MICHEL DEMAZURE

Caractérisations de l'espace projectif (conjectures de Hartshorne et de Frankel)

Séminaire N. Bourbaki, 1981, exp. n° 544, p. 11-19

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1979-1980__22__11_0>

Séminaire BOURBAKI
32e année, 1979/80, n° 544

CARACTÉRISATIONS DE L'ESPACE PROJECTIF
(CONJECTURES DE HARTSHORNE ET DE FRANKEL)
d'après Shigefumi MORI [6].

par Michel DEMAZURE

§ 1. Les énoncés.

THÉORÈME 1 ("Conjecture de Hartshorne") .- *Soient* k *un corps algébriquement clos*, X *une variété algébrique définie sur* k, *projective, lisse et irréductible. Si le fibré tangent à* X *est ample*, X *est isomorphe à l'espace projectif* $\mathbf{P}^n_k$, $n = \dim(X)$.

THÉORÈME 2 ("Conjecture de Frankel") .- *Soit* V *une variété kaehlérienne compacte connexe. Si la courbure bisectionnelle holomorphe de* V *est* > 0, V *est isomorphe à l'espace projectif* $\mathbf{CP}^n$, $n = \dim_{\mathbf{C}}(V)$.

Ce qu'il faut savoir sur les fibrés vectoriels amples pour comprendre le théorème 1 est rappelé au § 2 ; au § 3, on explique les rapports entre l'amplitude et la courbure, et on déduit le théorème 2 du théorème 1 ; au § 7, on donne des détails complémentaires sur le théorème 2.

Le reste de l'exposé est consacré à la démonstration donnée par Mori du théorème 1. Le point central de cette démonstration est l'étude des morphismes de $\mathbf{P}^1_k$ dans X ; elle est valable en toutes caractéristiques et un passage essentiel utilise une réduction *modulo* p.

Le théorème 1 est élémentaire lorsque $n = 1$; on peut le démontrer par les moyens du bord lorsque $n = 2$ (R. Hartshorne [3]), le cas $n = 3$ a été traité par T. Mabuchi, S. Mori et H. Sumihiro ([5] et [7]) ; le cas général est dû à S. Mori; voir le § 7 en ce qui concerne l'historique du théorème 2.

On désigne par k un corps algébriquement clos, et on écrit $\mathbf{P}^n$ au lieu de

$\mathbb{P}^n_k$, etc. On appelle courbes d'une variété algébrique projective les sous-variétés fermées qui sont des courbes (donc des courbes complètes).

§ 2. Fibrés vectoriels amples.

Soit X une variété algébrique sur k. Un fibré en droites $L \to X$ est dit très ample s'il existe des sections $s_0, \ldots, s_n$ de L sur X telles que $x \mapsto (s_0(x) : \ldots : s_n(x))$ soit un plongement de X dans l'espace projectif $\mathbb{P}^n$. On dit que L est ample si une puissance tensorielle convenable $L \otimes \ldots \otimes L$ est très ample.

Soit maintenant $E \to X$ un fibré vectoriel. Notons $P^\bullet(E)$ le fibré projectif dont l'espace total est l'ensemble des hyperplans des fibres de E (c'est le P(E) des géomètres algébristes), et $L^\bullet(E)$ le fibré en droites sur $P^\bullet(E)$ dont la fibre au-dessus du point $H \subset E_x$ est la droite E_x/H. Notons de même $P_\bullet(E)$ le fibré projectif dont l'espace total est l'ensemble des droites des fibres de E (c'est le P(E) des géomètres différentiels), et $L_\bullet(E)$ le fibré en droites canonique. Naturellement, $P_\bullet(E)$ s'identifie à $P^\bullet(E^*)$ et $L_\bullet(E)$ au dual de $L^\bullet(E^*)$. On dit avec Hartshorne ([2]) que E est ample si $L^\bullet(E)$ est ample sur la variété $P^\bullet(E)$; lorsque E est un fibré en droites, $P^\bullet(E)$ s'identifie à X et $L^\bullet(E)$ à E.

