JEAN-MICHEL LEMAIRE

Anneaux locaux et espaces de lacets à séries de Poincaré irrationnelles

Séminaire N. Bourbaki, 1981, exp. n° 570, p. 149-156

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1980-1981__23__149_0>

ANNEAUX LOCAUX ET ESPACES DE LACETS À SÉRIES DE POINCARÉ IRRATIONNELLES [d'après Anick, Roos, etc...]

par Jean-Michel LEMAIRE

Le but de cet exposé est d'expliquer pourquoi deux questions, posées par J.-P. Serre dans les années 50 (et publiées semble-t-il pour la première fois dans [7], p. IV-52) admettent des réponses négatives.

Ces questions sont les suivantes :

Q1 : Soit R un anneau local noethérien, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et de corps résiduel $\underline{\underline{k}} = R/\mathfrak{m}$. La série "de Poincaré" de R :

$$P_R(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \dim_{\underline{\underline{k}}} \operatorname{Tor}_i^R(\underline{\underline{k}},\underline{\underline{k}}).t^i$$

est-elle rationnelle (i.e. le développement de Taylor à l'origine d'une fraction rationnelle) ?

Q2 : Soit X un CW-complexe fini, 1-connexe. La série formelle :

$$P(\Omega X;t) = \sum_{i=0}^{\infty} \dim_{\mathbb{Q}} H_i(\Omega X;\mathbb{Q}).t^i$$

est-elle rationnelle ?

§ 1. Premières observations

On sait que les premiers calculs complets de l'homologie d'un espace de lacets ont été rendus possibles grâce à la suite spectrale de la fibration $\Omega X \longrightarrow * \longrightarrow X$, établie par Serre. Sous les hypothèses de Q2, cette suite spectrale s'écrit :

$$E^2_{p,q} = H_p(X;\mathbb{Q}) \otimes H_q(\Omega X;\mathbb{Q}) \Rightarrow E^{\infty}_{p,q} = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } p = q = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans le cas des anneaux locaux, on a quelque chose d'assez analogue :

$$E^1_{-p,q} = \mathfrak{m}^p/\mathfrak{m}^{p+1} \otimes_{\underline{\underline{k}}} \operatorname{Tor}^R_{q-p}(\underline{\underline{k}},\underline{\underline{k}}) \Rightarrow E^{\infty}_{p,q} = \begin{cases} \underline{\underline{k}} & \text{si } p = q = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

qu'on obtient en filtrant une résolution R-projective $\mathcal{P}_*$ de $\underline{\underline{k}}$ par $F^p\mathcal{P}_* = \mathfrak{m}^p \otimes_R \mathcal{P}_*$; mais la suite spectrale obtenue est située dans le 3e octant. Dans le premier cas la série de Poincaré de la base X est un polynôme, et dans le second la "base" est le gradué associé à R, dont la série des dimensions

$\sum_{p=0}^{\infty} \dim_{\underline{k}} \mathfrak{m}^p/\mathfrak{m}^{p+1}.t^p$ est rationnelle : le théorème des syzygies de Hilbert permet d'établir que cette série est de la forme $P(t)(1-t)^{-n}$, où $P(t)$ est un polynôme et $n = \dim_{\underline{k}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ est la "dimension de plongement" de R . On aperçoit donc une première analogie entre Q1 et Q2...

Concluons ce paragraphe par quelques exemples classiques où Q1 et Q2 sont vraies :

Exemple 1.1.— Si R est régulier, il est bien connu que $P_R(t) = (1+t)^n$. Plus généralement un résultat de Tate et Assmus caractérise les intersections complètes par $P_R(t) = (1+t)^n(1-t^2)^{d-n}$, $d = \dim R$ (au sens de Krull).

