LIONEL BÉRARD BERGERY

La courbure scalaire des variétés riemanniennes

Séminaire N. Bourbaki, 1981, exp. nº 556, p. 225-245

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1979-1980__22__225_0>

LA COURBURE SCALAIRE DES VARIÉTÉS RIEMANNIENNES

par Lionel BÉRARD BERGERY

I - INTRODUCTION

Cet exposé rassemble plusieurs résultats (obtenus de 1960 à 1980) sur la courbure scalaire, autour de la question suivante :

Etant donnée une variété différentiable M (compacte connexe), quelles fonctions peuvent être la courbure scalaire d'une métrique riemannienne g sur M ?

Rappels : Le principal invariant local d'une variété riemannienne (M,g) est son tenseur de courbure (de Riemann) R. Les symétries de ce tenseur (3,1) montrent qu'il est parfaitement décrit par ses courbures sectionnelles $\sigma(X,Y) = g(R(X,Y)X,Y)$ (si $\|X\wedge Y\|=1$). En prenant des traces (par rapport à g), on obtient d'autres tenseurs (moins précis) : le tenseur de Ricci : $r(X,Y) = \sum_i g(R(X,X_i)Y,X_i)$ (où X_i est une base orthonormée locale) est (2,0) et symétrique ; il est décrit par les courbures de Ricci : $\rho(X) = r(X,X)$ (si $\|X\| = 1$) ; enfin la courbure scalaire

$$u = \sum_i r(X_i,X_i) = \sum_{i\neq j} \sigma(X_i,X_j)$$

est une fonction (réelle) sur M.

On peut décrire "géométriquement" u en fonction de la distance et du volume définis par g, par l'une des deux formules suivantes : si $B(m,r)$ (resp. $S(m,r)$) est la boule (resp. la sphère) des points dont la distance à m est inférieure ou égale à r (resp. égale à r), et si vol_g désigne le volume induit par g, alors :

$$u(m) = \lim_{r\to 0} \frac{6(n+2)}{r^2}\left(1 - \frac{\mathrm{vol}_g(B(m,r))}{\mathrm{vol}_{g_0}(B(0,r))}\right) = \lim_{r\to 0} \frac{6n}{r^2}\left(1 - \frac{\mathrm{vol}_g(S(m,r))}{\mathrm{vol}_{g_0}(S(0,r))}\right)$$

où g_0 est la métrique riemannienne canonique de $\mathbb{R}^n$ (n = dimension de M).

Remarque : En dimension $n = 2$, les formules précédentes sont les formules classiques de Diquet et Bertrand-Puiseux (voir par exemple [SP]). Attention, dans ce cas la courbure scalaire est égale à deux fois la courbure de Gauss.

II - CAS DES SURFACES

On va étudier d'abord le cas des surfaces $(n = 2)$ et leur courbure de Gauss $(\mathcal{K} = \frac{u}{2})$. On notera $\chi(M)$ la caractéristique d'Euler de la surface M.

1) Résultat général

THÉORÈME II-1.- (J.L. Kazdan et F.W. Warner [KW10])

Soit M une surface compacte connexe. Alors une fonction f C^∞ sur M est la courbure de Gauss d'une métrique riemannienne sur M si et seulement si elle vérifie la condition (C) suivante :

(C1) si $\chi(M) > 0$ (c.a.d. $M = S^2$ ou $\mathbb{R}P^2$), f est strictement positive en au moins un point ;

(C2) si $\chi(M) = 0$ (c.a.d. $M = T^2$ ou la bouteille de Klein K^2), f est identiquement nulle ou prend effectivement les deux signes ;

(C3) si $\chi(M) < 0$, f est strictement négative en au moins un point.

Démonstration : La nécessité de la condition (C) est une conséquence immédiate de la formule de Gauss-Bonnet

$$\int_M \mathcal{K}_g v_g = 2\pi\, \chi(M).$$

Attention, l'élément de volume v_g dépend de g et cette formule ne donne pas plus que la condition (C) sur f.

Pour démontrer la réciproque, on étudie directement l'application qui à g associe sa courbure scalaire, dans des espaces fonctionnels convenables. On va mener cette étude en dimension n quelconque.

Soit $H_2^p(S_+^2(M))$ l'espace des 2-tenseurs symétriques définis positifs sur M qui sont dans L^p ainsi que leurs dérivées (covariantes) premières et secondes ; on rappelle que les espaces L_p définis par l'élément de volume v_g ne dépendent pas de g.

Soit $U : H_2^p(S_+^2(M)) \to L_p(M)$ définie par $U(g) = u_g$ (courbure scalaire de g). L'opérateur différentiel U est du 2^e ordre et non linéaire (mais quasi-linéaire) ; sa dérivée $U'(g)$ en g est un opérateur différentiel linéaire, dont l'adjoint formel $U'(g)^*$ s'écrit :

$$U'(g)^*(f) = (\Delta_g f).g + \mathrm{Hess}_g f - f\, r_g$$

(Δ_g et Hess_g sont le Laplacien et le Hessien associés à g ; $\Delta_g = -\mathrm{trace}_g \mathrm{Hess}_g$).

Alors, sous certaines hypothèses, on peut montrer que le noyau de $U'(g)^*$ est nul. Comme $U'(g) \circ U'(g)^*$ est elliptique, on en déduit le :

LEMME II-2.- (J.P. Bourguignon [BO1], A.E. Fischer et J.E. Marsden [FM])

Si la courbure scalaire u_g de (M,g) n'est pas une constante (positive ou nulle) de la forme $(n-1)\lambda$ où λ est une valeur propre de Δ_g, alors $U'(g)$ est surjective.

Remarque : La conclusion est fausse pour les sphères à courbure constante (il est possible que ce soit le seul cas, avec les variétés Ricci-plates).

En appliquant le théorème d'inversion locale et le théorème de régularité elliptique, on obtient :

LEMME II-3.- ([KW10]) Si $U'(g)$ est surjective et $p > n$, quelle que soit g_o métrique riemannienne C^∞ sur M, il existe η positif tel que : pour tout f de L_p avec $\|f-u_{g_o}\|_p < \eta$, il existe g dans $H_2^p(S_+^2(M))$ avec $U(g) = f$. De plus g est C^∞ si f l'est.

Pour passer du local au global, on utilise les difféomorphismes de M :

LEMME II-4.- ([KW8]) Soient f et u deux fonctions continues sur M de dimension $n \geqslant 2$. Si $\inf_M f \leqslant u(x) \leqslant \sup_M f$ pour tout x de M, alors, pour tout ε positif, il existe un difféomorphisme φ de M tel que $\|f\circ\varphi-u\|_p \leqslant \varepsilon$, si $p > n$.

D'après la classification des surfaces compactes, pour tout $c > 0$, il existe sur une surface M une métrique riemannienne g_1 à courbure scalaire constante et égale à $c\chi(M)$. Si la fonction f non constante vérifie (C), il existe c positif réalisant la condition du lemme II.4 pour $u = c\chi(M) = u_{g_1}$. Dans le cas $\chi(M) \geqslant 0$, on perturbe légèrement g_1 en g_o pour que la condition reste vérifiée mais u_{g_o} ne soit plus constante. On applique enfin le lemme II.4, puis le lemme II.3.