Des propriétés connues des fibrés en droites amples, on déduit plus ou moins aisément (voir [2]) :

a) tout quotient d'un fibré vectoriel ample est ample ;

b) une somme directe de fibrés amples est ample ;

c) la restriction d'un fibré ample à une sous-variété est ample ;

d) si E est ample et de rang r, le fibré en droites $\Lambda^r E$ est ample ;

e) soient C une courbe réduite, $f : \tilde{C} \to C$ sa normalisation et E un fibré vectoriel sur C ; alors E est ample si et seulement si $f^* E$ est ample.

Donnons deux exemples fondamentaux :

f) prenons $X = \mathbb{P}^n = P^\bullet(k^{n+1} \to \bullet)$, et notons traditionnellement $\mathcal{O}(1)$ le fibré en droites canonique $L^\bullet(k^{n+1} \to \bullet)$; alors $\mathcal{O}(1)$ est par définition (très) ample, ainsi que ses puissances tensorielles $\mathcal{O}(k)$, $k > 0$. On a une suite exacte de fibrés vectoriels

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}(1)^{n+1} \longrightarrow T_X \longrightarrow 0 \quad ,$$

et le fibré tangent à X est ample d'après a) et b).

g) prenons $X = \mathbf{P}^1$. D'après Grothendieck, tout fibré vectoriel E sur X est somme directe de fibrés en droites, donc est isomorphe à

$$\mathcal{O}(n_1) \oplus \mathcal{O}(n_2) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(n_r) \quad ,$$

pour une suite d'entiers $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_r$, $r = \mathrm{rg}\, E$, uniquement déterminée. D'après a) et b), E est ample si et seulement si $n_r > 0$. On notera en passant que $\deg(E) = \deg(\Lambda^r E) = n_1 + \dots + n_r$, donc que $\deg(E) \geq r$ si E est ample.

§ 3. Fibrés amples et courbure.

Soient V une variété analytique complexe de dimension n, E un fibré vectoriel holomorphe de rang r sur V et h une métrique hermitienne sur E. Il existe sur E une unique connexion $(X,s) \mapsto \nabla_X s$ (X champ de vecteurs sur V, s section de E) telle que : 1) $\nabla_X s = 0$ si X est de type (0,1) et s holomorphe, 2) la métrique hermitienne h de E est parallèle. Elle est donnée par $\langle s_1, \nabla_X s_2 \rangle = X \cdot \langle s_1, s_2 \rangle$ pour s_1 et s_2 holomorphes. La forme de courbure correspondante est de type (1,1) et à valeurs dans le fibré en algèbres de Lie $\underline{u}(E)$; en coordonnées locales holomorphes, elle a des composantes $R_{\alpha\bar{\beta}i\bar{j}}$; $\alpha, \beta = 1, \dots, n$; $i, j = 1, \dots, r$. On dit que (E,h) est à courbure > 0 (resp. < 0) si $-\Sigma R_{\alpha\bar{\beta}i\bar{j}}\, \xi^\alpha \bar{\xi}^\beta u^i \bar{u}^j$ est > 0 (resp. < 0) pour $(\xi^\alpha) \neq (0)$, $(u^i) \neq (0)$.

PROPOSITION 1 .- <u>Si le fibré vectoriel holomorphe</u> E <u>sur</u> V <u>possède une métrique hermitienne à courbure</u> > 0, <u>il en est de même du fibré en droites</u> $\Lambda^r E$ <u>sur</u> V <u>et du fibré en droites</u> $L^\bullet(E)$ <u>sur</u> $P^\bullet(E)$.

La première assertion se démontre par un calcul immédiat. Par ailleurs, $P^\bullet(E)$ s'identifie au fibré $P_\bullet(E^*)$ des droites de E^* et $L^\bullet(E)$ au dual du fibré naturel $L_\bullet(E^*)$ sur $P_\bullet(E^*)$. Le complémentaire de la section nulle de E^* s'identifie au complémentaire de la section nulle de $L_\bullet(E^*)$. De la métrique h^* sur E^* duale de la métrique donnée sur E, on déduit alors une métrique $\tilde{h}^*$ sur $L_\bullet(E^*)$. Mais h^* est à courbure < 0 et on vérifie ([4], proposition 6.3) que cela implique que $\tilde{h}^*$ est à courbure < 0 ; la métrique duale sur $L^\bullet(E)$ est alors à courbure > 0.