Exemple 1.2.— Si R est une $\underline{k}$-algèbre triviale ($R = \underline{k} \oplus \mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}^2 = 0$), il est facile d'établir

$$P_R(t) = (1 - nt)^{-1}$$

Passons maintenant à Q2. Rappelons d'abord le théorème de Milnor et Moore [10] : l'algèbre de Pontryagin $H_*(\Omega X;\mathbb{Q})$ est l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie graduée $\Pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}$, munie du produit de Samelson. Si l'on pose $c_i = \dim \Pi_i(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}$, on a donc, d'après Poincaré-Birkhoff-Witt :

$$P(\Omega X;t) = \prod_{i\geq 1}^{\infty} \frac{(1+t^{2i-1})^{c_{2i-1}}}{(1-t^{2i})^{c_{2i}}} \tag{1.2.1}$$

Par suite :

Exemple 1.3.— Si X ne possède qu'un nombre fini de groupes d'homologie *et* d'homotopie d'ordre infini (par exemple si X est un espace homogène de groupe de Lie), la série $P(\Omega X;t)$ est rationnelle. On a d'autre part :

Exemple 1.4.— Si X est une suspension ΣY , on a

$$P(\Omega\Sigma Y;t) = (1 - \sum_{i=1}^{\dim Y} \operatorname{rg} \widetilde{H}_i(Y).t^i)^{-1}$$

En effet, $H_*(\Omega\Sigma Y;\mathbb{Q})$ est l'algèbre tensorielle sur $\widetilde{H}_*(Y;\mathbb{Q})$ d'après Bott-Samelson.

On notera l'analogie entre 1.2 et 1.4 ...

§ 2. Le contre-exemple de Serre : $\Omega^2(S^3 \vee S^3)$

Vu l'analogie suggérée plus haut entre Q1 et Q2, on peut se poser la question suivante : étant donné une suite spectrale dont la base a une série de Poincaré rationnelle et l'aboutissement est acyclique, est-ce que la fibre a une série de Poincaré rationnelle ? Ceci impliquerait en particulier que $\Omega^p X$ a une série de Poincaré rationnelle pour tout X fini r-connexe et $p \leq r$. Malheureusement ceci est faux : Serre a montré il y a longtemps (et publié récemment [8]) que $P(\Omega^2(S^3 \vee S^3);t) \notin \mathbb{Q}(t)$.

Rappelons brièvement pourquoi : l'algèbre de Lie $\Pi_*(\Omega(S^3 \vee S^3)) \otimes \mathbb{Q}$ est l'algèbre de Lie libre sur deux générateurs a et b de degré 2 : par suite

$$c_{2n-1}(\Omega^2(S^3 \vee S^3) = w(2,n) \ , \qquad c_{2n} = 0$$

où $w(2,n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(n/d) 2^d$ est le nombre de crochets basiques de longueur n dans l'algèbre de Lie libre à deux générateurs. D'après (1.2.1),

$$f(t) = P(\Omega^2(S^3 \vee S^3);t) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + t^{2n-1})^{w(2,n)}$$

Serre remarque alors que les coefficients b_i de la série

$$g(t) = \frac{t.f'(t)}{f(t)} - \frac{2t}{1+t} = \Sigma\, b_i.t^i$$

sont nuls ssi i est une puissance de 2 . Ceci contredit le théorème de Skolem, suivant lequel l'ensemble des indices des coefficients nuls d'une série rationnelle est périodique.

§ 3. Discussion de Q2 pour les CW-complexes "à deux étages"

On peut essayer d'attaquer Q2 par récurrence sur la structure de CW-complexe de X, vu que Q2 est vraie pour les bouquets finis de sphères.

L'étape suivante consiste à regarder les espaces X de la forme

$$X = \left(\bigvee_{i=1}^{r} S^{m_i+1}\right) \cup_f \left(\bigvee_{j=1}^{s} e^{n_j+2}\right) , \qquad m_i , n_j \geq 1$$

où

$$f \ : \ \Sigma B = \bigvee_j S^{n_j+1} \longrightarrow \bigvee_i S^{m_i+1} = \Sigma A$$

est l'application d'attachement des cellules e^{n_j+2} .