2) Précisions (globalement) conformes

Un résultat plus précis avait été découvert par Kazdan et Warner avant la démonstration directe qui précède.

DÉFINITION II-5.- Deux métriques riemanniennes g_1 et g_2 sur M sont dites globalement conformes si il existe une fonction h strictement positive sur M et un difféomorphisme φ de M tel que $g_2 = h\varphi^* g_1$.

THÉORÈME II-6.- ([KW8]) Soit (M,g) une surface riemannienne compacte connexe. Alors une fonction f C^∞ sur M est la courbure de Gauss d'une métrique riemannienne globalement conforme à g si et seulement si la condition (C) du théorème II.1 est vérifiée.

La démonstration est la même que celle du théorème II.1, à quelques aménagements près. Grâce au :

LEMME II-7.- Si $n = 2$ et $g_1 = e^{2h} g$, alors $\Delta_g h + \mathcal{K}_g = \mathcal{K}_{g_1} e^{2h}$, il suffit de remplacer U par

$$T : H_2^p(M) \to L_p(M) \quad \text{défini par} \quad T(h) = e^{-2h}(\Delta_g h + \mathcal{K}_g)$$

et le lemme II.2 par le :

LEMME II-8.- ([KW8]) $T'(h)$ est inversible pour un ouvert dense de fonctions h dans $C^2(M)$.

Enfin, pour attraper les constantes, on utilise le théorème de la représenta-

<u>tion conforme</u>, sous la forme :

THÉORÈME II-9.- Pour toute surface riemannienne (M,g) compacte connexe, il existe une métrique g_1 globalement conforme à g telle que (M,g_1) soit à courbure constante.

3) <u>Précisions (ponctuellement) conformes</u>

DÉFINITION II-10.- Deux métriques riemanniennes g_1 et g_2 sur M sont <u>ponctuellement conformes</u> si il existe une fonction h strictement positive sur M telle que $g_2 = hg_1$.

Le théorème II.9 n'est plus vrai si on impose g_1 ponctuellement conforme à g. Il apparaît (sauf pour $\mathbb{R}P^2$) de nouvelles obstructions, de nature différente d'ailleurs si $\chi(M)$ est $\leqslant 0$ ou > 0 :

THÉORÈME II-10.- (J.I. Kazdan et F.W. Warner [KW7])

1) Si h est solution de $\Delta_g h = 1-fe^{2h}$ sur la sphère canonique S^2, alors $\int_{S^2} e^{2h}\langle df,dF\rangle v_g = 0$ pour tout harmonique sphérique F de degré 1 sur S^2.

2) Si $\chi(M) = 0$, alors une fonction f sur M est la courbure scalaire d'une métrique $e^{2h}g$ si et seulement si elle est identiquement nulle ou bien elle prend effectivement les deux signes et vérifie $\int_M fe^{2w}v_g < 0$ pour toute solution w de $\Delta_g w = -\mathcal{K}_g$.

3) Si $\chi(M) < 0$, alors une fonction f sur M est la courbure scalaire d'une métrique $e^{2h}g$ sur M si et seulement si il existe une fonction w sur M telle que $-\Delta_g w \leqslant \mathcal{K}_g - fe^{2w}$.

<u>En particulier</u>, si f est la courbure scalaire de $e^{2h}g$, alors :

a) l'unique solution de

$$\Delta_g z-2cz+2fe^{2z} = 0 \qquad \left(\text{où } c = \frac{2\pi\chi(M)}{\mathrm{vol}_g(M)}\right).$$

est strictement positive.

b) $\int_M fe^{2y}v_g < 0$ pour toute solution y de $\Delta_g y + \mathcal{K}_g = \dfrac{2\pi\chi(M)}{\mathrm{vol}_g(M)}$

<u>Remarque</u> : b) n'est pas une condition suffisante ; On ne sait pas si a) l'est.

Les méthodes de démonstration sont très différentes, puisqu'on n'a plus les difféomorphismes pour passer du local au global. Il s'agit de résoudre l'équation en h :

$$\Delta_g h+\mathcal{K}_g = fe^{2h},$$

(g et f étant données) et Kazdan et Warner utilisent la méthode des sur-et sous-solutions.

<u>Démonstration de 1</u> : Soit X une transformation infinitésimale conforme. Puisque l'intégrale de Dirichlet $\int_{S^2}|dh|^2v_g$ est un invariant conforme on a

$$\int_{S^2} X(h)\Delta_g h\ v_g = 0.$$

Si $\Delta_g h = -1 + fe^{2h}$, on a donc $0 = \int_{S^2} X(h)(1-fe^{2h})v_g$, soit

$$\int_{S^2} X(f)e^{2h} v_g = \int_{S^2} X(fe^{2h}-2h)v_g$$
$$= \int_{S^2} \delta X.(fe^{2h}-2h)v_g$$

La divergence δX de X est une harmonique sphérique de degré 1 sur S^2 (et on les obtient toutes ainsi), donc $\Delta(\delta X) = 2\delta X$ et

$$\int_{S^2} 2\delta X.h\ v_g = \int_{S^2} \Delta(\delta X)h\ v_g = \int_{S^2} \delta X.\Delta h\ v_g$$
$$= \int_{S^2} \delta X.(-1+fe^{2h})v_g = +\int_{S^2} \delta X.fe^{2h} v_g$$

Et finalement $\int_{S^2} X(f)e^{2h} v_g = 0$.

Enfin $X(f) = \langle df, d(\delta X)\rangle$.

On obtient enfin d'autres résultats positifs par la méthode du calcul des variations et de l'équation d'Euler :

THÉORÈME II-11.- (J. Moser [MO2]) Sur le plan projectif canonique $(\mathbb{R}P^2, g_o)$ une fonction est la courbure scalaire d'une métrique $e^{2h} g_o$ si et seulement si elle est strictement positive en au moins un point.

La démonstration utilise la détermination (par Moser [MO1]) de la meilleure constante dans une inégalité de Trudinger sur la fonction exponentielle [TR1].

Par des méthodes similaires, on a :

THÉORÈME II-12.- (T. Aubin [AU5]) Pour toute fonction f C^∞ sur la sphère S^2 canonique avec $\int_{S^2} f\ v_g > 0$, il existe $F(f)$ harmonique sphérique de degré 1 telle que $\Delta h + 1 = (f-F(f))e^{2h}$ ait une solution C^∞.

THÉORÈME II-13.- (M.S. Berger [BE2]) Si $\chi(M) < 0$, et si la fonction f sur M est < 0, f est la courbure scalaire d'une et une seule métrique riemannienne ponctuellement conforme à g sur M.

Remarques

1) Pour $\chi(M) < 0$, le théorème II-13 donne en particulier une démonstration du théorème de la représentation conforme. Pour $\chi(M) = 0$, celui-ci se démontre en résolvant $\Delta h = -\mathcal{K}_g$ avec $\int \mathcal{K}_g v_g = 0$. Pour $\chi(M) > 0$, voir [BE1].

2) Il y a une autre démonstration du théorème II-13 par le théorème d'inversion locale dans [KW8].

3) Des résultats partiels sur les surfaces avaient été obtenus par H. Gluck ([GL]) et D. Koutroufiotis ([KO]).

