Y. COLIN DE VERDIÈRE

La matrice de Scattering pour l'opérateur de Schrödinger sur la droite réelle

Séminaire N. Bourbaki, 1981, exp. n° 557, p. 246-256

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1979-1980__22__246_0>

Séminaire BOURBAKI
32e année, 1979/80, n° 557

LA MATRICE DE SCATTERING POUR L'OPÉRATEUR DE SCHRÖDINGER SUR LA DROITE RÉELLE

par Y. COLIN DE VERDIÈRE

Il y a une dizaine d'années, un groupe de mathématiciens ([G-G-K-M]) s'est aperçu que l'équation de Korteweg - de Vries $\frac{\partial q}{\partial t} = 3q\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial^3 q}{\partial x^3}$ est explicitement résoluble en utilisant la théorie spectrale directe et inverse de l'opérateur de Schrödinger $H_t = -(\frac{d}{dx})^2 + q(t,.)$ sur $L^2(\mathbb{R})$; Faddeev et Zakharov ([F-Z]) ont en fait montré que cette équation d'évolution non linéaire est un système hamiltonien complètement intégrable de dimension infinie et que la théorie spectrale permet de construire un système de coordonnées actions-angles.

Le but de cet exposé est de donner un aperçu de ces résultats en insistant plus particulièrement sur la théorie spectrale de l'opérateur de Schrödinger et sur la matrice de scattering. Nous nous placerons, pour simplifier dans le cas d'un potentiel q dans la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ou même C^∞ à support compact dans le § 1.

1. Théorie spectrale de H

Soit $k \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, désignons par $y_\pm(x,k)$ les solutions de l'équation différentielle ordinaire du second ordre

$$(*) \quad (H - k^2)y = 0$$

où $H = H_0 + q$, $H_0 = -(\frac{d}{dx})^2$, $q \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, ayant le comportement asymptotique décrit dans le tableau suivant où $[A,B]$ désigne un intervalle contenant le support de q .

x	$-\infty$ … A	A … B	B … $+\infty$
y_+	$a(k)e^{ikx} + b_+(k)e^{-ikx}$		e^{ikx}
y_-	e^{-ikx}		$a'(k)e^{-ikx} + b_-(k)e^{ikx}$

Les fonctions a , a' , b_+ , b_- ainsi introduites sont holomorphes sur $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ et l'utilisation, entre autre chose, de la constance du wronskien de deux solutions de (*) permet de prouver :

(1.1) $a(k) = a'(k)$

(1.2) la matrice $S(k) = \frac{1}{a(k)}\begin{pmatrix} 1 & b_-(k) \\ b_+(k) & 1 \end{pmatrix}$ est unitaire pour $k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$; cette matrice appelée matrice de scattering sera introduite plus bas de façon plus naturelle.

(1.3) Pour $k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $S(-k) = \overline{S(k)}$.

(1.4) Les seuls zéros de $a(k)$ vérifiant $\mathrm{Im}\, k \geq 0$ sont les nombres imaginaires purs de la forme $i\mu_\ell$ ($\mu_\ell > 0$) tels que $(H+\mu_\ell^2)y$ admet une solution L^2 non triviale : les nombres $-\mu_\ell^2$ sont donc les valeurs propres de H . On pose $c_\ell = \|y_+(.,i\mu_\ell)\|_{L^2}^{-1}$.

Il est également utile d'obtenir des renseignements sur le comportement quand $|k| \longrightarrow \infty$ de $y_\pm$ et de $S(k)$. Pour cela, et pour traiter le cas $q \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on introduit la fonction $e_+(x,k) = y_+(x,k)e^{-ikx}$ qui vérifie l'équation intégrale de Volterra

(1.5) $e_+(x,k) = 1 + \frac{1}{2ik}\int_x^\infty (e^{2ik(t-x)} - 1)q(t)e_+(t,k)dt$,

pour laquelle la méthode des approximations successives converge et permet de prouver :

(1.6) $|e_+(x,k) - 1| \leq C.\frac{1 + \max(-x,0)}{1 + |k|}$ ($\mathrm{Im}\, k \geq 0$)

(1.7) $a(k) = 1 - \frac{1}{2ik}\int_{-\infty}^{+\infty} q(t)e_+(t,k)dt$, $b(k) = \frac{1}{2ik}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2ikt}q(t)e_+(t,k)dt$, d'où l'on déduit :

$$|a(k) - 1| = O(|k|^{-1}) \quad (\mathrm{Im}\, k \geq 0 , \ |k| \longrightarrow \infty) \quad \text{et} \quad kb(k) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) .$$