PROPOSITION 2 .- <u>Supposons que</u> V <u>soit compacte et que</u> E <u>possède une métrique hermitienne à courbure</u> > 0. <u>Alors</u> V <u>est projective</u>, <u>donc algébrique</u>, E <u>est algébrique</u>, <u>et le fibré algébrique</u> $E \to V$ <u>est ample</u>.

D'après la proposition 1, le fibré $\Lambda^r E$ est à courbure > 0. Le théorème de plongement de Kodaira implique alors que les sections d'une puissance tensorielle convenable de $\Lambda^r E$ permettent de plonger V dans un espace projectif. Donc V est algébrique (Chow), et E est algébrique (Serre). De nouveau d'après la proposition 1 et le théorème de Kodaira, $L^{\bullet}(E)$ est ample sur $P^{\bullet}(E)$, donc E est ample.

Nous pouvons maintenant déduire le théorème 2 du théorème 1. Soit donc V une variété kæhlérienne compacte connexe ; son fibré tangent T_V est muni d'une structure hermitienne canonique h, et dire que (T_V, h) est à courbure > 0 signifie exactement que V est à courbure bisectionnelle holomorphe > 0. D'après la proposition 2, V est alors algébrique projective et T_V ample ; le théorème 1 permet alors de conclure.

Remarquons d'ailleurs que la courbure bisectionnelle holomorphe est > 0 dès que la courbure sectionnelle riemannienne usuelle est > 0, et donc que le théorème 2 s'applique au cas où la courbure sectionnelle de V est > 0.

§ 4. Espaces de courbes.

Retournons au cas d'un corps de base général k algébriquement clos.

Soient X une variété projective et lisse de dimension n, C une courbe projective lisse et irréductible, de genre g, D un diviseur positif sur C, considéré comme un sous-schéma fini de C et $i : D \to X$ un morphisme. D'après Grothendieck, il existe un schéma paramétrisant les morphismes de C dans X, donc aussi un schéma (sous-schéma fermé du précédent) Mor(C,X;i) paramétrisant les morphismes de C dans X prolongeant i.

Notons T_X le fibré tangent à X, $K_X^* = \Lambda^n T_X$ son fibré en droites anticanonique et soit $f : C \to X$ un point rationnel de $M = \mathrm{Mor}(C,X;i)$. On pose $(f(C) \cdot K_X^*) = \deg_C(f^* K_X^*)$.

PROPOSITION 3 .-- a) <u>L'espace tangent à</u> M <u>au point</u> f <u>s'identifie à</u> $H^0(C, f^* T_X \otimes \mathcal{O}(-D))$.

b) <u>La dimension de</u> M <u>au point</u> f <u>est au moins égale à</u> $n(1 - g - \deg(D)) + (f(C) \cdot K_X^*)$.

c) <u>Si</u> $H^1(C, f^* T_X \otimes \mathcal{O}(-D)) = 0$, <u>le schéma</u> M <u>est lisse en</u> f <u>de dimension</u> $n(1 - g - \deg(D)) + (f(C) \cdot K_X^*)$.

Les techniques usuelles de calcul infinitésimal montrent que l'espace tangent de M en f s'identifie à $H^0(C, f^* T_X \otimes \mathcal{O}(-D))$, tandis que les obstructions aux prolongements de déformations se trouvent dans $H^1(C, f^* T_X \otimes \mathcal{O}(-D))$. Par ailleurs,

---

$^{\bullet}$ C'est le moment de dire que les conventions de signe sur la forme de courbure ont été choisies pour qu'il en soit ainsi !

$$h^0(f^*T_X \otimes \mathcal{O}(-D)) - h^1(f^*T_X \otimes \mathcal{O}(-D)) = \chi(f^*T_X \otimes \mathcal{O}(-D))$$

$$= n(1-g) + \deg \Lambda^r(f^*T_X \otimes \mathcal{O}(-D)) = n(1-g) + (f(C) \bullet K_X^*) - n \deg (D) \quad .$$

On conclut alors à la façon usuelle. Voir [6], § 1, pour une démonstration détaillée d'un énoncé plus général.