4) Remarques sur la "forme de courbure"

Sur une surface, la "forme de courbure" de g est (dans le cas orientable) la

2-forme $\mathcal{K}_g v_g$. A titre de comparaison, on va voir qu'il est beaucoup plus facile de caractériser les formes de courbure que les courbures scalaires.

THÉORÈME II-14.- (N.R. Wallach et F.W. Warner [WW]) Soit (M,g_o) une surface riemannienne connexe orientable. Alors une 2-forme ω sur M est la forme de courbure de $g = e^{2f}g_o$ si et seulement si $\int_M \omega = 2\pi\chi(M)$.

Démonstration : La nécessité vient évidemment de la formule de Gauss-Bonnet. Soit maintenant ω_o la forme de courbure de g_o. Alors $\int_M(\omega-\omega_o) = 0$, donc par le théorème de Hodge, il existe une 2-forme α telle que $\Delta\alpha = \omega-\omega_o$. Et il suffit de prendre $f = *\alpha$.

III - DESCRIPTION GÉNÉRALE DES COURBURES SCALAIRES EN DIMENSION SUPÉRIEURE OU ÉGALE A 3.

1) Enoncé du théorème général

Comme on l'a vu, une partie de la démonstration du théorème II-1 est valable en toutes dimensions. Par contre, la formule de Gauss-Bonnet et le théorème de la représentation conforme sont propres à la dimension deux. La première sera remplacée par des obstructions (topologiques) à l'existence de métriques riemanniennes à courbure scalaire positive ou nulle (qu'on étudiera au paragraphe IV) et le second par la conjecture de Yamabe. On obtiendra comme analogue du théorème II-1 le :

THEOREME III-1.- (d'après [KW10]) Les variétés compactes connexes de dimension $n \geqslant 3$ peuvent se répartir en trois classes :

(A) Il existe sur M une métrique riemannienne à courbure scalaire positive ou nulle et non identiquement nulle.

Alors toute fonction sur M est la courbure scalaire d'une métrique riemannienne.

(B) Il existe sur M une métrique riemannienne à courbure scalaire nulle et $M \notin (A)$.
Alors une fonction sur M est la courbure scalaire d'une métrique riemannienne si et seulement si, ou bien f est identiquement nulle ou bien f est strictement négative en au moins un point.

(C) Il n'existe sur M aucune métrique riemannienne à courbure scalaire positive ou nulle.
Alors une fonction sur M est la courbure scalaire d'une métrique riemannienne si et seulement si f est strictement négative en au moins un point.

Exemples : $S^n \in (A)$, $T^n \in (B)$, $T^n \# T^n \in (C)$, comme on le verra plus loin.

2) La conjecture de Yamabe

On désigne traditionnellement sous ce nom l'énoncé suivant :

Conjecture III-2.- Soit (M,g) une variété riemannienne compacte connexe. Alors il existe sur M une métrique riemannienne ponctuellement conforme à g à courbure scalaire constante.

Cette conjecture fut énoncée comme théorème par H. Yamabe [YA]. Puis N.S. Trudinger [TR2] a trouvé une erreur dans la démonstration, qu'il a pu redresser sous des hypothèses restrictives, celles-ci ayant été ensuite améliorées par T. Aubin [AU2,3]. Pour énoncer le résultat actuel, on introduit un invariant :

DÉFINITION III-3.- ([YA]) Sur (M,g), on notera :

$$\mu(g) = \inf_{\substack{f \text{ positive} \\ \text{sur } M}} \frac{4\frac{n-1}{n-2}\int_M |df|^2 v_g + \int_M u_g f^2 v_g}{\left(\int_M f^{\frac{2n}{n-2}} v_g\right)^{\frac{n-2}{n}}}$$

L'intérêt de $\mu(g)$ apparaît par l'équation d'Euler correspondante : si f réalise le minimum $\mu(g)$, alors $f^{\frac{4}{n-2}}g$ a une courbure scalaire constante égale à $\mu(g)$. Celui-ci a les propriétés suivantes :

THÉORÈME III-4.- (T. Aubin [AU2])

1) $\mu(g)$ est un invariant conforme (c.a.d. $\mu(h\varphi^*(g)) = \mu(g)$).
2) $\mu(g) \leqslant n(n-1)\omega_n^{2/n}$ où ω_n est le volume de la sphère canonique S^n.
3) Pour la sphère canonique S^n, $\mu(g) = n(n-1)\omega_n^{2/n}$.

Le meilleur résultat actuel vers la conjecture de Yamabe est le :

THÉORÈME III-5.- (T. Aubin, N.S. Trudinger, H. Yamabe) Soit (M,g) une variété riemannienne compacte connexe de dimension $n \geqslant 3$ et de volume 1.

Si $\mu(g) < n(n-1)\omega_n^{2/n}$, il existe sur M une métrique riemannienne $\tilde{g}$ ponctuellement conforme à g, à courbure scalaire constante égale à $\mu(g)$ et de volume 1. De plus $\tilde{g}$ est unique si $\mu(g)$ est $\leqslant 0$.

Démonstration (esquisse) : On a d'abord facilement le :

LEMME III-6.- Si $\tilde{g} = f^{\frac{4}{n-2}}g$, la courbure scalaire $\tilde{u}$ de $\tilde{g}$ vérifie :

$$4\frac{n-1}{n-2}\Delta_g f + uf = \tilde{u}\, f^{\frac{n+2}{n-2}} .$$

Puis, si f réalise le minimum $\mu(g)$ et $\int_M f^{\frac{2n}{n-2}} v_g = 1$, alors $\tilde{u}$ est constante égale à $\mu(g)$. Il suffit donc de montrer que $\mu(g)$ est atteint pour une fonction C^∞. L'idée de Yamabe a été d'étudier d'abord l'équation :

$$(*_q)\quad 4\frac{n-1}{n-2}\Delta_g f + uf = \mu_q f^{q-1} \quad \text{pour} \quad 2 < q < \frac{2n}{n-2} ,$$

où
$$\mu_q = \inf_{f>0} \frac{4\frac{n-1}{n-2}\int_M |df|^2 v_g + \int_M u_g f^2 v_g}{\left(\int_M f^q v_g\right)^{2/q}}$$

On montre (à l'aide de l'inclusion compacte de H^2 dans L_q) qu'elle a toujours une solution f_q positive, avec $\int f_q^q v_g = 1$; que μ_q tend vers $\mu(g)$ si q tend vers $\frac{2n}{n-2}$; et qu'il est possible d'extraire une sous-suite des f_q qui converge faiblement dans H_1^2, fortement dans L_2 et presque partout vers $f \in H_1^2$, avec $f_q^{\frac{n+2}{n-2}}$ convergent faiblement dans $L_{\frac{2n}{n-2}}$ vers $f^{\frac{n+2}{n-2}}$. Grâce au principe du maximum, la limite faible f est soit identiquement nulle, soit strictement positive. On élimine la première possibilité par une minoration à priori de $\|f_q\|_2$ utilisant la détermination de la meilleure constante dans les inégalités de Sobolev due à T. Aubin [AU4]. Alors f vérifie l'équation et elle est C^∞ grâce au théorème de régularité elliptique ([TR2]).