Il faut maintenant montrer comment les fonctions propres $y_\pm$ (non L^2) permettent de construire une représentation spectrale (diagonalisation) de la partie continue du spectre de H : l'opérateur essentiellement autoadjoint H admet un nombre fini de valeurs propres < 0 , $-\mu_1^2 < \ldots < -\mu_n^2 < 0$ de multiplicité 1 et un spectre continu $[0,+\infty[$ ne contenant aucune valeur propre. On note E_c l'orthogonal dans $L^2(\mathbb{R})$ du sous-espace de dimension finie admettant les $\varphi_\ell = c_\ell y_+(.,i\mu_\ell)$ comme base orthonormée.

Soient alors e^{itH} et e^{itH_0} les groupes à un paramètre d'opérateurs unitaires engendrés respectivement par H et H_0 : pour $f \in L^2(\mathbb{R})$, $e^{itH}f$ est la solution de l'équation de Schrödinger $\frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial t} = Hu$ ayant f pour donnée initiale. Pour $f \in L^2(\mathbb{R})$, on montre l'existence de $\Omega_+ f = \lim_{t\to+\infty} e^{-itH}.e^{itH_0}f$: l'opérateur Ω_+ décrit le comportement quand $t \longrightarrow +\infty$ des solutions de l'équation de Schrödinger, et on a le :

THÉORÈME 1.8.- Ω_+ est une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ sur E_c telle que : $H\Omega_+ = \Omega_+ H_0$.

On peut maintenant déduire de la représentation spectrale de H_0 par transformation de Fourier, une représentation spectrale de $H|_{E_c}$; désignons par $\wedge$ l'isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ sur $L^2(\mathbb{R}^+) \oplus L^2(\mathbb{R}^+)$ définie par

$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-ikx}dx \ , \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ikx}dx\right)$. La transformation $f \longmapsto \hat{f}$ satisfait :

$\widehat{H_o f}(k) = k^2 \hat{f}(k)$.

Soit alors $\#$ la transformation unitaire de E_c sur $L^2(\mathbb{R}^+) \oplus L^2(\mathbb{R}^+)$ telle que $(\Omega_+ f)^{\#} = \hat{f}$, c'est une représentation spectrale de $H|_{E_c}$ donnée par un noyau (au sens de Schwartz ([C])) : $f^{\#}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{\varphi_+(x,k)}dx \, , \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{\varphi_-(x,k)}dx \right)$.

Il est clair que $\varphi_{\pm}$ sont des solutions de (*) dont le comportement à l'infini est décrit par le :

THÉORÈME 1.9.- <u>Soit, pour</u> $\operatorname{Im} k > 0$, $\tilde{\varphi}_{\pm}(x,k)$ <u>l'unique solution de</u> (*) <u>de la forme</u> $\tilde{\varphi}_{\pm}(x,k) = e^{ikx} + \psi_{\pm}(x,k)$ <u>où</u> $\psi_{\pm} \in L^2(\mathbb{R})$, <u>alors</u> $\varphi_{\pm}(.,k) = \tilde{\varphi}_{\pm}(.,k+i0)$, <u>d'où l'on déduit le tableau suivant</u> :

x	$-\infty$ A	B
φ_+	$e^{ikx} + r_+(k)e^{-ikx}$	$t(k)e^{ikx}$
φ_-	$t'(k)e^{-ikx}$	$e^{-ikx} + r_-(k)e^{ikx}$

<u>et par comparaison avec le tableau donnant</u> $y_{\pm}$: $t = t' = \frac{1}{a}$, $r_+ = \frac{b_+}{a}$, $r_- = \frac{b_-}{a}$

<u>et</u> $S(k) = \begin{pmatrix} t(k) & r_-(k) \\ r_+(k) & t(k) \end{pmatrix}$. Le coefficient t s'appelle coefficient de transmission, les coefficients $r_{\pm}$ les coefficients de réflexion.

