MICHEL DUFLO

Caractères des groupes de Lie résolubles

Séminaire N. Bourbaki, 1981, exp. n° 558, p. 257-272

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1979-1980__22__257_0>

Séminaire BOURBAKI 558-01
32e année, 1979/80, n° 558 Juin 1980

CARACTÈRES DES GROUPES DE LIE RÉSOLUBLES

par Michel DUFLO

J'expose ici des résultats obtenus sur les caractères des groupes de Lie résolubles par J.-Y. Charbonnel, M.-S. Khalgui, N.-V. Pedersen.

Introduction

Considérons un groupe de Lie G, dénombrable à l'infini. Qu'appelle-t'on un caractère de G ? Lorsque G est compact, un caractère est une fonction de G de la forme $g \longmapsto \operatorname{tr} T(g)$, où T est une représentation (*) irréductible, et donc de dimension finie, de G. Cette fonction est le caractère de T, et elle détermine la classe d'équivalence de T. En général, les représentations irréductibles de G ne sont pas de dimension finie. La notion de caractère a été étendue par R. Godement [11]. On choisit une mesure de Haar (à gauche par exemple) dg sur G. L'espace $L^1(G)$ est une algèbre de Banach involutive, et si T est une représentation de G, on lui associe la représentation $\alpha \longmapsto T(\alpha) = \int \alpha(g)T(g)dg$ de $L^1(G)$. Une représentation irréductible T de G est dite normale relativement à $L^1(G)$ s'il existe $\alpha \in L^1(G)$ tel que $T(\alpha)$ soit un opérateur traçable non nul. A une telle représentation, on associe son caractère : c'est la forme linéaire $\alpha \longrightarrow \operatorname{tr} T(\alpha)$, définie sur l'idéal de $L^1(G)$ formé des α tels que $T(\alpha)$ soit traçable.

On définit aussi le caractère d'une représentation factorielle normale relativement à $L^1(G)$. Une représentation T de G est factorielle si l'algèbre de von Neumann M engendrée par T (c'est-à-dire l'adhérence faible de $T(L^1(G))$ dans l'espace des opérateurs bornés dans l'espace de la représentation T) est un facteur (c'est-à-dire de centre $\mathbb{C}\mathrm{Id}$). Le facteur M est semi-fini s'il existe une fonction

(*) Dans ce papier, une représentation de G est une représentation unitaire continue dans un espace de Hilbert séparable. De même, les représentation des algèbres normées involutives sont des $*$-représentations dans des espaces de Hilbert séparables. Dans les deux cas, irréductible signifie topologiquement irréductible, et équivalent unitairement équivalent. Rappelons d'autre part que deux représentations sont dites quasi-équivalentes si elles ont des multiples communs équivalents. Deux représentations irréductibles sont quasi-équivalentes si et seulement si elles sont équivalentes.

t , définie sur le cône M^+ des opérateurs hermitiens positifs de M , à valeurs dans $[0,\infty]$, et vérifiant les conditions suivantes :

1) $t(ax) = at(x)$ pour tout $a \geq 0$ et tout $x \in M^+$.
2) $t(x+y) = t(x) + t(y)$ pour tout $x \in M^+$ et tout $y \in M^+$.
3) $\sup_F t(x) = t(\sup_F x)$ pour toute famille filtrante croissante $F \subset M^+$.
4) $t(x^*x) = t(xx^*)$ pour tout $x \in M$.
5) Il existe $x \in M^+$ tel que l'on ait : $0 < t(x) < \infty$.

Si M est semi-fini, deux telles fonctions sont proportionnelles. Dans un facteur semi-fini, on définit les <u>opérateurs traçables</u> : ce sont les éléments de M qui sont combinaison linéaire finie d'éléments $x \in M^+$ tels que $t(x) < \infty$. L'ensemble des opérateurs traçables est un idéal de M , dense pour la topologie faible, et il existe une unique forme linéaire sur cet idéal, encore notée t , qui prolonge t sur le cône des opérateurs traçables de M^+ .

Par exemple, si T est irréductible, M est l'algèbre des opérateurs bornés sur l'espace de T . Elle est semi-finie : on peut choisir pour t la trace usuelle tr . Les opérateurs traçables sont alors les opérateurs traçables usuels.

Une représentation factorielle T est dite normale relativement à $L^1(G)$ si le facteur M engendré par T est semi-fini, et s'il existe $\alpha \in L^1(G)$ tel que $T(\alpha)$ soit traçable. Une telle représentation a un caractère : c'est la forme linéaire $\alpha \longmapsto t(T(\alpha))$ définie sur l'idéal de $L^1(G)$ formé des α tels que $T(\alpha)$ soit traçable.

Cette théorie des caractères est satisfaisante pour deux raisons. Le caractère d'une représentation factorielle normale relativement à $L^1(G)$ détermine (à quasi-équivalence près) la représentation, et l'on sait caractériser, par des propriétés d'extrémalité, quelles sont les formes linéaires (partiellement définies) sur $L^1(G)$ qui sont des caractères. Elle a un défaut : il est souvent difficile de décider si une représentation factorielle est normale relativement à $L^1(G)$. Une des causes en est que la structure de l'algèbre $L^1(G)$ est compliquée. On remplace donc maintenant (depuis Guichardet [12]) l'algèbre $L^1(G)$ par la C^*-algèbre $C^*(G)$, obtenue en complétant $L^1(G)$ pour une norme convenable. Toute représentation T de $L^1(G)$ se prolonge de manière unique en une représentation (encore notée T) de $C^*(G)$, et il se trouve que $T(C^*(G))$ est l'adhérence, pour la topologie de la norme des opérateurs, de $T(L^1(G))$.

Une représentation factorielle T de G est dite <u>normale</u> si elle est "normale relativement à $C^*(G)$ ", c'est-à-dire si le facteur engendré par T est semi-fini, et s'il existe $\alpha \in C^*(G)$ tel que $T(\alpha)$ soit traçable et non nul, et on définit comme plus haut son caractère, qui est une forme linéaire partiellement définie sur $C^*(G)$.

Il est clair qu'une représentation factorielle normale relativement à $L^1(G)$

est normale. La réciproque peut être fausse : une représentation irréductible est normale si et seulement si $T(C^*(G))$ contient l'algèbre des opérateurs compacts sur l'espace de T, et il y a un exemple ([12], p. 66) d'une représentation irréductible normale d'un groupe dénombrable telle que $T(L^1(G))$ ne contienne aucun opérateur compact non nul.

L'exposé d'aujourd'hui est motivé par le résultat suivant dû à Charbonnel [2] :

THÉORÈME 1.- Soit T une représentation factorielle normale d'un groupe de Lie résoluble connexe G. Il existe $\alpha \in C_c^\infty(G)$ tel que $T(\alpha)$ soit traçable et non nul.

Donc, pour un groupe résoluble connexe, "normal" est équivalent à "normal relativement à $L^1(G)$", et on obtient des théories des caractères équivalentes en utilisant $L^1(G)$ ou $C^*(G)$.