Remarque : Il n'y a pas unicité de $\tilde{g}$ en général si $\mu(g) > 0$, mais c'est le cas si g est Einstein (c.a.d. ρ constante) ([AU2]).

Dans l'application au théorème III-1, on utilise la continuité de $\mu(g)$ pour éviter la mauvaise valeur, ainsi que le :

THÉORÈME III-7.- (T. Aubin [AU2], A. Avez [AV], H. Eliasson [EL]) Sur toute variété compacte M de dimension $n \geqslant 3$, il existe une métrique riemannienne g avec $\mu(g) < 0$.

Démonstration : Des calculs explicites exhibent des déformations g_t de g à courbure totale $\int_M u_{g_t} v_{g_t}$ négative pour t grand, et ceci borne supérieurement $\mu(g)$.

COROLLAIRE III-8.- Si M admet une métrique riemannienne à courbure scalaire positive ou nulle, elle admet une métrique riemannienne à courbure scalaire identiquement nulle.

Pour terminer la démonstration de la conjecture de Yamabe, il suffirait de démontrer la :

Conjecture III-9.- (T. Aubin) Si $\mu(g) = n(n-1)\omega_n^{2/n}$, alors (M,g) est conforme à une sphère canonique S^n à courbure constante.

T. Aubin a obtenu dans cette direction les résultats suivants :

THÉORÈME III-10.- ([AU2]) Si $\mu(g) = n(n-1)\omega_n^{2/n}$, alors

a) si $n \geqslant 6$, (M,g) est conformément plate (c.a.d. localement conforme à une métrique riemannienne à courbure sectionnelle nulle).

b) si (M,g) est conformément plate et son groupe fondamental est fini, alors (M,g) est conforme à la sphère canonique.

Il démontre a) par un développement limité sur une famille de fonctions à support petit dans M. Pour b), il utilise le fait que $\mu(g)$, si il est atteint, diminue strictement par un quotient (revêtement) fini.

3) Précisions conformes

Comme dans le cas des surfaces, on a des résultats plus précis dans les classes conformes.

THÉORÈME III-11.- ([KW8]) Soit (M,g) une variété riemannienne compacte connexe de dimension $n \geqslant 3$.

Alors une fonction f sur M est la courbure scalaire d'une métrique globalement conforme à g si et seulement si elle vérifie la condition (C) suivante :

(C1) si $0 < \mu(g) < n(n-1)\omega_n^{2/n}$, ou si (M,g) est conforme à la sphère canonique, f est strictement positive en au moins un point.

(C2) si $\mu(g) = 0$, f est identiquement nulle on prend effectivement les deux signes.

(C3) si $\mu(g) < 0$, f est strictement négative quelque part.

La démonstration est voisine de celle du théorème II.6, en remplaçant le théorème de la représentation conforme par la conjecture de Yamabe.

Dans le cas ponctuellement conforme, les résultats sont beaucoup moins complets. Les obstructions du théorème II-11 se généralisent :

THÉORÈME III-12.- ([KW7])

1) Si f est une solution strictement positive de

$$4\,\frac{n-1}{n-2}\,\Delta_g f+f = u\,f^{\frac{n+2}{n-2}}$$

sur la sphère canonique S^n, alors $\int_{S^n} f\langle du,dF\rangle v_g = 0$ pour toute harmonique sphérique F de degré 1 sur S^n.

2) Si (M,g) vérifie $\mu(g) = 0$, alors la courbure scalaire $u_{\tilde g}$ de $\tilde g = f^{\frac{4}{n-2}} g$ est identiquement nulle ou bien prend effectivement les deux signes <u>et vérifie</u> : $\int u_{\tilde g} v_g < 0$.

3) Si (M,g) est à courbure scalaire $u_g \equiv -1$, alors la courbure scalaire $u_{\tilde g}$ de $\tilde g = f^{\frac{4}{n-2}} g$ est telle que l'unique solution φ de

$$(n-1)\Delta_g \varphi+\varphi+u_{\tilde g} = 0$$

soit strictement positive. En particulier, $\int_M u_{\tilde g} v_g < 0$.

On ne sait pas si ces conditions nécessaires sont suffisantes ; on a d'autre part des résultats d'existence mais le problème général est loin d'être résolu.

THÉORÈME III-13.-

a) [AU5] Soit u C^∞ sur S^n, $u > 0$ et vérifiant : $\sup u < 2^{\frac{2}{n-2}} \inf u$. Alors il existe une harmonique sphérique $F(u)$ de degré 1 telle que

$$4\,\frac{n-1}{n-2}\,\Delta_g f+f = (u-F(u))f^{\frac{n+2}{n-2}}$$

ait une solution C^∞ strictement positive

b) [KW7] Si (M,g) vérifie $\mu(g) < 0$ et u est strictement négative, il existe une et une seule fonction f telle que u soit la courbure scalaire de $\tilde{g} = f^{\frac{4}{n-2}}g$.

IV - OBSTRUCTIONS TOPOLOGIQUES A L'EXISTENCE DE MÉTRIQUES RIEMANNIENNES A COURBURE SCALAIRE POSITIVE.

Il reste à répartir les variétés compactes dans les classes (A), (B), (C) du théorème III.1.

1) Quelques exemples

Les espaces homogènes compacts différents des tores sont des exemples dans la classe (A). On a plus généralement dans ce sens le :

THÉORÈME IV-1.- (H.B. Lawson et S.T. Yau [LY]) Si la variété compacte connexe M admet une S^3- ou $SO(3)$ - action non triviale, il existe sur M une métrique riemannienne à courbure scalaire strictement positive.

La démonstration utilise le quotient $M \to M/_G$ et les formules de O'Neill pour les submersions ([ON]), en remarquant que les orbites principales ont des métriques invariantes à courbure scalaire positive.

Remarque : Le théorème n'est plus vrai pour les S^1-actions comme le montrera l'exemple des tores.

Enfin, si $M \in (A)$, $M{\times}N \in (A)$.

Pour étudier la classe (B), on a le :

THÉORÈME IV-2.- (J.P. Bourguignon [BO1]) Si M est dans la classe (B), toute métrique riemannienne à courbure scalaire nulle sur M est à courbure de Ricci nulle.

La démonstration procède par variation de g, grâce à la formule pour $U'(g)$ (qui contient r).

Remarque : Plus généralement, si $\mu(g)$ est critique en g et atteinte par f, la métrique $f^{\frac{4}{n-2}}g$ est <u>d'Einstein</u> (c.a.d. ρ est constante).

Mais la réciproque du théorème IV.2 n'est pas vraie : la "quintique" $(x^5+y^5+z^5+t^5+u^5 = 0)$ de $\mathbb{C}P^4$ est une variété compacte 1-connexe, de dimension réelle 6 qui admet à la fois une métrique riemannienne à courbure de Ricci nulle (grâce à la solution de la conjecture de Calabi, voir [BO2], [CA]) et une métrique riemannienne à courbure scalaire strictement positive (Corollaire V.4 ci-après). Par contre la quartique de $\mathbb{C}P^3$ donne un exemple de variété compacte 1-connexe de dimension 4 dans la classe (B).