§ 5. Existence de courbes rationnelles.

Le premier résultat fondamental de l'article de Mori est :

THÉORÈME 3 .- Soit X une variété projective et lisse, de dimension $n > 0$, dont le fibré anticanonique K_X^* est ample. Alors X possède une courbe rationnelle C telle que $(C \bullet K_X^*) \leq n+1$.

1er pas : Si X possède une courbe rationnelle C avec $(C \bullet K_X^*) > n+1$, elle possède une courbe rationnelle C_1 avec $(C_1 \bullet K_X^*) < (C \bullet K_X^*)$.

Soient x et y deux points rationnels de $\mathbb{P}^1$ et $f : \mathbb{P}^1 \to C$ un morphisme envoyant x et y sur deux points lisses et distincts de C. Considérons le schéma $M = \mathrm{Mor}(\mathbb{P}^1, X; i)$ avec $i = f|\{x,y\}$. On a $\dim_f M \geq -n + (C \bullet K_X^*) > 1$ (proposition 3), tandis que l'orbite de f sous le stabilisateur de $\{x,y\}$ dans $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ est au plus de dimension 1 ; il existe donc une courbe lisse D et un morphisme $\alpha : D \to M$ dont l'image contient f et n'est pas contenue dans cette orbite. Notons $\overline{D}$ une compactification de D et $\varphi : \mathbb{P}^1 \times D \to X \times \overline{D}$ le morphisme $(z,d) \to (\alpha(d)z, d)$, et soit S la normalisée de la surface $\varphi(\mathbb{P}^1 \times D)$. Les fibres générales de $S \to \overline{D}$ sont isomorphes à $\mathbb{P}^1$; de l'existence des deux sections $\overline{D} \to S$ associées aux points x et y, et qui se contractent par le morphisme naturel de S dans X, Mori déduit que $S \to \overline{D}$ possède des fibres singulières, qui sont donc réunion de courbes rationnelles. Cela entraîne l'existence d'une déformation de C, réunion de courbes rationnelles $C_1, \dots, C_m$, $m \geq 2$. On a $(C \bullet K_X^*) = \Sigma (C_i \bullet K_X^*) > (C_1 \bullet K_X^*)$ (puisque K_X^* est ample), d'où le résultat annoncé.

2ème pas : Si k est de caractéristique $p \neq 0$, X possède une courbe rationnelle.

Soit Y une courbe irréductible sur X ; on a $(Y \bullet K_X^*) > 0$. Soient $g : \tilde{Y} \to Y$ la normalisation de Y, q une puissance de p, et $F^q : \tilde{Y}^{(q)} \to \tilde{Y}$ le morphisme de Frobenius. Posons $\tilde{Y}^{(q)} = C$ et notons $f : C \to X$ le morphisme déduit de $g \circ F^q$. Fixons un point $P \in C(k)$, et considérons le schéma $M = \mathrm{Mor}(C, X; f|P)$. Alors (prop. 3), on a $\dim_f M \geq -n\, g(C) + q\,(Y \circ K_X^*)$. Pour q assez grand, il existe donc une courbe lisse Γ et un morphisme fini $\varphi : \Gamma \to M$ tel que $f \in \varphi(\Gamma)$; on a $\varphi(\gamma)(P) = f(P)$ pour tout

$\gamma \in \Gamma$. Si Γ était complète, on aurait $\varphi(\gamma) = f$ pour tout γ d'après le théorème de rigidité, ce qui n'est pas. Si $\overline{\Gamma}$ est une compactification de Γ, l'application rationnelle $(\gamma, x) \mapsto \varphi(\gamma)(x)$ de $\overline{\Gamma} \times C$ dans X n'est pas partout définie. Cela implique l'existence d'une courbe rationnelle sur X (lever l'indétermination par éclatements et considérer la dernière courbe exceptionnelle obtenue).

3ème pas : Réduction à la caractéristique p.