Dans [3], on trouve une étude assez complète de la structure d'algèbre de $H_*(\Omega X;\mathbb{Q})$ pour de tels espaces X , et l'on devrait trouver la formule que nous allons maintenant établir. L'algèbre $H_*(\Omega\Sigma A)$ (resp. $H_*(\Omega\Sigma B)$) est l'algèbre tensorielle engendrée par des éléments a_i , $\deg a_i = m_i$, $i = 1$ à r (resp. b_j , $\deg b_j = n_j$, $j = 1$ à s). Soit K_* le conoyau du morphisme $\Omega f_* : H_*(\Omega\Sigma B) \longrightarrow H_*(\Omega\Sigma A)$: c'est le quotient de l'algèbre libre sur les a_i par l'idéal engendré par l'image des b_i . Soit $K(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \dim K_i.t^i$ la série des dimensions de K_* . On a

PROPOSITION 3.1.–

$$P(\Omega X;t)^{-1} = (1+t)K(t)^{-1} - t(1 - \sum_{i=1}^{r} t^{m_i} + \sum_{j=1}^{s} t^{n_j})$$

Pour démontrer cette formule, on peut considérer la "petite" suite spectrale de la fibration $\Omega X \longrightarrow * \longrightarrow X$ obtenue en filtrant X par $F_0X = *$, $F_1X = \Sigma A$, $F_2X = X$. On a évidemment $E^r_{p,*} = 0$ si $p \neq 0,1,2$, et par conséquent $E^3 = E^\infty = \mathbb{Q}$ en bidegré $(0,0)$, $E^2_{1,*} = E^3_{1,*} = 0$, et l'on a les suites exactes :

(3.1.1) $$0 \longrightarrow E^2_{2,*} \longrightarrow E^1_{2,*} \longrightarrow E^1_{1,*} \longrightarrow E^1_{0,*} \longrightarrow E^2_{0,*} \longrightarrow 0$$

(.1.2) $$\forall\, q \geq 0 \ , \quad 0 \longrightarrow E^2_{2,q-1} \xrightarrow{d^2} E^2_{0,q} \longrightarrow E^3_{0,q} \longrightarrow 0$$

avec $E^3_{0,q} = 0$ si $q \neq 0$, $E^3_{0,0} = \mathbb{Q}$.

On montre :

$$E^1_{o,*} = H_*(\Omega X)$$
$$E^1_{1,*} = H_*(\Omega X) \otimes \widetilde{H}_*(A)$$
$$E^1_{2,*} = H_*(\Omega X) \otimes \widetilde{H}_*(B)$$
$$E^2_{o,*} = H_*(\Omega X) \otimes_{K_*} \mathbb{Q}$$

On montre en outre que $H_*(\Omega X)$ est K_*-libre, de sorte que, notant $V(t)$ la série des dimensions de l'espace vectoriel gradué V_* , on a

$$E^2_{o,*}(t) = P(\Omega X;t) \times K(t)^{-1}$$

et les suites exactes (3.1.1) et (3.1.2) donnent

$$E^2_{o,*}(t) = P(\Omega X;t) \times (1 - \Sigma\, t^{m_i} + \Sigma\, t^{n_j}) - E^2_{2,*}(t)$$
$$E^2_{o,*}(t) = 1 + t.E^2_{2,*}(t)$$

d'où la formule annoncée par un calcul immédiat.

On voit donc que $P(\Omega X;t)$ est rationnelle ssi $K(t)$ l'est. Réciproquement, à toute présentation d'une $\mathbb{Q}$-algèbre de Hopf cocommutative, connexe, K , on peut associer un CW-complexe à deux étages, fini ssi la présentation est finie. Par suite, Q2 pour les CW-complexes à deux étages équivaut à :

Q3 : Soit K une $\mathbb{Q}$-algèbre de Hopf cocommutative, connexe, de présentation finie. La série formelle :

$$K(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \dim K_i . t^i$$

est-elle rationnelle ?

Si l'on oublie "de Hopf cocommutative", la question a résisté jusqu'en 1978 : J.-B. Shearer [9] a alors réussi à fabriquer un contre-exemple comportant 11 générateurs et 77 relations ! Un an plus tard, D. Anick produisait le contre-exemple décisif à Q3 que nous décrirons plus loin. Mais auparavant, revenons aux anneaux locaux.