Les variétés riemanniennes compactes à courbure de Ricci nulles ne sont pas encore classées. On a en particulier parmi elles les variétés plates (c.a.d. à courbure sectionnelle nulle, comme les tores plats) et des variétés kählériennes à c_1 nul("conjecture de Calabi"). On a enfin le :

THÉORÈME IV-3.- (J. Cheeger et D. Gromoll [CG]) Si M est une variété riemannienne compacte à courbure de Ricci nulle, son revêtement universel $\widetilde{M}$ est le produit riemannien d'un espace euclidien et d'une variété riemannienne 1-connexe <u>compacte</u> à courbure de Ricci nulle.

Enfin la classe (C) contient en particulier les variétés hyperboliques et les solvariétés non plates. (voir théorème IV-16 ci-après).

2) <u>Une obstruction par les hypersurfaces minimales</u>

<u>Rappel</u> : Une hypersurface N (c.a.d. sous-variété de codimension un) compacte d'une variété riemannienne (M,g) est

a) <u>minimale</u> si la dérivée première du volume dans toute variation de N est nulle en N.

b) <u>stable</u> si la dérivée seconde du volume est positive ou nulle en N.

THÉORÈME IV-4.- (R. Schoen et S.T. Yau [SY3]) Si (M,g) est une variété riemannienne compacte de dimension $n \geqslant 3$, à courbure scalaire strictement positive, et si N est une hypersurface compacte minimale stable de M, alors il existe sur N une métrique riemannienne à courbure scalaire strictement positive.

<u>Démonstration</u> : Pour la famille de déformations de N donnée par une fonction φ sur N, le long du vecteur unitaire normal n, la dérivée seconde du volume, $\int_M(|d\varphi|^2-(\rho_M(n)+\|II\|^2)\varphi^2)v_{g_N}$ est $\geqslant 0$ (où II est la 2^e forme fondamentale). D'après les formules de Gauss-Codazzi,

$$u_M = u_N+2\rho_M(n)+\|II\|^2 \quad \text{et donc}$$

$$\int_N |d\varphi|^2 v_{g_N} \geqslant \frac{1}{2} \int_N (u_M-u_N+\|II\|^2)\varphi^2 v_{g_N}$$

Puisque $u_M > 0$, on a donc

$$\int_N |d\varphi|^2 v_{g_N} > -\frac{1}{2}\int_N u_N \varphi^2 v_{g_N}$$

et en particulier, si $\dim M \geqslant 4$, $\mu(g_N)$ est > 0.

Si $\dim M = 3$, pour $\varphi = 1$ on a $\int_N u_N v_{g_N} > 0$, donc $\chi(N) > 0$.

On en déduit par exemple :

THÉORÈME IV-5.- Soit M une variété compacte orientable de dimension 3. Si $\pi_1(M)$ contient un sous-groupe isomorphe à celui d'une surface compacte de genre $\geqslant 1$, alors M n'a pas de métrique riemannienne à courbure positive ou nulle non identiquement nulle.

Voir l'exposé récent de L. Lemaire à Bourbaki ([LE]) pour la démonstration (difficile) de l'existence de surfaces minimales stables dans ce cas.

Exemple d'application : Toute métrique riemannienne à courbure scalaire positive ou nulle sur T^3 est plate.

En combinant les deux théorèmes précédents avec d'autres constructions d'hypersurfaces minimales stables et les autres obstructions ci-après, on obtient, pour $n \leqslant 7$, des obstructions "par récurrence" à l'existence de métriques à courbure scalaire positive, par exemple pour T^n $(n \leqslant 7)$. Pour des énoncés détaillés, voir [SY3]. Ces méthodes ne marchent pas, pour l'instant, si $n \geqslant 8$ à cause de l'apparition possible de singularités intérieures dans les hypersurfaces minimales (voir [BI]).

Remarque : En dimension 3, en utilisant plusieurs conjectures classiques, il suivrait du théorème IV.5 que les seules variétés compactes orientables de dimension 3 admettant des métriques riemanniennes à courbure scalaire positive seraient les sommes connexes finies de p exemplaires de $S^2 \times S^1$ et de q quotients de S^3 par des groupes finis d'isométries opérant sans point fixe (voir Corollaire V-5 ci-après).

3) L'obstruction spinorielle

Rappel : a) Une structure spinorielle sur une variété riemannienne orientée (M,g) est un revêtement à 2 feuillets du fibré principal tangent, dont les fibres sont le revêtement Spin (n) de $SO(n)$. De telles structures existent si et seulement si $w_2(M) = 0$ et elles sont classifiées par $H^1(M, \mathbb{Z}_2)$.

b) Sur une variété spinorielle, on construit le fibré des spineurs S, correspondant à la représentation spinorielle (complexe) de Spin (n). Comme celle-ci est un espace de représentation de l'algèbre de Clifford, on a une opération naturelle du fibré en algèbres de Clifford construit sur TM, sur le fibré S. On munit celui-ci de la connexion D induite par la connexion de Levi-Civita et on définit l'opérateur de Dirac P sur S par : $Ps = \sum_i X_i . D_{X_i} s$, où X_i est une base orthonormée locale sur M. C'est un opérateur elliptique autoadjoint d'ordre 1. La dimension de son noyau dépend de g en général ([HI]), bien que ce soit un invariant conforme. En dimension paire, S est naturellement la somme directe de 2 fibrés S^+ et S^-, échangés par P.

c) J. Milnor a défini dans [MI] un homomorphisme d'anneau surjectif : $\alpha : \Omega_*^{Spin} \to KO^{-*}(\text{point})$ tel que :

$$\alpha(M) = \hat{A}(M) \quad \text{si} \quad n = 8k, \qquad \alpha(M) = \frac{1}{2}\hat{A}(M) \quad \text{si} \quad n = 8k+4$$

(on rappelle que $\hat{A}(M)$ est un nombre caractéristique (entier), défini à partir des classes de Pontrjaguin par des relations universelles (à coefficients rationnels) [HH]). Le théorème de l'indice d'Atiyah et Singer nous donne pour P :

THÉORÈME IV-6.- ([AS] III et V) :

Si $n = 4h$, $\dim(\operatorname{Ker} P\restriction_{S^+}) - \dim(\operatorname{Ker} P\restriction_{S^-}) = \hat{A}(M)$

Si $n = 8h+1$, $\dim(\operatorname{Ker} P) \equiv \alpha(M) \pmod 2$

Si $n = 8h+2$, $\dim(\operatorname{Ker} P\restriction_{S^+}) \equiv \alpha(M) \pmod 2$.

Le résultat fondamental pour la courbure scalaire est le :

THEOREME IV-7.- (A. Lichnérowicz [LI]) Si (M,g) est une variété spinorielle compacte connexe à courbure scalaire positive ou nulle et non identiquement nulle, alors le noyau de P est réduit à zéro.

Démonstration : On a la formule :

$$P^2 s = D^* D s + \frac{u}{4} s.$$

Or D^*D est positif et $\operatorname{Ker} P^2 = \operatorname{Ker} P$.

COROLLAIRE IV-8.- (A. Lichnérowicz [LI], N. Hitchin [HI]) Si la variété compacte connexe M spinorielle admet une métrique riemannienne à courbure scalaire positive, alors $\alpha(M) = 0$.

