E. CALABI

Géométrie différentielle affine des hypersurfaces

Séminaire N. Bourbaki, 1981, exp. nº 573, p. 189-204
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1980-1981__23__189_0>

Séminaire BOURBAKI 573-01
33e année, 1980/81, n° 573 Juin 1981

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE AFFINE DES HYPERSURFACES

par E. CALABI

I. La géométrie différentielle affine est un domaine de la géométrie différentielle classique, c'est-à-dire de la géométrie des sous-variétés d'un espace ambiant donné, ordinairement un espace numérique réel, où les structures fondamentales sont induites par les invariants du groupe unimodulaire affine $ASL(n,\mathbb{R})$ agissant sur l'espace ambiant $\mathbb{R}^n$, remplaçant ainsi le groupe euclidien $ASO(n)$ de la géométrie élémentaire par un groupe plus étendu. Le choix du groupe $ASL(n,\mathbb{R})$ d'ailleurs n'est pas absolument rigide, puisqu'on le remplace à l'occasion soit par le groupe affine total $AGL(n,\mathbb{R})$ soit par les sous-groupes respectifs laissant un point-origine 0 fixe (géométrie centro-affine). Dans cette géométrie la plupart des résultats connus concerne les hypersurfaces ; on va donner une sélection de ces résultats, qui paraissent intéressants pour leurs applications à la géométrie des corps convexes, au calcul des variations, aux équations non-linéaires aux dérivées partielles et aux systèmes différentiels.

La bibliographie ci-jointe donne une liste des exposés détaillés les plus importants de la théorie, dont nous ne donnerons ici qu'un précis limité aux notions requises pour chaque résultat présenté. Dans la suite l'espace ambiant sera supposé de $n+1$ dimensions, le groupe d'équivalence étant $ASL(n+1,\mathbb{R})$ sauf avis contraire ; les sous-variétés seront des hypersurfaces, donc des variétés à n dimensions plongées (immergées) d'une manière *admissible* dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Une immersion est appelée *admissible* (pour la géométrie affine) si elle est différentiable de classe au moins C^5 , si elle est localement injective et si, quelle que soit une structure euclidienne surimposée dans $\mathbb{R}^{n+1}$ (définie par une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^{n+1}$), la deuxième forme fondamentale de l'hypersurface en question est partout régulière (c'est-à-dire de rang maximal) ; on vérifie que cette dernière condition est invariante par rapport au groupe affine, puisque sa validité ne dépend point du choix de la structure euclidienne.

II. Nous allons désigner l'espace ambiant par E et le groupe d'équivalence affine par $ASL(E)$. L'*espace vectoriel associé* à E, que nous désignerons par TE est l'espace vectoriel des translations de E sur lui-même ; il s'identifie naturellement à l'espace tangent à n'importe quel point de E et l'espace vectoriel dual de TE sera désigné par T^*E, étant naturellement identifié à l'espace cotangent de E à n'importe quel point. L'algèbre des invariants du groupe $ASL(E)$ est engendrée par le produit alterné : soient $X_0, X_1, \ldots, X_n$ $n+1$ vecteurs dans TE ; leur produit alterné est noté $[X_0, X_1, \ldots, X_n]$; de même pour $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in T^*E$ leur produit alterné est également noté $[\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n]$; on a alors l'identité

$$[\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n][X_0, X_1, \ldots, X_n] = \det_{0 \le i, j \le n}(\langle \varphi_i, X_j \rangle) ,$$

où $\langle \varphi_i, X_j \rangle$ désigne le produit scalaire naturel entre T^*E et TE. En plus, on désigne par $\{X_1, \ldots, X_n\}$ (respectivement $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$) le vecteur dans T^*E (resp. TE) déterminé uniquement par la relation

$$\langle \{X_1, \ldots, X_n\}, X_0 \rangle = [X_0, X_1, \ldots, X_n] ,$$

resp.

$$\langle \varphi_0, \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \rangle = [\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n]$$

quels que soient respectivement X_0 et φ_0.

Soit Σ une variété différentiable abstraite à n dimensions, $(u^1, \ldots, u^n)$ un système de paramètres locaux et $X : \Sigma \to E$ une immersion admissible de X dans E ; alors la notation $\{dX \ldots dX\}$ signifie l'expression globale de l'objet qui se réduit localement aux expressions suivantes

$$\{dX \wedge \ldots \wedge dX\} = \{\frac{\partial X}{\partial u^i} du^i \wedge \ldots \wedge \frac{\partial X}{\partial u^k} du^k\} = n!\{\frac{\partial X}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial X}{\partial u^n}\} du^1 \wedge \ldots \wedge du^n :$$

c'est donc une n-forme sur Σ à valeurs dans $T^*E \setminus \{0\}$, qui annule à chaque point $p \in \Sigma$ l'hyperplan tangent à son image $X(p) \in E$. On appelle la direction des vecteurs-images $\{dX \wedge \ldots \wedge dX\} \in T^*E \setminus \{0\}$ pour chaque $p \in \Sigma$ la direction *co-normale à* X *au point* p. On peut choisir un générateur Y^* de la direction co-normale d'une manière invariante à un changement de signe près, de la manière suivante : quel que soit un champ de vecteurs $\varphi_0 : \Sigma \longrightarrow T^*E \setminus \{0\}$ engendrant la direction co-normale, la troisième condition d'admissibilité de l'immersion X s'exprime alternativement par la condition que la n-forme $[\varphi_0, d\varphi_0 \wedge \ldots \wedge d\varphi_0] = n!\left[\varphi_0, \frac{\partial \varphi_0}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial \varphi_0}{\partial u^n}\right] du^1 \wedge \ldots \wedge du^n$ est partout $\neq 0$; on définit alors Y^* uniquement par l'équation

(1) $$\{dX \wedge \ldots \wedge dX\} = Y^*[Y^*, dY^* \wedge \ldots \wedge dY^*]$$

si n est impair ; si n est pair la définition reste unique à un changement de signe près par

(1') $$\{dX \wedge \ldots \wedge dX\} = \pm Y^*[Y^*, dY^* \wedge \ldots \wedge dY^*] ;$$

dans le cas où $X(\Sigma)$ est localement (strictement) convexe, on a un choix canonique de l'orientation de Y^*, consistant avec (1), indépendamment de la parité de n, par la condition supplémentaire, à chaque $p_o \in \Sigma$,

$$(1'') \qquad \langle Y^*(p_o), X(p) - X(p_o)\rangle > 0$$

quel que soit $p \neq p_o$ dans un voisinage assez restreint de p_o. On appelle l'application $Y^* : \Sigma \longrightarrow T^*E$ *l'indicatrice co-normale de* X.

