . Le dual de M^* est M . Disons que deux propriétés <u>P</u> et <u>P</u>* portant sur les matroïdes sont duales si une partie E de S a la propriété <u>P</u> pour la matroïde M si et seulement si $S \setminus E$

jouit de la propriété $\underline{P}^*$ dans le matroïde M^*. En ce sens, la notion de partie libre est duale de celle de partie génératrice, et la notion de base est autoduale ; de même, les notions de circuit et d'hyperplan sont duales, ainsi que celles de nullité et de corang. Enfin, un point de S est une boucle pour M si et seulement si c'est un isthme pour M^*.

b) Soient M et M' deux matroïdes, ayant respectivement S et S' pour ensembles de points. Le <u>matroïde somme</u> $M + M'$ a pour points les points de la réunion disjointe de S et S' et pour variétés les parties $V \cup V'$, où V est une variété de M et V' une variété de M'. On a $r(V \cup V') = r(V) + r(V')$ sous ces hypothèses, et en particulier, le rang de $M + M'$ est la somme des rangs de M et M'.

Un matroïde M est dit <u>connexe</u> s'il est non vide et s'il n'est pas somme de deux matroïdes non vides. Tout matroïde M se décompose de manière unique en somme de matroïdes connexes, appelés ses composantes ; deux points s et s' de M appartiennent à une même composante si et seulement s'il existe une suite de circuits $C_1, \dots, C_m$ avec $s \in C_1$, $s' \in C_m$ et $C_i \cap C_{i+1}$ non vide pour $1 \leq i < m$. Caractérisation analogue par les liens.

c) Soient M un matroïde, S l'ensemble de ses sommets et T une partie de S. Le <u>matroïde induit</u> M_T a T pour ensemble de points, et ses variétés sont de la forme $T \cap V$, où V est une variété de M. Toute partie E de T a même rang pour M et pour M_T.

Le <u>matroïde quotient</u> M/T de M par T a pour points les éléments de $S \setminus T$, et pour variétés les ensembles V tels que $V \cup T$ soit une variété de M. Le rang pour M/T d'une partie E de $S \setminus T$ est égal à $r_M(E \cup T) - r_M(T)$. En particulier, on a $r(M/T) = r(M) - r_M(T)$.

Si e est un point de M, on note $M \setminus e$ le matroïde induit par M sur le complémentaire de $\{e\}$, et M/e le matroïde quotient de M par $\{e\}$.

8. Une notion fondamentale est celle du <u>groupe de Grothendieck-Tutte</u> construit à l'aide des matroïdes (voir Brylawski [6]). Ce groupe commutatif a pour présentation des générateurs $[M]$ correspondant aux classes d'isomorphisme de matroïdes, et les relations

$$[M] = [M/e] + [M \setminus e]$$

pour tout point e de M, qui n'est ni un isthme, ni une boucle. Si m et n sont des entiers positifs, tous les matroïdes sommes de m isthmes et n boucles sont isomorphes ; on notera $b_{m,n}$ l'élément correspondant du groupe $\underline{T}$ de Grothendieck-Tutte.

Nous allons construire un <u>isomorphisme de</u> $\underline{T}$ <u>sur le groupe additif</u> $\underline{\underline{Z}}[z,x]$ <u>des polynômes à coefficients entiers en deux variables</u> z <u>et</u> x, <u>de sorte que</u> $b_{m,n}$ <u>corresponde au monôme</u> $z^m x^n$.

a) <u>Le groupe</u> $\underline{T}$ <u>est engendré par les éléments</u> $b_{m,n}$: par récurrence sur le nombre des points de M , on montre que l'élément $[M]$ de $\underline{T}$ est combinaison linéaire à coefficients positifs d'éléments $[M']$ où la matroïde M' n'a que des isthmes et des boucles , donc est tel que $[M']$ soit l'un des éléments $b_{m,n}$.

b) Si i,j sont des entiers positifs , notons $u_{ij}(M)$ le nombre des ensembles de points de M dont le corang est égal à i et la nullité à j ; en particulier $u_{oo}(M)$ est le nombre des bases de M . Le <u>polynôme de Tutte</u> [11] du matroïde M est

$$t_M(z,x) = \sum_{i,j} u_{ij}(M)(z-1)^i(x-1)^j \quad . \tag{23}$$

On vérifie aussitôt que si e n'est un isthme , ni une boucle de M , on a

$$u_{ij}(M) = u_{ij}(M/e) + u_{ij}(M\setminus e) \quad ;$$

il existe donc un homomorphisme π de $\underline{T}$ dans $\underline{\underline{Z}}[z,x]$ appliquant $[M]$ sur t_M pour tout matroïde M . On a d'ailleurs

$$t_M(z,x) = \sum_E (z-1)^{r(M)-r(E)}(x-1)^{|E|-r(E)} \quad , \tag{24}$$

la somme étant étendue aux ensembles E de points de M . Vu l'additivité du rang , on a donc

$$t_{M+M'} = t_M . t_{M'} \quad . \tag{25}$$

Enfin , le polynôme de Tutte d'un isthme est z et celui d'une boucle est x ; vu (25) , π applique $b_{m,n}$ sur $z^m x^n$, donc c'est un isomorphisme de $\underline{T}$ sur $\underline{\underline{Z}}[z,x]$.

D'après l'alinéa ci-dessus , le polynôme t_M est à coefficients entiers positifs ; voici quelques-unes de ses valeurs intéressantes :

$t_M(1,1)$ = nombre de bases de M
$t_M(2,1)$ = nombres de parties indépendantes de M
$t_M(1,2)$ = nombre de parties génératrices de M
$t_M(2,2)$ = nombre de parties de (l'ensemble des points de) M .

