PAUL GÉRARDIN

# Changement du corps de base pour les représentations de $GL(2)$

*Séminaire N. Bourbaki*, 1979, exp. n° 510, p. 65-88

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1977-1978__20__65_0>

# CHANGEMENT DU CORPS DE BASE POUR LES REPRÉSENTATIONS DE GL(2)

[d'après R. P. LANGLANDS, H. SAITO et T. SHINTANI]

par Paul GÉRARDIN

Soient $f(z) = \sum_{n\geq 1} a_n z^n$ une forme modulaire parabolique de poids $2$, fonction propre des opérateurs de Hecke, et $E$ un corps quadratique réel. Avec le caractère d'ordre $2$ que définit $E$, on fabrique une nouvelle série de Dirichlet

$$\left(\sum_{n\geq 1} a_n\, n^{-s}\right)\left(\sum_{m\geq 1} a_m\, \chi(m)\, m^{-s}\right) .$$

Doi et Naganuma ont montré, à l'aide de résultats de Shimura, que, dans un certain nombre de cas, cette série était associée à une forme modulaire parabolique, de poids $2$, relativement à une algèbre de quaternions sur $E$, qui est fonction propre des opérateurs de Hecke ([3], [5] 7.7). Formulé en termes de représentations, ceci a permis d'associer à une représentation admissible automorphe parabolique irréductible $\pi$ du groupe $GL_2(\mathbb{A})$, où $\mathbb{A}$ est l'anneau des adèles de $\mathbb{Q}$, une représentation admissible automorphe parabolique irréductible $\pi'_{E/\mathbb{Q}}$ du groupe $H(\mathbb{A}_E)$, où $H$ est le groupe multiplicatif de l'algèbre de quaternions sur $E$ ci-dessus, et $\mathbb{A}_E = \mathbb{A} \otimes E$, les séries $L$ étant reliées par

$$L(\pi'_{E/\mathbb{Q}}) = L(\pi)\ L(\pi \otimes \chi)$$

(où $\chi$ opère via l'isomorphisme du corps de classes global par la multiplication $\chi(\det x)$, $x \in GL_2(\mathbb{A})$ ). Or, Jacquet et Langlands associent à chaque représentation admissible automorphe parabolique irréductible de $H(\mathbb{A}_E)$ une représentation admissible automorphe parabolique irréductible de $GL_2(\mathbb{A}_E)$ ([10], th.14.4) qui a même fonction $L$. On a ainsi un exemple de relèvement, ou changement de corps de base, pour des représentations automorphes. Avec les techniques de [10], Jacquet étend ces résultats au cas d'une extension quadratique d'un corps de nombres algébriques arbitraire [17].

Une étape essentielle fut franchie par H. Saito : il se place dans le cas d'une extension cyclique d'ordre premier de $\mathbb{Q}$, et introduit une formule des traces tordue par le groupe de Galois sur les espaces de formes modulaires relativement à $E$ ([7]). La seconde étape fondamentale, due à T. Shintani, a été la transcription et l'extension du travail de H. Saito en termes de représentations des groupes $GL_2(\mathbb{A})$ et $GL_2(\mathbb{A}_E)$ , ainsi que la définition du relèvement local ([8] et [9]). S'emparant alors de la question, R. P. Langlands en obtient la solution complète à l'automne 75 ([1]), l'appliquant immédiatement à la solution de la conjecture d'Artin pour les représentations de type tétraédral, et certaines de type octaédral.

Ce succès des techniques de représentations des groupes appliquées à un problème qui résistait depuis longtemps aux méthodes classiques de la théorie des nombres, donne la meilleure des justifications à la philosophie de Langlands ([14], [15]).

Son mémoire ([1]) approche les 300 pages, et près de la moitié est consacrée à la mise en oeuvre de la formule des traces tordue. Dans cet exposé, on trouvera au § 3 (un extrait de) la philosophie de Langlands pour les groupes $GL_n$ , ce qui nécessite les deux premiers paragraphes. Les définitions et résultats du changement de base figurent au § 4. Le § suivant donne la démonstration de la conjecture d'Artin dans le cas tétraédral et le dernier § dit quelques mots des démonstrations de Langlands.

## 1. Représentations des groupes de Weil

1.1. Tous les corps de nombres algébriques considérés sont pris dans une clôture algébrique fixée $\overline{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$ . A chacun de ces corps $F$ , on associe un groupe de Weil $W_F$ (v. Tate in [2]) : c'est un groupe localement compact, extension du groupe de Galois $\Gamma_F = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$ par la limite projective, prise suivant les normes, des composantes neutres des groupes des classes d'idèles $C_E = E^\times\backslash\mathbb{A}_E^\times$ relativement aux corps de nombres algébriques $E$ qui contiennent $F$ . Rendu abélien, le groupe $W_F$ s'identifie canoniquement au groupe $C_F$ , ce qui permet de parler du module $|w|$ d'un élément $w \in W_F$ .

Les injections suivantes identifient $W_E/W_F$ à $\Gamma_E/\Gamma_F = \mathrm{Hom}_F(E,\overline{\mathbb{Q}})$ :

$$(1.1) \qquad W_E \to W_F \qquad \text{pour } E \supset F ,$$

elles ne sont déterminées qu'à un automorphisme près de $W_F$ qui est intérieur sur chaque quotient $W_{K/F} = W_F / W_K'$ , où $W_K'$ est l'adhérence du groupe des commutateurs de $W_K$ , pour $K$ galoisien sur $F$ . Sur les groupes rendus abéliens, l'injection (1.1) donne la norme

$$(1.2) \qquad N_{E/F} : C_E \to C_F ,$$

ce qui permet de prendre des modules de façon compatible sur tous les groupes $W_F$ .

Quand l'extension $E$ est galoisienne sur $F$ , on a la suite

$$1 \to C_E \to W_{E/F} \to \mathrm{Gal}(E/F) \to 1$$

où l'injection de $C_E$ dans $W_{E/F}$ est déterminée à automorphisme intérieur près ; la classe correspondante dans $H^2(\mathrm{Gal}(E/F), C_E)$ est la classe canonique. Les sous-groupes d'indice fini de $W_F$ sont les $W_E$ pour $E \supset F$ .