Le théorème 1 était connu pour presque toutes les représentations (relativement à la mesure de Plancherel). C'est évident pour les groupes unimodulaires, et a été établi en général par L. Pukanszky ([23], p. 593). Il l'était aussi dans plusieurs cas particuliers (voir [1], [3], [9], [10], [14], [20], [22]). Il ne l'était pas par contre par exemple pour les groupes complètement résolubles dont pourtant les représentations factorielles sont toutes quasi-équivalentes à des représentations irréductibles, et explicitement construites depuis longtemps.

Comme le montre l'exemple de Guichardet, cité plus haut, le théorème ne s'étend pas à des groupes de Lie quelconques, mais il est vraisemblable qu'il reste exact pour un groupe de Lie connexe. En effet il l'est pour les groupes de Lie semi-simples réels connexes (Harish-Chandra [13]), et les résultats de Pukanszky [25] sur la classification des représentations factorielles normales des groupes de Lie connexes incitent à l'optimisme.

****

La démonstration de Charbonnel utilise, outre des méthodes des articles cités ci-dessus, un résultat de J. Dixmier sur la structure du spectre primitif de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ du complexifié $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ de $\mathfrak{g}$. Le théorème 1 est donc une application de plus de la théorie des algèbres enveloppantes (cf. [6]) à l'analyse harmonique non commutative.

Soient $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ une algèbre de Lie complexe de dimension finie, et $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ son algèbre enveloppante. Rappelons qu'un idéal (idéal signifie idéal bilatère) de $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ est dit primitif s'il est le noyau d'une représentation irréductible de $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$. Soit I un idéal primitif. On pose $\hat{I} = \bigcap J$, où J parcourt l'ensemble des idéaux primitifs contenant strictement I (par exemple $\hat{I} = U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ si et seulement si I est maximal). On a $\hat{I} \neq I$, ou, de manière équivalente, I est un point localement fermé de l'espace des idéaux primitifs, muni de la topologie de Jacobson (ceci est dû à Dixmier lorsque $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ est résoluble [6], à Colette Moeglin en général [19]).

Soit G un groupe de Lie connexe, et soit $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ le complexifié de l'algèbre de

Lie $\mathfrak{g}$ de G . Soit T une représentation de G dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, et soit $\mathcal{H}^\infty$ le sous-espace des vecteurs différentiables. On note dT la représentation associée de $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ dans $\mathcal{H}^\infty$. D'après Dixmier [7], si T est factorielle, le noyau de dT est un idéal primitif de $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$. (Le résultat n'est énoncé dans [7] que pour une représentation irréductible, mais cela l'entraine pour toute représentation dont le noyau dans $C^*(G)$ est un idéal premier).

Le théorème 1 résulte du théorème 2 ci-dessous.

THÉORÈME 2 [2].- <u>Soit</u> T <u>une représentation factorielle normale d'un groupe de Lie résoluble connexe</u> G . <u>Soit</u> I <u>le noyau de</u> dT <u>dans</u> $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ <u>et soit</u> $u \in \hat{I}$ <u>un élément semi-invariant modulo</u> I . <u>Il existe</u> $m \in \mathbb{N}$ <u>tel que</u> , <u>pour tout</u> $\alpha \in C_c^\infty(G)$, <u>l'opérateur</u> $T(u^{*m} * \alpha * u^m)$ <u>soit traçable</u>.

(Si d et d' sont des distributions à support compact sur G , on a noté $d * d'$ leur produit de convolution, d^* la distribution $d(g^{-1}) = d^*(g)$; on a identifié $\alpha \in C_c^\infty(G)$ et la distribution αdg , et $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ et l'espace des distributions de support 1 sur G).

Rappelons que G opère dans $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, et que u est dit semi-invariant modulo I si $gu \in \mathbb{C}u + I$ pour tout $g \in G$. Le théorème de Lie, et le résultat de Dixmier cité plus haut montrent qu'il existe un élément $u \in \hat{I}$, semi-invariant et <u>non nul</u> modulo I , de sorte que $T(u^{*m} * \alpha * u^m)$ n'est pas identiquement nul quand α parcourt $C_c^\infty(G)$. La fonctionnelle $\alpha \longmapsto t(T(u^{*m} * \alpha * u^m))$ est une distribution sur G , vecteur propre à la fois pour l'action de G par automorphismes intérieurs, et pour l'action du centre de $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$. Il résulte de la théorie des semi-caractères développée par Pedersen [20] que cette distribution caractérise T à quasi-équivalence près. Notons que, dans les conditions du théorème 2, Pedersen avait démontré qu'il existe un opérateur non nul A , fermé, de domaine dense, semi-invariant dans l'espace de T , affilié au facteur engendré par T , tel que la clôture de l'opérateur $A^*T(\alpha)A$ soit traçable pour tout $\alpha \in C_c^\infty(G)$, de sorte que $\alpha \longmapsto t(A^*T(\alpha)A)$ est un "semi-caractère distribution" comme ci-dessus. Mais c'est le fait que l'on puisse choisir pour A la clôture d'un opérateur $dT(v)$ avec $v \in U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ qui permet d'obtenir le théorème 1.

****

Dans la démonstration du théorème 2 on utilise la classification des représentations factorielles normales d'un groupe résoluble connexe (due à Pukanszky [25]) et les formules pour leur caractère (due indépendamment à Khalgui [14] et Pedersen [20]). Comme toutes ces choses sont beaucoup plus simples pour un groupe résoluble exponentiel (et dans ce cas connues depuis longtemps), je donnerai dans le chapitre I les grandes lignes de la démonstration du théorème 2 pour un groupe résoluble exponentiel. Dans le chapitre II, j'exposerai brièvement les résultats dans le cas général.

Chapitre I. Le cas des groupes résolubles exponentiels

Dans ce chapitre, G est un groupe de Lie connexe, simplement connexe, résoluble et exponentiel. Exponentiel signifie que l'application exponentielle est un difféomorphisme de $\underline{g}$ sur G, et il est équivalent de dire que $\operatorname{ad} X$ n'a pas de valeur propre imaginaire pure non nulle pour tout $X \in \underline{g}$. Les groupes complètement résolubles (i.e. admettant une suite de composition dont les facteurs successifs sont isomorphes à $\mathbb{R}$) sont exponentiels.

1. Représentations irréductibles de G

Le groupe G est de type I (Takenouchi [26]), ce qui signifie que toute représentation factorielle est quasi-équivalente à une représentation irréductible, ou, de manière équivalente d'après un théorème de Glimm (cf. [5]), que toute représentation irréductible est normale. On notera $\hat{G}$ l'espace des classes d'équivalence de représentations irréductibles de G. Nous allons décrire une paramétrisation de $\hat{G}$.