La cause est donc entendue si k est de caractéristique $\neq 0$. Supposons k de caractéristique 0. Il existe un sous-anneau A de k, de type fini sur $\mathbb{Z}$, et un modèle X_A de X sur A lisse et projectif, de faisceau anticanonique relatif A-ample. Il existe alors (Grothendieck) un A-schéma quasi-projectif T "paramétrant les morphismes $f : \mathbb{P}^1 \to X_A$ tels que $0 < (f \cdot K^*_{X_A/A}) \leq n+1$". Puisque T possède des points fermés au-dessus de tous les points fermés de Spec(A), $T \otimes_A k$ est non vide, d'où le théorème.

COROLLAIRE .- Soit X une variété projective et lisse, de dimension $n > 0$, dont le fibré tangent est ample.

a) Pour toute courbe rationnelle C de X, on a $(C \cdot K^*_X) \geq n+1$.

b) X possède des courbes rationnelles C telles que $(C \cdot K^*_X) = n+1$.

c) Soit C une courbe rationnelle de X telle que $(C \cdot K^*_X) = n+1$, et soit $f : \mathbb{P}^1 \to X$ la normalisation de C . Alors f est non ramifié et $f^* T_X$ est isomorphe à $\mathcal{O}(2) \oplus \mathcal{O}(1)^{n-1}$.

Puisque K^*_X est ample (§ 2, d)), la partie b) résulte de a) et du théorème 3. Soient C une courbe rationnelle de X et $f : \mathbb{P}^1 \to X$ la normalisation de C ; alors $f^* T_X$ est ample sur $\mathbb{P}^1$ (§ 2, a) et e)), donc de la forme $\mathcal{O}(r_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(r_n)$ avec $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_n > 0$ (§ 2, g)), avec $r_1 + \dots + r_n = (C \cdot K^*_X)$. Par ailleurs, le morphisme canonique $\lambda : T_{\mathbb{P}^1} \to f^* T_X$ est non nul ; puisque $T_{\mathbb{P}^1}$ est isomorphe à $\mathcal{O}(2)$, cela impose $r_1 \geq 2$; si $r_1 = 2$, alors λ est injectif. Le corollaire résulte aussitôt de là.

§ 6. Démonstration du théorème 1.

On considère donc une variété X projective, lisse et irréductible de dimension $n \geq 1$, dont le fibré tangent est lisse, et on choisit (§ 5, corollaire) un morphisme $f_o : \mathbb{P}^1 \to X$ tel que $f_o^*(K^*_X) \simeq \mathcal{O}(n+1)$. Si $n = 1$, f_o est un isomorphisme. Supposons donc $n \geq 2$.

La variété auxiliaire V.

Fixons un point $a_o \in \mathbb{P}^1(k)$ tel que $f_o(\mathbb{P}^1)$ soit lisse au point $x_o = f_o(a_o)$ et soit V la composante connexe de f_o dans $\mathrm{Mor}(\mathbb{P}^1, X; f_o|(a_o))$. Pour tout $f \in V$, on a $f^*(K_X^*) \simeq \mathcal{O}(n+1)$, donc d'après le § 5, corollaire, $f^*(T_X) \simeq \mathcal{O}(2) \oplus \mathcal{O}(1)^{n-1}$. Cela implique $H^1(f^*(T_X) \otimes \mathcal{O}(-a_o)) \simeq H^1(\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}^{n-1}_{\mathbb{P}^1}) = 0$, et V est lisse de dimension $n+1$ (loc. cit.).

Notons G le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1) \simeq \mathbb{PGL}_2$ fixant a_o ; il est isomorphe au groupe affine $\mathbb{G}_a \ltimes \mathbb{G}_m$ et opère librement à droite dans V de façon naturelle.

L'isomorphisme $V/G \simeq \mathbb{P}^{n-1}$.