Esquissons la preuve du théorème d'après un cas plus général traité dans le livre [R-S] :

$$\Omega_+ f = f + \lim_{T\to+\infty} \int_0^T \frac{d}{dt} (e^{-itH} e^{itH_o} f)dt$$

$$\Omega_+ f = f - i \lim_{T\to+\infty} \int_0^T e^{-itH} q e^{itH_o} f dt$$

$$\Omega_+ f = f - i \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-\varepsilon t} e^{-itH} q e^{itH_o} f dt$$

Si l'on suppose maintenant, par exemple, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{ikx} g(k)dk$, on a :

$$\Omega_+ f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^{+\infty} (e^{ikx} - (H - k^2 - i\varepsilon)^{-1}(q(x)e^{ikx}))g(k)dk \text{ , d'où :}$$

$$\varphi_+(x,k) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} (e^{ikx} - (H - k^2 - i\varepsilon)^{-1}(q(x)e^{ikx})) \text{ .}$$

De plus, on a, par construction :

THÉORÈME 1.10.- <u>L'application</u> $f \longmapsto f^{\#}$ <u>définie au sens usuel pour</u> $f \in L^1(\mathbb{R})$ <u>se prolonge à</u> $L^2(\mathbb{R})$ <u>et l'on a</u> :

$$f(x) = \sum_{\ell=1}^{n} \langle f|\varphi_\ell \rangle \varphi_\ell(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{\infty} f_+^{\#}(k)\overline{\varphi_+(x,k)}dk + \int_0^{\infty} f_-^{\#}(k)\overline{\varphi_-(x,k)}dk \right)$$

<u>et</u> $$\|f\|_{L^2}^2 = \sum_{\ell=1}^{n} |\langle f|\varphi_\ell \rangle|^2 + \int_0^{\infty} (|f_+^{\#}(k)|^2 + |f_-^{\#}(k)|^2)dk \text{ .}$$

Malheureusement, cette deuxième construction de $S(k)$, si elle éclaire la théorie spectrale de H ne donne aucune explication naturelle à l'<u>unitarité</u> de $S(k)$.

Pour ce faire, introduisons $\Omega_- f = \lim_{t \to -\infty} e^{-itH} e^{itH_o} f$ qui est aussi une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ sur E_c et donc l'opérateur $\mathcal{S} = (\Omega_-)^{-1}\Omega_+$ est une transformation unitaire de $L^2(\mathbb{R})$ qui commute avec H_o. Transporté par $\wedge$, l'opérateur $\mathcal{S}$ devient donc un opérateur de multiplication par une fonction $k \longmapsto S_1(k)$ définie sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans les opérateurs unitaires $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

Les relations (1.7) permettent en fait de prouver que $S_1 = S$ et donc l'unitarité.

2. Scattering inverse

Le problème est de reconstituer le potentiel q à partir de certaines des données spectrales ; les premiers travaux dans cette direction sont ceux de Levinson ([LN]) et Gelfand-Levitan ([G-L]), puis pour ne citer que ceux-là : Marchenko ([A-M]), Faddeev ([F]), et Deift et Trubowitz ([D-T]) dont nous nous inspirons largement dans ce §.

Il est plus commode de travailler sur la classe des potentiels $q \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ où la plupart des résultats énoncés au § 1 se généralisent ; Deift et Trubowitz décrivent les résultats pour la classe des q tels que $\int_{\mathbb{R}} |q(x)|(1+x^2)dx < \infty$.

Précisons ce qu'on entend par données spectrales de $q \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,: c'est la donnée de $r_-(k)$ et des couples $(\mu_\ell, c_\ell)_{\ell=1,\dots,n}$; elles vérifient les conditions nécessaires suivantes :

(2.1) (i) $r_-(k) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

(ii) $r_-(-k) = \overline{r_-(k)}$

(iii) $|r_-(k)| < 1$ pour $k \neq 0$ et, si $|r_-(0)| = 1$, on a $r_-(0) = -1, r'_-(0) \neq 0$.

(2.2) $0 < \mu_n < \dots < \mu_1$ et $c_\ell > 0$.

On pose alors $L(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iky} r_-(k)dk + \sum_{\ell=1}^{n} c_\ell^2 e^{-\mu_\ell y}$, et l'on désigne par L_x l'opérateur à trace sur $L^2(\mathbb{R})$ dont le noyau est $L_x(\xi,\eta) = L(\xi+\eta)\chi_{[x,\infty[}(\xi)\chi_{[x,\infty[}(\eta)$.

Le théorème fondamental est alors :

THÉORÈME 2.3.- L'application qui, à q, associe ses données spectrales vérifiant les conditions (2.1) et (2.2) est une bijection. De plus q est donné par la formule explicite :

$$q(x) = -2\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \mathrm{Log}\det(Id + L_x)$$

où det désigne le déterminant de Fredholm.