Le groupe G opère dans l'espace vectoriel dual $\underline{g}^*$ de $\underline{g}$ par la représentation coadjointe, c'est-à-dire la représentation contragrédiente de la représentation adjointe. Notons $\underline{g}^*/G$ l'espace des orbites de G dans $\underline{g}^*$. Nous allons décrire une bijection $\Omega \longmapsto T_\Omega$ de $\underline{g}^*/G$ sur G. Soit donc $\Omega \in \underline{g}^*/G$. On choisit $f \in \Omega$. On choisit une sous-algèbre $\underline{h}$ de $\underline{g}$ telle que, notant H le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\underline{h}$, et $\underline{h}^\perp$ l'orthogonal de $\underline{h}$ dans $\underline{g}^*$, on ait $f + \underline{h}^\perp = Hf$. (Il existe de telles sous-algèbres ; on les appelle des "polarisations en f satisfaisant la condition de Pukanszky"). On démontre que H est fermé et que la restriction de if (i est une racine carrée de -1 fixée une fois pour toutes) à $\underline{h}$ est la différentielle d'un caractère unitaire χ_f de H. On démontre que la représentation de G induite par χ_f est irréductible, et que sa classe ne dépend pas des choix faits. On notera cette classe T_Ω.

THÉORÈME 3.- L'application $\Omega \longmapsto T_\Omega$ est une bijection de $\underline{g}^*/G$ sur $\hat{G}$.

Ce théorème est dû à A.A. Kirillov lorsque G est nilpotent, et à P. Bernat (avec un complément de Pukanszky) en général (cf. [1], ch. VI). On peut ajouter, bien que cela ne serve pas dans la suite, que l'application $\Omega \longmapsto T_\Omega$ est continue, que c'est un isomorphisme d'espaces boréliens [22], mais que l'on ne sait pas si c'est un homéomorphisme, bien que cela ait été démontré par I. Brown pour les groupes de Lie nilpotents.

2. Structure symplectique sur les orbites de la représentation coadjointe

Soit $f \in \underline{g}^*$. On note $G(f)$ le stabilisateur de f dans G, $\underline{g}(f)$ son algèbre de Lie, B_f la forme bilinéaire $(X,Y) \longmapsto f([X,Y])$ sur $\underline{g} \times \underline{g}$. Il se trouve que $\underline{g}(f)$ est le noyau de B_f de sorte que la dimension de $\underline{g}/\underline{g}(f)$ est paire. Notons-la $2d$.

Soit $\Omega \in \underline{g}^*/G$. Il existe une unique structure de variété analytique sur Ω telle que, pour tout $f \in \Omega$, l'application $g \longrightarrow gf$ soit un isomorphisme de $G/G(f)$ sur Ω . L'espace tangent à Ω en f s'identifie donc à $\underline{g}/\underline{g}(f)$, et on note β la deux-forme sur Ω telle que, pour tout $f \in \Omega$, β_f s'identifie avec la deux-forme sur $\underline{g}/\underline{g}(f)$ obtenue de B_f par passage au quotient. On démontre que β est non-dégénérée, fermée, et G-invariante, de sorte que Ω est une variété symplectique dans laquelle G agit par difféomorphismes symplectiques. On notera μ_Ω la mesure de Radon sur Ω déduite de la forme différentielle de degré maximum

$$(2\pi)^{-d}(d!)^{-1}\beta_\wedge \ldots {}_\wedge\beta \qquad (\ d \ \text{facteurs}).$$

(Tout ceci est valable pour n'importe quel groupe de Lie, cf. [17] et [18]).

Comme G est exponentiel, on démontre que Ω est localement fermée dans $\underline{g}^*$ et que sa topologie est celle déduite de la topologie de $\underline{g}^*$.

Si ψ est une fonction borélienne positive sur Ω , on dit que $\psi\mu_\Omega$ est tempérée s'il existe $N \geq 0$ tel que $\int_\Omega (1+\|f\|^2)^{-N}\psi(f)d\mu_\Omega(f) < \infty$, où $\|.\|$ est une norme sur $\underline{g}^*$. Si μ_Ω est tempérée, on dit simplement que Ω est tempérée.

3. Idéaux primitifs de $U(\underline{g}_{\mathbb{C}})$ et éléments semi-invariants

Dans ce paragraphe (sauf à la fin) on note $\underline{g}_{\mathbb{C}}$ une algèbre de Lie résoluble complexe de dimension finie. On note $\Gamma_{\mathbb{C}}$ le plus petit groupe algébrique d'automorphismes de $\underline{g}_{\mathbb{C}}$ dont l'algèbre de Lie contient $\mathrm{ad}\, g_{\mathbb{C}}$, et $\mathrm{Prim}\, U(\underline{g}_{\mathbb{C}})$ l'ensemble des idéaux primitifs de $U(\underline{g}_{\mathbb{C}})$. Le groupe $\Gamma_{\mathbb{C}}$ opère dans $\underline{g}^*_{\mathbb{C}}$. De manière analogue au paragraphe 1, on va décrire une bijection $\omega \longmapsto I_\omega$ de $\underline{g}^*_{\mathbb{C}}/\Gamma_{\mathbb{C}}$ sur $\mathrm{Prim}\, U(\underline{g}_{\mathbb{C}})$.

Soit $\omega \in \underline{g}^*_{\mathbb{C}}/\Gamma_{\mathbb{C}}$. On choisit $f \in \omega$. On choisit une sous-algèbre $\underline{h}_{\mathbb{C}}$ de $\underline{g}_{\mathbb{C}}$ telle que $\underline{h}_{\mathbb{C}}f = \underline{h}^{\perp}_{\mathbb{C}}$. (Une telle sous-algèbre s'appelle une polarisation en f ; il en existe). On note $J(\underline{h}_{\mathbb{C}},f)$ l'idéal à gauche de $U(\underline{g}_{\mathbb{C}})$ engendré par les éléments de la forme $H - f(H) - \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,\mathrm{ad}_{\underline{g}_{\mathbb{C}}/\underline{h}_{\mathbb{C}}} H$ lorsque H parcourt $\underline{h}_{\mathbb{C}}$. On considère le noyau dans $U(\underline{g}_{\mathbb{C}})$ de la représentation de $U(\underline{g}_{\mathbb{C}})$ dans $U(\underline{g}_{\mathbb{C}})/J(\underline{h}_{\mathbb{C}},f)$. On démontre que ce noyau est un idéal primitif, et qu'il ne dépend pas des choix faits. On le note I_ω .

THÉORÈME 4.- <u>L'application</u> $\omega \longmapsto I_\omega$ <u>est une bijection de</u> $\underline{g}^*_{\mathbb{C}}/\Gamma_{\mathbb{C}}$ <u>sur</u> $\mathrm{Prim}\, U(\underline{g}_{\mathbb{C}})$.

L'application $\omega \longmapsto I_\omega$ a été définie par Dixmier. L'injectivité de cette application est due à R. Rentschler (cf. [6], ch. 6).