Enfin , si M^* est le matroïde dual de M , on a la règle de dualité

$$t_{M^*}(z,x) = t_M(x,z) \quad . \tag{26}$$

9. On peut rattacher au polynôme de Tutte certains des invariants numériques associés à un treillis géométrique L . Définissons d'abord un matroïde M dont les points sont les atomes de L , et les variétés les ensembles S_x (pour x dans L) composés des atomes $s \leq x$. On peut identifier par l'application $x \mapsto S_x$ le treillis L au treillis des variétés de M ; pour tout ensemble E d'atomes de L , $[E]$ n'est autre que la borne supérieure de E dans L . On établit alors la formule

$$\mu_L(x) = \sum_{[E]=x} (-1)^{|E|} \tag{27}$$

en remarquant que le membre de droite $F(x)$ de cette égalité satisfait aux propriétés caractéristiques $F(0)=1$ et $\sum_{y \leq x} F(y) = 0$ pour x non nul (ce qui est immédiat). Pour le polynôme caractéristique, on obtient alors l'expression

$$(28) \qquad p_L(t) = (-1)^{r(L)}\, t_M(1-t,0) \quad ,$$

d'où la valeur de l'invariant de Möbius-Rota

$$(29) \qquad \mu(L) = (-1)^{r(L)} t_M(1,0) \quad .$$

Comme le polynôme t_M est à coefficients positifs, $\mu(L)$ a même signe que $(-1)^{r(L)}$, et l'on a $|\mu(L)| = t_M(1,0)$. Un autre invariant qui joue un rôle dans la suite est $c(L) = \sum_{x\in L} |\mu_L(x)|$; on a donc

$$(30) \qquad c(L) = (-1)^{r(L)} p_L(-1) = t_M(2,0) \quad .$$

Le matroïde M associé au treillis géométrique L n'a pas de boucle, d'où il résulte que le polynôme $t_M(z,x)$ est indépendant de x, donc égal à $(-1)^{r(L)} p_L(1-z)$. Un isthme du matroïde M est un atome s du treillis L qui possède un complément, c'est-à-dire un élément x de L tel que $x \wedge s = 0$ et $x \vee s = 1$. Supposons que e soit un atome de L sans complément, et notons L/e l'intervalle $[e,1]$ de L. Par ailleurs, notons $L\setminus e$ le quotient de l'ensemble L par la relation d'équivalence

pour tout atome $s \neq e$ de L, on a $x \wedge s = y \wedge s$;

on peut munir $L\setminus e$ d'une structure de treillis géométrique pour laquelle l'application canonique de L sur $L\setminus e$ soit compatible avec l'opération $\wedge$. L'équation $t_M = t_{M/e} + t_{M\setminus e}$ se traduit donc par la formule

$$(31) \qquad p_L = p_{L\setminus e} - p_{L/e} \qquad \text{(pour un atome } e \text{ sans complément)}$$

qui jointe à la formule

$$(32) \qquad p_{P(S)}(t) = (t-1)^{|S|} \qquad (\ S \text{ ensemble fini}\ )$$

fournit une caractérisation du polynôme caractéristique.

De manière analogue, l'invariant de Möbius-Rota est caractérisé par les relations

$$(33) \qquad \mu(L) = \mu(L\setminus e) - \mu(L/e) \quad , \quad \mu(P(S)) = (-1)^{|S|}$$

et l'invariant c par les formules

$$(34) \qquad c(L) = c(L\setminus e) + c(L/e) \quad , \quad c(P(S)) = 2^{|S|} \quad .$$

10. Il nous reste à décrire l'invariant $\beta(M)$ associé à un matroïde M par Crapo [7]. C'est le coefficient (positif) du monôme z dans le polynôme de Tutte $t_M(z,x)$. Autrement dit, on a

$$(35) \qquad \beta(M) = (-1)^{r(M)+1} \sum_E (-1)^{|E|}\, r(E)$$

où la somme est étendue aux ensembles de points de M .

Lorsque M est un matroïde non vide , le polynôme t_M est sans terme constant ; la relation $t_{M+M'} = t_M t_{M'}$ montre alors que $\beta(M)$ est nul si M n'est pas connexe ; on a d'ailleurs $\beta(M) = 0$ lorsque M est réduit à une boucle . Réciproquement , supposons que le matroïde M soit connexe , et ne soit pas réduit à une boucle ; on a alors $\beta(M) > 0$: cela résulte de la formule

(36) $$\beta(M) = \beta(M\setminus e) + \beta(M/e) \qquad \text{(si } e \text{ n'est pas un isthme)} ,$$

de la positivité de β , et du lemme combinatoire selon lequel il existe toujours un point e du matroïde connexe M , qui n'est pas un isthme et pour lequel M/e soit connexe .

Soit L un treillis géométrique , et soit M le matroïde associé à L comme au n° 9 . On pose $\beta(L) = \beta(M)$, d'où

(37) $$\beta(L) = (-1)^{r(L)+1} \sum_{x \in L} \mu_L(x).r(x)$$

par application des formules (27) et (35) . On a donc

(38) $$\beta(L) = (-1)^{r(L)+1} p_L'(1)$$

si p_L' est la dérivée du polynôme p_L .

Choisissons un atome s de L ; nous allons établir la formule

(39) $$\beta(L) = (-1)^{r(L)+1} \sum_{x \wedge s=0} \mu_L(x) .$$

Pour cela , on pose $v(x) = 1$ ou 0 selon que $x \wedge s$ est égal à 0 ou à s , et l'on définit la fonction f sur L par la formule

(40) $$f(x) = \mu_L(x)v(x) - \sum_y \mu_L(y) ,$$

où la sommation est étendue aux éléments y de L tels que $y \wedge s = 0$ et $y \vee s = x$. On vérifie aussitôt que l'on a $f(0) = 1$ et $\sum_{x \leq a} f(x) = 0$ pour $a \neq 0$; on a donc $f = \mu_L$. Passant aux séries génératrices , on obtient

(41) $$p_L(t) = (t-1) \sum_{x \wedge s=0} \mu_L(x)\, t^{r(L)-r(x)-1} ;$$

compte tenu de la formule (38) , il reste à diviser par $t - 1$ et à faire ensuite $t = 1$.