En particulier, si $r_-(k) = 0$, l'opérateur L_x est de rang fini et l'on obtient des fonctions q tout à fait explicites qui sont des fractions rationnelles d'exponentielles (et donc dans $\mathcal{S}$ et non dans C_o^∞).

Exemple.- $r_- \equiv 0$, $\mu_1 = 1$, $c_\ell = a > 0$, on trouve $q(x) = \dfrac{-2}{ch^2(x-x_o)}$ avec $x_o = \mathrm{Log}(\frac{a}{\sqrt{2}})$.

Nous allons donner une idée de la preuve de l'injectivité et de la formule d'inversion pour $n = 0$. L'extension à n quelconque ne présente pas de difficultés majeures ; par contre la surjectivité est délicate.

Désignons par H_+^2 le s.e.v. de $L^2(\mathbb{R})$ formé des transformées de Fourier de fonctions à support dans $\mathbb{R}^-$, ou ce qui revient au même les valeurs au bord de fonctions holomorphes dans $\operatorname{Im} k > 0$ dont la norme L^2 sur les horizontales est bornée.

Alors des estimations (1.6) et des analogues pour $e_- = y_- e^{ikx}$ résultent :

(2.4) $e_+(x,.) - 1 \in H_+^2$

(2.5) $\overline{e_+}(x,.) + r_-(.)e^{2ikx}e_+(x,.) - 1 = te_-(x,.) - 1 \in H_+^2$

De ceci, on déduit aisément que, si $q_1, q_2 \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ sont tels que $n_1 = n_2 = 0$ et $r_-^1 = r_-^2$, en posant $e = e_+^1 - e_-^1$, on a $e \in H_+^2$ et $\overline{e} + r_- e^{2ikx} e \in H_+^2$. D'où l'on déduit par l'orthogonalité de H_+^2 et H_-^2 :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (|e|^2 + r_- e^{2ikx} e^2)dk = 0 ,$$

et comme $|r_-| < 1$ presque partout, cela impose $e \equiv 0$, d'où on déduit $q_1 = q_2$.

On peut obtenir une équation intégrale, l'équation de Gelfand-Levitan, qui permet de reconstituer q. En effet, on a :

$$y_+(x,k) = e^{ikx} + \int_x^{\infty} K(x,y)e^{iky}dy \quad \text{avec} \quad K(x,y) = 0 \quad \text{pour} \quad y < x$$

et K est à valeurs réelles. En reportant dans (2.5), il vient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [K(x,y) + L(x+y) + \int_x^{+\infty} L(y+y')K(x,y')dy']e^{-iky}dy \in e^{-ikx}.H_+^2 ,$$

d'où l'on déduit :

(2.6) $K(x,y) + L(x+y) + \int_x^{+\infty} L(y+y')K(x,y')dy' = 0$ pour $y > x$.

C'est une équation intégrale du type $(Id + L_x)K(x,.) = -L(x+.)$ où L_x est compact sur $L^2(\mathbb{R})$, donc l'unicité déjà prouvée assure l'existence d'une solution ; c'est le point de départ de la preuve de la surjectivité ; il est aisé de voir que $q(x) = -2\frac{d}{dx}K(x,x)$ et d'en déduire le formule annoncée pour $q(x)$.

3. Formule de traces et développements asymptotiques

L'opérateur H n'ayant pas un spectre purement discret, aucune fonction $f(H)$ n'est un opérateur à trace, il est donc nécessaire de faire preuve d'un peu d'imagination pour écrire une formule de traces jouant le rôle des habituelles formules pour les opérateurs elliptiques sur les variétés compactes (par ex. [CV 1]). Le plus naturel dans le contexte du scattering est de considérer des opérateurs du type $f(H) - f(H_o)$, on peut ainsi prouver le

THÉORÈME 3.1.- <u>L'opérateur</u> $e^{-tH} - e^{-tH_o}$ $(t > 0)$ <u>est à trace et l'on a</u> :

$$Z(t) = \operatorname{Tr}(e^{-tH} - e^{-tH_o}) = \sum_{\ell=1}^{n} e^{t\mu_\ell^2} + \frac{1 - \det S(0)}{4} + \frac{1}{2i\pi}\int_0^{+\infty} e^{-tk^2} \operatorname{Tr}(S'(k)S^{-1}(k))dk$$