1.2. Pour chaque place $p \leq \infty$ de $\mathbb{Q}$ , on se fixe une clôture algébrique $\bar{\mathbb{Q}}_p$ du complété $\mathbb{Q}_p$ de $\mathbb{Q}$ en $p$ . Les extensions finies de $\mathbb{Q}_p$ considérées seront toutes dans $\bar{\mathbb{Q}}_p$ . Pour chaque corps de nombres algébriques $F$ et chaque place $v$ de $F$ , on dispose du groupe de Weil $W_{F_v}$ du complété de $F$ en $v$ : c'est le sous-groupe de $\Gamma_{F_v} = \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/F_v)$ , si $v|p$ , des éléments qui induisent sur le corps résiduel de $\bar{\mathbb{Q}}_p$ un automorphisme du type $x \longmapsto x^{p^n}$ ; il contient le groupe d'inertie $I_{F_v}$ et le quotient est isomorphe à $\mathbb{Z}$ ; le groupe $W_{F_v}$ rendu abélien s'identifie canoniquement au groupe multiplicatif $F_v^\times$ , et $I_{F_v}$ est le noyau de la composition : $W_{F_v} \to F_v \to \mathbb{Z}$ ; on a donc la suite :

(1.3) $$1 \to I_{F_v} \to W_{F_v} \to \mathbb{Z} \to 0 \quad ;$$

sur les groupes rendus abéliens, l'injection

$$W_{E_w} \to W_{F_v} \quad , \quad w|v \quad , \quad E \supset F \ ,$$

est donnée par la norme ; on a $W_{E_w}/W_{F_v} = \Gamma_{F_v}/\Gamma_{E_w} = \mathrm{Hom}_{F_v}(E_w, \bar{\mathbb{Q}}_p)$ pour $w|v|p$ ; les sous-groupes d'indice fini de $W_{F_v}$ sont les $W_{E_w}$ .

On a des injections pour chaque place $v$ de $F$ , qui sont continues :

(1.4) $$W_{F_v} \to W_F$$

et déterminées à un automorphisme de $W_F$ près qui est intérieur sur chaque quotient $W_{K/F}$ . Le groupe $W_{\mathbb{R}}$ est l'extension non triviale de $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ par $W_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^\times$ .

1.3. Pour chaque corps de nombres algébriques $F$ , on note $\mathcal{W}_n(F)$ l'ensemble des classes de représentations continues semi-simples de degré $n$ du groupe $W_F$ . Les restrictions (1.1) définissent des applications de changement de base :

(1.5) $$\mathcal{W}_n(F) \to \mathcal{W}_n(E) \quad , \quad \rho \longmapsto \rho_{E/F} \ .$$

Pour chaque place $v$ de $F$ , on définit l'ensemble $\mathcal{W}_n(F_v)$ ainsi :

si $v$ est archimédienne, c'est l'ensemble des classes de représentations continues d'image semi-simple de degré $n$ de $W_{F_v}$ ,

si $v$ n'est pas archimédienne, c'est l'ensemble des classes de représentations continues $F_v$-semi-simples de l'extension de $W_{F_v}$ par le groupe additif de $\mathbf{C}$ , l'action de $W_{F_v}$ sur $\mathbf{C}$ étant donnée par la multiplication par la valeur absolue de $F_v^\times$ (voir le deuxième article de Deligne dans [13]).

La donnée d'une représentation $\rho$ de $\mathcal{W}_n(F)$ définit par (1.4) une représentation $\rho_v$ de degré $n$ de $F_v$ , dont la classe dans $\mathcal{W}_n(F_v)$ ne dépend pas de l'injection choisie en (1.4) ; la continuité de $\rho$ , et le fait que $GL(n,\mathbf{C})$ ne possède pas de petit sous-groupe, entraînent que pour presque toute place non archimédienne, la restriction $\rho_v$ est triviale sur l'inertie $I_{F_v}$ , donc, par (1.3), que sa classe est définie par l'image d'un Frobenius en $v$ , c'est-à-dire par la classe de conjugaison semi-simple $s(\rho_v)$ de $GL(n,\mathbf{C})$ , image de $\rho_v$ :

(1.6) $$\rho_v \longmapsto s(\rho_v) \quad ;$$

on appellera <u>non ramifiée</u> toute représentation de $\mathcal{W}_n(F_v)$ triviale sur l'inertie. D'autre part, il est connu ([10], lemme 12.3) que la connaissance des classes $\rho_v$ dans $\mathcal{W}_n(F_v)$ pour presque toute place $v$ détermine la représentation $\rho$ dans $\mathcal{W}_n(F)$ .

1.4. En degré $1$ , l'ensemble $\mathcal{W}_1(F)$ est l'ensemble des quasicaractères du groupe $C_F$ des classes d'idèles de $F$ , et $\mathcal{W}_1(F_v)$ l'ensemble des quasicaractères du groupe $F_v^\times$ . Or à tout quasicaractère $\chi$ de $C_F$ on sait associer une fonction $L(\chi)$ méromorphe sur $\mathbf{C}$

$$s \longmapsto L(s,\chi) = L(\chi.|\ |^s)$$

et holomorphe si $\chi$ ne se factorise pas à travers le module ; cette fonction s'écrit comme produit de fonctions $L(\chi_v)$ associées aux quasicaractères $\chi_v$ des groupes $F_v^*$ , et satisfait une équation fonctionnelle

$$L(\chi) = \varepsilon(\chi)\ L(\chi^{-1}.|\ |) ,$$

où $\varepsilon(\chi.|\ |^s)$ est une exponentielle en $s$ , qui s'interprète comme produits de facteurs locaux $\varepsilon(\chi_v , \psi_v)$ , $\psi_v$ étant le caractère additif de $F_v$ que définit un caractère additif $\psi \neq 1$ de $F\backslash\mathbb{A}_F$ (voir la thèse de Tate dans [22]).

Langlands a montré que pour chaque $n$ et chaque corps de nombres algébriques, il y avait une fonction $L(\rho)$ pour tout $\rho \in \mathcal{W}_n(F)$ qui soit additive en les représentations, donnée par la fonction ci-dessus en degré $1$, et inductive en ce sens que

$$L(\rho) = L(\sigma) \quad \text{si} \quad \rho = \mathrm{Ind}_{W_E}^{W_F} \sigma \quad , \text{ noté } \mathrm{Ind}_E^F \sigma \ ;$$

la fonction $L(\rho)$ est produit des fonctions $L(\rho_v)$ données par

$$L(\rho_v) = \det(1 - s(\rho_v))^{-1} \ , \quad v \text{ place non archimédienne,}$$

où $s(\rho_v)$ est la classe de conjugaison définie par l'image d'un Frobenius en $v$ opérant sur le sous-espace des points fixes par l'inertie $\rho(I_{F_v})$. Via un théorème de Brauer sur les caractères des groupes finis ([25], th. 23), ces fonctions $L(\rho)$ sont méromorphes dans $\mathbb{C}$ et satisfont une équation fonctionnelle

$$L(\rho) = \varepsilon(\rho)\, L(\rho^\vee \otimes |\ |) \ , \quad \text{où } \rho^\vee \text{ est la contragrédiente de } \rho \ ,$$

et $\varepsilon(\rho)$ est une exponentielle en $s$, que Langlands a démontré être un produit de facteurs locaux $\varepsilon(\rho_v, \psi_v)$ ne dépendant que des $\rho_v$, et $\psi$ étant pris comme ci-dessus ; de plus, ils sont additifs mais inductifs seulement en degré $0$. La conjecture d'Artin est la suivante

> "sauf lorsque $\rho$ se factorise à travers le module sur $W_F$, la fonction $L(\rho)$ relative à une représentation admissible irréductible du groupe $W_F$ est holomorphe, et bornée dans les bandes verticales de largeur finie".