Dans la suite de ce paragraphe, on fixe $\omega \in \underline{g}^*_{\mathbb{C}}/\Gamma_{\mathbb{C}}$, et on pose $I = I_\omega$. Soit $u \in U(\underline{g}_{\mathbb{C}})$ un élément semi-invariant modulo I . Il existe donc un caractère rationnel λ de $\Gamma_{\mathbb{C}}$ tel que $\gamma u = \lambda(\gamma)u$ mod. I pour tout $\gamma \in \Gamma_{\mathbb{C}}$. (Si $u \notin I$, λ est bien défini et s'appelle le <u>poids</u> de u). Nous allons associer à u une fonction Ψ_u sur ω , semi-invariante de poids λ , c'est-à-dire telle que $\Psi_u(\gamma^{-1}f) = \lambda(\gamma)\Psi_u(f)$ pour tout $\gamma \in \Gamma_{\mathbb{C}}$ et tout $f \in \omega$.

Si $u \in I$, on pose $\Psi_u = 0$. Si $u \notin I$, on procède ainsi. Soit $f \in \omega$. On choisit une polarisation $\underline{h}_{\mathbb{C}}$ en f telle que $d\lambda(\mathrm{ad}H) = 0$ pour tout $H \in \underline{h}_{\mathbb{C}}$ (il en existe). On démontre qu'il existe un scalaire, indépendant du choix de $\underline{h}_{\mathbb{C}}$, et c'est ce scalaire que l'on note $\Psi_u(f)$, tel que $u = \Psi_u(f) \bmod. J(\underline{h}_{\mathbb{C}}, f)$. Il est facile de voir que la fonction Ψ_u ainsi définie est semi-invariante de poids λ.

Si u et v sont semi-invariants modulo I, on a $\Psi_{uv} = \Psi_u \Psi_v$ (Tauvel [27]).

THÉORÈME 5 [2].- Soit $u \in U(\underline{g}_{\mathbb{C}})$ semi-invariant molulo I. La fonction Ψ_u se prolonge en une fonction continue (pour la topologie ordinaire) sur l'adhérence $\mathrm{Cl}(\omega)$ de ω. Si de plus $u \in \hat{I}$ (rappelons que $\hat{I}$ est défini dans l'introduction), ce prolongement est nul sur $\mathrm{Cl}(\omega) - \omega$.

(La démonstration est en gros la suivante. Soit $f \in \mathrm{Cl}(\omega)$. On démontre que $I_{\Gamma_{\mathbb{C}} f} \supset I$, donc u est semi-invariant modulo $I_{\Gamma_{\mathbb{C}} f}$, et l'on définit $\Psi_u(f)$ comme plus haut. On démontre ensuite que la fonction Ψ_u ainsi obtenue sur $\mathrm{Cl}(\omega)$ est continue. Si de plus $u \in \hat{I}$, et si $f \in \mathrm{Cl}(\omega) - \omega$, on a $I_{\Gamma_{\mathbb{C}} f} \neq I$, de sorte que $u \in I_{\Gamma_{\mathbb{C}} f}$ et $\Psi_u(f) = 0$).

****

Revenons aux notations du chapitre, de sorte que $\underline{g}_{\mathbb{C}}$ est le complexifié de l'algèbre de Lie $\underline{g}$ du groupe résoluble exponentiel G. On note Γ le groupe des points réels de $\Gamma_{\mathbb{C}}$, et Γ_o sa composante neutre.

Soit $\Omega \in \underline{g}^*/G$. Nous avons vu dans l'introduction que le noyau I de dT_Ω dans $U(\underline{g}_{\mathbb{C}})$ est primitif. Il est facile à calculer : on a $I = I_\omega$, où $\omega = i\Gamma_{\mathbb{C}}\Omega$.

On pose $\widetilde{\Omega} = \Gamma_o \Omega$. Si $u \in U(\underline{g}_{\mathbb{C}})$ est semi-invariant modulo I, on définit une fonction ψ_u sur $\widetilde{\Omega}$ par la formule $\psi_u(f) = \Psi_u(if)$ pour tout $f \in \widetilde{\Omega}$.

Comme $I^* = I$, l'élément u^* est semi-invariant modulo I et il est facile de voir que $\psi_{u^*} = \overline{\psi}_u$, de sorte que $\psi_{u^*u} = |\psi_u|^2$. Rappelons d'autre part que d'après le théorème 5, ψ_u se prolonge en une fonction continue sur l'adhérence $\mathrm{Cl}(\widetilde{\Omega})$ de $\widetilde{\Omega}$ dans $\underline{g}^*$, et que si de plus $u \in \hat{I}$, ce prolongement est nul sur le bord $\mathrm{Cl}(\widetilde{\Omega}) - \widetilde{\Omega}$.

4. Formules de caractère

On note dX la mesure de Haar sur $\underline{g}$ qui correspond à la mesure de Haar dg, de sorte que l'on a $\frac{d \exp X}{dX} = \det\left(\frac{1 - e^{-\mathrm{ad}X}}{\mathrm{ad}X}\right)$. Si $\varphi \in C_c^\infty(\underline{g})$ on pose $\hat{\varphi}(f) = \int_{\underline{g}} \varphi(X) e^{if(X)} dX$ pour tout $f \in \underline{g}^*$.

Pour reconnaitre si un opérateur $T_\Omega(\alpha)$ est traçable, on emploie le théorème suivant.

THÉORÈME 6.- Soit $\Omega \in \underline{g}^*/G$. Il existe une fonction p_Ω sur $\underline{g}$, analytique, G-invariante, partout non nulle, ayant les propriétés suivantes. Soit I le noyau de dT_Ω dans $U(\underline{g}_{\mathbb{C}})$ et soit $u \in U(\underline{g}_{\mathbb{C}})$ un élément semi-invariant modulo I.

Soit $\alpha \in C_c^\infty(G)$ tel que $(p_\Omega^{-1}\varphi)^\wedge$ soit $|\psi_u|^2\mu_\Omega$-intégrable, où ψ_u est la fonction définie à la fin du paragraphe précédent, et où $\varphi \in C_c^\infty(\underline{g})$ est définie par la formule $\varphi(X)dX = \alpha(\exp X)d\exp X$.

1) Si α est de type positif, alors $T_\Omega(u^* * \alpha * u)$ est traçable.

2) Si $T_\Omega(u^* * \alpha * u)$ est traçable, on a

$$\mathrm{tr}\, T_\Omega(u^* * \alpha * u) = \int_\Omega (p_\Omega^{-1}\varphi)^\wedge(f)|\psi_u(f)|^2 d\mu_\Omega(f) .$$

Lorsque $u = 1$, la formulation du théorème est inspirée de Kirillov [16] (qui l'avait d'ailleurs démontré auparavant dans le cas des groupes de Lie nilpotents) et prouvée par Pukanszky [22]. La généralisation à des mesures semi-invariantes $\psi d\mu_\Omega$ est faite dans [10], dans un autre but.