§ 3. Arrangements d'hyperplans réels

11. Compte tenu des préliminaires du paragraphe 2 , nous obtiendrons une réponse rapide aux problèmes concernant les configurations d'hyperplans réels . Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie d , et soit $\underline{\underline{H}}$ un ensemble fini d'hyperplans de V . Soit L l'ensemble des sous-espaces vectoriels de V qui peuvent se représenter comme intersection d'hyperplans appartenant à $\underline{\underline{H}}$. Nous ordonnerons L par l'ordre opposé à l'inclusion , de sorte que $E \leq F$ signifie $E \supset F$. Alors L est un treillis géométrique , et $\underline{\underline{H}}$ l'ensemble de ses atomes ; le plus petit élément de L est V , et le plus grand est l'intersection $V_o = \bigcap_{H \varepsilon \underline{\underline{H}}} H$; le rang de L est $r(L) = d - d_o$ où d_o est la dimension de V_o ; enfin , pour tout élément E de L , on a $r_L(E) = d - \dim E$.

On peut aussi considérer $\underline{\underline{H}}$ comme l'ensemble des points d'un matroïde M . Pour tout $E \varepsilon L$, soit $\underline{\underline{H}}(E)$ l'ensemble des hyperplans appartenant à $\underline{\underline{H}}$ et contenant E ; alors $E \longmapsto \underline{\underline{H}}(E)$ est un isomorphisme de L sur le treillis des variétés du matroïde M .

Soit $H \varepsilon \underline{\underline{H}}$. On peut lui associer d'une part l'ensemble $\underline{\underline{H}} \setminus \{H\}$ (noté simplement $\underline{\underline{H}} \setminus H$) d'hyperplans dans V ; le matroïde correspondant est $M \setminus H$. D'autre part , l'ensemble $\underline{\underline{H}}_H$ des hyperplans de H de la forme $H' \cap H$ (avec $H' \neq H$ appartenant à $\underline{\underline{H}}$) définit un matroïde isomorphe à M/H . Cette interprétation géométrique des matroïdes $M \setminus H$ et M/H joue un rôle fondamental .

12. L'ensemble $\underline{\underline{H}}$ d'hyperplans dans V définit une dissection de V de la manière suivante : pour tout $H \varepsilon \underline{\underline{H}}$, choisissons une forme linéaire u_H sur V de noyau H . On dit que deux points x et y de V sont équivalents si $u_H(x)$ et $u_H(y)$ ont le même signe (+ , - ou 0) pour tout $H \varepsilon \underline{\underline{H}}$; les classes d'équivalence sont des parties convexes qu'on appelle les <u>facettes</u> ; les facettes ouvertes s'appellent aussi les <u>chambres</u> (ou régions) définies par la configuration $\underline{\underline{H}}$ d'hyperplans . Les chambres ne sont autres que les composantes connexes de l'ouvert Ω , complémentaire de la réunion des hyperplans appartenant à $\underline{\underline{H}}$ (pour tout ceci , voir Bourbaki [16]) . Le nombre des chambres sera noté $c(\underline{\underline{H}})$.

Un isthme dans le matroïde M est un hyperplan H appartenant à $\underline{\underline{H}}$ et qui ne contient pas l'intersection des hyperplans $H' \neq H$ appartenant à $\underline{\underline{H}}$. Si $\underline{\underline{H}}$ ne se compose que d'isthmes , on peut introduire un système de coordonnées linéaires $x_1,\dots,x_d$ dans V de sorte que $\underline{\underline{H}}$ se compose des hyperplans d'équation $x_i = 0$ pour $1 \leq i \leq r(L)$; il est alors immédiat que $c(\underline{\underline{H}})$ est égal à $2^{|\underline{\underline{H}}|}$. Dans le cas contraire , choisissons un hyperplan H dans $\underline{\underline{H}}$ qui n'est pas un isthme ; un argument géométrique simple montre qu'on a

$$(42)\qquad c(\underline{\underline{H}}) = c(\underline{\underline{H}}_H) + c(\underline{\underline{H}} \setminus H)$$

(si C est une chambre de $\underline{\underline{H}} \setminus H$, rencontrant H , alors $C \cap H$ est une chambre de $\underline{\underline{H}}_H$ dans H et $C \setminus (C \cap H)$ se découpe en deux chambres de $\underline{\underline{H}}$) . D'après la caractérisation de l'invariant $c(L)$ donnée à la fin du n° 9 , on a donc la <u>formule de Zaslavski</u> [5 , théorème A] :

$$(43)\qquad c(\underline{\underline{H}}) = \sum_{E \varepsilon L} |\mu_L(E)| = (-1)^{r(L)}\, p_L(-1) \quad .$$

Nous pouvons aussi donner une formule pour le nombre $f_k(\underline{\underline{H}})$ des facettes de dimension k . En effet , les facettes de $\underline{\underline{H}}$ sont les chambres des diverses configurations $\underline{\underline{H}}_F$, où F parcourt L et où $\underline{\underline{H}}_F$ se compose des hyperplans de F de la forme $H \cap F$, avec $H \varepsilon \underline{\underline{H}}$ et $H \not\supset F$. Appliquant la formule (43) aux diverses configurations $\underline{\underline{H}}_F$, on trouve

$$(44)\qquad f_k(\underline{\underline{H}}) = (-1)^k \sum_{E,F} (-1)^{\dim E} \mu_L(F,E)$$

où la somme est étendue aux couples (E,F) d'éléments de L tels que F soit de dimension k et contienne E (on se rappellera que le signe de $\mu_L(F,E)$ est celui de $(-1)^{r(E)-r(F)} = (-1)^{k + \dim E}$) . Pour E fixé dans L , distinct de V , la somme des nombres $\mu_L(F,E)$ pour F parcourant l'intervalle $[V,E]$ de L , est nulle d'après la définition de la fonction de Möbius . De la formule (44) , on déduit donc aussitôt la relation d'Euler-Poincaré

$$(45)\qquad \sum_{k=0}^{d} (-1)^k f_k(\underline{\underline{H}}) = (-1)^d \quad .$$

On peut remonter ce raisonnement ; au moyen de la formule d'inversion de Rota , on déduit la formule (44) (et en particulier la formule (43)) de la relation d'Euler-Poincaré pour toutes les configurations $\underline{\underline{H}}_F$ (avec $F \varepsilon L$) .