1.5. Les représentations $\rho \in \mathcal{W}_2(F)$ se classent ainsi :

a) représentations réductibles, somme de deux quasicaractères de $W_F$ ;

b) représentations induites par un quasicaractère $\theta$ d'un sous-groupe d'indice 2, donc un groupe $W_K$ relatif à une extension quadratique $K$ de $F$ : on écrit $\rho = \mathrm{Ind}_K^F \theta$ ; elles sont irréductibles si $\theta$ est régulier sous $\mathrm{Gal}(K/F)$, et sinon $\mathrm{Ind}_K^F \theta$ est la somme des deux quasicaractères $\chi$ de $W_F$ tels que $\chi \circ N_{E/F} = \theta$ ;

c) les autres représentations sont d'image dans $PGL(2,\mathbb{C})$ un groupe fini non diédral, et donc $\mathfrak{A}_4$ ou $\mathfrak{S}_4$ ou $\mathfrak{A}_5$ : on dit que le type est tétraédral ou octaédral ou icosaédral.

1.6. Pour les représentations de degré $1$, le changement de base (1.5) est donné par la composition avec la norme, d'après (1.2) :

(1.7) $$\chi \longmapsto \chi \circ N_{E/F} \quad , \text{ noté } \chi_{E/F} \ ;$$

lorsque l'extension $E$ est cyclique sur $F$, les caractères de $C_F$ triviaux sur l'image de la norme de $C_E$ s'identifient aux caractères du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(E/F) = \Gamma$, et (1.7) définit une bijection entre l'ensemble des orbites de $\hat{\Gamma}$ dans $\mathcal{W}_1(F)$ et l'ensemble des points fixes de $\Gamma$ dans $\mathcal{W}_1(E)$.

Plus généralement, si $\rho \in \mathcal{W}_n(F)$ est somme de $n$ quasicaractères $\chi_i$, alors $\rho_{E/F}$ est somme des $n$ quasicaractères $\chi_{i,E/F}$.

Si $\rho = \mathrm{Ind}_K^F\, \theta$ est une représentation de degré 2 induite par le quasicaractère $\theta$ de $W_K$, alors son relèvement à $E$ est :

$$\rho_{E/F} = \mathrm{Ind}_{KE}^{E}\, \theta_{KE/K} \qquad \text{si } K \neq E ,$$

$$\rho_{E/F} = \theta \oplus {}^{\sigma}\theta \qquad \text{si } K = E \text{ et } \{1,\sigma\} = \mathrm{Gal}(E/F) .$$

D'une façon générale, pour une extension cyclique $E$ de $F$, la restriction $\rho_{E/F}$ de $\rho \in \mathcal{W}_n(F)$ à $W_F$ a pour fonction $L(\rho_{E/F})$ le produit des fonctions $L(\rho \otimes \chi)$ quand $\chi$ parcourt le groupe $\hat{\Gamma}$ des caractères de $\Gamma$ ; il en est de même de $\varepsilon(\rho_{E/F})$ :

$$L(\rho_{E/F}) = \prod_{\chi \in \hat{\Gamma}} L(\rho \otimes \chi) \quad , \quad \varepsilon(\rho_{E/F}) = \prod_{\chi \in \hat{\Gamma}} \varepsilon(\rho \otimes \chi) .$$

Ces formules résultent immédiatement des propriétés d'inductivité des fonctions $L$ et $\varepsilon$ (voir Tate dans [2]).

## 2. Représentations des groupes $GL_n$

2.1. Pour chaque place non archimédienne $v$ de $F$ soit $K_v$ le sous-groupe $GL_n(\mathcal{O}_v)$ de $GL_n(F_v)$ qui fixe le réseau $\mathcal{O}_v \times \mathcal{O}_v$ du plan $F_v \times F_v$, où $\mathcal{O}_v$ est l'anneau des entiers de $F_v$ : c'est un sous-groupe compact maximal, ouvert ; l'algèbre de convolution $\mathcal{H}_n(F_v) = \mathcal{H}(GL_n(F_v), GL_n(\mathcal{O}_v))$ - dite de Hecke - formée des fonctions à support compact sur $GL_n(K_v)$ qui sont bi-invariantes par $K_v$ est commutative et il y a un isomorphisme canonique ([24]) :

$$\mathcal{H}_n(F_v) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[(F_v^\times/\mathcal{O}_v^\times)^n]^{\mathfrak{S}_n} = \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]^{\mathfrak{S}_n} , \tag{2.1}$$

de $\mathcal{H}_n(F_v)$ sur la sous-algèbre de l'algèbre du groupe $\mathbb{Z}^n$ formée des quantités invariantes par le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ ; il est donné par l'application qui envoie $h \in \mathcal{H}$ sur la fonction de $m = (m_1,\ldots,m_n) \in \mathbb{Z}^n$ fournie par

$$h^{\vee}(m) = \prod_{i\neq j}\left|\frac{a_i}{a_j} - 1\right|^{\frac{1}{2}} \int h(x^{-1}ax)dx \quad , \quad a = \mathrm{diag}(a_i) \in (F_v^\times)^n ,$$

où les $a_i$ sont tous distincts et ont pour valuation $m_i$, et l'intégration porte sur l'ensemble des classes à droite de $GL_n(F_v)$ modulo le sous-groupe diagonal, la mesure quotient étant celle des mesures de Haar donnent la masse 1 au sous-groupe compact maximal $K_v$ et à $(\mathcal{O}_v^\times)^n$ respectivement. On en déduit une bijection de l'ensemble des caractères de l'algèbre $\mathcal{H}(F_v)$ avec $\mathbf{C}^{*n}/\mathfrak{S}_n$ , c'est-à-dire avec l'ensemble des classes de conjugaison semi-simples de $GL(n,\mathbf{C})$ . En une telle place non archimédienne $v$ , on dit qu'une représentation du groupe $GL_n(F_v)$ est <u>admissible</u> si elle définit un $K_v$-module semi-simple avec multiplicités finies. La commutativité de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_n(F_v)$ implique qu'une représentation admissible irréductible de $GL_n(F_v)$ a au plus une droite de vecteurs fixés par $K_v$ , – dans ce cas, on dit que la représentation est <u>non ramifiée</u>–, et l'application qui à une telle représentation $\pi_v$ associe la valeur propre de $\mathcal{H}_n(F_v)$ sur la droite $K_v$-fixée de l'espace de $\pi_v$ donne une bijection entre les classes de représentations admissibles irréductibles non ramifiées de $GL_n(F_v)$ et l'ensemble des caractères de $\mathcal{H}_n(F_v)$ , donc aussi avec l'ensemble des classes de conjugaison semi-simples de $GL(n,\mathbf{C})$ :