<u>Preuve</u> : on exprime le noyau de e^{-tH} sous la forme :

$$e(t,x,y) = \sum_{\ell=1}^{n} e^{t\mu_\ell^2} \varphi_\ell(x)\overline{\varphi_\ell}(y) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{-tk^2} (\varphi_+(x,k)\overline{\varphi_+}(y,k) + \varphi_-(x,k)\overline{\varphi_-}(y,k))dk .$$

On est alors amené à évaluer :

$$Z(t) = \lim_{a\to+\infty} \left(\int_{-a}^{+a} (e(t,x,x) - e_0(t,x,x))dx\right) ,$$

en utilisant : 1) La formule de Green pour ramener $\int_{-a}^{a} |\varphi_\pm(x,k)|^2 dx$ à une expression ne faisant intervenir les valeurs de $\varphi_\pm(.,k)$ qu'aux points $\pm a$.

2) Le comportement asymptotique quand $|x| \longrightarrow \infty$ de $\varphi_\pm(x,k)$ en termes de $S(k)$.

Remarque.- Un calcul similaire est fait pour prouver la formule des traces de Selberg dans le cas d'un quotient de volume fini du demi plan de Poincaré ([L-P]) ; le même genre de considération se généralise à l'équation de Schrödinger en dimension 3 ([CV 2]) et au problème de scattering par un obstacle de $\mathbb{R}^3$ ([M-R], [J-K]).

On applique (3.1) à l'étude du développement asymptotique de $t(k)$; on peut représenter $t(k)$ pour $\operatorname{Im} k > 0$ par la formule :

$$(3.2)\quad t(k) = \prod_{\ell=1}^{n} \frac{k+i\mu_\ell}{k-i\mu_\ell} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R(t)}{k-t}dt\right)$$

avec $R(t) = \operatorname{Log}(1 - |r_+(t)|^2)$; on en déduit que $t(k)$ admet quand $|k| \longrightarrow \infty$, $\operatorname{Im} k \geq 0$, le développement asymptotique :

$$(3.3)\quad \operatorname{Log} t(k) \sim i\sum_{j=1}^{\infty} c_j k^{1-2j} \quad \text{avec}$$

$$c_j = \frac{2.(-1)^{j+1}}{2j-1}\left(\sum_{\ell=1}^{n} \mu_\ell^{2j-1}\right) + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} R(t)t^{2j-2}dt .$$

D'autre part, la théorie du développement asymptotique pour l'équation de la chaleur sur les variétés compactes ([B-G-M]), [CV 1]) s'étend à ce cas et permet de prouver l'existence du développement asymptotique :

$$(3.4)\quad Z(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} (4\pi t)^{-1/2}\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j t^j\right)$$

où les a_j sont des intégrales de polynômes universels par rapport à q et à ses dérivées :

$$(3.5)\quad a_j = \int_{-\infty}^{+\infty} P_j(q,q',\dots,q^{(\alpha)})dx$$

où les P_j vérifient : $P_j(\lambda q, \lambda^{3/2}q',\dots,\lambda^{1+\alpha/2}q^{(\alpha)}) = \lambda^j P_j(q,q',\dots,q^{(\alpha)})$

$$P_j(q,q',\dots) = \frac{(-1)^j}{j!} q^j + \dots$$

et une relation de récurrence, due à Lénard, que nous n'explicitons pas ici ([McK]).

Exemples.- $P_1(q) = -q$, $P_2(q) = \frac{1}{2}q^2$, $P_3(q) = -\frac{1}{6}(q^3 + \frac{1}{2}(q')^2)$.

Mettant tout ceci ensemble, on obtient les relations ([F-Z]) :

$$(3.6)\quad \sum_{\ell=1}^{n} \mu_\ell^{2j-1} + (-1)^{j+1}.\ \frac{2j-1}{2\pi}\int_0^{+\infty} R(t)t^{2j-2}dt = \frac{3.5\dots(2j-1)}{2^{j+1}} a_j = (-1)^{j+1}(j-\tfrac{1}{2})c_j$$

et tenant compte du fait que $R(t) \leq 0$, on obtient une infinité d'inégalités (optimales si on se réfère au § 2) :

$$\sum_{\ell=1}^{n} \mu_\ell \geq -\frac{1}{4}\int q \ , \quad \sum_{\ell=1}^{n} \mu_\ell^3 \leq \frac{3}{16}\int q^2 \ , \text{ etc...}$$

Remarque 1.- Les relations (3.6) se généralisent au cas de la dimension 3 ([CV 2]), mais malheureusement pas les inégalités précédentes.