§ 4. Retour aux anneaux locaux

En 1978, J.-E. Roos [4] a observé une relation remarquable entre Q1 et Q2 :

Soit X un CW-complexe 1-connexe, fini, vérifiant $H_i(X;\mathbb{Q}) = 0$ si $i \neq 0,2,4$. On posera $b_i = \dim H_i(X;\mathbb{Q})$. Si l'on oublie la graduation, la cohomologie $H_*(X;\mathbb{Q})$ est un anneau local, avec $\mathfrak{m} = \widetilde{H}^*(X;\mathbb{Q})$ et $\mathfrak{m}^3 = 0$. L'idée de Roos consiste à expliciter la relation qui existe entre $P_{H^*(X)}(t)$ et $P(\Omega X;t)$.

Voici comment : en utilisant les techniques contemporaines de modèles minimaux, il n'est pas difficile de voir qu'un espace X vérifiant les conditions ci-dessus a le type d'homotopie rationnelle d'un CW-complexe à deux étages :

$$X \sim_{\mathbb{Q}} \left(\bigvee_{i=1}^{b_2} S^2_i\right) \cup_f \bigvee_{j=1}^{b_4} e^4_j$$

et l'application f est "quadratique", c'est-à-dire est une combinaison linéaire de crochets de Whitehead de longueur 2 sur les identités des sphères S_i^2. En particulier un tel X est "formel", ce qui entraîne en particulier que la suite spectrale d'Eilenberg et Moore

(4.1) $$E^2_{p,q} = \mathrm{Cotor}^{H_*(X)}_{p,q}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}) \underset{p}{\Rightarrow} H_{p+q}(\Omega X)$$

vérifie $E^2 = E^\infty$. Comment calcule-t-on Cotor ? C'est l'homologie de la cobar-construction, qui est ici l'algèbre tensorielle bigraduée, engendrée par des générateurs a^i, $i = 1,\dots,b_2$ de bidegré $(-1,2)$ et b^j, $j = 1,\dots,b_4$ de bidegré $(-1,4)$, en bijection avec les cellules de dimension positive de X, et munie de la différentielle d, de bidegré $(-1,0)$, telle que $da^i = 0$ et db^j est la combinaison linéaire de crochets sur les a^i donnée par f. Cette algèbre est donc bigraduée, concentrée dans le 2e quadrant $(p \le 0 , q \ge 0)$, et la série des dimensions d'une telle algèbre est un élément de $\mathbb{Z}[[s^{-1},t]]$. En effectuant un raisonnement analogue à celui de 3.1 sur la cobar-construction acyclique, filtrée "à deux étages" de manière évidente, on obtient la formule

(4.2) $$C(s,t)^{-1} = (1+s).K(s,t)^{-1} - s(1 - b_2s^{-1}t^2 + b_4s^{-1}t^4)$$

où $C(s,t)$ est la série double de $\mathrm{Cotor}^{H_*(X)}_{*,*}(\mathbb{Q},\mathbb{Q})$ et $K(s,t)$ celle de $T((a^i))/(db^j) = K$.

Comme la suite spectrale (4.1) est triviale, on a $C(t,t) = P(\Omega X;t)$ et l'on retrouve la formule (3.1) en faisant $s = t$ dans (4.2).

En revanche, vu la dualité entre $\mathrm{Cotor}^{H_*(X)}$ et $\mathrm{Tor}^{H^*(X)}$, on voit que

$$C(t^{-1},1) = \Sigma \dim \mathrm{Tor}^{H^*(X)}_{i,*}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}).t^i = P_{H^*(X)}(t) .$$

Or comme l'algèbre bigraduée K est engendrée en bidegré $(-1,2)$, elle est concentrée en bidegrés $(-k,2k)$, $k \ge 0$, et l'on a donc

$$K(t^{-1},1) = K(t,t) = K(t) .$$

En éliminant $K(t)^{-1}$ entre $C(t,t)$ et $C(t^{-1},1)$, on obtient la formule de Roos ([4], th. B)

(4.3) $$P(\Omega X;t)^{-1} - t.P_{H^*(X)}(t)^{-1} = (1-t)(1 - b_2t + b_4t^2)$$

Il résulte des formules (3.1) et (4.3) que si l'on peut trouver une algèbre K qui est un contre-exemple à Q3, et admet une présentation avec des générateurs en degré 1 et des relations en degré 2 *seulement, le* CW-*complexe à deux étages associé à cette présentation est un contre-exemple à* Q2 *et sa cohomologie est un contre-exemple à* Q1 *!*

Il ne reste plus qu'à trouver une telle algèbre ; c'est ce qu'a fait D. Anick dans sa thèse [1], [2].