$$\pi_v \longmapsto s(\pi_v) \ . \tag{2.2}$$

Plus précisément, pour $(t_1,\dots,t_n) \in \mathbf{C}^{*n}$ , la représentation de $GL_n(F_v)$ par translations à droite dans l'espace des fonctions localement constantes sur le groupe et telles que

$$f(bx) = \prod_i t_i^{\mathrm{val}\, a_i} |a_i|^{\frac{n-2i+1}{2}} f(x) \quad \text{si} \quad b = \begin{pmatrix} a_1 & \cdot & * \\ & \cdot & \cdot \\ 0 & & a_n \end{pmatrix},$$

admet un unique sous-quotient ayant une droite fixée par $K_v$ : c'est la représentation $\pi_v$ de classe $s(\pi_v)$ celle de $(t_1,\dots,t_n)$ .

On note $\mathcal{A}_n(F_v)$ l'ensemble des classes de représentations admissibles irréductibles du groupe $GL_n(F_v)$ .

2.2. A l'infini, on note $K_v$ le sous-groupe $O(n,\mathbf{R})$ de $GL_n(\mathbf{R})$ si $F_v = \mathbf{R}$ , et le sous-groupe $U(n)$ de $GL_n(\mathbf{C})$ si $F_v = \mathbf{C}$ . Par <u>représentation admissible</u> du groupe $GL_n(F_v)$ , $v$ place archimédienne, on entend la donnée d'un $(\mathfrak{gl}_n(F_v), K_v)$-module qui est un $K_v$-module semi-simple avec multiplicités finies (ce n'est donc pas une représentation du groupe $GL_n(F_v)$ , sauf si la dimension est finie) (cf. dans [2], articles de N. Wallach et D. Flath).

Pour toute place $v$ , on sait, par un théorème d'Harish-Chandra si $v$ est archimédienne, et de Bernstein sinon, que dans une représentation unitaire irréductible du groupe $GL_n(F_v)$ , les vecteurs $K_v$-finis forment une représentation admissible de $GL(F_v)$ . De plus, une représentation de $GL_n(F_v)$ où les multiplicités de $K_v$ sont finies est irréductible si et seulement si la représentation admissible qu'elle définit sur les vecteurs $K_v$-finis est irréductible.

2.3. Par <u>représentation admissible</u> du groupe $GL_n(\mathbb{A}_F)$ , produit direct restreint des groupes $GL_n(F_v)$ par rapport aux groupes $K_v$ , on entend la donnée d'une représentation du groupe produit direct restreint des $GL_n(F_v)$ aux places finies, dont l'espace est un $(\prod_{v|\infty} \mathfrak{gl}(F_v), \prod_{v|\infty} K_v)$- module compatible, et qui forme un $\Pi K_v$-module semi-simple avec multiplicités finies.

On sait que toute représentation admissible irréductible $\pi$ de $GL_n(\mathbb{A}_F)$ s'écrit comme produit tensoriel restreint

$$\pi = \otimes \pi_v$$

de représentations admissibles irréductibles $\pi_v$ de $GL_n(F_v)$ , que la classe de $\pi_v$ est déterminée par celle de $\pi$ , et que pour presque toute place $v$ non archimédienne, $\pi_v$ est non ramifiée. Si maintenant $\pi$ est une représentation unitaire irréductible de $GL_n(\mathbb{A}_F)$ , alors elle s'écrit $\pi = \otimes \pi_v$ avec des représentations unitaires irréductibles, les vecteurs $\Pi K_v$-finis définissent une représentation admissible irréductible $\pi^{adm}$ , et $(\pi^{adm})_v$ est isomorphe à la représentation admissible $(\pi_v)^{adm}$ définie par les vecteurs $K_v$-finis de $\pi_v$ (voir Flath dans [2]).

Soit $\mathcal{A}_n(F)$ l'ensemble des classes d'équivalence des représentations admissibles irréductibles de $GL_n(\mathbb{A}_F)$ intervenant comme sous-quotients de la représentation régulière dans les formes automorphes sur $GL_n(F)\backslash GL_n(\mathbb{A}_F)$ ; on appellera automorphes les représentations de $\mathcal{A}_n(F)$ , et on notera $\mathcal{A}_n^{\circ}(F)$ celles qui sont paraboliques ([15 ]).

## 3. <u>Correspondance de Langlands pour les groupes</u> $GL_n$

3.1. L'énoncé du principe de fonctorialité, dans toute sa généralité, figure dans la conférence donnée par Langlands à l'Université de Washington en 1969 ([14], voir aussi Borel dans [2], [15]). Ici nous n'en donnerons qu'une partie, comprenant les cas qui nous intéressent. Il ne s'agit que d'une conjecture, et donc d'un guide pour l'action.

Le principe est le suivant, avec les notations introduites aux § 1 et 2 :

" Pour chaque corps de nombres algébriques $F$ , pour chaque place $v$ de $F$ , pour chaque entier positif $n$ , il y a une bijection

(3.1) $$\mathcal{W}_n(F_v) \to \mathcal{A}_n(F_v) \quad \text{notée} \quad \rho_v \longmapsto \pi_v(\rho_v) \quad ,$$

donnée sur les représentations non ramifiées par

$$s(\pi_v(\rho_v)) = s(\rho_v) \quad ,$$

et satisfaisant aux propriétés suivantes :

a) pour $\rho \in \mathcal{W}_n(F)$ , la représentation $\otimes\, \pi(\rho_v)$ figure dans $\mathcal{A}_n(F)$ , ce qui donne une injection

(3.2) $$\mathcal{W}_n(F) \to \mathcal{A}_n(F) \quad , \text{ notée } \quad \rho \longmapsto \pi(\rho) \quad ;$$

b) si $E$ est un produit fini d'extensions de degré $d_i$ de $F$ , si $u$ est un morphisme rationnel

(3.3) $$u : \prod_i GL_{n_i d_i}(\mathbf{C}) \to GL_n(\mathbf{C}) \ ,$$

et si on a un homomorphisme arithmétique, pour une extension $E$ de $F$ :