On peut décrire la fonction p_Ω de la manière suivante: On note p'_Ω l'unique fonction sur $\underline{g}(f) + [\underline{g},\underline{g}]$ (f est un point quelconque de Ω) telle que $p'_\Omega(X+Y) = (\det S(\mathrm{ad}_{\underline{g}/\underline{g}(f)}X))^{1/2}$ pour tout $Y \in [\underline{g},\underline{g}]$ et tout $X \in \underline{g}(f)$, où l'on a noté S la série formelle $S(z) = \mathrm{sh}(\frac{1}{2}z)/\frac{1}{2}z$. On peut prendre pour p_Ω n'importe quelle fonction analytique G-invariante partout non nulle sur $\underline{g}$ qui prolonge p'_Ω (il en existe). (Le fait qu'il existe des fonctions de cette forme pour lesquelles 1 est vérifié, et que pour toute fonction de cette forme 2 est vérifié, est démontré dans [9] (cf. [1], ch. IX). Qu'on puisse prendre dans 1 n'importe quelle fonction p_Ω de cette forme est un peu plus compliqué (cf. [2], [14], [20]). Enfin, si Ω est de dimension maximum, on peut choisir la fonction définie par la formule $p_\Omega(X) = (\det S(\mathrm{ad}\, X))^{1/2}$ pour tout $X \in \underline{g}$ (cf. [9]).

COROLLAIRE 1.- Soient Ω, I et u comme dans le théorème 6. Si $|\psi_u|^2\mu_\Omega$ est tempérée, l'opérateur $T(u^* * \alpha * u)$ est traçable pour tout $\alpha \in C_c^\infty(G)$.

Démonstration.- En effet, on peut écrire α comme combinaison linéaire finie de fonctions de la forme $\beta^* * \beta$, où $\beta \in C_c^\infty(G)$ (Dixmier-Malliavin [8]).

Dans ce cas, l'application $\alpha dg \longmapsto \mathrm{tr}\, T_\Omega(u^* * \alpha * u)$ est une fonction généralisée sur G, que l'on pourra noter $\mathrm{tr}(T_\Omega(u^*)T_\Omega(g)T_\Omega(u))$. Le théorème 6 donne alors l'identité de fonctions généralisées sur $\underline{g}$:

$$p_\Omega(X)\mathrm{tr}(T_\Omega(u^*)T_\Omega(\exp X)T_\Omega(u)) = \int_\Omega e^{if(X)}|\psi_u(f)|^2 d\mu_\Omega(f) .$$

COROLLAIRE 2.- Soient Ω, I et u comme dans le théorème 6. On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|\psi_u|^{2N}\mu_\Omega$ soit tempérée. L'opérateur $T_\Omega(\alpha * u)$ est compact pour tout $\alpha \in C_c^\infty(G)$.

Démonstration.- Il résulte facilement du corollaire 1 que l'opérateur $(T_\Omega(\alpha * u)^* T_\Omega(\alpha * u))^N$ est traçable.

5. Orbites tempérées

Soit $\Omega \in \underline{g}^*/G$. Il est raisonnable de se demander à quelle condition Ω est tempérée. Il est nécessaire que Ω soit fermée dans $\underline{g}^*$ [22]. On conjecture que la réciproque est vraie. Le seul résultat général connu dans cette direction est dû à Pukanszky [22].

THÉORÈME 7.- Soit $\Omega \in \underline{g}^*/G$. On suppose que $\widetilde{\Omega}$ est fermée dans $\underline{g}^*$ ($\widetilde{\Omega}$ est définie à la fin du paragraphe 3). Alors Ω est tempérée (et donc $T_\Omega(\alpha)$ traçable pour tout $\alpha \in C_c^\infty(G)$).

Le point crucial dans la démonstration du théorème 2 est la généralisation suivante du théorème 7.

THÉORÈME 8 [2].- Soit $\Omega \in \underline{g}^*/G$. Soit ψ une fonction positive continue sur l'adhérence $\mathrm{Cl}(\widetilde{\Omega})$ de $\widetilde{\Omega}$ dans $\underline{g}^*$. On suppose qu'il existe un caractère rationnel λ de Γ tel que $\psi(\gamma^{-1}f) = \lambda(\gamma)\psi(f)$ pour tout $f \in \widetilde{\Omega}$, $\gamma \in \Gamma_o$, et on suppose que ψ est nulle sur le bord $\mathrm{Cl}(\widetilde{\Omega}) - \widetilde{\Omega}$. Alors il existe $N \geq 0$ tel que $\psi^n\mu_\Omega$ soit tempérée pour tout $n \geq N$.

Le théorème 2 résulte immédiatement des théorèmes 5, 6 et 8. Notons que le théorème 8 généralise aussi un résultat de Pedersen affirmant l'existence d'une fonction semi-invariante strictement positive ψ sur Ω telle que $\psi\mu_\Omega$ soit tempérée [20].

Je vais donner les grandes lignes de la démonstration du théorème 8, qui est directement inspirée de celle du théorème 7. On remarque tout d'abord qu'on se ramène facilement à démontrer que si μ est une mesure Γ_o-invariante sur $\widetilde{\Omega}$, alors $\psi^n\mu$ est témpérée pour n assez grand. En effet $\widetilde{\Omega}$ est réunion de conjugués de Ω , et l'on applique le théorème de Fubini. D'autre part, le théorème 8 n'a en fait rien à voir avec la représentation coadjointe. On va donc démontrer le lemme suivant.

Lemme.- Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie. Soit Γ un sous-groupe algébrique résoluble de $GL(V)$ et soit Ω une orbite dans V de la composante neutre (pour la topologie ordinaire) Γ_o de Γ . On choisit sur Ω une mesure positive μ , semi-invariante sous l'action de Γ_o de poids rationnel (i.e. le poids est restriction à Γ_o d'une fonction rationnelle sur Γ). Soit ψ une fonction continue sur $\mathrm{Cl}(\Omega)$, nulle sur le bord, et semi-invariante de poids rationnel. Alors il existe $N \geq 0$ tel que $\psi^n\mu$ soit tempérée pour tout $n \geq N$.

Démonstration.- On commence par amputer Γ_o de ses sous-groupes compacts ; et donc on suppose que Γ est algébriquement connexe et déployé. Alors on peut choisir une base de V , au moyen de laquelle on identifie V et $\mathbb{R}^m$, des entiers p et q , et des fonctions rationnelles partout définies $P_1,\dots,P_m$ sur $\mathbb{R}^{\times p} \times \mathbb{R}^q$ telles que la restriction de $P = (P_1,\dots,P_m)$ à $]0,\infty[^p \times \mathbb{R}^q$ soit un difféomorphisme sur Ω . On notera $u = (u_1,\dots,u_p)$ un point de $\mathbb{R}^{\times p}$, $d^*u = (u_1\dots u_p)^{-1}du_1\dots du_p$,

$u^a = u_1^{a_1} \dots u_p^{a_p}$ si $a \in \mathbb{Z}^p$. De même, on notera $z = (z_1,\dots,z_q)$ un point de R^q , $dz = dz_1 \dots dz_q$. Quitte à remplacer μ et ψ par des quantités proportionnelles, et à faire un changement de paramétrage, on peut supposer que $\psi \circ P = u_1^d$ avec $d \in \mathbb{N}$, et que $p^*\mu = u^b d^*u dz$, où $b \in \mathbb{Z}^p$. Dans la suite, nous supposerons $d > 0$ (le cas où $d = 0$, qui correspond au théorème 7, se traitant de manière analogue). Nous poserons $t = 1 + P_1^2 + \dots + P_m^2$, $J^+ = [1,\infty[$, et $J^- =]0,1]$. Le lemme résulte des deux assertions ci-dessous, que nous prouverons séparément.