Exemple : Il existe en dimension $8h+1$ et $8h+2$ des sphères exotiques avec $\alpha(M) \neq 0$: elles n'admettent donc aucune métrique riemannienne à courbure scalaire positive.

Remarque : Si $u \equiv 0$, le noyau de P est formé de spineurs parallèles.

4) Obstruction spinorielle et fibrés plats

M. Gromov et H.B. Lawson ont remarqué (dans [GL1]) que le théorème de Lichnérowicz est encore vrai si on tensorise le fibré spinoriel par les fibrés plats et si on considère la famille d'opérateurs différentiels obtenue. Ils introduisent d'abord une généralisation adaptée de $\hat{A}(M)$.

Soit M une variété compacte spinorielle de dimension 2n, et T sa "variété de Picard réelle", c.a.d. T est le tore $\mathrm{Hom}(\pi_1(M),\mathbb{R})/_{\mathrm{Hom}(\pi_1(M),\,\mathbb{Z})}$. On a sur $M\times T$ un fibré vectoriel complexe de dimension un naturel défini ainsi :

$$\xi = (\tilde{M}\times T\times \mathbb{C})/_{\pi_1(M)} \quad \text{où } \pi_1(M) \text{ agit par :}$$

$$\gamma(x,y,z) = (\gamma x, y, e^{2i\pi y(\gamma)} z).$$

Sur les fibres $M\times\{y\}$ de $M\times T \to T$, le fibré ξ est le fibré plat défini par y, que l'on peut tensoriser avec le fibré des spineurs de M. L'opérateur de Dirac s'étend à ce nouveau fibré (via la connexion produit tensoriel) et on a donc une famille d'opérateurs P_y indexés par T.

L'indice de la famille $\{P_y\}$ est un élément de $H^*(T,\mathbb{Z})$, que l'on calcule par le théorème de l'indice à paramètre ([ASIV]). On pose donc :

DÉFINITION IV-9.- $\hat{\mathbb{A}}(M) = \{\mathrm{ch}\,\xi.\hat{A}[M]\}[M]$ (où $\hat{A}[M]$ est ici la $\hat{A}$-classe <u>totale</u> [HH]).

On a aussi une définition plus "géométrique" de $\hat{\mathbb{A}}(M)$: soit $x_1,\dots,x_p$ une base de $H^1(M,\mathbb{Z})$ et $x_1^*,\dots,x_p^*$ la base duale de $H^1(T,\mathbb{Z})$. Pour tout $I = \{i_1<\dots<i_p\}$ avec $2n-p \equiv 0 \pmod 4$, soit M_I une sous-variété compacte de M, à fibré normal trivial, duale de la classe $x_{i_1}\cup\dots\cup x_{i_p}$. Alors

$$\hat{\mathbb{A}}(M) = \sum_I \hat{A}(M_I) x^*_{i_1}\cup\dots\cup x^*_{i_p}.$$

Maintenant le théorème de Lichnérowicz se généralise en :

THÉORÈME IV-10.- (M. Gromov et H.B. Lawson [GL1]) Si M compacte spinorielle de dimension $2n$ admet une métrique riemannienne à courbure scalaire positive, alors $\hat{\mathbb{A}}(M) = 0$.

<u>Exemple</u> : $\hat{\mathbb{A}}(T^{2n}) \neq 0$ (prendre $I = \{1,\dots,2n\}$ et pour M_I un point).

DÉFINITION IV-11.- Si $f : M \to N$ est différentiable avec M compacte et $\dim M - \dim N \equiv 0 \pmod 4$, on note $\hat{A}(f) = \hat{A}(f^{-1}(x))$ où x est une valeur régulière de f.

COROLLAIRE IV-12.- Si M est compacte spinorielle et si il existe une application différentiable $f : M^n \to T^{n-4k}$ avec $\hat{A}(f) \neq 0$, alors M n'admet pas de métrique riemannienne à courbure scalaire positive. En particulier, c'est vrai pour T^n.

5) <u>Obstruction spinorielle et groupe fondamental</u>

En fait, le théorème de Lichnérowicz est encore vrai si on tensorise le fibré des spineurs par un fibré à connexion dont la courbure est "petite" devant la courbure scalaire. Pour exploiter ce résultat, Gromov et Lawson introduisent dans [GL1] la :

DÉFINITION IV-13.- Une variété riemannienne compacte est dite "enlargeable" en dimension p si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un revêtement fini spinoriel $\hat{M}_\varepsilon$ de M et une application différentiable $f : \hat{M}_\varepsilon \to S^p$, ε-contractante, avec $\hat{A}(f) \neq 0$.

En fait, cette notion ne dépend que du type d'homotopie de M . On obtient alors, en utilisant un fibré complexe E sur S^{2p} avec $c_p(E) \neq 0$, le :

THÉORÈME IV-14.- (M. Gromov et H.B. Lawson [GL1]) Si M est enlargeable en dimension n, M n'a pas de métrique riemannienne à courbure scalaire positive.

Pour construire des variétés enlargeables, on dispose de la :

PROPOSITION IV-15.- Si M^n est enlargeable en dimension n et si il existe $f : N \to M$ vérifiant $w_2(N) = k\, f^* w_2(M)$ et $\hat{A}(f) \neq 0$, alors N est enlargeable en dimension n.

Les exemples principaux sont donnés par le :

THÉORÈME IV-16.- ([GL1])

a) Si M^n compacte admet une métrique riemannienne à courbure sectionnelle négative ou nulle, si M admet un revêtement fini spinoriel et si $\pi_1(M)$ est résiduellement fini, alors M est enlargeable en dimension n.

b) Toute solvariété compacte de dimension n est enlargeable en dimension n.

Rappels : a) Un groupe est résiduellement fini si l'intersection de ses sous-groupes distingués d'indice fini est réduite à l'élément neutre.

b) Une solvariété est le quotient d'un groupe de Lie résoluble par un sous-groupe discret.

Exemple : Si M est hyperbolique (c.a.d. $\sigma \equiv -1$) compacte, alors $\pi_1(M)$ est résiduellement fini et il existe un revêtement fini spinoriel.

La démonstration de a) utilise essentiellement l'inverse de l'exponentielle en un point dans le revêtement universel de M (elle est 1-contractante). Pour b) on raisonne par récurrence : il y a toujours une fibration plate $M \to S^1$ de fibre une solvariété.

V - CONSTRUCTIONS DE MÉTRIQUES RIEMANNIENNES A COURBURE SCALAIRE POSITIVE

1) Utilisation des chirurgies

THÉORÈME V-1.- (R. Schoen et S.T. Yau [SY3]) Soient M_1 et M_2 deux variétés riemanniennes compactes à courbure scalaire positive de même dimension n et deux sous variétés compactes de dimension $k \leqslant n-3$, N_1 dans M_1, N_2 dans M_2. Si il existe un difféomorphisme fibré φ du fibré normal à N_1 sur le fibré normal à N_2, alors la variété M obtenue en enlevant des voisinages tubulaires de N_1 et N_2, et en identifiant les fibrés en sphères via φ, admet une métrique riemannienne à courbure scalaire positive.