(3.4) $$\gamma : W_E \to W_F \ ,$$

alors, pour chaque famille $\pi_i \in \mathcal{A}_{n_i}(E_i)$ , il y a une $\Pi \in \mathcal{A}_n(E)$ qui est donnée pour chaque place $w$ de $E$ par la formule suivante, où $v$ est la place de $F$ que $w$ divise :

$$\Pi_w = \pi_w(u(\sum_{w_i | v} \mathrm{Ind}_{E_i, w_i}^{F_v} \rho_{w_i})_i \circ \gamma_w) \ ,$$

les $\rho_{w_i} \in \mathcal{A}_{n_i}(E_i)$ étant donnés par $\pi_{w_i}(\rho_{w_i}) = (\pi_i)_{w_i}$ pour tous $i$ et $w_i$ ; de plus, si $\pi_i = \pi(\rho_i)$ pour tout $i$ , alors

$$\Pi = \pi(u(\mathrm{Ind}_{E_i}^{F} \rho_i)_i \circ \gamma) \quad ."$$

3.2. D'autre part, Godement et Jacquet dans [23] ont associé à chaque représentation automorphe $\pi \in \mathcal{A}_n(F)$ une fonction $L(\pi)$ , qui est méromorphe dans $\mathbf{C}$ , holomorphe et bornée dans les bandes verticales si $\pi$ est parabolique, et satisfaisant à une équation fonctionnelle

$$L(\pi) = \varepsilon(\pi)\, L(\pi^\vee \otimes |\ |) \ ,$$

où figure la représentation contragrédiente $\pi^\vee$ , tordue par $x \longmapsto |\det x|$ ; on espère donc que $L(\pi) = L(\rho)$ pour $\pi = \pi(\rho)$ , ce qui donnerait la conjecture d'Artin.

3.3. Pour $n = 2$ , Jacquet et Langlands ont montré que la correspondance locale (3.1), si elle existait, devait être donnée sur les représentations non primitives de degré 2 de $W_{F_v}$ par :

a) pour $\mu \oplus \nu \in \mathcal{W}_2(F_v)$ , c'est la représentation $\pi_v(\mu,\nu)$ de la série principale de $GL_2(F_v)$ induite par le quasicaractère $\begin{pmatrix} u & * \\ 0 & v \end{pmatrix} \longmapsto \mu(u)\ \nu(v)|uv^{-1}|_v^{\frac{1}{2}}$ du sous-groupe triangulaire lorsqu'elle est irréductible, et par son sous-quotient de dimension finie sinon (p. 103-104, th. 5.11, th. 6.2 de [10]) ;

b) pour $\mathrm{Ind}_{K_v}^{F_v}\ \theta \in \mathcal{W}_2(F_v)$ , c'est la représentation de Weil relative au quasicaractère $\theta$ de $K_v^\times$ (Prop. 1.5 et th. 4.7 de [10]) ;

c) si $v$ est non archimédienne, pour $\chi \otimes \mathrm{sp}(2) \in \mathcal{W}_2(F_v)$ , c'est la représentation de codimension 1 dans la représentation induite du a) pour $\mu = \chi|\ |^{\frac{1}{2}}$ , $\nu = \chi|\ |^{-\frac{1}{2}}$ (p. 104 de [10]).

Ils ont aussi prouvé (th. 10.10 et Prop. 12.1 de [10], § 10 de [1]) que

a') la représentation, définie par la théorie des séries d'Eiseinstein à partir de deux quasicaractères $\mu$ et $\nu$ de $C_F$ : $\pi(\mu,\nu) = \otimes\pi_v(\mu_v, \nu_v)$ était dans $\mathcal{A}_2(F)$

b') la représentation, définie par un quasicaractère $\theta$ du groupe $C_K$ des classes d'idèles d'une extension quadratique $K$ de $F$ , par

$$\pi(\mathrm{Ind}_K^F\ \theta) = \otimes\pi_v(\mathrm{Ind}_{K_v}^{F_v}\ \theta_v)$$

(où $\mathrm{Ind}_{K_v}^{F_v}\ \theta_v = \theta_v \oplus \theta_v$ si $v$ est décomposé dans $K$), était dans $\mathcal{A}_2(F)$ , parabolique si $\theta$ est régulier sous $\mathrm{Gal}(K/F)$ .

c') les $\pi \in \mathcal{A}_2(F)$ non paraboliques sont donnés par deux quasicaractères $\mu$ et $\nu$ de $C_F$ et un ensemble fini de places $S$ de $F$ par $\pi = \otimes\pi_v$ où

$\pi_v = \pi(\mu_v, \nu_v)$ si $v \notin S$

$\pi_v$ , pour $v \in S$ , est la sous-représentation de codimension finie non nulle de la représentation induite du a) ci-dessus pour $\mu_v$ , $\nu_v$ .

De plus, ils prouvent essentiellement le théorème suivant (l'unicité est due à Casselman , et le reste p. 404-407 de [10]) :

THÉORÈME.- <u>Soit</u> $\rho \in \mathcal{W}_2(F)$ <u>une représentation irréductible de degré</u> 2 <u>du groupe</u> $W_F$ . <u>S'il y a une</u> $\pi \in \mathcal{A}_2(F)$ <u>telle que</u>

$$s(\pi_v) = s(\rho_v) \quad \text{pour presque toute place } v \text{ de } F \text{ non ramifiée pour } \pi$$

<u>et</u> $\rho$ , <u>alors</u> $\pi$ <u>est unique, parabolique, sa fonction</u> L <u>est celle de</u> $\rho$ , <u>et la conjecture d'Artin est vérifiée pour</u> $\rho$ .

Le résultat d'unicité de Casselman est le suivant (voir aussi [21]) :

THÉORÈME.- <u>Si deux représentations</u> $\pi$ <u>et</u> $\pi'$ <u>de</u> $\mathcal{A}_2(F)$ , $\pi$ <u>parabolique, vérifient</u>

$$s(\pi_v) = s(\pi'_v) \quad \text{pour presque toute place } v \text{ de } F ,$$

<u>alors elles sont équivalentes</u>.

3.4. Pour le morphisme $u : GL(2) \to GL(3)$ défini par la composition de la représentation adjointe de PGL(2) avec la projection de GL(2) sur PGL(2) , Gelbart et Jacquet ont montré [16] que pour $\pi \in \overset{\circ}{\mathcal{A}}_2(F)$ , il y avait une unique classe $u\pi \in \mathcal{A}_3(F)$ telle que, pour toute place $v$ de $F$ non ramifiée pour $\pi$ , $(u\pi)_v$ soit non ramifiée de classe semi-simple la classe de l'image par $u$ de celle de $\pi_v$ ; de plus, si $\pi$ ne provient pas d'une extension quadratique de $F$ (3.3, b)), alors $u\pi \in \overset{\circ}{\mathcal{A}}_3(F)$ .

3.5. Pour les représentations de degré 3 de $W_F$ qui sont induites par un quasi-caractère $\theta$ du groupe de Weil $W_E$ relatif à une extension cubique $E$ de $F$ , on sait [18] associer une représentation $\pi \in \mathcal{A}_3(F)$ telle que, pour les places $v$ de $F$ non ramifiées pour $E$ et pour qui $\theta_w$ est non ramifié si $w|v$ , alors $\pi_v$ est non ramifiée de classe celle de $(\mathrm{Ind}_E^F\, \theta)_v$ .