Le premier problème qui se pose à ce point d'une façon naturelle, c'est celui de l'inversion de l'indicatrice co-normale : soit $Y^* : \Sigma \longrightarrow T^*E$ une application différentiable donnée et telle que la n-forme

$$[Y^*, dY^* \wedge \ldots \wedge dY^*]$$

est partout $\neq 0$ (condition de transversalité radiale) : trouver une application admissible $X : \Sigma \to E$ telle que la signature de la deuxième forme fondamentale (au sens de la géométrie euclidienne par rapport à n'importe quelle forme quadratique) ait une valeur donnée et dont l'indicatrice co-normale coïncide avec Y^*.

THÉORÈME 1.— *Le problème de l'inversion d'indicatrice co-normale est équivalent, tant du point de vue local que du global, au problème de Minkowski ; en particulier, si* Σ *est fermée et nécessairement difféomorphe à la sphère* S^n, *la condition d'intégrabilité pour le problème global se réduit à la suivante*

$$(2) \qquad \int_\Sigma Y^*[Y^*, dY^* \wedge \ldots \wedge dY^*] = 0 \; ;$$

l'interprétation géométrique de cette condition est que le corps étoilé $B \subset T^*E$ *dont la frontière est* $Y^*(\Sigma)$ *doit avoir l'origine comme centre de masse.*

Démonstration.— On choisit une forme quadratique définie positive quelconque dans TE, qui détermine un isomorphisme canonique entre TE et T^*E et définit dans E une géométrie euclidienne subordonnée : quelle que soit l'hypersurface admissible $X : \Sigma \to E$, sa courbure de Gauss K est partout $\neq 0$ et, en notant N le vecteur unitaire normal, le vecteur co-normal affine Y^* s'exprime en fonction des invariants de la géométrie différentielle élémentaire par l'équation

$$\langle Y^*, A\rangle = \pm\, |K|^{-1/n+2} N.A$$

quel que soit le vecteur $A \in TE$. On a donc

$$N = \pm\, (Y^*.Y^*)^{-(1/2)} Y^* \;, \quad N \in S^n$$

et l'indicatrice co-normale est le graphe en coordonnées polaires de la fonction strictement positive $(Y^*.Y^*)^{1/2}$ dans un domaine donné dans S^n, dont la $(n+2)$-ième puissance donne la réciproque de $|K|$ en fonction de N, c'est-à-dire la donnée du problème de Minkowski. La condition d'intégrabilité (2) signifie que la n-forme $Y^*[Y^*, dY^* \wedge \ldots \wedge dY^*]$ est exacte, condition qui s'ensuit de (1), car pour n'importe quel point $X_o \in E$,

$$\{dX \wedge \ldots \wedge dX\} = d\{X - X_0, dX \wedge \ldots \wedge dX\} .$$

Le problème de Minkowski peut donc s'interpréter comme un problème de géométrie affine ; l'avantage de cette interprétation est que, pour tout problème explicite de Minkowski, exprimé par une fonction strictement positive donnée (locale ou globale) dans S^n , on sait *a priori* comment il faut transformer la donnée pour que les solutions correspondent à une transformation affine donnée des solutions du problème originaire : en effet, soit A une transformation affine de E , dA sa partie homogène, dA^* la co-adjointe de dA (dans le langage des matrices dA^* est la transposée de la réciproque de dA) et $\det(A)$ le déterminant de dA ; alors quelle que soit l'hypersurface admissible $X : \Sigma \to E$ avec indicatrice co-normale $Y^* : \Sigma \longrightarrow T^*E$, l'indicatrice co-normale de $A(X)$ est égale à

$$Y_A^* = |\det(A)|^{2n+2/n+2} dA^*(Y^*) .$$

Une application de ce résultat mène à un type de réduction de chaque problème de Minkowski dans l'espace E à $n+1$ dimensions (on supposera $n \geq 2$, le cas $n = 1$ étant élémentaire) à une famille de problèmes de Minkowski en dimension inférieure, de façon que chaque famille de problèmes ainsi réduits au cas inductivement plus élémentaire détermine à son tour le problème de départ dans E .

Dans ce but nous identifions E avec TE par un choix arbitraire d'origine 0; soient E' et E'' deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E ($= TE$) à $k+1$ (resp. $n-k$) dimensions $(1 \leq k \leq n-1)$, soit A l'automorphisme linéaire de E admettant E' et E'' comme sous-espaces invariants et dont la restriction à E' (resp. E'') est égale à la multiplication scalaire par $k-n$ (resp. k), introduisons une forme quadratique définie positive (donc, une structure euclidienne) dans E telle que E' et E'' soient orthogonaux l'un à l'autre et désignons par S^n la sphère euclidienne de rayon 1 et de centre 0 par rapport à cette structure. Alors chaque problème de Minkowski dans E , dans le cas généralisé, est déterminé par la donnée d'une mesure de Borel positive μ dans S^n , telle que 1° le support de μ n'est contenu dans l'intersection de S^n avec aucun hyperplan de E , 2° le centre de masse de S^n par rapport à μ est au centre 0 . Le problème de Minkowski est dit régulier, si la mesure μ , comparée avec la mesure de Lebesgue ordinaire, équivaut à une densité strictement positive partout sur S^n et différentiable (par exemple, d'ordre C^3), que nous noterons ρ_0 . Soit ρ_0 donc une telle densité admissible pour le problème de Minkowski, soit $X : \Sigma \to E$ une solution globale, considérons la famille à un paramètre de données de Minkowski ρ_t $(t \geq 0)$ dont les solutions respectives sont les hypersurfaces

$$X_t = \exp(tA).(X) .$$

On vérifie facilement que l'aire à n dimensions de la solution $X_t(\Sigma)$ (toujours par rapport à la structure euclidienne introduite) est une fonction décroissante de

t avec borne inférieure strictement positive, grâce au choix de valeurs propres de A ; de plus, en augmentant la valeur de t de plus en plus, la solution $X_t(\Sigma)$ s'allonge et converge comme ensemble compact vers le sous-espace E'' tout entier pour $t \to \infty$. Au même temps, la donnée de Minkowski ρ_t de X_t, considérée comme densité d'une mesure lisse, converge par rapport à la topologie des distributions vers une mesure ρ' dont la masse totale équivaut à la limite des aires de $X_t(\Sigma)$, mais qui est inadmissible comme donnée du problème de Minkowski, car son support coïncide avec l'intersection $E' \cap S^n$. Cependant, la mesure ρ' correspond à une densité structement positive et lisse dans la k-sphère $S' = E' \cap S^n$, que nous noterons également ρ' et le centre de masse de S' par rapport à ρ' est à l'origine de façon que ρ' représente une donnée admissible et régulière pour pour le problème de Minkowski dans l'espace $E' \subset E$ à $k+1$ dimensions.