Démonstration : Soit $D(\varepsilon) = \{x \in M_1 \mid d(x,N_1) \leqslant \varepsilon\}$. On change la métrique de $D(\varepsilon_1)-D(\varepsilon_2)$ $(\varepsilon_1 > \varepsilon_2)$ de telle sorte qu'elle ne change pas au voisinage de $\partial D(\varepsilon_1)$, qu'elle devienne isométrique au produit d'un intervalle par une métrique de $\partial D(\varepsilon_2)$ au voisinage de celui-ci, et qu'elle reste à courbure scalaire positive. C'est possible parce que, pour ε petit, ∂D_ε est un fibré sur N de fibre une sphère de dimension $n-k-1 \geqslant 2$, et sa courbure scalaire est positive (et tend vers l'infini si ε tend vers 0).

Remarque : Schoen et Yau procèdent par des déformations conformes ; Gromov et Lawson ont une démonstration plus géométrique dans [GL2] (dans le cas particulier qui suit).

COROLLAIRE V-2.- (R. Schoen et S.T. Yau [SY3], M. Gromov et H.B. Lawson [GL2]) Si M est une variété compacte à courbure scalaire positive, toute variété obtenue à partir de M par une succession de chirurgies de codimension $\geqslant 3$ admet une métrique riemannienne à courbure scalaire positive.

Exemple : La somme connexe de deux variétés de la classe (A) est dans la classe (A).

2) Le cas simplement connexe

THÉORÈME V-3.- (M. Gromov et H.B. Lawson [GL2])

a) Une variété compacte 1-connexe non spinorielle de dimension $n \geqslant 5$ admet une métrique riemannienne à courbure scalaire positive.

b) Si M est une variété compacte 1-connexe spinorielle de dimension $n \geqslant 5$ avec $\alpha(M) = 0$ il existe m tel que la somme connexe de m exemplaires de M admette une métrique riemannienne à courbure scalaire positive.

Démonstration : Grâce à la simple connexité, on peut construire M par des chirurgies de codimension $\geqslant 3$ à partir d'un générateur du cobordisme orienté dans le cas a), du cobordisme spinoriel dans le cas b) et on connait suffisamment ces générateurs pour avoir le théorème.

Remarque : On conjecture en fait qu'on peut prendre $m = 1$ dans b) ; il manque pour l'instant une description suffisamment explicite de générateurs de la torsion de Ker α dans Ω_*^{Spin}, qui permette de leur mettre une métrique à courbure scalaire positive.

3) Basses dimensions

COROLLAIRE V-4.- (M. Gromov et H.B. Lawson [GL2]) Toute variété compacte 1-connexe de dimension 5,6 ou 7 admet une métrique riemannienne à courbure scalaire positive.

En dimension 3, les sommes connexes suffisent pour le :

COROLLAIRE V-5.- ([SY3], [GL2]) La somme connexe de p exemplaires de $S^2 \times S^1$ et de q variétés de la forme $S^3/_\Gamma$ (où Γ est un sous-groupe fini de $SO(4)$ agissant librement) admet une métrique riemannienne à courbure scalaire positive.

En dimension 4, on rappelle que la quartique de $\mathbb{C}P^3$ (ou les "surfaces K3") est compacte 1-connexe et n'admet pas de métrique à courbure scalaire positive ($\hat{A}(M) \neq 0$). Par contre $\mathbb{C}P^2$, $\overline{\mathbb{C}P^2}$, $S^2 \times S^2$, $S^3 \times S^1$, $S^4/_\Gamma$ et leurs sommes connexes en admettent.

VI - LA COURBURE SCALAIRE DES VARIÉTÉS NON COMPACTES

1) Cas général

Il n'y a pas d'obstruction à l'existence de métrique à courbure scalaire positive (ou négative) sur les variétés non compactes connexes, grâce au :

THEOREME VI-1.- (M. Gromov [GR]) Toute variété non compacte connexe de dimension $\geqslant 2$ admet une métrique riemannienne à courbure sectionnelle strictement positive et une métrique riemannienne à courbure sectionnelle strictement négative.

Par les méthodes du début, on a le :

THÉORÈME VI-2.- (J.L. Kazdan et F.W. Warner [KW6,7]) Sur une variété non compacte connexe, de dimension $n \geqslant 2$, difféomorphe à un ouvert d'une variété compacte, toute fonction est la courbure scalaire d'une métrique riemannienne.

On conjecture que ce résultat est vrai sur toutes les variétés non compactes connexes.

2) Métriques riemanniennes complètes

La situation change si on impose en plus à la métrique d'être complète. On sait peu de choses en général. Il y a des obstructions :

THÉORÈME VI-3.- (J.L. Kazdan et F.W. Warner [KW6]) Une fonction f sur $\mathbb{R}^2$ est la courbure scalaire d'une métrique riemannienne complète si et seulement si

$$\liminf_{r \to \infty} \; \inf_{|x| \geqslant r} f(x) \leqslant 0$$

(où $|x|$ est la norme euclidienne).

D'autre part Schoen et Yau ont des résultats en dimension 3, liés à leur démonstration de la "conjecture de la masse positive" en relativité générale [SY4]. En particulier :

THÉORÈME VI-4.- (R. Schoen et S.T. Yau [SY1,4]) Une métrique riemannienne sur $\mathbb{R}^3$ qui est <u>égale</u> à la métrique euclidienne en dehors d'un compact et à courbure scalaire positive ou nulle est en fait euclidienne partout.

Schoen et Yau ont aussi annoncé que le tore T^3 privé d'un ou plusieurs points n'admet pas de métrique riemannienne complète à courbure scalaire positive.

3) Cas homogène

Pour les variétés non compactes <u>homogènes</u>, on retrouve un équivalent de la répartition dans les classes (A), (B), (C) :

THÉORÈME VI-5.- ([BB]) Soit $M = G/_H$ un espace homogène pour un groupe de Lie connexe G, admettant des métriques riemanniennes G-invariantes. Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(1) le revêtement universel de M est difféomorphe à un espace euclidien.

(2) toute métrique riemannienne G-invariante sur M est ou bien plate ou bien à courbure scalaire (constante) strictement négative.

BIBLIOGRAPHIE

[AS] M.F. ATIYAH and I.M. SINGER - The index of elliptic operators I, Ann. of Math. 87 (1968), 484-530 ; III Ann. of Math. 87 (1968), 546-604 ; IV Ann. of Math. 92 (1970), 119-138 ; V Ann. of Math. 92 (1970), 139-149.

[AU1] T. AUBIN - Métriques riemanniennes et courbure, J. Diff. Geom. 4 (1970), 383-424.

[AU2] T. AUBIN - Equations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire, J. Math. pures et appl. 55 (1976), 269-296.

[AU3] T. AUBIN - The scalar curvature, in "Differential Geometry and Relativity" (M. Cahen et Flato, Eds), Reidel, Dordrecht (1976), 5-18.

[AU4] T. AUBIN - Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev, J. Diff. Geom. 11 (1976), 573-598.

[AU5] T. AUBIN - Meilleures constantes dans le théorème d'inclusion de Sobolev et un théorème de Fredholm non linéaire pour la transformation conforme de la courbure scalaire, J. Funct. Analysis 32 (1979), 148-174.