13. Illustrons ce qui précède sur les exemples classiques des systèmes de type A_{d-1} , B_d et D_d rencontrés dans l'étude des systèmes de racines (voir Bourbaki [16]) . Rappelons que l'espace vectoriel est ici $\underline{\underline{R}}^d$, dont nous noterons $x_1,\dots,x_d$ les fonctions coordonnées ; soient H_i le noyau de x_i , H_{ij} celui de $x_i - x_j$ et H'_{ij} celui de $x_i + x_j$. Le système A_{d-1} se compose des hyperplans H_{ij} pour $1 \le i \le j \le d$; le système D_d y adjoint les hyperplans H'_{ij} pour $1 \le i \le j \le d$; enfin, le système B_d adjoint les hyperplans H_i (pour $1 \le i \le d$) au système D_d . Il sera aussi commode d'introduire le système $B_{d,m}$ obtenu en adjoignant les hyperplans $H_1,\dots,H_m$ à D_d (pour $0 \le m \le d$) ; on a $D_d = B_{d,0}$ et $B_d = B_{d,d}$.

Dans chacun de ces cas , le polynôme caractéristique $p_L(t)$ est de la forme $(t - d_1)\dots(t - d_r)$. Voici le tableau de ces valeurs :

$\underline{\underline{H}}$	r	$d_1,\dots,d_r$	$\lvert\underline{\underline{H}}\rvert$	$c(\underline{\underline{H}})$
A_{d-1}	$d-1$	$1,2,\dots,d-1$	$d(d-1)/2$	$d!$
B_d	d	$1,3,\dots,2d-3,2d-1$	d^2	$2^d.d!$
D_d	d	$1,3,\dots,2d-3,d-1$	$d(d-1)$	$2^{d-1}.d!$
$B_{d,m}$	d	$1,3,\dots,2d-3,d+m-1$	$d(d-1)+m$	$2^{d-1}(d+m).(d-1)!$

D'après le théorème de Zaslavsky , le nombre $c(\underline{\underline{H}})$ des chambres est égal à $|p_L(-1)|$, donc à $(d_1+1)\dots(d_r+1)$. D'autre part , dans tout treillis L , on a $\mu_L(x) = -1$ si x est un atome de L ; le nombre des atomes est donc l'opposé du coefficient de t^{r-1} dans $p_L(t)$; ceci fournit la relation $|\underline{\underline{H}}| = d_1 + \dots + d_r$.

Voici un moyen rapide de retrouver les valeurs classiques précédentes . De manière générale , soient Q un ensemble fini de points et $\underline{\underline{H}}$ un ensemble fini d'hyperplans dans $\underline{\underline{R}}^d$; soit L le treillis associé à $\underline{\underline{H}}$. On suppose que pour tout $E \in L$, on a $|Q \cap E| = q^{\dim E}$, où q est un entier indépendant de E ; une application de la formule d'inversion de Rota montre que le nombre de points de Q qui n'appartiennent à aucun des hyperplans de $\underline{\underline{H}}$ est égal à $q^{d-r(L)}p_L(q)$.

Pour le cas de A_{d-1} , on prend pour Q l'ensemble des vecteurs à coordonnées entières $a_1,\dots,a_d$ satisfaisant aux inégalités $1 \leq a_i \leq q$. Dans ce cas , le treillis L est d'ailleurs isomorphe au treillis des partitions de l'ensemble $\{1,2,\dots,d\}$ (associer au sous-espace $E \in L$ la relation d'équivalence

$$\ll x_i \text{ et } x_j \text{ ont même restriction à } E \gg$$

entre éléments i,j de $\{1,2,\dots,d\}$). On retrouve donc le résultat du n° 5 b) .

Pour le cas de B_d , on prend pour Q l'ensemble des vecteurs à coordonnées entières $a_1,\dots,a_d$ satisfaisant aux inégalités $|a_i| \leq q$. Enfin , si l'on ôte l'hyperplan H_m au système $B_{d,m}$ on obtient le système $B_{d,m-1}$ alors que le système induit par $B_{d,m}$ sur l'hyperplan H_m est isomorphe à $B_{d-1,m-1}$. Si l'on note $b_{d,m}$ le polynôme caractéristique du système d'hyperplans $B_{d,m}$, la formule (31) du n° 9 fournit la relation de récurrence $b_{d,m} = b_{d,m-1} - b_{d-1,m-1}$; puisque le polynôme caractéristique de $B_{d,d} = B_d$ a déjà été déterminé , on peut terminer le calcul .

14. Nous considérons maintenant le cas d'un ensemble $\underline{\underline{H}}$ d'hyperplans affines dans un espace affine réel A de dimension finie d . On introduit encore le treillis géométrique L formé des intersections d'hyperplans appartenant à $\underline{\underline{H}}$; on notera que l'ensemble vide est considéré comme un sous-espace affine de A . La formule donnant le nombre de chambres est analogue à celle du cas vectoriel :

$$c(\underline{\underline{H}}) = \sum_{E \in L'} |\mu_L(E)| \tag{46}$$

où L' désigne l'ensemble des éléments <u>non vides</u> de L . La démonstration est pratiquement la même que dans le cas vectoriel .