Considérons pour un entier fixe k $(1 \leq k \leq n-1)$ la variété ouverte $W(E,k)$ de toutes les paires de sous-espaces vectoriels supplémentaires E',E'' de E à $k+1$ (resp. $n-k$) dimensions (alternativement, la grassmannienne $G(E,k)$, qui consiste en les paires (E',E'') orthogonales par rapport à une structure euclidienne fixée) et pour chaque paire (E',E'') la réduction d'un problème de Minkowski régulier dans E au problème correspondant dans E' comme ci-dessus. Les trois problèmes suivants se présentent à ce propos d'une manière naturelle.

1° En partant de la famille de données de Minkowski réduites, $\rho' : S^n \cap E' \to \mathbb{R}_+$, paramétrées par la famille $W(E,k)$ ou $G(E,k)$, comment peut-on récupérer la donnée du problème de Minkowski originaire dans E ?

2° En partant de la famille de solutions du problème de Minkowski - chaque problème réduit à E' comme ci-dessus - paramétrée par les paires (E',E'') parcourant $W(E,k)$ ou $G(E,k)$, peut-on récupérer la solution du problème originaire dans E sans faire appel aux méthodes connues pour résoudre les problèmes de Minkowski à $n+1$ dimensions ?

3° En partant d'un corps convexe $B \subset E$ et pour toute décomposition donnée en somme directe $E = E' \oplus E''$ avec $\dim_{\mathbb{R}} E' \geq 2$, trouver une construction géométrique du corps convexe $B' \subset E'$ dont la frontière est la solution du problème de Minkowski venant de celui correspondant à la frontière de B par la réduction définie par la paire (E',E'') ; une telle construction géométrique ne devant pas faire intervenir la solution d'un problème de Minkowski dans E'.

Le premier des trois problèmes énoncés ci-dessus est complètement résolu ; en effet, la famille de données réduites $\rho' : S^n \cap E' \to \mathbb{R}_+$, paramétrée même par la seule grassmannienne $G(E,k)$ équivaut à une transformation de Radon généralisée de la donnée $\rho : S^n \to \mathbb{R}_+$ du problème de départ. Pour l'inversion de ce problème de Radon, nous nous remettons à l'exposé par S. Helgason [5]. Le deuxième des problèmes ci-dessus est complètement inconnu ; il serait très intéressant d'en trouver une solution, car elle mènerait à une méthode alternative pour résoudre le problème de Minkowski régulier, par induction sur la dimensionalité $n+1$ de E, et engendrant une hypersurface différentiable d'emblée, c'est-à-dire ne passant pas par les solutions faibles comme dans la méthode connue, qui exige un grand travail pour établir la régularité des solutions partant de données régulières.

Quant au troisième problème, on n'a trouvé de solution que dans le cas particulier où $k = 1$. On rappelle la notion de *somme* introduite elle aussi par H. Minkowski, de deux parties B, C ordinairement supposées compactes et convexes, d'un espace vectoriel E : c'est l'ensemble $B+C$ constitué de tous les éléments $b+c \in E$ tels que $b \in B$, $c \in C$. De même, $B_1,\ldots B_r$ étant une famille finie de r ensembles (compacts et convexes) et $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ une famille correspondante de scalaires positifs, la combinaison $\sum_{\nu=1}^{r} \alpha_\nu B_\nu$ est l'ensemble des combinaisons linéaires $\sum_{\nu=1}^{r} \alpha_\nu b_\nu$ pour tout choix de vecteurs $b_\nu \in B_\nu$. Encore, soit $(B_y)_{y\in\Omega}$ une famille de parties compactes et convexes et non-vides $B_y \subset E$ paramétrées par un ensemble Ω mesuré par μ avec $\mu(\Omega) < \infty$, alors on définit la somme de Minkowski de la famille notée $\int_\Omega B_y d\mu(y)$, comme partie convexe de E constituée par les $x = \int_\Omega \psi(y)d\mu(y)$ pour toute application mesurable $\psi : \Omega \to E$, telle que, pour chaque $y \in \Omega$, $\psi(y) \in B_y$.

Or soit B un corps convexe dans l'espace vectoriel E à $n+1$ dimensions, soient E' et E'' deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E respectivement à $k+1$ et $n-k$ dimensions, $\pi : E \to E''$ la surjection linéaire de E sur E'' annulant E' et laissant chaque vecteur $x \in E''$ fixe. Alors, y étant un élément arbitraire de E'', l'ensemble convexe $(B+\{-y\}) \cap E' \subset E'$ est non-vide si et seulement si y appartient au corps convexe $\pi(B)$, image de B dans E'' par la projection affine π. On définit le corps convexe $\mathcal{S}_{E',E''}(B) \subset E'$, appelé la *tomographie* de B par rapport au couple (E',E'') par la somme de Minkowski suivante

$$\mathcal{S}_{E',E''}(B) = \int_{\pi(B)} (B+\{-y\}) \cap E' |dy| ,$$

$|dy|$ dénotant une mesure de Lebesgue pour E'' restreinte dans ce cas à $\pi(B)$. La solution du troisième problème énoncé auparavant, dans le cas particulier $k = 1$ est donnée par le théorème suivant, dont la démonstration ne présente aucune difficulté.

THÉORÈME 2.— *Soit* E *un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *à* $n+1$ *dimensions* $(n \geq 2)$ E' *et* E'' *deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de* E*, respectivement à* 2 *et à* $n-1$ *dimensions. Soit* B *un corps convexe dans* E *dont la frontière* $V = \partial B$ *est une solution d'un problème de Minkowski avec donnée* $\rho : S^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$*, où* S^n *est la sphère unitaire de* E *par rapport à une métrique euclidienne pour laquelle* E' *et* E'' *sont orthogonaux,* $V' \subset E'$ *un ovale dans le plan* E' *qui est solution du problème de Minkowski réduit à* E' *par rapport à la paire* (E',E'') *et*

$B' \subset E'$ *la tomographie de* B *par rapport à* (E',E'') . *Alors la frontière de* B' *coïncide, à une homothétie près, avec* V' .