1) Pour tout $a \in \mathbb{Z}^p$ il existe $k \geq 0$ tel que

$$\int_{J^+}\int_{J^\pm} \dots \int_{J^\pm}\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} t^{-k} u^a d^*u dz < \infty .$$

2) Pour tout $a \in \mathbb{Z}^p$ il existe $k \geq 0$ tel que

$$\int_{J^-}\int_{J^\pm} \dots \int_{J^\pm}\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} u_1^k t^{-k} u^a d^*u dz < \infty .$$

Démontrons 1). Quitte à faire un changement de variable, on ne considère que l'intégrale sur $J^+ \times \dots \times J^+ \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$. Calculant en coordonnées sphériques, on voit qu'il suffit d'établir le résultat suivant. Pour tout $r > 0$, on note $k(r)$ la borne inférieure de l'ensemble des $t(u,z)$ lorsque $u_1 \geq 1, \dots, u_p \geq 1$, $u_1^2 + \dots + u_p^2 + z_1^2 + \dots + z_q^2 = r$. Alors il existe $c > 0$ et $v > 0$ tels que $k(r) \sim cr^v$ lorsque $r \longrightarrow \infty$.

Tout d'abord, on a $\lim k(r) = \infty$. Cela provient de ce que le sous-ensemble de Ω formé des points x tels que $\psi(x) \geq 1$ est fermé dans V , ce qui est clair, puisque ψ s'annule sur le bord de $Cl(\Omega)$. Il faut transformer cette information qualitative en information quantitative. La méthode a été empruntée par Pukanszky à Hormander, et repose sur le théorème de Tarski-Seidenberg.

Notons E l'ensemble des $(y,r) \in \mathbb{R}^2$ tels qu'il existe $(u,z) \in \mathbb{R}^{p+q}$ tels que $u_1 \geq 1, \dots, u_p \geq 1$, $u_1^2 + \dots + u_p^2 + z_1^2 + \dots + z_q^2 = r$, $y = t(u,z)$. Comme il existe un monôme u^b avec $b \in \mathbb{N}^p$ tel que $u^b t(u,z)$ soit un polynôme, on peut remplacer la dernière équation par l'équation $u^b y = t(u,z)u^b$ qui est aussi polynômiale. Le théorème de Tarski-Seidenberg affirme qu'il existe un nombre fini $\mathcal{E}_1,\dots,\mathcal{E}_m$ d'ensembles finis d'équations et inéquations polynômiales en y et r , tel que $(y,r) \in E$ si et seulement s'il existe $j \in \{1,\dots,m\}$ tel que (y,r) vérifie toutes les équations et inéquations de l'ensemble $\mathcal{E}_j$. On voit facilement que pour tout $r > 0$, $(k(r),r)$ est un point frontière de E . On en déduit qu'il existe un polynôme non nul $Q(y,r)$ tel que $Q(k(r),r) = 0$, et donc qu'il existe $c \neq 0$ et $v \in \mathbb{R}$ tel que $k(r) \sim cr^v$ quand $r \longrightarrow \infty$. Comme $k(r)$ tend vers ∞ , on a $v > 0$ et $c > 0$.

Démontrons 2). Comme plus haut, on est amené à prouver le résultat suivant. Pour tout $r > 0$, on note $h(r)$ la borne inférieure des $u_1^{-1}t(u,z)$ lorsque

$0 < u_1 \leq 1$, $u_2 \geq 1, \ldots, u_p \geq 1$, $u_1^{-2} + u_2^2 + \ldots + u_p^2 + z_1^2 + \ldots + z_q^2 = r$. Alors il existe $c > 0$ et $v > 0$ tels que $h(r) \sim cr^v$ lorsque $r \longrightarrow \infty$. Comme ci-dessus, il suffit de voir que $h(r)$ tend vers ∞ . Cela résulte de ce que pour tout $s > 0$, le sous-ensemble de Ω formé des x tels que $\psi(x) = s$ est fermé dans V .

6. Pour conclure ce chapitre, voici quelques problèmes. Soit $\Omega \in \underline{g}^*/G$.

1) Si Ω est fermée dans $\underline{g}^*$, est-elle tempérée ?

2) Existe-t-il $\alpha \in L^1(G)$ tel que $T_\Omega(\alpha)$ soit de rang fini et non nul ? C'est vrai lorsque G est nilpotente (Dixmier [4]) et aurait des conséquences intéressantes sur la structure de l'algèbre $L^1(G)$ (cf. Poguntke [21]).

3) Que dire de l'idéal J de $U(\underline{g}_{\mathbb{C}})$ formé des u tels que $T_\Omega(\alpha * u * \beta)$ soit compact pour tout $\alpha, \beta \in C_c^\infty(G)$? Il contient les éléments de $\hat{I}$ qui sont semi-invariants modulo I (corollaire 2 du théorème 6). Il est facile de construire, lorsque ad $\underline{g}$ n'est pas algébrique, des exemples où J contient strictement $\hat{I}$. Est-il vrai qu'en général J contienne $\hat{I}$?

Chapitre II. Le cas général

Dans ce chapitre G est un groupe de Lie résoluble connexe et simplement connexe.

1. Classification des représentations factorielles normales de G

On note Prim $C^*(G)$ l'ensemble des idéaux primitifs de $C^*(G)$. On sait (cf. [5]) que Prim $C^*(G)$ est égal à l'ensemble des noyaux des représentations irréductibles de $C^*(G)$, et que le noyau dans $C^*(G)$ d'une représentation factorielle de G est un idéal primitif. L. Pukanszky [25] a montré que pour tout idéal primitif de $C^*(G)$ il existe une, et, à quasi-équivalence près, une seule représentation factorielle normale de G dont c'est le noyau (ce résultat est même valable pour tous les groupes de Lie connexes, mais pas, en général, pour des groupes non connexes). Il a donné une paramétrisation de Prim $C^*(G)$, et, pour chaque élément de Prim $C^*(G)$, construit la représentation factorielle normale correspondante. C'est ce que je vais décrire maintenant. Pour les groupes résolubles exponentiels, cela se réduit au théorème 3.

Soit $f \in \underline{g}^*$. Il existe une sous-algèbre $\underline{h}_{\mathbb{C}}$ de $\underline{g}_{\mathbb{C}}$ vérifiant les conditions suivantes. 1) $f([\underline{h}_{\mathbb{C}}, \underline{h}_{\mathbb{C}}]) = 0$. 2) Pour tout $X \in \underline{h}_{\mathbb{C}}$ on a $if([X,\bar{X}]) \geq 0$. 3) $2 \dim \underline{h}_{\mathbb{C}} = \dim \underline{g} + \dim \underline{g}(f)$. 4) $2 \dim(\underline{h}_{\mathbb{C}} \cap \underline{g}'_{\mathbb{C}}) = \dim \underline{g}' + \dim \underline{g}'(f')$, où $\underline{g}' = [\underline{g},\underline{g}]$ et où f' est la restriction de f à g' . 5) Ad $G(f)\underline{h}_{\mathbb{C}} \subset \underline{h}_{\mathbb{C}}$.