Considérons maintenant le cas des chambres bornées , dont nous notons $c^b(\underline{\underline{H}})$ le nombre . Il ne peut y avoir de chambres bornées que si appartiennent à L l'ensemble vide et des ensembles à un point . Faisons cette hypothèse ; on a alors

$$c^b(\underline{\underline{H}}) = |\mu(L)| \quad . \tag{47}$$

La démonstration se fait par récurrence sur le nombre d'éléments de $\underline{\underline{H}}$ en utilisant la formule (33) du n° 9 pour $\mu(L)$ et la relation analogue

$$c^b(\underline{\underline{H}}) = c^b(\underline{\underline{H}} \setminus H) + c^b(\underline{\underline{H}}_H) \tag{48}$$

qu'on établit par un raisonnement géométrique élémentaire . On est ainsi ramené au cas de $d + 1$ hyperplans en position générale , qui déterminent une unique chambre bornée qui est un simplexe.

En explicitant la définition de l'invariant $\mu(L)$ au moyen de chaînes , on peut donner des expressions analogues aux formules (1) et (2) de l'introduction . Notons $f_k(\underline{\underline{H}})$ (resp. $f_k^b(\underline{\underline{H}})$) le nombre de facettes (resp. facettes bornées) de dimension k ; pour toute suite $(i_o,\dots,i_m)$ d'entiers telle que $0 \leq i_o < i_1 < \dots < i_m \leq d$, notons $p_{i_o,\dots,i_m}$ le nombre de suites croissantes $(E_o,\dots,E_m)$ d'éléments de L , où E_j est de dimension i_j pour $0 \leq j \leq m$. On a alors

$$f_k(\underline{\underline{H}}) = (-1)^k \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \sum (-1)^{i_o} p_{i_o,\dots,i_m} \tag{49}$$

$$f_k^b(\underline{\underline{H}}) = (-1)^{k+d-r(L)} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \sum p_{i_o,\dots,i_m} \tag{50}$$

où l'on ne somme que sur les suites $(i_o,\dots,i_m)$ soumises à la restriction $i_m = k$.

15. Faisons le lien avec l'invariant $\beta(L)$ de Crapo . Nous conservons les notations du n° précédent . On peut supposer que l'espace affine A est le complémentaire dans un espace projectif P de dimension d d'un hyperplan "à l'infini" H_∞ . Soit $\underline{\underline{H}}_\infty$ l'ensemble d'hyperplans dans P constitué de H_∞ et des fermetures projectives des hyperplans appartenant à $\underline{\underline{H}}$; notons L_∞ le treillis géométrique formé par les intersections d'hyperplans appartenant à $\underline{\underline{H}}_\infty$. Comme ensemble ordonné , l'ensemble L' des éléments non vides de L s'identifie à l'ensemble des éléments E de L_∞ tels que $E \wedge H_\infty = 0$. Comme on a $\mu(L) = -\sum_{E \in L'} \mu_L(E)$, les formules (39) et (47) entraînent <u>l'égalité de</u> $c^b(\underline{\underline{H}})$ <u>et de</u> $\beta(L_\infty)$.

§ 4. Homologie

16. Soit L un ensemble ordonné fini, ayant un plus petit élément 0 et un plus grand élément 1. Soit T l'ensemble des éléments de L différents de 0 et de 1 ; on définit un complexe simplicial Σ ayant T pour ensemble de sommets et dont les faces sont les parties totalement ordonnées de T. Le complexe de chaînes augmenté $C(\Sigma)$ a pour base les simplexes $[x_o,x_1,\ldots,x_p]$ (de degré $p \geq 0$) avec $x_o < x_1 < \ldots < x_p$, et $[\ ]$ (de degré -1). L'opérateur "bord" est défini par la formule

$$\partial[x_o,\ldots,x_p] = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i [x_o,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,x_p] \tag{51}$$

avec les conventions usuelles ; en degré 0, on a $\partial[x] = [\ ]$. Par construction, <u>la caractéristique d'Euler-Poincaré du complexe</u> $C(\Sigma)$ <u>est égale</u> à $-\mu(L)$ (voir Rota [10]). On notera $H(L)$ l'homologie du complexe $C(\Sigma)$ et $H^*(L)$ sa cohomologie.

17. Supposons maintenant que L soit un treillis géométrique, et notons S l'ensemble de ses atomes. Pour tout $u \in L$, soit Σ_u le sous-complexe de Σ formé des simplexes dont tous les sommets sont $\geq u$. On établit aussitôt les propriétés suivantes :

a) Σ est réunion de la famille de sous-complexes $(\Sigma_s)_{s\in S}$;

b) soit $u \in L$, et soient $s_1,\ldots,s_m$ des atomes de L tels que $u = s_1 \vee \ldots \vee s_m$; on a alors $\Sigma_u = \Sigma_{s_1} \cap \ldots \cap \Sigma_{s_m}$;

c) le complexe Σ_u est acyclique (géométriquement, c'est un cône de sommet u) ;

d) Σ_u est non vide si et seulement si u est différent de 1.

Par suite, le nerf Δ du recouvrement $(\Sigma_s)_{s\in S}$ de Σ a pour sommets les atomes de L, et pour simplexes les parties non-génératrices de S. D'après les propriétés précédentes et le théorème des recouvrements acycliques, le complexe Δ a une homologie (et une cohomologie) canoniquement isomorphe à celle de Σ ; ceci fournit une autre description de l'homologie de L.

Soit r le rang de L. Comme toute partie de S qui a au plus $r-1$ éléments ne peut être génératrice, le squelette de dimension $\leq r-2$ de Δ contient toutes les faces de dimension $\leq r-2$ du simplexe ayant S pour ensemble de sommets. Par ailleurs le complexe Σ est de dimension $r-2$, et sa caractéristique d'Euler-Poincaré est égale à $-\mu(L)$. On en déduit que $H^i(L)$ <u>est nul pour</u> $i \neq r-2$, <u>et que</u> $H^{r-2}(L)$ <u>est un groupe commutatif libre de rang</u> $|\mu(L)|$. Ce résultat est dû à Folkman [14].