3.6. Dans [17], Jacquet a étudié le cas du morphisme $\otimes$ sur $GL(2) \times GL(2)$ , et avec Shalika dans [19], celui du morphisme $\otimes$ sur $GL(n) \times GL(n)$ .

## 4. <u>Les définitions et théorèmes du changement de base pour</u> GL(2)

4.1. On se place dans la situation suivante : le groupe $G$ est le groupe GL(2) sur le corps de nombres algébriques $F$ , et $E$ est une extension cyclique de $F$ , de degré premier $\ell$ ; on note $\Gamma$ son groupe de Galois. Les places de $F$ prennent par rapport à $E$ les noms suivants, où on a noté $E_v = E \otimes_F F_v$ (cf. [21]) :

places <u>décomposées</u> pour $E$ : ceci signifie que $E_v$ est le produit de $\ell$ copies du corps $F_v$ , permutées par $\Gamma$ ; c'est le cas des places complexes, et, si $\ell$ est impair, de toute place archimédienne ;

places <u>inertes</u> pour $E$ : places non archimédiennes où $E_v$ est l'extension non ramifiée de degré $\ell$ de $F_v$ , et $\Gamma$ s'identifie à son groupe de Galois, qui possède un générateur canonique, la substitution de Frobenius ;

places <u>non ramifiées</u> pour $E$ : places non archimédiennes qui sont inertes ou décomposées ; c'est le cas de presque toute place ;

places <u>ramifiées</u> pour $E$ : places où $E_v$ est une extension ramifiée de $F_v$ ; son groupe de Galois s'identifie à $\Gamma$ .

En identifiant le groupe $\hat{\Gamma}$ des caractères de $\Gamma$ au groupe des caractères du groupe $\mathbb{A}_F^\times / F^\times N_{E/F}(\mathbb{A}_E^\times)$ , on obtient une action de $\hat{\Gamma}$ sur les représentations de $G(\mathbb{A}_F)$ par les multiplications par $\zeta \circ \det$ , $\zeta \in \hat{\Gamma}$ .

4.2. Pour chaque place $v$ de $F$ , et chaque représentation admissible irréductible $\Pi$ de $G(\mathbb{A}_E)$ , on pose

$$\Pi_v = \bigotimes_{w|v} \Pi_w \quad , \text{ si } \Pi = \otimes \Pi_w \text{ sur les places } w \text{ de } E .$$

On dit qu'une place $v$ de $F$ est <u>non ramifiée</u> pour $\Pi$ si $\Pi_w$ est non ramifiée pour chaque place $w|v$ ; presque toute place de $F$ est non ramifiée pour $\Pi$ .

On écrit $\mathcal{A}_2^0(F)$ pour les classes de représentations de $\mathcal{A}_2(F)$ qui sont paraboliques, et de même pour $\mathcal{A}_2^0(E)$ . L'écriture $\pi \in \mathcal{A}_2(F)$ pour une représentation $\pi$ signifiera que la classe de $\pi$ est dans $\mathcal{A}_2(F)$ ; de même avec $\mathcal{A}_2^0(F)$ , $\mathcal{A}_2(E)$ , ... .

<u>Définition du relèvement parabolique</u>. On dit qu'une représentation $\Pi$ de $\mathcal{A}_2^0(E)$ est un relèvement parabolique d'une représentation $\pi$ de $\mathcal{A}_2^0(F)$ si, pour toute place $v$ de $F$ qui est non ramifiée pour $E$ , $\pi$ et $\Pi$ ,

$$s(\pi_v) = s(\Pi_w)^{d(v)} \qquad w|v$$

où $d(v) = 1$ (resp. $\ell$ ) si $v$ est décomposée (resp. inerte).

Langlands démontre le résultat suivant

<u>Théorème 1, du relèvement parabolique</u>.- a) <u>Si une représentation</u> $\Pi$ <u>de</u> $\mathcal{A}_2^0(E)$ <u>est un relèvement parabolique d'une représentation</u> $\pi$ <u>de</u> $\mathcal{A}_2^0(F)$ <u>, alors sa classe ne</u>

dépend que de celle de $\pi$ ; on la note $\pi_{E/F}$ ;

b) pour qu'une représentation de $\mathcal{A}_2^0(E)$ soit le relèvement parabolique d'une représentation de $\mathcal{A}_2^0(F)$ , il faut et il suffit que sa classe soit fixée par l'action du groupe $\Gamma = \mathrm{Gal}(E/F)$ ;

c) pour qu'une représentation $\pi$ de $\mathcal{A}_2^0(F)$ ait un relèvement parabolique dans $\mathcal{A}_2^0(E)$ , il faut et il suffit que sa classe ne soit pas fixée par l'action du groupe $\hat{\Gamma}$ des caractères de $\mathrm{Gal}(E/F)$ , et alors les classes des représentations $\pi \otimes \zeta$ , $\zeta \in \hat{\Gamma}$ , sont celles de même relèvement parabolique que $\pi$ .

Le c) se précise grâce à un résultat de Labesse-Langlands [19] qui dit qu'une représentation $\pi \in \mathcal{A}_2(F)$ est fixée par un quasicaractère non trivial $\chi$ (opérant par torsion par $\chi \circ \det$ ), si et seulement si $\chi$ est d'ordre 2 et $\pi$ relatif à un quasicaractère $\theta$ de l'extension quadratique K que définit $\chi$ : $\pi = \pi(\mathrm{Ind}_K^F\, \theta)$ ; les représentations de ce type qui sont paraboliques correspondent aux $\theta$ réguliers sous $\mathrm{Gal}(K/F)$ .

COROLLAIRE.- a) Si E n'est pas une extension quadratique de F , le relèvement parabolique définit une bijection

$$\mathcal{A}_2^0(F)/\hat{\Gamma} \longrightarrow \mathcal{A}_2^0(E)^{\Gamma}$$

$$\pi \longmapsto \pi_{E/F}$$

des orbites de $\hat{\Gamma}$ dans $\mathcal{A}_2^0(F)$ sur les représentations de $\mathcal{A}_2^0(E)$ qui sont fixées par $\Gamma$ .

b) Si E est une extension quadratique de F , le relèvement parabolique définit une bijection de l'ensemble des orbites sous $\hat{\Gamma}$ dans les classes de $\mathcal{A}_2^0(F)$ qui ne proviennent pas de quasicaractères de E , sur l'ensemble des classes de $\mathcal{A}_2^0(E)$ fixées par $\Gamma$ .