§ 5. L'exemple de D. Anick

Anick obtient son exemple par des manipulations combinatoires sur les "produits semi-tensoriels" d'algèbres graduées. Nous exposerons ici la méthode de construction proposée par J.-E. Roos et C. Löfwall [5], qui n'utilise que de l'algèbre homologique "classique".

On rappelle d'abord que si K est une $\mathbb{Q}$-algèbre de Hopf cocommutative, graduée, connexe, ses primitifs forment une sous-algèbre de Lie PK et $K = UPK$ (cf. [10]). D'autre part, pour que K soit de présentation finie, engendrée en degré 1 et "relatée" en degré 2, il faut et il suffit que $\mathrm{Tor}^K_{1,*}(\mathbb{Q},\mathbb{Q})$ et $\mathrm{Tor}^K_{2,*}(\mathbb{Q},\mathbb{Q})$ soient de dimension finie et concentrés respectivement en degrés 1 et 2.

Considérons l'algèbre graduée abélienne A engendrée par la suite des générateurs a_i, $\deg a_i = i$, $i \in \mathbb{N}^*$. On a

$$A = E(a_1,a_3,a_5,\dots) \otimes P(a_2,a_4,a_6,\dots)$$

et

$$A(t) = \prod_{i\geq 1}^{\infty} \frac{1+t^{2i-1}}{1-t^{2i}} \quad .$$

Il est clair que $A(t) \notin \mathbb{Q}(t)$, mais A n'est pas de présentation finie. L'idée consiste à construire l'algèbre K cherchée comme extension

(5.1) $$\mathbb{Q} \longrightarrow A \longrightarrow K \longrightarrow B \longrightarrow \mathbb{Q}$$

avec $B(t)$ rationnelle. On aura alors

$$K(t) = A(t).B(t) \notin \mathbb{Q}(t) \ .$$

Une telle extension équivaut à la donnée de l'extension d'algèbres de Lie (graduées)

$$0 \longrightarrow PA \longrightarrow PK \longrightarrow PB \longrightarrow 0 \quad ,$$

où $PA = \bigoplus_{i\geq 1} \mathbb{Q}.a_i$ a un crochet nul : une telle extension, pour B fixé et une action τ de B sur PA fixée, est donc classée par un élément de $H^2_0(PB;{}_{\tau}PA)$.

Il se trouve qu'en choisissant

$$B = T(b,c) \otimes T(b',c')$$

où b, c, b', c' sont de degré 1 (et donc primitifs) et la structure de B-module sur PA définie par

(5.3) $$\forall\, i \geq 1 \ , \ \begin{cases} b.a_i = b'.a_i = 0 \\ c.a_i = a_{i+1} \\ c'.a_i = (-1)^{i+1}.a_{i+1} \end{cases}$$

l'espace vectoriel $H^2_0(PB;PA)$ est de dimension 1, engendré par la classe du cocycle γ défini par

$$\gamma(b,b') = a_2 = \gamma(b',b)$$

et $\gamma = 0$ sur tous les autres couples de générateurs de B. Soit K l'extension de A par B associée à γ . Il résulte de la définition que l'on a dans K les générateurs $a = a_1, b, b', c, c'$ de degré 1 et les relations :

$$(5.4) \quad \begin{cases} [b,c'] = [b',c] = [c,c'] = 0 \\ [b,b'] = [c,a] = [c',a] \\ [b,a] = [b',a] = 0 \\ [a,a] = 0 \end{cases}$$

On calcule ensuite $\mathrm{Tor}^K_{1,*}(\mathbb{Q},\mathbb{Q})$ et $\mathrm{Tor}^K_{2,*}(\mathbb{Q},\mathbb{Q})$ au moyen de la suite spectrale de l'extension 5.1, qui s'écrit

$$(5.5) \quad E^2_{p,q} = \mathrm{Tor}^B_p(\mathrm{Tor}^A_q(\mathbb{Q},\mathbb{Q}),\mathbb{Q}) \Rightarrow \mathrm{Tor}^K_{p+q}(\mathbb{Q},\mathbb{Q})$$

et l'on vérifie que ces espaces vectoriels sont de dimensions respectives 5 et 8 , de sorte que les générateurs a , b , c , b' , c' et les relations (5.4) constituent une présentation de K .