III. Nous reprenons l'exposé sur les hypersurfaces admissibles $X : \Sigma \to E$ en général. L'indicatrice co-normale $Y^* : \Sigma \longrightarrow T^*E$ est donc une immersion différentiable et radialement transverse de Σ dans l'espace vectoriel T^*E dual de TE , signifiant que la n-forme dans Σ

$$\frac{1}{n!}[Y^*,dY^* \wedge \ldots \wedge dY^*]$$

est partout $\neq 0$. Il existe alors une nouvelle application $Y : \Sigma \longrightarrow TE$ caractérisée uniquement par les équations

$$\langle Y^*,Y\rangle = 1 \quad , \quad \langle dY^*,Y\rangle = 0 \; ; \tag{3}$$

en appliquant la première de ces deux équations à la définition (1), (1') de Y^* , on voit que, à chaque point de Σ ,

$$\frac{1}{n!}[Y,dX \wedge \ldots \wedge dX] = \pm \frac{1}{n!}[Y^*,dY^* \wedge \ldots \wedge dY^*] \neq 0 \; ; \tag{4}$$

le vecteur Y est donc partout transverse à l'hyperplan tangent au point correspondant de $X(\Sigma)$: ce fait et l'invariance de la définition de Y par rapport au groupe de transformations affines $ASL(E)$ justifie l'appellation de $Y(p)$, pour tout $p \in \Sigma$, de *vecteur normal affine* de X à p ; on appelle la droite $\{t \in \mathbb{R} \longrightarrow X(p) + tY(p)\}$ la *droite normale affine*.

La valeur absolue de la n-forme (4) induite sur Σ est donc une densité de mesure sur Σ , strictement positive et lisse partout sur Σ , que l'on appelle l'*élément d'aire affine* induit par X sur Σ . Si on calcule la différentielle des deux côtés de la première des deux équations (3) et en tenant compte de la deuxième équation, on obtient la relation

$$\langle Y^*,dY\rangle = 0 \tag{5}$$

la différentielle de Y est donc restreinte à l'hyperplan que le vecteur co-normal annule, c'est-à-dire, à l'hyperplan, pour chaque $p \in \Sigma$, tangent à $X(\Sigma)$ au point p . Considérons maintenant la forme quadratique sur Σ représentée par l'expression

$$\langle Y^*,d^2X\rangle$$

ou, en nous rapportant à un système de paramètres locaux $(u^1,\ldots,u^n)$ pour Σ

$$\langle Y^*, \frac{\partial^2 X}{\partial u^i \partial u^j}\rangle du^i du^j \; .$$

Cette forme, évidemment invariante par rapport à l'action du groupe affine $ASL(E)$ sur X est conforme à la deuxième forme fondamentale induite par n'importe quelle structure euclidienne surimposée sur E ; elle est donc régulière, c'est-à-dire de rang maximum (c-à-d $= n$) partout sur Σ et, en dérivant les deux côtés de l'identité $\langle Y^*,dX\rangle = 0$, on vérifie que

$$\langle Y^*,d^2X\rangle = - \langle dY^*,dX\rangle \; . \tag{6}$$

L'expression ci-dessus sert comme définition de la *première forme fondamentale* de la géométrie différentielle affine des hypersurfaces ; elle représente une structure pseudo-riemannienne sur Σ induite par X, analogue dans un sens imprécis à la première forme fondamentale de la géométrie euclidienne (ou riemannienne) induite sur les sous-variétés immergées. Le cas particulier des hypersurfaces admissibles localement convexes devient le plus intéressant de tous à partir de ce point. En effet la convention (1") qui fixe l'orientation de Y^* entraîne la positivité de la forme $\langle Y^*, d^2X\rangle$ et, puisque cette forme est régulière, elle est donc définie positive partout : donc, si $X(\Sigma)$ est localement convexe dans E alors elle est strictement localement convexe et la structure déterminée sur Σ par la première forme fondamentale (6) est une structure riemannienne. Il faut remarquer aussi que l'élément de volume dans Σ associé à la structure pseudo-riemannienne (6) (quelle qu'en soit la signature) coïncide avec l'élément d'aire affine défini antérieurement par les valeurs absolues des n-formes (4)

$$dV = \frac{1}{n!}\left|[Y^*, dY^* \wedge \ldots \wedge dY^*]\right| = \frac{1}{n!}\left|[Y, dX \wedge \ldots \wedge dX]\right| .$$

Les invariants qu'on vient d'introduire nous permettent de définir une classe importante d'hypersurfaces : les *hypersphères affines*.

DÉFINITION.— *Une hypersurface* $X : \Sigma \to E$, *admissible pour la géométrie différentielle affine s'appelle une hypersphère affine, si toutes ses droites normales affines passent par un point commun, dit le centre de l'hypersphère, ou bien si les normales affines sont parallèles deux-à-deux (c'est-à-dire, le centre se trouve à l'infini) ; dans ce dernier cas, on dit que l'hypersphère affine est impropre.*

Il y a plusieurs manières alternatives pour définir les hypersphères affines, tant du point de vue de la géométrie euclidienne que de celui de la géométrie centro-affine [2], [6], [7].

Les hypersphères affines propres avec centre au point 0 sont donc caractérisées par l'équation

$$Y + H(X - X_0) = 0 , \tag{7}$$

tandis que les impropres par l'équation

$$Y = cY_0 ,$$

où H et c sont des scalaires $\neq 0$ et Y_0 est un vecteur constant. Une conséquence immédiate de l'identité (5) est que H et c sont constants. Une conséquence géométrique élémentaire de ce fait donne les caractérisations suivantes des hypersphères affines.

PROPOSITION 2.— *Pour toute hypersurface admissible* $X : \Sigma \to E$ *les trois conditions suivantes sont équivalentes l'une à l'autre :*

a) $X(\Sigma)$ *est une hypersphère affine impropre ;*

b) *l'indicatrice co-normale* $Y^* : \Sigma \longrightarrow T^*E$ *de* X *a son image* $Y^*(\Sigma)$ *contenue* *dans un hyperplan ;*

c) *la normale affine* Y *de* X *est constante.*

PROPOSITION 3.— *Une hypersurface admissible* $X : \Sigma \to E$ *est une hypersphère affine propre avec centre au point* 0 *, considéré comme origine de coordonnées affines, si et seulement si elle satisfait à la relation suivante avec son indicatrice co-normale* Y^* *: soit* H *la constante de* (7) *; alors*

$$[Y^*, dY^* \wedge \ldots \wedge dY^*] = - H[X-0, dX \wedge \ldots \wedge dX] \ .$$

En d'autres termes le volume de la clôture convexe de l'origine 0 *avec n'importe quelle région compacte assez petite est proportionnel au volume de la clôture convexe de la partie correspondante de son indicatrice co-normale dans* T^*E *avec l'origine de* T^*E .