4.3. Pour pouvoir définir le relèvement dans tous les cas, on introduit une définition de relèvement local.

En une place v de F qui est décomposée dans E , on définit le relèvement par la formule suivante, puisque $E_v$ est le produit de $\ell$ copies de $F_v$ :

$$\pi \in \mathcal{A}_2(F_v) \longmapsto \bigotimes_{w|v} \pi \in \bigotimes_{w|v} \mathcal{A}_2(E_w) = \mathcal{A}_2(E_v) .$$

Si la place v de F n'est pas décomposée, soit $\Pi$ une représentation du groupe $G(E_v)$ dont la classe est dans $\mathcal{A}_2(E_v)$ et fixée par le groupe de Galois $\Gamma$ .

Fixons un générateur $\sigma$ de $\Gamma$ . Il y a $\ell$ opérateurs d'entrelacement entre $\Pi$ et ${}^{\sigma}\Pi$ dont la puissance $\ell$-ième est l'identité : ils corresponent aux $\ell$ prolongements $\Pi'$ de $\Pi$ au groupe $G(E_v) \rtimes \Gamma$ . Une fois choisie une mesure de Haar, on obtient une distribution sur $G(E_v) \rtimes \Gamma$ en prenant la trace : $\varphi \mapsto \mathrm{Tr}\, \Pi'(\varphi)$ ; par restriction à $G(E_v) \times \sigma$ , on a donc une distribution sur $G(E_v)$ :

$$\varphi \in \mathcal{D}(G(E_v)) \longmapsto \mathrm{Tr}\left( \int_{G(E_v)} \varphi(z)\, \Pi'(z\, ,\, \sigma)\, dz \right) .$$

THÉORÈME 2.- <u>Dans cette situation, ces distributions sont données par des fonctions localement sommables sur</u> $G(E_v)$ :

$$z \longmapsto \mathrm{Tr}\, \Pi'(z,\sigma) \ ,$$

<u>qui sont invariantes par les</u> $\sigma$-<u>automorphismes de</u> $G(E_v)$ :

$$z \longmapsto w^{-\sigma} z\, w \quad , \quad w \in G(E_v) .$$

On introduit également une application qui va jouer le rôle d'une norme

$$N_\sigma : z \in G(E_v) \longmapsto z^{\sigma^{\ell-1}} \ldots z^{\sigma} z \in G(E_v) .$$

Elle envoie $w^{-\sigma} z\, w$ sur $w^{-1}(N_\sigma z)w$ , et vérifie $(N_\sigma z)^\sigma = z(N_\sigma z)z^{-1}$ . On en déduit que $N_\sigma$ définit une injection de l'ensemble des classes de $\sigma$-conjugaison, dans l'ensemble des classes de conjugaison dans $G(F_v)$ , et que si $N_\sigma z = x \in G(F_v)$ , alors le $\sigma$-centralisateur de $z$ dans $G(E_v)$ est l'ensemble des points dans $E_v$ d'une forme tordue $G_x^\sigma$ du centralisateur $G_x$ de $x$ ; pour $x$ régulier, on a $G_x^\sigma = G_x$ .

<u>Définition du relèvement local en une place non décomposée</u> $v$ <u>de</u> $F$ . Soit $\Pi$ une représentation admissible irréductible du groupe $G(E_v)$ qui est équivalente à ses conjuguées par $\Gamma$ ; on dit que $\Pi$ relève $\pi \in \mathcal{A}_2(F_v)$ si l'une des conditions suivantes est réalisée :

ou bien $\pi = \pi(\mu,\nu)$ et $\Pi = \pi(\mu_{E_v/F_v}, \nu_{E_v/F_v})$

ou bien il y a un prolongement $\Pi'$ de $\Pi$ au produit semi-direct $G(E_v) \rtimes \Gamma$ tel que

$\mathrm{Tr}\, \Pi'(z,\sigma) = \mathrm{Tr}\, \pi(x)$ pour tout élément $x \in G(F_v)$ qui est régulier et tel qu'il y a un $z \in G(E_v)$ tel que $N_\sigma z = x$ .

<u>Théorème 3,du relèvement local</u>.- a) <u>Chaque représentation</u> $\pi \in \mathcal{A}_2(F_v)$ <u>admet un relèvement admissible irréductible dont la classe</u> $\pi_{E_v/F_v}$ <u>ne dépend que de la classe de</u> $\pi$ , <u>et qui ne dépend pas du choix du générateur</u> $\sigma$ <u>de</u> $\Gamma$ .

b) Si $\pi = \pi_v(\rho)$ , alors $\pi_{E_v/F_v} = \pi_v(\rho_{E_v/F_v})$ .

c) Deux représentations $\pi$ et $\pi'$ de $\mathcal{A}_2(F_v)$ ont même relèvement si et seulement si $\pi' = \pi \otimes \zeta$ pour un $\zeta \in \hat{\Gamma}$ , ou $\pi = \pi(\mu,\nu)$ et $\pi' = \pi(\mu\zeta , \nu\zeta')$ pour des $\zeta$ , $\zeta' \in \hat{\Gamma}$ .

4.4. On peut alors donner la définition du relèvement global en général :

Définition du relèvement global. On dit que la représentation $\Pi$ de $\mathcal{A}_2(E)$ relève la représentation $\pi$ de $\mathcal{A}_2(F)$ si, pour toute place $v$ de $F$ , la représentation $\Pi_v$ relève la représentation $\pi_v$ .

THÉORÈME 4.- Le relèvement de $F$ à $E$ des représentations automorphes de $F$ à $E$ vérifie les propriétés suivantes :

a) dans le cas parabolique, le relèvement coïncide avec le relèvement parabolique, et seules des $\pi \in \mathcal{A}_2^{o}(F)$ ont un relèvement dans $\mathcal{A}_2^{o}(E)$ ;

b) toute $\pi \in \mathcal{A}_2(F)$ admet un unique relèvement $\pi_{E/F} \in \mathcal{A}_2(E)$ ;

c) si $E$ est quadratique et que $\pi = \pi(\mathrm{Ind}_E^F\ \theta) \in \mathcal{A}_2^{o}(F)$ , alors $\pi_{E/F} = \pi(\theta, {}^{\sigma}\theta)$ ;

d) le relèvement est compatible avec la torsion par les quasicaractères de $C_F$ , avec la restriction au centre $\mathbb{A}_F^{\times}$ , et avec les automorphismes sur un sous-corps $k \subset F \subset E$ pour qui $E$ et $F$ sont galoisiennes sur $k$ :

$$^{\gamma}(\pi_{E/F}) = ({}^{\gamma'}\pi)_{E/F} \quad , \quad \gamma \in \mathrm{Gal}(E/k) \text{ d'image } \gamma' \text{ dans } \mathrm{Gal}(F/k) \quad ;$$

e) si $\pi = \pi(\rho)$ , alors $\pi_{E/F} = \pi(\rho_{E/F})$ .