On note θ l'élément de $i\underline{g}(f)^*$ qui est la partie imaginaire pure de $-\frac{1}{2}$ tr $\mathrm{ad}_{\underline{g}_{\mathbb{C}}/\underline{h}_{\mathbb{C}}}$. Cet élément ne dépend pas du choix de $\underline{h}_{\mathbb{C}}$.

On note χ_f le caractère unitaire de $G(f)_o$ (la composante neutre de $G(f)$) dont la différentielle est la restriction de if à $\underline{g}(f)$, et $\overline{G(f)}$ le sous-groupe de $G(f)$ image réciproque du centre de $G(f)/\mathrm{Ker}\,\chi_f$. On note $\widehat{\overline{G(f)}}$ l'ensemble des caractères de $\overline{G(f)}$ dont la différentielle est $if + \theta$.

On note B l'ensemble des couples (f,τ) avec $f \in \underline{g}^*$, $\tau \in \widehat{\overline{G(f)}}$. Rappelons que Γ est le plus petit groupe algébrique de $GL(\underline{g})$ contenant $\mathrm{Ad}\,G$. Les groupes G et Γ opèrent dans B .

A chaque $b \in B$, on associe une classe d'équivalence, notée T_b , de représentations factorielles de G (T_b est semi-finie, mais pas normale en général). Soit donc $b = (f,\tau) \in B$. On choisit une algèbre $\underline{h}_{\mathbb{C}}$ comme ci-dessus. On note D_o le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\underline{g} \cap \underline{h}_{\mathbb{C}}$. Il se trouve que l'ensemble $D = \overline{G(f)}D_o$ est un sous-groupe fermé de G . La représentation T_b est réalisée par translations à gauche dans l'espace de Hilbert complété de l'espace des fonctions différentiables φ sur G qui vérifient les conditions suivantes.

1) $\varphi(gh) = \tau(h)^{-1}|\det \mathrm{Ad}_{\underline{g}/\underline{d}}h|^{1/2}\varphi(g)$ pour tout $g \in G$ et tout $h \in \overline{G(f)}$.

2) $X\varphi = (-if(X) + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,\mathrm{ad}_{\underline{g}_{\mathbb{C}}/\underline{h}_{\mathbb{C}}}X)\varphi$, pour tout $X \in \underline{h}_{\mathbb{C}}$, où l'on a noté par la même lettre le champ de vecteur invariant à gauche correspondant à X .

3) $\int_{G/D} |\varphi(g)|^2 dg < \infty$.

On démontre que la classe d'équivalence de cette représentation ne dépend pas du choix de $\underline{h}_{\mathbb{C}}$, et qu'elle est factorielle.

THÉORÈME 9 [24], [25].- 1) <u>L'application de</u> B <u>dans</u> Prim $C^*(G)$ <u>qui à</u> b <u>associe</u> Ker T_b <u>est surjective</u>.

2) <u>Soit</u> $b = (f,\tau) \in B$. <u>L'image réciproque</u> B_b <u>de</u> Γf <u>dans</u> B <u>a une topologie naturelle localement compacte séparée</u>. <u>Soit</u> $b' \in B$. <u>On a</u> Ker T_b = Ker $T_{b'}$ <u>si et seulement si</u> b' <u>appartient à l'adhérence de</u> Gb <u>dans</u> B_b .

3) <u>Soit</u> $b \in B$. <u>Sur l'adhérence</u> $\overline{Gb}$ <u>de</u> Gb <u>dans</u> B_b , <u>il y a une et, à un facteur multiplicatif près, une seule mesure de Radon</u> G-<u>invariante positive non nulle</u> μ . <u>La représentation</u> $\int_{\overline{Gb}} T_{b'}d\mu(b')$ <u>est factorielle normale</u>. <u>Son noyau est égal à celui de</u> T_b , <u>et toute représentation factorielle normale dont le noyau est égal à celui de</u> T_b <u>est quasi-équivalente à la représentation ci-dessus</u>. <u>On notera</u> $\overline{T_b}$ <u>la classe de quasi-équivalence de</u> $\int_{\overline{Gb}} T_{b'}d\mu(b')$.

<u>Remarque</u>.- Cette paramétrisation des représentations factorielles normales diffère légèrement de celle de Pukanszky (dans [24], θ ne figure pas dans la définition de $\widehat{\overline{G(f)}}$). Elle est mieux adaptée aux formules de caractère du paragraphe suivant.

Soit $b = (f,\tau) \in B$. On notera Ω la projection de $\overline{Gb}$ sur $\underline{g}^*$. Elle ne dépend que de $\overline{T}_b$, et on dira que c'est la <u>quasi-orbite</u> associée à $\overline{T}_b$. Elle est égale à l'adhérence de Gf dans Γf . (Donc on a $\Omega = Gf$ si et seulement si Gf est localement fermée dans $\underline{g}^*$). On démontre que Ω porte une mesure de Radon positive non nulle G-invariante, et, à un facteur multiplicatif près, une seule.

Le théorème suivant, dû aussi à Pukanszky, donne la paramétrisation des classes d'équivalence de représentations irréductibles normales. Pour l'obtenir, il suffit de déterminer quand $\overline{T}_b$ contient un représentant irréductible. Dans ce cas celui-ci est bien déterminé à équivalence près, et nous noterons encore sa classe d'équivalence $\overline{T}_b$. On dit dans ce cas que $\overline{T}_b$ est de type I .

THÉORÈME 10.- <u>Soit</u> $b = (f,\tau) \in B$. <u>Alors</u> $\overline{T}_b$ <u>est de type</u> I <u>si et seulement si</u> Gf <u>est localement fermée dans</u> $\underline{g}^*$ <u>et</u> $\overline{G(f)}$ <u>d'indice fini dans</u> $G(f)$. <u>Dans ce cas il existe</u> $m \in \mathbb{N}$ <u>tel que</u> $(G(f):\overline{G(f)}) = m^2$, T_b <u>est équivalente à</u> $m\overline{T}_b$, <u>et toute représentation factorielle ayant même noyau que</u> T_b <u>est un multiple de</u> $\overline{T}_b$.

2. Formules de caractère

Dans ce paragraphe, on fixe $b = (f,\tau) \in B$. On pose $T = \overline{T}_b$. On note $\Omega \subset \underline{g}^*$ la quasi-orbite associée, γ_Ω un choix d'une mesure de Radon positive non nulle G-invariante sur Ω , t un choix d'une trace (cf. l'introduction) sur le facteur engendré par T . On note I le noyau de dT dans $U(\underline{g}_{\mathbb{C}})$, et $u \in U(\underline{g}_{\mathbb{C}})$ un élément semi-invariant modulo I .