La caractérisation des hypersphères affines du point de vue analytique est la suivante. Pour les hypersphères impropres on choisit un système de coordonnées affines $(x_0,\ldots,x_n)$ tel que les composantes du vecteur normal affine Y pour un point arbitraire $p_0 \in \Sigma$ sont $(1,0,\ldots,0)$. Alors Y est constant si et seulement si l'image $X(\Sigma)$ est localement le graphe d'une fonction de la forme

$$x_0 = u(x_1,\ldots,x_n) = u(x)$$

telle que

$$\det(\partial^2 u(x)/\partial x_i \partial x_j) = \pm\ 1 \ .$$

Quant aux hypersphères affines propres, on fixe le centre à l'origine 0 d'un système de coordonnées affines $(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ pour E et on se limite, pour commencer, aux hypersphères admissibles $X : \Sigma \to E$ de passant pas par 0 et telles que pour tout point $p \in \Sigma$ l'hypersurface soit transverse au rayon vecteur de 0 à $X(p)$; toute hypersurface avec cette propriété peut se représenter localement par des paramètres $t_i = - \frac{x_i}{x_0}$ $(1 \leq i \leq n)$ après une transformation linéaire des (x_i) convenablement choisie et on pose

$$X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/u(t) \\ t_1/u(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ t_n/u(t) \end{pmatrix}$$

pour une fonction différentiable $u(t) = u(t_1,\ldots,t_n) \neq 0$. L'hypersurface ainsi tracée est admissible, si et seulement si $\det(\partial^2 u/\partial t_i \partial t_j) \neq 0$ partout ; elle est une hypersphère affine avec centre à l'origine, si et seulement si elle satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$\det \left(\frac{\partial^2 u(t)}{\partial t_i \partial t_j}\right) = \pm \left|\frac{H}{u(t)}\right|^{n+2} \tag{9}$$

Les équations (8) et (9) sont des exemples d'équations du type dit de

Monge-Ampère. Les méthodes connues pour la construction de leurs solutions sont limitées à présent aux seuls cas où les solutions sont strictement elliptiques, c'est-à-dire au cas où les fonctions $u(x)$ et $u(t)$ sont strictement convexes ou concaves, sauf quelques résultats particuliers concernant les solutions hyperboliques en deux variables indépendantes. Nous faisons référence aux travaux de L. Nirenberg et C.Loewner, de A.V. Pogorelov et de S.T. Yau et S.Y. Cheng [4] sur l'existence et la régularité des solutions des problèmes des valeurs à la frontière pour les équations (8) et (9) [4]. Les théorèmes d'existence les plus intéressants concernent la classification des hypersphères affines localement convexes qui sont *complètes*, c'est-à-dire globalement convexes et plongées dans E . Le cas le plus simple est celui où $H > 0$: une simple application du principe du maximum montre que les ellipsoïdes épuisent les possibilités. Même le cas limite $H = 0$ (correspondant aux hypersphères affines impropres) mène à un résultat analogue : les seules hypersphères affines impropres, localement convexes et complètes sont les paraboloïdes convexes. Par contre, pour $H < 0$, on a le théorème suivant de Cheng et Yau [4] :

Toute hypersphère affine, convexe et complète avec $H < 0$ *est asymptotique à la frontière d'un cône convexe non-dégénéré avec sommet au centre de l'hypersphère ; réciproquement, pour tout cône convexe non-dégénéré et* avec frontière assez lisse *il existe une hypersphère affine, convexe et complète, asymptotique à la frontière du cône vers l'infini, avec centre au sommet du cône et cette hypersphère est unique, dès qu'on fixe la valeur de la constante* $H < 0$.

La solution de ce dernier problème est encore incomplète en ce qui concerne la régularité de l'hypersphère-solution si on enlève des hypothèses de régularité et de convexité de la frontière du cône donné.

IV. Une autre sorte de problème qui se présente de manière naturelle est celui des valeurs extrémales de l'aire affine d'une hypersurface admissible, où on fixe la frontière dans un sens raisonnable. L'aire affine d'une partie compacte K d'une hypersurface, représentée localement par le graphe d'une fonction de n variables réelles par rapport à un système de coordonnées affines de E ,

$$x_0 = u(x) = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

s'exprime par l'intégrale

$$A = \int_{K_x} \left|\det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)\right|^{1/n+2} |dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n| ,$$

où K_x dénote la région compacte dans l'espace des paramètres $(x_1, \dots, x_n)$ correspondant à la région K de l'hypersurface. Cette dernière est admissible si et seulement si la matrice hessienne $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ de la fonction $u(x)$ est partout régulière, c'est-à-dire avec déterminant $\neq 0$. L'équation d'Euler-Lagrange exprimant la stabilité infinitésimale de A pour toute déformation de $u(x)$ avec support compact dans l'intérieur de K_X est

(10) $$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(G^{ij}\frac{\partial w}{\partial x_j}\right) = 0 ,$$

où (G^{ij}) dénote la matrice inverse de $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ et

$$w = \left|\det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)\right|^{1/n+2} .$$

Encore une fois, on vérifie que la condition pour qu'une fonction $u(x)$ satisfaisant à (10) soit une solution elliptique est que cette fonction soit strictement convexe ou concave, c'est-à-dire que la première forme fondamentale affine de l'hypersurface en question soit définie (positive, sans défaut de généralité). Les théorèmes suivants vont paraître ailleurs prochainement avec des démonstrations détaillées [3].

THÉORÈME 4.— *Soit une hypersurface* X *dans* E *qui est le graphe (globalement) d'une fonction* $x_0 = u(x)$ *strictement convexe et supposons que cette fonction satisfasse à l'équation d'Euler-Lagrange* (10). *Alors toute autre hypersurface localement convexe* X' *dans* E *qui coïncide avec* X *au dehors d'une partie relativement compacte a une aire affine strictement plus* petite *que* X .

Ce fait justifie l'appellation que l'on propose pour ces hypersurfaces, comme hypersurfaces d'aire affine maximale.

THÉORÈME 5.— *Soit* X *une surface localement convexe dans l'espace affine* E *à* 3 *dimensions et supposons qu'elle satisfasse à l'équation d'Euler-Lagrange* (10) *localement. Alors l'aire affine de toute partie compacte de* X *est strictement plus grande que celle de toute autre surface admissible obtenue par une déformation intérieure suffisamment petite de cette partie.*

On a enfin un résultat faiblement analogue au théorème de Bernstein pour les surfaces d'aire minima (dans le sens classique).