18. Baclawski a introduit un autre complexe dans [13]. Pour tout entier $p \geq 1$, notons $B_p(L)$ le groupe commutatif libre ayant pour base les symboles $[x_1,\ldots,x_p]$ avec $0 < x_1 < \ldots < x_p$; on pose $B_o(L) = \mathbb{Z}$. L'opérateur "bord" est défini par $\partial 1 = 0$ et

$$\partial[x_1,\ldots,x_p] = \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^{i-1} [x_1,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,x_p] \tag{52}$$

(noter que la sommation ne comprend pas de terme avec $i = p$, contrairement à la formule (51)). Le complexe $B(L)$ ainsi défini est somme directe des sous-complexes $B^x(L)$ (pour $x \neq 0$ dans L) ayant pour base les symboles $[x_1,\ldots,x_p]$ avec $x_p = x$. Or, à un décalage près des degrés, le complexe $B^x(L)$ n'est autre que le complexe associé comme au n° 16 à l'intervalle $[0,x]$ de L. Compte tenu du théorème de Folkman, on voit que <u>le polynôme de Poincaré de l'homologie de</u> $B(L)$ <u>est égal à</u> $\sum_{x\in L} \mu_L(x)(-t)^{r(x)}$; autrement dit, on a

$$P_{B(L)}(t) = (-t)^{r(L)}\, p_L(-1/t) \quad . \tag{53}$$

19. Voici maintenant une application du complexe de Baclawski à la cohomologie de certains espaces topologiques. Le résultat est dû à Orlik et Solomon [18]. La démonstration qui est esquissée ci-dessous est différente de la leur ; elle nous a été communiquée par Springer, et elle a l'avantage de s'adapter à bien d'autres situations (en cohomologie ℓ-adique par exemple).

Soient V un espace vectoriel <u>complexe</u> de dimension finie d, et $\underline{\underline{H}}$ un ensemble d'hyperplans de V ; on note F la réunion des hyperplans appartenant à $\underline{\underline{H}}$, et Ω l'ouvert de V complémentaire de F. Pour calculer la cohomologie de Ω, on utilise la <u>suite exacte d'excision</u> qui donne un isomorphisme entre $H^i_c(F)$ et $H^{i+1}_c(\Omega)$ pour $0 \leq i \leq 2d-2$ (cohomologie à support compact), et la <u>dualité de Poincaré</u> qui fournit une dualité entre $H^i_c(\Omega)$ et $H^{2d-i}(\Omega)$. On utilise ensuite la suite spectrale associée au recouvrement de F par les hyperplans de la famille $\underline{\underline{H}}$. Le terme $E_1^{p,q}$ de la suite spectrale est la somme directe des groupes $H^q_c(E_o \cap E_1 \cap \ldots \cap E_p)$, pour $E_o, E_1, \ldots, E_p$ variant indépendamment dans $\underline{\underline{H}}$. Mais l'intersection $E_o \cap E_1 \cap \ldots \cap E_p$ est un espace vectoriel complexe de dimension s par exemple ; le seul groupe de cohomologie non nul s'obtient pour $q = 2s$, et l'on a donc $E_1^{p,q} = 0$ lorsque q est impair. La suite spectrale dégénère alors au terme E_2. En utilisant le complexe Δ défini au n° 17, on peut établir un isomorphisme entre l'homologie du terme E_1 de la suite spectrale, et l'homologie du complexe de Baclawski.

En conclusion, <u>la cohomologie de l'espace</u> Ω <u>est isomorphe à la cohomologie du complexe de Baclawski</u>, <u>et en particulier</u>, <u>on a</u>

$$P_\Omega(t) = \sum_{x\in L} \mu_L(x)(-t)^{r(x)} \quad . \tag{54}$$

§ 5. Groupes engendrés par des pseudo-réflexions

20. Définissons d'abord les diviseurs de Saito [20]. Soient X une variété analytique complexe, et D un diviseur sur X dont toutes les composantes irréductibles sont de multiplicité 1. A ce diviseur on associe deux faisceaux cohérents Ω^1_D et Der_D comme suit. Soient x un point de X et $h = 0$ une équation locale de D au point x ; la tige de Ω^1_D en x se compose des germes de 1-formes différentielles méromorphes ω au point x, telles que $h\omega$ et $dh \wedge \omega$ soient holomorphes en x. De manière duale, la tige de Der_D en x se compose des germes de champs de vecteurs holomorphes ξ au point x, tangents à D en tout point lisse de D ; il revient au même de supposer que $\xi.h/h$ est holomorphe en x.

Si ω et ξ sont comme précédemment, la fonction méromorphe $\langle \xi, \omega \rangle$ est holomorphe en dehors de D, et en tout point lisse de D ; elle est donc holomorphe ; on définit ainsi un accouplement de Ω^1_D et Der_D à valeurs dans le faisceau des fonctions holomorphes sur X. Il n'est pas difficile de montrer que c'est une dualité parfaite entre Ω^1_D et Der_D.

On dit que D est un <u>diviseur de Saito</u> si les faisceaux Ω^1_D et Der_D sont localement libres. Voici un critère très commode. Pour que D soit un diviseur de Saito, il faut et il suffit qu'au voisinage de tout point de D, on puisse trouver des champs de vecteurs holomorphes $\xi_1, \ldots, \xi_d$ tels que les crochets de Lie $[\xi_j, \xi_k]$ soient combinaisons linéaires à coefficients holomorphes de $\xi_1, \ldots, \xi_d$, et un système de coordonnées locales $z_1, \ldots, z_d$ pour X tel que D soit défini localement par l'équation $h = 0$, où h est le déterminant de la matrice $(\xi_j . z_k)$. S'il en est ainsi, $(\xi_1, \ldots, \xi_d)$ est une base locale du faisceau Der_D.