Remarque 2.- Une autre conséquence amusante de (3.1) est le théorème de Levinson obtenu en étudiant la limite quand $t \longrightarrow 0^+$ de $Z(t)$:

$$\text{variation}_{]0,+\infty[}(\text{Arg det } S(k)) = 2\pi\left(n + \frac{1-\det S(0)}{4}\right) .$$

4. Le formalisme hamiltonien

Considérons sur l'espace vectoriel $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ des fonctions de la classe de Schwartz, la forme bilinéaire antisymétrique ω définie par $\omega(q_1,q_2) = \frac{1}{2}\int_{x\leq y}(q_1(x)q_2(y) - q_1(y)q_2(x))dxdy$; $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est ainsi muni d'une "structure symplectique" (faible). A toute fonctionnelle raisonnable $F : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ du calcul des variations, par exemple de la forme $F(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(q(x),q'(x),\ldots,q^{(\alpha)}(x))dx$ où P est un polynôme à $\alpha + 1$ variables sans terme constant, est associé son gradient G_F caractérisé par $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(q_t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_F(q_0)(x)\dot{q}_0(x)dx$ pour toute courbe C^∞, q_t dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. En fait, on a ici : $G_F(q) = \sum_{i=0}^{\alpha}(-1)^i . (\frac{d}{dx})^i \frac{\partial P}{\partial q^{(i)}}$.

La fonctionnelle F admet aussi un gradient symplectique X_F caractérisé par $\omega(X_F,q) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_F q dx$ et donné par la formule :

(4.1) $X_F(q)(x) = \frac{d}{dx} G_F(q)(x)$.

Enfin, on peut définir un crochet de Poisson (introduit par Gardner) par

(4.2) $\{F,H\} = \int_{-\infty}^{+\infty} X_F . G_H dx = - \{H,F\}$

qui satisfait l'identité de Jacobi

(4.3) $\{\{F,H\},K\} + \{\{H,K\},F\} + \{\{K,F\},H\} = 0$

A toute fonctionnelle F du type précédent est donc associée une équation d'évolution non linéaire, hamiltonienne, $\frac{dq}{dt} = X_F(q)$.

Exemples.- a) $F(q) = a_2(q) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} q^2$, on obtient l'équation $\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial q}{\partial x}$ qui admet la solution $q(t,x) = q_0(x-t)$.

b) $F(q) = -3a_3(q) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} q^3 + \frac{1}{2}(q')^2)$, on obtient l'équation d'évolution

(4.4) $\frac{\partial q}{\partial t} = 3q\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial^3 q}{\partial x^3}$ qui est la célèbre équation de Korteweg-de Vries ([K-dV]) introduite par ces auteurs pour décrire le mouvement d'un fluide dans un canal rectangulaire peu profond.

Le miracle est que les fonctionnelles $a_j(q)$, $j = 2,3,\ldots$ introduites en (3.4) forment un système d'intégrales premières en involution de l'équation de KdV, i.e. $\{a_j, a_\ell\} = 0$, et même ce système est maximal (on pourrait dire "lagrangien") comme le montrera au § suivant la résolution explicite de KdV par la méthode du scattering inverse.

THÉORÈME 4.5.- <u>Pour tout</u> $i,j = 1,2,3,\dots$, $\{a_i, a_j\} = 0$.

Les a_i apparaissent comme coefficients du développement asymptotique de $a(k)$ (3.6), il suffit de prouver que pour $\operatorname{Im} k > 0$, $\operatorname{Im} k' > 0$, on a $\{a(k), a(k')\} = 0$; or on vérifie que $G_{a(k)} = \frac{1}{2ik} y_+ y_-$, ce qui implique en particulier $X_{a(k)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$; on utilise alors le :

<u>Lemme</u> 4.6.- <u>Soit</u> $\mathfrak{A}$ <u>une algèbre sur</u> $\mathbb{C}$, D <u>une dérivation et</u> $q \in \mathfrak{A}$; <u>si</u> $\varphi \in \mathfrak{A}$ <u>est telle que</u> $\mathbb{P}\varphi = (D^2 + q)\varphi = \lambda\varphi$, <u>on a</u> :

$$(D^3 + 2(Dq + qD))\varphi^2 = 4\lambda D(\varphi^2)$$

La vérification du lemme est laissée au lecteur ; on l'applique alors à $\lambda = k^2$ et "φ^2" $= y_+ y_-$, d'où l'on tire :

$$A y_+ y_- = 4k^2 \frac{d}{dx}(y_+ y_-)$$

où A est un opérateur différentiel antisymétrique.