THÉORÈME 7.— *Soit* X *une surface admissible et convexe dans l'espace* E *à trois dimensions et supposons que* X *soit une surface d'aire affine maxima. Si* X *est complète aussi bien dans le sens géométrique, étant une surface globalement convexe et plongée proprement, que dans le sens métrique par rapport à la structure riemannienne induite par la première forme fondamentale de la géométrie affine, alors* $X(\Sigma)$ *est un paraboloïde convexe.*

V. Nous allons donner maintenant une formulation assez simple des équations de structure pour les hypersurfaces admissibles ; ce n'est que pour rendre le formalisme moins encombrant que nous nous limiterons au cas convexe, où la première forme fondamentale est définie positive. Soit $X : \Sigma \to E$ une hypersurface admissible localement strictement convexe ; quel que soit $p \in \Sigma$ on associe à p une famille de repères affines dans E de la manière suivante : prenant $X(p)$ comme origine, on peut choisir une base unimodulaire de TE $(e_0,e_1,\dots,e_n)$ en mettant $e_0 = Y(p)$, le vecteur normal affine à $X(p)$ et $(e_1,\dots,e_n)$ une base pour l'espace tangent à $X(\Sigma)$ au point p qui est orthonormée par rapport à la première forme fondamentale et $(e_0,e_1,\dots,e_n)$ proprement orienté pour TE . Soit $(e_0^*,\dots,e_n^*)$ la base duale de T^*E : alors $e_0^* = Y^*$, le vecteur co-normal à $X(p)$ et, en considérant les autres vecteurs e_i^* comme 1-formes sur E , et en désignant par ω_i les "pullbacks" respectifs sur Σ , $\omega_i = X^*(e_i^*)$, on a l'équation

$$dX = \omega_i e_i \ .$$

On introduit maintenant les matrices anti-symétriques de 1-formes (ϑ_{ij}) représentant la connexion riemannienne induite par les co-repères (ω_i) sur Σ , définies par $d\omega_i = \vartheta_{ij} \wedge \omega_j$; alors, tenant compte des définitions de $Y^* = e_0^*$ et de $Y = e_0$, on a les équations exprimant les différentielles des repères,

$$\begin{aligned} de_i &= (\vartheta_{ij} + P_{ij})e_j + \omega_i e_0 \\ de_0 &= - Q_i e_i \end{aligned} \tag{11}$$

où, de façon équivalente, les formules analogues pour le repère dual

$$\begin{aligned} de_0^* &= - \omega_i e_i^* \\ de_i^* &= (\vartheta_{ij} - P_{ij})e_j^* + Q_i e_0^* \ . \end{aligned} \tag{11'}$$

Ici les objets (P_{ij}) et (Q_i) sont des 1-formes avec valeurs respectivement dans les tenseurs symétriques et dans les vecteurs tangents de Σ et satisfont aux conditions d'intégrabilité suivantes

a) $P_{ij} \wedge \omega_j = 0$, autrement dit la forme trilinéaire $P_{ij} \otimes \omega_i \otimes \omega_j$ invariante est totalement symétrique, donc associée à une *forme cubique* sur Σ , appelée la deuxième forme fondamentale

b) $Q_i \wedge \omega_i = 0$, c'est-à-dire, la forme bilinéaire $Q_i \otimes \omega_i$ invariante sur Σ est symétrique, donc associée à une forme quadratique sur Σ , appelée la troisième forme fondamentale

c) On a l'identité $\sum_{i=1}^{n} P_{ii} = 0$, autrement dit, la forme cubique est apolaire par rapport à la première forme fondamentale

d) Si on dénote par Ω_{ij} la forme de courbure de la structure riemannienne déterminée par la première forme fondamentale,

$$\Omega_{ij} = d\vartheta_{ij} - \vartheta_{ik} \wedge \vartheta_{kj} \ ,$$

on a la relation suivante, analogue à l'équation de Gauss dans la géométrie classique

$$\Omega_{ij} = - P_{ik} \wedge P_{kj} + \frac{1}{2}(\omega_i \wedge Q_j - \omega_j \wedge Q_i) \ ; \tag{12}$$

e) les deux types d'équations ci-dessous, analogues aux équations de Codazzi-Mainardi complètent les équations de structure

$$(13)\qquad dP_{ij} - \vartheta_{ik} \wedge P_{kj} - P_{ik} \wedge \vartheta_{kj} = -\frac{1}{2}(\omega_i \wedge Q_j + \omega_j \wedge Q_i)$$

$$(14)\qquad dQ_i - \vartheta_{ij} \wedge Q_j = Q_j \wedge P_{ij}$$

La forme cubique exprime pour chaque $p \in \Sigma$ la différence entre le jet d'ordre 3 de X à p et celui d'une hypersurface quadratique ayant contact avec $X(\Sigma)$ à p d'ordre maximal. La troisième forme fondamentale exprime la variation du vecteur normal affine ; elle jour donc un rôle tout à fait semblable à celui de la deuxième forme fondamentale dans la géométrie euclidienne des hypersurfaces ; en effet, la valeur moyenne de ses valeurs propres (par rapport à la première forme), appelée la *courbure moyenne affine* est précisément la fonction dont l'annulation équivaut à la propriété décrivant $X(\Sigma)$ comme hypersurface d'aire affine maxima.

Nous allons conclure l'exposé par une application des équations de structure pour caractériser intrinsèquement les surfaces dans l'espace à trois dimensions qui sont images non-singulières d'une immersion harmonique ; ce calcul a été fait indépendamment par R.L. Bryant.

Soit Σ une surface et $X : \Sigma \to E$ une immersion différentiable dans l'espace affine E à trois dimensions. On cherche des conditions génériques sur X pour l'existence d'une structure conforme (vue comme classe d'équivalence de structures riemanniennes) sur Σ telle que la composition de X avec toute fonction linéaire sur E est fonction harmonique sur Σ par rapport à la structure conforme introduite.