[AV] A. AVEZ - Valeur moyenne du scalaire de courbure sur une variété compacte. Applications relativistes. C.R.A.S. 256 (1963), 5271-5273.

[BB] L. BÉRARD BERGERY - Sur la courbure des métriques riemanniennes invariantes des groupes de Lie et des espaces homogènes, Annales Sc. Ec. Norm. Sup. 11 (1978), 543-576.

[BE1] M.S. BERGER - On the conformal equivalence of compact 2-dimensional manifolds, J. Math. Mech. 19 (1969), 13-18.

[BE2] M.S. BERGER - Riemannian structures of prescribed Gaussian curvature for compact 2-manifolds, J. Diff. Geom. 5 (1971), 325-332.

[BI] E. BOMBIERI - Régularité des hypersurfaces minimales. Séminaire Bourbaki 21e année 1968/69 - Exposé n° 353 (11 pages).

[BO1] J.P. BOURGUIGNON - Une stratification de l'espace des structures riemanniennes, Compositio Math., 30(1975), 1-41.

[BO2] J.P. BOURGUIGNON - Premières formes de Chern des variétés kählériennes compactes. Séminaire Bourbaki 30e année 1977/78 - Exposé n° 507 (18 pages).

[CA] Première classe de Chern et courbure de Ricci : preuve de la conjecture de Calabi (Séminaire Palaiseau 1978). Astérisque n° 58.

[CG] J. CHEEGER et D. GROMOLL - The splitting theorem for manifolds of non negative Ricci curvature. J. Diff. Geom. 6 (1971), 119-128.

[EL] H.I. ELIASSON - On variations of metrics, Math. Scand. 29 (1971), 317-327.

[FM] A.E. FISCHER and J.E. MARSDEN - Deformations of the scalar curvature, Duke Math. J. 42 (1975), 519-547.

[GK] H. GLUCK - The generalized Minkowski problem in diffential geometry in the large, Ann. of Math. 96 (1972), 245-275.

[GR] M. GROMOV - Stable maps of foliations in manifolds, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. Tom 33 (1969), 734 (Math of the USSR - Izvestija 3 (1979) 671).

[GL1] M. GROMOV and H.B. LAWSON, Jr. - Spin and scalar curvature in the presence of a fundamental group I , Ann. of Math. 111(1980), 209-230.

[GL2] M. GROMOV and H.B. LAWSON, Jr - The classification of simply connected manifolds of positive scalar curvature (preprint).

[HH] F. HIRZEBRUCH - Topological methods in algebraic topology, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New-York, (1966).

[HI] N. HITCHIN - Harmonic spinors, Adv. in Math. 14 (1974), 1-55.

[KW1] J.L. KAZDAN and F.W. WARNER - Integrability conditions for $\Delta u = k - Ke^{\alpha u}$ with applications to Riemannian geometry, Bull. A.M.S. 77 (1971), 819-823.

[KW2] J.L. KAZDAN and F.W. WARNER - Curvature functions for 2-manifolds with negative Euler characteristic, Bull. A.M.S. 78 (1972), 570-574.

[KW3] J.L. KAZDAN and F.W. WARNER - Surfaces of revolution with monotonic increasing curvature and an application to the equation $u = 1-Ke^{2u}$ on S^2, Proceeding A.M.S. 32 (1972), 139-141.

[KW4] J.L. KAZDAN and F.W. WARNER - Curvature functions for 2-manifolds, Proc. of Symposia in Pure Math. 23 (1973), 387-392.

[KW5] J.L. KAZDAN and F.W. WARNER - Curvature functions for compact 2-manifolds, Ann. of Math. 99 (1974), 14-47.

[KW6] J.L. KAZDAN and F.W. WARNER - Curvature functions for open 2-manifolds, Ann. of Math. 99 (1974), 203-219.

[KW7] J.L. KAZDAN and F.W. WARNER - Scalar curvature and conformal deformation of Riemannian structure, J. Diff. Geom. 10 (1975), 113-134.

[KW8] J.L. KAZDAN and F.W. WARNER - Existence and conformal deformation of metrics with prescribed Gaussian and scalar curvatures, Ann. of Math. 101 (1975), 317-331.

[KW9] J.L. KAZDAN and F.W. WARNER - Prescribing curvatures, Proc. of Symposia in Pure Math. 27 (1975), 309-319.

[KW10] J.L. KAZDAN and F.W. WARNER - A direct approach to the determination of Gaussian and scalar curvature function, Inventiones Math. 28 (1975), 227-230.

[KO] D. KOUTROUFIOTIS - On Gaussian curvature and conformal mapping, J. Diff. Geom. 7 (1972), 481-490.

[LY] H.B. LAWSON, Jr and S.T. YAU - Scalar curvature, non-abelian group actions, and the degree of symmetry of exotic spheres, Comm. Math. Helv. 49 (1974), 232-244.

[LE] L. LEMAIRE - Existence des applications harmoniques et courbure des variétés, Séminaire Bourbaki 32^{e} année 1979/80 Exposé n° 553 (21 pages).

[LI] A. LICHNEROWICZ - Spineurs harmoniques, C.R.A.S. 257 A (1963), 7-9.

[MI] J. MILNOR - Remarks concerning spin manifolds, "Differential geometry and Combinatorial Topology" Princeton University Press (1965), 55-62.

[MO1] J. MOSER - A sharp form of an inequality by N. Trudinger, Indiana Univ. Math. J. 20 (1971), 1077-1092.

[MO2] J. MOSER - On a nonlinear problem in differential geometry, in Dynamical Systems (M. Peixoto ef.) Academic Press, New York, 1973, 273-280.

[ON] B. O'NEILL - The fundamental equations of a submersion, Mich. Math. J. 13 (1966), 459-469.

[SY1] R. SCHOEN and S.T. YAU - Incompressible minimal surfaces, three-dimensional manifolds with nonnegative scalar curvature, and the positive mass conjecture in general relativity, Proc. N.A.S. U.S.A. 75 (1978), 2567.

[SY2] R. SCHOEN and S.T. YAU - Existence of incompressible minimal surfaces and the topology of three dimensional manifolds with non-negative scalar curvature, Ann. of Math. 110 (1979), 127-142.

[SY3] R. SCHOEN and S.T. YAU - On the structure of manifolds with positive scalar curvature, Manuscripta Math. 28 (1979), 159-183.

[SY4] R. SCHOEN and S.T. YAU - On the proof of the positive mass conjecture in general relativity, Comm. Math. Phys. 65 (1979), 45-76.

[SP] M. SPIVAK - A comprehensive introduction to differential geometry, Publish or Perish.

[TR1] N.S. TRUDINGER - On imbeddings into Orlicz Spaces and some applications, J. Math. Mech. 17 (1967), 473-483.

[TR2] N.S. TRUDINGER - Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 22 (1968), 265-274.

[WW] N.R. WALLACH and F.W. WARNER - Curvature forms for 2-manifolds, Proc. A.M.S. 25 (1970) 712-713.

[YA] H. YAMABE - On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds, Osaka Math. J. 12 (1960), 21-37.

ERA n° 839 CNRS
UER de Mathématiques
Université de NANCY I
CO 140

54037 - NANCY CEDEX