Fixons un vecteur tangent ∂ non nul dans $T_{\mathbb{P}^1, a_o}$ et notons φ le morphisme $V \to T_{\mathbb{P}^1, a_o}$ qui à f dans V associe l'image de ∂ par $Tf(a_o) : T_{\mathbb{P}^1, a_o} \to T_{X, x_o}$. Il est invariant par le sous-groupe $\mathbb{G}_a$ de G et prend ses valeurs dans le complémentaire de l'origine ; il est équivariant sous l'action de $\mathbb{G}_m$ et définit par passage au quotient un morphisme

$$\theta : V \longrightarrow P_\bullet(T_{\mathbb{P}^1, a_o}) \simeq \mathbb{P}^{n-1}$$

invariant par G. Les fibres non vides de θ sont lisses de dimension 2 ; en effet, cela revient à dire que, pour tout $f \in V(k)$, $\varphi^{-1}(\varphi(f))$ est lisse de dimension 1 ; or, $\varphi^{-1}(\varphi(f))$ s'identifie à la trace de V sur $\mathrm{Mor}(\mathbb{P}^1, C; f|_{2(a_o)})$, qui est lisse de dimension 1 d'après le proposition 3 (noter que $f^*(T_X) \otimes \mathcal{O}(-2a_o) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}(-1)^{n-1}$). Par conséquent, les fibres de θ sont lisses et réunions disjointes d'orbites de G. De là, de la simple connexité de $\mathbb{P}^{n-1}$, et d'un certain nombre d'arguments que je n'ai pas la patience de recopier ici, Mori déduit que θ identifie $P_\bullet(T_{\mathbb{P}^1, a_o})$ au quotient de V par G.

Le morphisme $\pi : V \overset{G}{\times} \mathbb{P}^1 \to X$.

Considérons le produit contracté $V \overset{G}{\times} \mathbb{P}^1$ quotient de $V \times \mathbb{P}$ par l'action de G telle que $g(f,a) = (f \circ g^{-1}, g(a))$; c'est un fibré à fibre $\mathbb{P}^1$ sur V/G, localement trivial puisqu'il possède une section S donnée par le point $a_o \in \mathbb{P}^1(k)$ qui est fixe sous G. Le morphisme $(f,a) \mapsto f(a)$ de $V \times \mathbb{P}^1$ dans X passe au quotient et définit un morphisme propre $\pi : V \overset{G}{\times} \mathbb{P}^1 \mapsto X$ qui envoie S sur $x_o \in X(k)$. Soit $a \in \mathbb{P}^1(k)$ distinct de a_o. Notons λ_a le morphisme $f \mapsto f(a)$ de V dans X ; on a $\lambda_a^{-1}(\lambda_a(f)) = V \cap \mathrm{Mor}(\mathbb{P}^1, X; f|_{(a)+(a_o)})$ et , par le même calcul que plus haut, on vérifie que les fibres de λ_a sont lisses de dimension 1. Il en résulte que π est étale en dehors de S.

Posant $Y = V/G$, $Z = V \overset{G}{\times} \mathbb{P}^1$, on est ainsi ramené à prouver le lemme suivant :

LEMME .- Soient X et Z deux variétés projectives lisses et irréductibles, $Y = \mathbb{P}^{n-1}$, $\pi : Z \to X$ et $\psi : Z \to Y$ deux morphismes, et $\sigma : Y \to Z$ une section de ψ. On suppose que ψ est une fibration à fibres $\mathbb{P}^1$, que π est étale sur $Z - \sigma(Y)$ et que π contracte $\sigma(Y)$ en un point x_o de X. Alors X est isomorphe à $\mathbb{P}^n$ et π est l'éclatement du point x_o.

Considérons la factorisation de Stein $Z \xrightarrow{\pi'} X' \xrightarrow{u} X$ de π. Alors π' contracte $\sigma(Y)$ en un point x'_o de X' et applique isomorphiquement $Z - \sigma(Y)$ sur $X' - \{x'_o\}$. Par ailleurs, le morphisme u est fini et est étale au-dessus de $X - \{x_o\}$; d'après le théorème de pureté du lieu de ramification, u est donc étale et fini. Si X' est isomorphe à $\mathbb{P}^n$ (donc simplement connexe), u est un revêtement galoisien, nécessairement trivial puisque tout automorphisme de $\mathbb{P}^n$ a un point fixe, donc X est isomorphe à $\mathbb{P}^n$. Ceci nous ramène à démontrer le lemme lorsque $X = X'$, c'est-à-dire lorsque π applique isomorphiquement $Z - \sigma(Y)$ sur $X - \{x_o\}$.