21. Dans [22] et [23], Terao a appliqué ces notions au cas d'un arrangement $\underline{\underline{H}}$ d'hyperplans dans un espace vectoriel complexe V de dimension finie d. Pour chaque hyperplan $H \in \underline{\underline{H}}$, on choisit une forme linéaire u_H sur V, de noyau H, et l'on pose $h = \prod_{H \in \underline{\underline{H}}} u_H$; le diviseur d'équation $h = 0$ n'est autre que la réunion D des hyperplans appartenant à $\underline{\underline{H}}$.

On dit que l'arrangement $\underline{\underline{H}}$ est "libre" au sens de Terao s'il existe des champs de vecteurs polynomiaux $\xi_1, \ldots, \xi_d$ sur V avec les propriétés suivantes :

a) $\xi_1, \ldots, \xi_d$ sont linéairement indépendants sur l'algèbre S des fonctions polynomiales sur V ;

b) les fonctions rationnelles $\xi_i h/h$ sont des polynômes ;

c) chacun des ξ_i est une application polynomiale de V dans V, homogène d'un certain degré n_i ;

d) on a $|\underline{\underline{H}}| = n_1 + \dots + n_d$.

Le diviseur D est alors un diviseur de Saito , et $(\xi_1, \dots, \xi_d)$ est une base du faisceau Der_D sur V . Soit L le treillis géométrique associé à $\underline{\underline{H}}$ comme précédemment. Le résultat fondamental de Terao dans [23] est l'égalité

(55) $$p_L(t) = (t - n_1)\dots(t - n_d) \ .$$

Compte tenu des résultats du n° 19 , on en déduit la formule

(56) $$P_\Omega(t) = (1 + n_1 t)\dots(1 + n_d t)$$

où $P_\Omega(t)$ est le polynôme de Poincaré de l'ouvert $\Omega = V \setminus D$ de V .

Terao a donné dans [22] des critères combinatoires de "liberté" de $\underline{\underline{H}}$. Avec les notations introduites au n° 11 , on peut les résumer comme suit :

Soit H un élément de $\underline{\underline{H}}$ et soient $j, n_1, \dots, n_d$ des entiers positifs tels que $1 \leq j \leq d$. Deux des conditions suivantes entraînent la troisième :

a) $\underline{\underline{H}}$ est libre , d'exposants $n_1, \dots, n_d$;

b) $\underline{\underline{H}} \setminus H$ est libre , d'exposants $n_1, \dots, n_j - 1, \dots, n_d$;

c) $\underline{\underline{H}}_H$ est libre , d'exposants $n_1, \dots, \widehat{n_j}, \dots, n_d$.

De plus , si ces conditions sont remplies , on a $n_j = |\underline{\underline{H}}| - |\underline{\underline{H}}_H|$.

Ce critère a permis à Terao d'examiner les complexifiées des configurations d'hyperplans dans $\underline{\underline{R}}^3$ classifiées par Grünbaum dans [3] ; ce sont tous les arrangements connus dont les chambres sont des cônes simpliciaux , mais certains ne sont pas "libres" au sens de Terao . La signification géométrique de l'hypothèse de "liberté" reste donc obscure .

22. Pour terminer , montrons comment les résultats de Terao s'appliquent au cas d'un groupe fini d'automorphismes de V , engendré par des pseudo-réflexions . Soit G un tel groupe , et soit $\underline{\underline{H}}$ l'ensemble des hyperplans de V pour lesquels il existe un élément de G (une pseudo-réflexion) ayant H pour ensemble des points fixes . Soit S l'algèbre des fonctions polynomiales sur V et soit S^G la sous-algèbre de S formée des fonctions polynomiales invariantes par G . D'après Bourbaki [16] , S^G est une algèbre de polynômes engendrée par des éléments algébriquement indépendants $f_1, \dots, f_d$, homogènes de degrés respectifs $m'_1, \dots, m'_d$; nous poserons $m_i = m'_i - 1$. Soit R un sous-espace gradué de S , stable par G , supplémentaire dans S de l'idéal engendré par $f_1, \dots, f_d$. Alors la représentation de G dans R est isomorphe à la représentation régulière de G , et la multiplication dans S définit un isomorphisme de $R \otimes S^G$ sur S .

Soit E un G-module de dimension finie s sur $\underline{\underline{C}}$. De ce qui précède, il résulte que l'espace des éléments G-invariants de $E \otimes S$ est un module libre sur S^G, avec une base $(u_1,\ldots,u_s)$ formée d'éléments homogènes de degrés respectifs $q_1(E),\ldots,q_s(E)$. Choisissons une base $(e_1,\ldots,e_s)$ de E sur $\underline{\underline{C}}$; il existe des éléments u_{jk} de S tels que $u_j = \sum_k e_k \otimes u_{jk}$; le déterminant j_E de la matrice (u_{jk}) est un polynôme homogène de degré $q_1(E) + \ldots + q_s(E)$. A la multiplication près par un scalaire non nul, il ne dépend que de E.