Il n'y a plus qu'à appliquer les résultats du § 4 : le contre-exemple à Q2 est

$$X = \left(\bigvee_{i=1}^{5} S^2_i\right) \cup_f \bigvee_{j=1}^{8} e^4$$

où f annule les crochets de Whitehead correspondant à (5.4). L'anneau local qui contredit Q1 est la cohomologie rationnelle de X , que l'on peut décrire comme suit

$$R = H^*(X;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5]/I$$

où I est l'idéal engendré par :

$$(5.6) \quad \begin{cases} x_2^2 \ , \quad x_3^2 \ , \quad x_4^2 \ , \quad x_5^2 \\ x_2x_3 \ , \quad x_4x_5 \ , \quad x_2x_4 + (x_3+x_5)x_1 \\ \text{tous les polynômes de degré} \geq 3 \end{cases}$$

§ 6. <u>En guise de conclusion</u>

Maintenant que nous savons ce que ces séries de Poincaré ne sont pas, il est naturel de se demander ce qu'elles peuvent être ! David Anick conclut sa thèse par deux remarques, concernant Q2, mais qui valent tout aussi bien pour Q1.

La première est que (si X n'est pas contractile), la série $P(\Omega X;t)$ admet un rayon de convergence r vérifiant $0 < r \leq 1$: en regardant la suite spectrale de Serre, on voit sans peine que $P(\Omega X;t)$ ne converge pas pour $t = 1$, mais qu'elle converge sur tout disque de centre 0 qui ne contient aucun zéro du polynôme $1 - t^{-1}(P(X;t) - 1)$.

La deuxième est que $P(\Omega X;t)$ peut être néanmoins "fortement" transcendante : soit E (comme exponentielle, ou enveloppante) l'application des séries formelles dans elles-mêmes définie par

$$E(\Sigma\, a_i t^i) = \prod_{i\geq 1} \frac{(1+t^{2i-1})^{a_{2i-1}}}{(1-t^{2i})^{a_{2i}}}$$

Les séries de Poincaré des exemples construits au § 6 sont du type : fonction rationnelle de E (fraction rationnelle). On peut en fait itérer E autant de fois qu'on veut, car on peut généraliser la construction de l'algèbre K de façon à pouvoir l'itérer : de façon précise, on peut prendre pour algèbre de Lie abélienne PA l'idéal d'augmentation de *n'importe quelle algèbre associative* présentée par un nombre fini de générateurs de degré 1 et de relations de degré 2 , en particulier l'algèbre K , et ainsi de suite ! cf. [1] et [5] pour les détails.

On trouvera dans l'excellent rapport de Roos [6] un survol de nombreuses autres questions voisines, ainsi qu'une bibliographie complète.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. ANICK - Ph. D. thesis, M.I.T., 1980, Stockholm U. Reports, n° 8, 1980

[2] D. ANICK - C. Rend. Acad. Sci. Paris, 290 A(1980), 729-732.

[3] J.-M. LEMAIRE - *Algèbres connexes et homologie des espaces de lacets*, Springer Lect. Notes, n° 422(1974).

[4] J.-E. ROOS - Springer Lect. Notes n° 740(1979), 285-322.

[5] J.-E. ROOS and C. LÖFWALL - C. R. A. S. Paris, 290 A(1980), 733-736.

[6] J.-E. ROOS - *Homology of loop spaces and local rings*, Stockholm U. Reports, n° 15(1980).

[7] J.-P. SERRE - *Algèbre locale et multiplicités*, Springer Lect. Notes, n° 11, 2e éd., 1965.

[8] J.-P. SERRE - Proc. Kon. Ned. Akad., A 82(1979), 469-471. (= Indag Math. 41, 469-471).

[9] J.-B. SHEARER - J. Algebra, 62(1980), 228-231.

[10] J. MILNOR and J.-C. MOORE - Annals of Math., 81(1965), 211-264.

Jean-Michel LEMAIRE

Université de Nice
Département de Mathématiques
Parc Valrose
06034 NICE CEDEX