Il est évident que toute condition sur X qu'on peut dériver doit être invariante par les transformations affines de E et par conséquent devrait pouvoir s'exprimer par les invariants affines de X, pourvu que X soit admissible. D'un côté une surface est admissible si et seulement si, en se rapportant à une structure euclidienne auxiliaire sur E, la courbure de Gauss K de $X(\Sigma)$ est partout $\neq 0$; d'autre part, une condition nécessaire pour que X soit harmonique vient du principe du maximum, qui empêche la possibilité que K soit strictement positif, d'où on arrive à la restriction que K doit être strictement négatif partout et par conséquent la première forme fondamentale est indéfinie. Dans ce cas les systèmes de paramètres locaux dans Σ qui sont les plus utiles sont les systèmes assymptotiques, c'est-à-dire les systèmes (u,v) tels que, à chaque point où ils sont définis, les deux vecteurs $\partial^2 X/\partial u^2$ et $\partial^2 X/\partial v^2$ sont tous les deux tangents à $X(\Sigma)$. Si on introduit maintenant les champs de repères (non-unimodulaires) formés par $\partial X/\partial u = X_u$, $\partial X/\partial v = X_v$ et le vecteur normal affine Y on exprime les trois formes fondamentales de la manière suivante : la première, $g = 2F du dv$, où $F = F(u,v) > 0$; la deuxième, II, réduite aux seuls termes $A du^3 + D dv^3$, à cause de la condition d'apolarité par rapport à g ; la troisième, $\mathrm{III} = L du^2 + 2HF du dv + N dv^2$, où H dénote la courbure moyenne affine. Les équations de structure sont les suivantes :

$$(15)\qquad \begin{aligned} dX &= X_u du + X_v dv \\ dX_u &= \left(\frac{F_u}{F} X_u + \frac{A}{F} X_v\right) du + FYdv \\ dX_v &= \left(\frac{D}{F} X_u + \frac{F_v}{F} X_v\right) dv + FYdu \\ dY &= -\left(HX_u + \frac{L}{F} X_v\right) du - \left(\frac{N}{F} X_u + HX_v\right) dv\,, \end{aligned}$$

où les paramètres u , v écrits comme indices inférieurs dénotent des dérivées partielles respectives. Les conditions d'intégrabilité sont représentées par les cinq équations suivantes, qui correspondent à (12), (13) et (14) : désignons par K_a la courbure de Gauss-Riemann associée à la structure pseudo-riemannienne définie par $2Fdudv$, c'est-à-dire $K_a = -F^{-1}(\log F)_{uv}$; alors on a

$$K_a = \frac{AD}{F^3} + H \qquad \text{(équation de Gauss)}$$

$$A_v = -FL \;;\; D_u = -FN \qquad \text{(équations de Codazzi de première espèce)}$$

$$L_v - FH_u = \frac{AN}{F} \;;\; N_u - FH_v = \frac{DL}{F} \qquad \text{(équations de Codazzi de deuxième espèce)}$$

L'existence d'une structure conforme sur Σ par rapport à laquelle X est harmonique équivaut à l'existence, localement, de trois fonctions e , f , g de u et v , telles que

$$eg - f^2 = 1 \;,\quad e > 0 \;,\quad (gX_u - fX_v)_u + (-fX_u + eX_v)_v = 0\,.$$

Tenant compte des équations de structure (15), la dernière équation se transcrit en

$$\left(g_u + \frac{F_u}{F} g - f_v + \frac{D}{F} e\right)X_u + \left(\frac{A}{F} g - f_u + e_v + \frac{F_v}{F} e\right)X_v - 2FfY = 0\,,$$

d'où $f = 0$ identiquement ; on réduit alors les trois inconnues à une seule $\varphi = \varphi(u,v)$ en posant $e = e^{\varphi}$, $f = 0$, $g = e^{-\varphi}$, satisfaisant au système de deux équations.

$$(16)\qquad \begin{aligned} \varphi_u &= \frac{F_u}{F} + \frac{D}{F} e^{2\varphi} \\ \varphi_v &= -\frac{F_v}{F} - \frac{A}{F} e^{-2\varphi} \end{aligned}$$

Ce système nécessite une condition d'intégrabilité venant de

$$\left(\frac{F_u}{F} + \frac{D}{F} e^{2\varphi}\right)_v + \left(\frac{F_v}{F} + \frac{A}{F} e^{-2\varphi}\right)_u = 0\,,$$

c'est-à-dire

$$e^{2\varphi}\left(\left(\frac{D}{F}\right)_v + 2\frac{D}{F}\varphi_v\right) + 2(\log F)_{uv} + e^{-2\varphi}\left(\left(\frac{A}{F}\right)_u - 2\frac{A}{F}\varphi_u\right) = 0$$

ou bien

$$(17)\qquad F\left(\frac{D}{F^3}\right)_v e^{2\varphi} - 2K_a - 4\frac{AD}{F^3} + F\left(\frac{A}{F^3}\right)_u e^{-2\varphi} = 0\,.$$

Cette dernière équation montre que, dans une situation générique et précisément où

$$(17')\qquad \left(\frac{A}{F^3}\right)_u \left(\frac{D}{F^3}\right)_v \neq 0$$

il y a au plus *deux* fonctions ψ satisfaisant l'équation quadratique

$$F\left(\frac{D}{F^3}\right)_v \psi^2 - 2\left(K_a + 2\frac{AD}{F^3}\right)\psi + F\left(\frac{A}{F^3}\right)_u = 0\,,$$

parmi lesquelles les solutions strictement positives sont les seules candidates pour une solution

$\varphi = \frac{1}{2} \log \psi$ de (17) ; cette dernière est plus faible que le système de deux équations (16) qui correspondent au problème en question. Pour vérifier si au moins une des deux solutions de (17) satisfait au système (16), on dérive (17) par rapport à u et v, avec les résultats respectifs suivants :

$$(18') \quad 2D\left(\frac{D}{F^3}\right)_v e^{4\varphi} + F^{-2}\left(F^3\left(\frac{D}{F^3}\right)_v\right)_u e^{2\varphi} - 2\left(K_a + \frac{2AD}{F^3}\right)_u - 2D\left(\frac{A}{F^3}\right)_u + F^2\left(F^{-1}\left(\frac{A}{F^3}\right)_u\right)_u e^{-2\varphi} = 0 ,$$

$$(18'') \quad F^2\left(F^{-1}\left(\frac{D}{F^3}\right)_v\right)_v e^{2\varphi} - 2\left(K_a + \frac{2AD}{F^3}\right)_v - 2A\left(\frac{D}{F^3}\right)_v + F^{-2}\left(F^3\left(\frac{A}{F^3}\right)_u\right)_v e^{-2\varphi} + 2A\left(\frac{A}{F^3}\right)_u e^{-4\varphi} = 0 .$$