Choisissons pour tout $H \in \underline{\underline{H}}$ une forme linéaire u_H sur V de noyau H, et notons e_H l'ordre du sous-groupe (cyclique) de G formé des transformations qui fixent tous les éléments de H. D'un théorème général de Gutkin (1973), nous retiendrons les deux cas particuliers

$$(57) \qquad j_V = \prod_{H\in\underline{\underline{H}}} u_H \qquad , \qquad j_{V^*} = \prod_{H\in\underline{\underline{H}}} u_H^{e_H-1} \quad .$$

Remarquons que les éléments de $V^* \otimes S$ s'interprétent comme les formes différentielles polynomiales sur V ; on voit facilement que les différentielles df_j forment une base du S^G-module des formes différentielles polynomiales invariantes par G, d'où $q_j(V^*) = m_j$ pour $1 \leq j \leq d$. De manière analogue, les éléments de $V \otimes S$ s'interprètent comme les champs de vecteurs polynomiaux sur V. Le S^G-module des champs de vecteurs polynomiaux sur V invariants par G est donc libre ; si l'on pose $n_j = q_j(V)$, ce module possède donc une base $(\xi_1,\ldots,\xi_d)$, où ξ_j est homogène de degré n_j. Il est alors facile (compte tenu de la première relation (57)) de montrer que $\xi_1,\ldots,\xi_d$ satisfont aux conditions de la définition de liberté de Terao. Par suite, le système $\underline{\underline{H}}$ est libre ; par application du théorème de Terao, on obtient le résultat fondamental de l'article [19] d'Orlik et Solomon (voir Terao [24] pour ce raisonnement) :

<u>Si Ω est l'ouvert de</u> V <u>formé des points qui n'appartiennent à aucun des hyperplans de</u> $\underline{\underline{H}}$, <u>le polynôme de Poincaré de Ω est égal à</u> $(1 + n_1t)\ldots(1 + n_dt)$.

Lorsque G est engendré par des réflexions, on a $e_H = 2$ pour tout $H \in \underline{\underline{H}}$ et $m_j = n_j$ pour $1 \leq j \leq d$. Dans le cas général, Orlik et Solomon déterminent les exposants n_j pour chacun des groupes de la classification de Shephard-Todd [21] en s'appuyant en particulier sur les formules suivantes :

$$(58) \qquad m_1 + \ldots + m_d = \sum_H (e_H - 1)$$

$$(59) \qquad n_1 + \ldots + n_d = |\underline{\underline{H}}|$$

$$(60) \qquad (t + m_1)\ldots(t + m_d) = \sum_{g\in G} t^{k(g)}$$

$$(61) \qquad (t - n_1)\ldots(t - n_d) = \sum_{g\in G} \det(g).t^{k(g)}$$

où $k(g)$ est la dimension de l'espace des points fixes de l'élément g de G.

BIBLIOGRAPHIE

A. Géométrie des hyperplans

[1] R.C. BUCK - Partitions of space , Amer.Math.Monthly , 50(1943) , 541-544.

[2] B. GRÜNBAUM - Convex polytopes, Interscience , New York , 1976.

[3] B. GRÜNBAUM - Arrangements of hyperplanes, Proc. Second Luisiana Conference on Combinatorics , Graph Theory , and Computing , R.C. Mullin and al., ed., Baton Rouge , 1971.

[4] R.O. WINDER - Partitions of N-space by hyperplanes, SIAM J.Appl.Math. , 14(1966) , 811-818.

[5] T. ZASLAVSKY - Facing up to arrangements : face-count formulas for partition of space by hyperplanes, Memoirs Amer.Math.Soc. , 154(1975).

B. Matroïdes

[6] T. BRYLAWSKI - A decomposition for combinatorial geometries, Trans.Amer.Math.Soc. , 171(1972) , 235-282.

[7] H. CRAPO - A higher invariant for matroids, J.Comb.Theory , 2(1967) , 406-417.

[8] H. CRAPO et G.C. ROTA - On the Foundations of Combinatorial Theory : Combinatorial Geometries, M.I.T. Press , Cambridge , Mass. , 1970.

[9] M. LAS VERGNAS - Convexity in oriented matroids, J.Comb.Theory B , 29(1980) , 231-243.

[10] G.C. ROTA - On the Foundations of Combinatorial Theory I : Theory of Möbius Functions, Zeit. für Wahrsch. , 2(1964) , 340-368.

[11] W.T. TUTTE - A ring in graph theory, Proc. Cambridge Phil. Soc. , 43(1947) , 26-40.

[12] H. WHITNEY - On the abstract properties of linear dependence, Amer.J.Math. , 57 (1935) , 509-533.

C. Homologie

[13] K. BACLAWSKI - Whitney numbers of geometric lattices, Adv. in Math. , 16(1975) , 125-138.

[14] J. FOLKMAN - The homology groups of a lattice, J. Math. and Mech. , 15(1966) , 631-636.

D. Groupes engendrés par des réflexions

[15] V.I. ARNOLD - The cohomology ring of the colored braid group, Mat. Zametki , 5 (1969) , 227-231.

[16] N. BOURBAKI - Groupes et Algèbres de Lie , chapitres 4 à 6 , Hermann , Paris ,1968.

[17] E. BRIESKORN - Sur les groupes de tresses (d'après V.I. Arnold) , Séminaire Bourbaki , 24e année , 1971/2 , Lect. Notes 317 , Springer , 1973.

[18] P. ORLIK et L.SOLOMON - Combinatorics and topology of complements of hyperplanes, Inv. Math. , 56(1980) , 167-189.

[19] P. ORLIK et L.SOLOMON - Unitary reflection groups and cohomology, Inv.Math. , 59(1980) , 77-94.

[20] K. SAITO - Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields, Journ. Fac. Sci. Tokyo IA , 27(1980) , 265-291.

[21] G.C. SHEPHARD et J.A. TODD - Finite unitary reflection groups, Can.J.Math., 6 (1954) , 274-304.

[22] H. TERAO - Arrangements of hyperplanes and their freeness I;II , Journ. Fac. Sci. Tokyo IA , 27(1980) , 293-320.

[23] H. TERAO - Generalized exponents of a free arrangement of hyperplanes and Shepherd-Todd-Brieskorn formula, Inv. Math., 63(1981), 159-179.

[24] H. TERAO - Free arrangements of hyperplanes and unitary reflection groups, Proc. Japan Acad., 56(1980), 389-392.

Pierre CARTIER

I.H.E.S.
35 route de Chartres
F-91440 BURES-SUR-YVETTE