Posons, comme en I.3, $\omega = i\Gamma_{\mathbb{C}}\Omega$ et $\widetilde{\Omega} = \Gamma_o\Omega$. On a encore $I = I_\omega$, et on définit une fonction semi-invariante ψ_u sur $\widetilde{\Omega}$ comme en I.3.

On note $\mathcal{V}$ l'ouvert de $\underline{g}$ formé des $X \in \underline{g}$ dont les valeurs propres imaginaires pures sont de module strictement inférieur à 2π . L'application exponentielle est un difféomorphisme de $\mathcal{V}$ sur un ouvert $\mathcal{W}$ de G .

Le théorème suivant généralise le théorème 6. Il est dû à Khalgui [14], et à Pedersen [20]. On emploie les mêmes notations p_Ω , dX , φ et $\hat{\varphi}$, que dans le théorème 6.

THÉORÈME 11.- <u>Soit</u> $\alpha \in C_c^\infty(G)$ <u>tel que</u> $(p_\Omega^{-1}\varphi)\hat{}$ <u>soit</u> $|\psi_u|^2\gamma_\Omega$<u>-intégrable</u>.

1) <u>Si</u> α <u>est de type positif</u>, <u>alors</u> $T(u^* * \alpha * u)$ <u>est traçable</u>.

2) <u>Il existe un choix de</u> γ_Ω , <u>indépendant de</u> α , <u>tel que</u>, <u>si</u> $T(u^* * \alpha * u)$ <u>est traçable</u>, <u>on ait</u> :

$$t(T(u^* * \alpha * u)) = \int_\Omega (p_\Omega^{-1}\varphi)\hat{}(f)|\psi_u(f)|^2 d\gamma_\Omega(f) .$$

<u>Remarque</u>.- Si T est de type I , il y a un choix canonique de t , à savoir tr , et un choix canonique de γ_Ω , à savoir μ_Ω (cf. I.2). Dans les conditions du théorème 11 2), on a

$$tr(T(u^* * \alpha * u)) = m\int_\Omega (p_\Omega^{-1}\varphi)\hat{}(f)|\psi_u(f)|^2 d\mu_\Omega(f) ,$$

où m est comme dans le théorème 10 (cf. Khalgui [14], Charbonnel [2]).

De manière analogue au corollaire 1 du théorème 6, on obtient :

COROLLAIRE 1.- *On suppose que* $|\psi_u|^2 \gamma_\Omega$ *est tempérée. Alors* $T(u^* * \alpha * u)$ *est traçable pour tout* $\alpha \in C_c^\infty(G)$.

Le théorème 2 s'en déduit comme dans le cas des groupes exponentiels.

Pedersen [20] en déduit le résultat suivant, à comparer au théorème 2.

THÉORÈME 12.- *Il existe un ouvert de Zariski non vide invariant* U *de* $\mathfrak{g}^*$ *et un élément semi-invariant non nul* $u \in U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ *tel que, pour tout* $\Omega \subset U$, $T(u^* * \alpha * u)$ *soit traçable, et non identiquement nul, pour tout* $\alpha \in C_c^\infty(G)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. BERNAT et al. - Représentations des groupes de Lie résolubles, Paris, Dunod, 1972.

[2] J.-Y. CHARBONNEL - Sur les semi-caractères des groupes de Lie résolubles, Preprint, 1980.

[3] J. DIXMIER - Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents V , Bull. Soc. Math. Fr., 87(1959), 65-79.

[4] J. DIXMIER - Opérateurs de rang fini dans les représentations unitaires, Publications mathématiques de l'I.H.E.S., 6(1960), 13-25.

[5] J. DIXMIER - Les C*-algèbres et leurs représentations, Paris, Gauthier-Villars, 1964.

[6] J. DIXMIER - Algèbres enveloppantes, Paris, Gauthier-Villars, 1974.

[7] J. DIXMIER - Idéaux primitifs dans les algèbres enveloppantes, Journal of algebra, 48(1977), 96-112.

[8] J. DIXMIER et P. MALLIAVIN - Factorisations de fonctions et de vecteurs indéfiniment différentiables, Bull. Sc. Math., 102(1978), 305-330.

[9] M. DUFLO - Caractères des groupes et des algèbres de Lie résolubles, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., 3(1970), 23-74.

[10] M. DUFLO et M. RAÏS - Sur l'analyse harmonique sur les groupes de Lie résolubles, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., 9(1976), 107-144.

[11] R. GODEMENT - Théorie des caractères I et II , Ann. of Math., 59(1954), 47-85.

[12] A. GUICHARDET - Caractères des algèbres de Banach involutives, Ann. Inst. Fourier, 13(1962), 1-81.

[13] HARISH-CHANDRA - Representations of a semi-simple Lie group on a Banach space I , Trans. Amer. Math. Soc., 75(1953), 185-243.

[14] M.-S. KHALGUI - Sur les caractères des groupes de Lie résolubles, Publications Mathématiques de l'Université Paris 7, 2(1978), 7-44.

[15] A.-A. KIRILLOV - Représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents, Uspekhi Mat. Nauk, 17(1962), 57-110.

[16] A.-A. KIRILLOV - Caractères des représentations unitaires des groupes de Lie, Funct. Analis, 2(1968), 40-55.

[17] A.-A. KIRILLOV - Eléments de la théorie des représentations, Editions MIR, Moscou, 1974.

[18] B. KOSTANT - Quantization and unitary representations, Springer Lecture Notes, 170(1970), 52-61.

[19] C. MOEGLIN - Idéaux primitifs dans les algèbres envoloppantes, C. R. Acad. Sc. Paris, 288(1979), 709-712.

[20] N.-V. PEDERSEN - Semicharacters and solvable Lie groups, Preprint, 1977.

[21] D. POGUNTKE - Symmetry and non-symmetry for a class of exponential Lie groups, Preprint, 1979.

[22] L. PUKANSZKY - On the unitary representations of exponential groups, J. of Funct. analysis, 2(1968), 73-113.

[23] L. PUKANSZKY - Unitary representations of solvable Lie groups, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., 4(1971), 457-608.

[24] L. PUKANSZKY - The primitive ideal space of solvable Lie groups, Invent. Math., 22(1973), 74-118.

[25] L. PUKANSZKY - Characters of connected Lie groups, Acta Math., 133(1974), 81-137.

[26] O. TAKENOUCHI - Sur la facteur représentation des groupes de Lie de type (E) , Math. J. Okayama Univ., 7(1957), 151-161.

[27] P. TAUVEL - Sur les quotients premiers de l'algèbre envoloppante d'une algèbre de Lie résoluble, Bull. Soc. Math. Fr., 106(1978), 177-205.

Michel DUFLO

Université de PARIS VII
U.E.R. de Mathématiques
Tour 45.55, 5ème étage
2 place Jussieu
75221 PARIS cedex 05