D'où : $-16\, k^3 k' \{a(k), a(k')\} = \int_{-\infty}^{+\infty} A(y_+ y_-)(k)(y_+ y_-)(k')$.

Et par antisymétrie : $(k^2 - k'^2)\{a(k), a(k')\} = 0$.

5. Résolution de l'équation de Korteweg - de Vries par la méthode du scattering inverse

Si (M, ω) est une variété symplectique de dimension $2n$ (finie), on suppose qu'on a n fonctions $f_1, \dots, f_n : M \longrightarrow \mathbb{R}$ dont les différentielles sont partout indépendantes et 2 à 2 en involution : $\forall i,j$, $\{f_i, f_j\} = 0$. Soit X_i le gradient symplectique de f_i et faisons l'hypothèse que les équations différentielles $\frac{dx}{dt} = X_i(x)$ admettent des solutions définies pour toute valeur de t ; les X_i commutent ($[X_i, X_j] = X_{\{f_i, f_j\}}$) et donc l'action infinitésimale de $\mathbb{R}^n$ associée aux X_i s'étend en une action différentiable de $\mathbb{R}^n$ sur M dont les orbites sont les composantes connexes des fibres de l'application $f = (f_1, \dots, f_n)$: ce sont des produits $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ sur lesquels les champs X_i ont des trajectoires linéaires :

(5.1) $t \longmapsto (x_1^o + t\omega_1 \ (\mathrm{mod.}\,1), \dots, x_p^o + t\omega_p \ (\mathrm{mod.}\,1), x_{p+1}^o + t\omega_{p+1}, \dots, x_n^o + t\omega_n)$.

En dimension infinie, il ne suffit évidemment pas qu'il y ait une infinité d'intégrales premières en involution pour qu'on ait un système hamiltonien du type précédent (intégrable), un critère plus net d'intégrabilité sera assuré par l'existence de changement de coordonnées permettant de linéariser le flot sous la forme (5.1).

Pour l'équation de KdV, et plus généralement pour les équations $\frac{dq}{dt} = X_{a_i}(q)$, un tel changement de coordonnées est obtenu par le passage aux données spectrales de l'opérateur $H_q = H_o + q$.

Pour décrire l'évolution des données spectrales le long d'une solution de KdV, le plus simple est d'utiliser la remarque fondamentale de Lax ([L 1]) : si $K = 2(\frac{d}{dx})^3 - \frac{3}{2}(\frac{d}{dx} q + q \frac{d}{dx})$, l'équation de KdV s'écrit sous la forme

(5.2) $\frac{dH}{dt} = [H,K]$.

L'antisymétrie de K permet alors de prévoir que les opérateurs H_{q_t} restent unitairement équivalents au cours du temps : en particulier, la déformation H_{q_t} est isospectrale.

En fait la relation $\{a_3, t(k)\} = 0$ permet de prévoir que $t(k)$ est une intégrale première de l'équation de KdV et donc aussi les pôles de $t(k)$ et $|r_-(k)|$ $(k \in \mathbb{R})$.

Il reste à déterminer l'évolution de c_ℓ et de $\mathrm{Arg}(r_-)$. Par dérivation de $(H-k^2)y_- = 0$ par rapport à t et en utilisant (5.2), il vient : $(H-k^2)(\dot{y}_- + Ky_-) = 0$; le comportement asymptotique de cette solution de (*) quand $x \longrightarrow +\infty$, permet d'écrire : $\dot{y}_- = -Ky_- - 2ik^3 y_-$, d'où l'on tire :

$$\dot{a}(k) = 0 \quad , \quad \dot{b}_-(k) = 4ik^3 b_-(k) \ .$$

Un argument analogue permet de prouver : $\dot{c}_\ell = 2\mu_\ell^3 c_\ell$, d'où finalement :

$$(5.3) \quad \begin{cases} r_-(k)(t) = r_-(k)(0)e^{4ik^3 t} \\ \mu_\ell(t) = \mu_\ell(0) \\ c_\ell(t) = c_\ell(0)e^{2\mu_\ell^3 t} \end{cases} .$$

Ces équations sont du type (5.1), ce qui prouve l'intégrabilité de KdV. L'intégration explicite s'effectue alors au moyen de la théorie du scattering inverse.