Le résultat du calcul est qu'il existe une solution ψ correspondant à une structure conforme sur Σ pour laquelle X est une immersion harmonique, si et seulement si $e^{2\varphi}$ est une solution positive simultanée de l'équation quadratique (17) et des deux équations cubiques (18') et (18"). Dans le cas générique (17') au moins une des deux solutions $\psi = e^{2\varphi}$ de (17) satisfait aux équations (18') et (18") si et seulement si la matrice suivante à 7 lignes et à 5 colonnes est de rang au plus égal à 4 ;

$$(19) \quad \begin{pmatrix}
2D\left(\frac{D}{F^3}\right)_v & F^{-2}\left(F^3\left(\frac{D}{F^3}\right)_v\right)_u & -2\left(K_a+\frac{2AD}{F^3}\right)_u - 2D\left(\frac{A}{F^3}\right)_u & F^2\left(F^{-1}\left(\frac{A}{F^3}\right)_u\right)_u & 0 \\
0 & 2D\left(\frac{D}{F^3}\right)_v & F^{-2}\left(F^3\left(\frac{D}{F^3}\right)_v\right)_u & -2\left(K_a+\frac{2AD}{F^3}\right)_u - 2D\left(\frac{A}{F^3}\right)_u & F^2\left(F^{-1}\left(\frac{A}{F^3}\right)_u\right)_u \\
F\left(\frac{D}{F^3}\right)_v & -2K_a - 4\frac{AD}{F^3} & F\left(\frac{A}{F^3}\right)_u & 0 & 0 \\
0 & F\left(\frac{D}{F^3}\right)_v & -2K_a - 4\frac{AD}{F^3} & F\left(\frac{A}{F^3}\right)_u & 0 \\
0 & 0 & F\left(\frac{D}{F^3}\right)_v & -2K_a - 4\frac{AD}{F^3} & F\left(\frac{A}{F^3}\right)_u \\
F^2\left(F^{-1}\left(\frac{D}{F^3}\right)_v\right)_v & -2\left(K_a+\frac{2AD}{F^3}\right)_v - 2A\left(\frac{D}{F^3}\right)_v & F^{-2}\left(F^3\left(\frac{A}{F^3}\right)_u\right)_v & 2A\left(\frac{A}{F^3}\right)_u & 0 \\
0 & F^2\left(F^{-1}\left(\frac{D}{F^3}\right)_v\right)_v & -2\left(K_a+\frac{2AD}{F^3}\right)_v - 2A\left(\frac{D}{F^3}\right)_v & F^{-2}\left(F^3\left(\frac{A}{F^3}\right)_u\right)_v & 2A\left(\frac{A}{F^3}\right)_u
\end{pmatrix}$$

en plus, les deux solutions de l'équation quadratique (17) en $e^{2\varphi}$, supposées strictement positives, sont aussi des solutions de (18') et (18"), si et seulement si la matrice carrée à 4 colonnes est de rang 2 ,

$$(20) \quad \begin{pmatrix}
2D\left(\frac{D}{F^3}\right)_v & F^{-2}\left(F^3\left(\frac{D}{F^3}\right)_v\right)_u & -2\left(K_a+\frac{2AD}{F^3}\right)_u - 2D\left(\frac{A}{F^3}\right)_u & F^2\ F^{-1}\left(\frac{A}{F^3}\right)_u{}_u \\
F\left(\frac{D}{F^3}\right)_v & -2K_a - 4\frac{AD}{F^3} & F\left(\frac{A}{F^3}\right)_u & 0 \\
0 & F\left(\frac{D}{F^3}\right)_v & -2K_a - 4\frac{AD}{F^3} & F\left(\frac{A}{F^3}\right)_u \\
F^2\left(F^{-1}\left(\frac{D}{F^3}\right)_v\right)_u & -2\left(K_a+\frac{2AD}{F^3}\right)_v - 2A\left(\frac{D}{F}\right)_v & F^{-2}\left(F^3\left(\frac{A}{F^3}\right)_u\right)_v & 2A\left(\frac{A}{F^3}\right)_u
\end{pmatrix}$$

En tenant compte de l'hypothèse générique (17'), la première condition portant sur la matrice (19) équivaut à l'annulation des deux seuls mineurs consistant des cinq premières et des cinq dernières lignes ; la condition que la matrice (20) a un rang égal à 2 équivaut au système de 4 équations indépendantes, correspondant à l'annulation des mineurs à trois colonnes qu'on obtient en effaçant la première ou la quatrième ligne et la première ou la quatrième colonne.

Il faut remarquer aussi que les deux matrices (19) et (20) dépendent des invariants affines déterminés par le jet de X d'ordre 5. Ceci montre donc qu'une surface à courbure de Gauss strictement négative et satisfaisant l'inégalité (17') est une surface harmonique si elle satisfait à un système de deux équations d'ordre 5, tandis que si elle satisfait au système de 4 équations d'ordre 5 définies par la matrice (20) étant de rang 2, elle est harmonique par rapport à deux structures conformes. Ces cas particuliers où la condition (17') n'est pas satisfaite simplifient les calculs qui suivent, mais exigent un travail détaillé cas par cas. Il nous suffit de signaler que les quadriques, caractérisées par $A = D = 0$ ne sont des surfaces harmoniques que si elles sont paraboloïdes. Les surfaces qui sont harmoniques de deux manières distinctes, du point de vue des surfaces analytiques réelles ou complexes, ont été étudiées par plusieurs auteurs depuis Darboux ; elles sont importantes dans la théorie des fonctions thêta en trois variables.

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. BLASCHKE *Vorlesungen über Differentialgeometrie ;* III. *Affine Differentialgeometrie,* Berlin, Springer, 1923.

[2] E. CALABI *Complete Affine Hyperspheres* I Symposia Mathematica X, Roma (1971), 19-38.

[3] E. CALABI *Hypersurfaces with maximal affinely invariant area,* Ann. Math. Jour., à paraître.

[4] S.Y. CHENG and S.T. YAU *On the Regularity of the Monge-Ampère Equation* $\det(\partial^2 u/\partial x_i \partial x_j) = F(x,u)$, Comm. P. Appl. Math., 30(1977), 41-68.

[5] S. HELGASON *The Radon Transform,* Basel, 1980.

[6] E. SALKOWSKI *Affine Differentialgeometrie,* Berlin, de Gruyter, 1934.

[7] P.A. SHIROKOV (Shirokow) and A.P. SHIROKOV *Affine Differentialgeometrie,* Leipzig, Teubner, 1962.

E. CALABI

University of Pennsylvania
Department of Mathematics El
PHILADELPHIA
PA 19104 U.S.A.