Soient L une droite et H un hyperplan de $Y \simeq \mathbb{P}^{n-1}$ tels que $L \not\subset H$, donc $(H \cdot L) = 1$. Posons $D = \psi^{-1}(H) \in \mathrm{Div}(Z)$ et $C = \sigma(L) \subset Z$, de sorte que $(D \cdot C) = 1$. Puisque $x_o \in \pi(D)$, on a $\pi^{-1}(\pi(D)) = D + a\,\sigma(Y)$ avec $a \in \mathbb{N}$, et la formule de projection donne

$$0 = (\pi(D) \cdot \pi(C)) = (\pi^{-1}(\pi(D)) \cdot C) = 1 + a(\sigma(Y) \cdot C) \quad .$$

Cela implique $(\sigma(Y) \cdot C) = -1$, et le fibré normal à $\sigma(Y)$ dans Z est $\mathcal{O}_{\sigma(Y)}(-1)$. De la suite exacte de $\mathcal{O}_Z$-modules

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Z \longrightarrow \mathcal{O}_Z(\sigma(Y)) \longrightarrow \mathcal{O}_{\sigma(Y)}(-1) \longrightarrow 0$$

on tire la suite exacte de $\mathcal{O}_Y$-modules

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow \psi_*(\mathcal{O}_Z(\sigma(Y))) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-1) \longrightarrow 0 \quad ,$$

de sorte que $\psi_*(\mathcal{O}_Z(\sigma(Y)))$ s'identifie à $\mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{O}_Y(-1)$ et Z à $P^\bullet(\mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{O}_Y(-1))$. En définitive Z s'identifie à l'éclaté de $\mathbb{P}^n$ en un point, et il existe un morphisme $\psi' : Z \to \mathbb{P}^n$ qui contracte $\sigma(Y)$ en un point p_o et induit un isomorphisme de $Z - \sigma(Y)$ sur $\mathbb{P}^n - \{p_o\}$. L'application birationnelle bijective $\psi' \circ \psi^{-1} : X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ est un isomorphisme (théorème principal de Zariski), d'où le lemme et le théorème.

§ 7. Compléments.

Le théorème 2 a été démontré de façon indépendante par Y.T. Siu et S.T.

Yau [9] (il avait été démontré précédemment par A. Andreotti et T. Frankel [1] pour $n = 2$, et T. Mabuchi [5] pour $n = 3$). Dans cette démonstration, les <u>applications harmoniques</u> de $\mathbb{S}^2$ dans V jouent un rôle parallèle à celui des morphismes de $\mathbb{P}^1$ dans X dans la démonstration de Mori.

Par ailleurs, le cas $n = 1$ suggère une conjecture "duale" : une variété kæhlérienne compacte à courbure sectionnelle > 0 a comme revêtement universel la boule de $\mathbb{C}^n$. Une classe de contre-exemples en dimension 2 vient d'être construite par G. Mostow et Y.T. Siu [8], en utilisant un réseau non arithmétique dans $\mathbb{SU}(2,1)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] T.T. FRANKEL, Manifolds with positive curvature, Pacific J. Math., 11 (1961), 165-174.

[2] R. HARTSHORNE, Ample vector bundles, Pub. Math. IHES, 29 (1966), 63-94.

[3] R. HARTSHORNE, Ample subvarieties of algebraic varieties, Lecture Notes in Maths., 156, Springer-Verlag (1970).

[4] S. KOBAYASHI and T. OCHIAI, On complex manifolds with positive tangent bundles, J. Math. Soc. Japan 22 (1970), 499-525.

[5] T. MABUCHI, $\mathbb{C}^3$-actions and algebraic threefolds with ample tangent bundle, Nagoya Math. J. 69 (1978), 33-64.

[6] S. MORI, Projective manifolds with ample tangent bundles, <u>à paraître</u>.

[7] S. MORI and H. SUMIHIRO, On Hartshorne's conjecture, J. Math. Kyoto U., 18-3 (1978), 523-533.

[8] G. MOSTOW and Y.T. SIU, A compact Kähler surface of negative curvature not covered by the ball, <u>à paraître</u>.

[9] Y.T. SIU and S.T. YAU, Compact Kähler manifolds of positive bisectional curvature, <u>à paraître</u>.

Michel DEMAZURE

Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
F91128 Palaiseau Cedex