Ce calcul est particulièrement intéressant lorsque $r_+(k)(0) = 0$: on met alors en évidence le comportement asymptotique de la fonction $q(x,t)$ quand $t \to \pm\infty$ sous la forme de superposition d'ondes solitaires ("soliton") de la forme (asymptotique) $q_\ell(x,t) = \dfrac{-v_\ell}{\mathrm{ch}^2(\sqrt{\frac{v_\ell}{2}}(x - x_\ell - v_\ell t))}$ où v_ℓ (amplitude et vitesse du soliton) est relié à μ_ℓ par $v_\ell = 2\mu_\ell^2$.

BIBLIOGRAPHIE

[A] V. ARNOLD - Méthodes mathématiques de la mécanique classique (traduction française), MIR, 1976.

[A-M] Z. AGRANOVICH and V. MARCHENKO - The inverse scattering theory, Gordon and Breach, New-York, 1963.

[B-G-M] M. BERGER, P. GAUDUCHON et E. MAZET - Le spectre d'une variété riemannienne, Lecture Notes in Math., n° 194.

[C] P. CARTIER - Développements de fonctions arbitraires suivant les fonctions propres d'un opérateur différentiel, Sém. Bourbaki, exposé n° 102.

[CV 1] Y. COLIN de VERDIÈRE - Propriétés asymptotiques de l'équation de la chaleur sur une variété compacte, Sém. Bourbaki, exposé n° 439.

[CV 2] Y. COLIN de VERDIÈRE - Une formule de traces pour l'opérateur de Schrödinger dans $\mathbb{R}^3$, Ann. E.N.S. (à paraître).

[D-T] P. DEIFT and E. TRUBOWITZ - Inverse scattering on the line, CPAM 32(1979), 121-251.

[F] L. FADDEEV - Properties of the S-matrix of the one-dimensional Schrödinger equation, AMST 2, 65(1966), 139-166.

[F-Z] L. FADDEEV and V. ZAKHAROV - KdV equation : a completely integrable Hamiltonian system, Funct. Analysis and its applications 5(1971), 280-287.

[G-G-K-M] C. GARDNER, J. GREENE, M. KRUSKAL and R. MIURA - Method for solving the KdV equation, Phys. Rev. Letters 19(1967), 1095-1097.

[G-L] I.M. GELFAND and B.M. LEVITAN - On the determination of a differential equation from its spectral functions, AMST 2, 1(1955), 253-304.

[J-K] A. JENSEN and T. KATO - Asymptotic behavior of the scattering phase for exterior domains, Comm. P.D.E. 3(1978), 1165-1195.

[K-dV] D. KORTEWEG and G. de VRIES - On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and a new type of long stationnary waves, Philos. Mag., 39(1895), 422-443.

[L 1] P. LAX - Integrals of non-linear equations of evolution and solitary waves, CPAM, 21(1968), 467-490.

[L 2] P. LAX - Periodic solutions of the KdV equation, CPAM, 28(1975), 141-188.

[L-P] P. LAX and R. PHILLIPS - Scattering theory for automorphic functions, Annals of Math. Studies, Princeton, 1976.

[LN] N. LEVINSON - On the uniqueness of the potential in a Schrödinger equation for a given asymptotic phase, Danske Vid. Selsk. Math. Fys. Medd., 25(1944), 1-29.

[M] R. MIURA - The KdV equation : a survey of results, SIAM Review, 18(1976), 412-457.

[McK] H.P. Mc KEAN -Integrable systems and algebraic curves, Lecture Notes in Math. 755, 83-200.

[MK-M] H.P. McKEAN and P. Van MOERBEKE - The spectrum of Hill's equation, Invent. Math., 30(1975), 217-274.

[M-R] A. MAJDA and J. RALSTON - An analogue of Weyl's theorem for unbounded domains, I, II et III, Duke Math. Journal, 45(1978), 183-196 et 513-536, et 46(1979), 725-731.

[R-S] M. REED and B. SIMON - Methods of modern mathematical physics, III : scattering theory, Academic Press, 1979.

Y. COLIN de VERDIÈRE

Université Scientifique et
Médicale de Grenoble,
Institut Fourier
Mathématiques Pures,
B.P. 116
38402 SAINT MARTIN D'HÈRES