## 5. Démonstration de la conjecture d'Artin pour le cas tétraédral

5.1. Il s'agit de prouver le théorème suivant :

THÉORÈME 5.- La fonction $L$ associée à une représentation de degré $2$ du groupe de Galois $\Gamma_F = \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/F)$ dont l'image modulo le centre est un groupe tétraédral, est holomorphe, et bornée dans les bandes verticales de largeur finie.

5.2. Soit $\rho$ une représentation admissible de degré $2$ de $W_F$ :

$$\rho : W_F \to GL(2,\mathbb{C})$$

dont l'image modulo le centre est un groupe $\mathfrak{A}_4$ . Elle définit une extension galoisienne cubique $E$ sur $F$ par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & D_4 & \longrightarrow & \mathfrak{A}_4 & \longrightarrow & C_3 & \longrightarrow & 1 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow\wr & & \\ 1 & \longrightarrow & W_E & \longrightarrow & W_F & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(E/F) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

où $D_4$ est le groupe diédral d'ordre 4, unique 2-Sylow de $\mathfrak{A}_4$, de quotient le groupe $C_3$ cyclique d'ordre 3. La restriction $\rho_{E/F}$ de $\rho$ à $W_E$ ayant $D_4$ pour image modulo le centre est induite par une représentation de degré 1 d'un sous-groupe d'indice 2 de $W_E$ ; on sait alors ([10], Prop. 12.1) qu'il lui est associée une représentation $\pi(\rho_{E/F})$ de $\mathcal{A}_2^0(E)$.

5.3. L'action du groupe $\mathrm{Gal}(E/F)$ fixe $\rho_{E/F}$ dans $\mathcal{W}_2(E)$, donc aussi $\pi(\rho_{E/F})$ dans $\mathcal{A}_2^0(E)$ ; par le théorème 4, $\pi(\rho_{E/F})$ est un relèvement de 3 représentations inéquivalentes dans $\mathcal{A}_2^0(F)$, dont les restrictions au centre se relèvent en la restriction au centre de $\pi(\rho_{E/F})$, c'est-à-dire en le quasicaractère $(\det \rho)_{E/F}$ ; comme ces relèvements ne diffèrent que par torsion par un caractère de $\mathrm{Gal}(E/F)$, groupe d'ordre 3, et que par torsion par $\chi$ la restriction au centre est multipliée par $\chi^2$, on en déduit qu'il y a exactement une $\pi \in \mathcal{A}_2^0(F)$ telle que $\pi_{E/F} = \pi(\rho_{E/F})$ et de restriction au centre le quasicaractère $\det \rho$.

5.4. Ecrivons $\pi = \otimes \pi_v$. Si $v$ est une place de $F$ décomposée dans $E$, on a $(\pi_{E/F})_w = \pi(\rho_{E_w/F_v}) = \pi(\rho_v) = \pi_v$ pour $w|v$. Si $v$ est inerte dans $E$ et non ramifiée pour $\rho$, alors $\pi_v$ ayant son relèvement $\pi(\rho_{E/F})_v = \pi(\rho_{E_v/F_v})$ non ramifié à l'extension non ramifiée $E_v$ de $F_v$ est également non ramifié, et comme $\pi(\rho_v)$ a même relèvement, on a

$$s(\rho_v)^3 = s(\pi_v)^3 \quad , \quad v \text{ inerte pour } E \text{ et non ramifié pour } \rho .$$

5.5. Soit $u$ le morphisme de $GL(2)$ dans $GL(3)$ obtenu en composant la représentation adjointe de $PGL(2)$ avec la projection de $GL(2)$ sur $PGL(2)$. Par 3.4, à $\pi \in \mathcal{A}_2^0(F)$ correspond $u\pi \in \mathcal{A}_3(F)$, et, ici $\pi$ ne provenant pas d'une extension quadratique, $u\pi \in \mathcal{A}_3^0(F)$ ; pour les places $v$ de $F$ non ramifiées pour $\pi$, la représentation $(u\pi)_v$ est non ramifiée et sa classe $s((u\pi)_v)$ est la classe de l'image par $u$ de $s(\pi_v)$.

5.6. D'autre part, les trois droites joignant les milieux des arêtes opposées d'un tétraèdre régulier sont permutées par son groupe des rotations : ceci signifie que la représentation $u \circ \rho$ de degré 3 de $W_F$ est induite par la représentation de degré 1 définie par sa restriction au sous-groupe qui préserve l'une de ces droites; mais, dans le groupe $\mathfrak{A}_4$ , ce sous-groupe est $D_4$ , donc $u\rho$ est induite par un quasicaractère de $W_E$ . Mais, par 3.5, il y a alors $\pi(u\rho) \in \mathcal{A}_3^0(F)$ telle que, pour les places $v$ de $F$ non ramifiées pour $\rho$ , la représentation $\pi(u\rho)_v$ soit non ramifiée de classe celle définie par $u \circ \rho_v$ .

5.7. On montre alors que pour presque toute place $v$ de $F$ les deux classes semi-simples de $GL(3,\mathbf{C})$ définies par $u(s(\pi_v))$ et $s(u \circ \rho_v)$ sont les mêmes : pour cela, on utilise un critère pratique donné par [19] : il suffit de voir que les produits tensoriels par $s(u \circ \rho_v)$ donnent la même classe pour presque tout $v$ ; soit $v$ une place non ramifiée pour $\rho$ ; si $v$ est décomposée, on a $\pi_v = \pi(\rho_v)$ et donc la classe de $u(s(\pi_v))$ est $s(u \circ \rho_v)$ ; si $v$ est inerte, alors la représentation $u \circ \rho_v$ est induite par un quasicaractère de $W_{E_v}$ , et donc (en utilisant par exemple la formule $(\mathrm{Ind}_H^G \sigma) \otimes \tau = \mathrm{Ind}_H^G(\sigma \otimes \mathrm{Res}_H^G \tau)$ de [25], II.7.3), les produits tensoriels ne dépendent que de $s(\pi_v)^3$ et $s(\rho_v)^3$ , qui sont égaux (5.4). Ceci prouve l'assertion annoncée (et même que $u\pi$ et $\pi(u\rho)$ sont équivalentes, [19]).

5.8. En résumé, on a montré que $\pi$ vérifiait les propriétés suivantes :

aux places décomposées, $\pi_v = \pi(\rho_v)$ ,

aux places inertes pour $E$ et non ramifiées pour $\rho$ , $s(\pi_v)^3 = s(\rho_v)^3$ ,

aux places non ramifiées pour $\rho$ , $u(s(\pi_v)) = u(s(\rho_v))$ ,

pour toute place, $\omega_{\pi_v} = \det \rho_v$ .

Or, ceci entraîne que pour les places non ramifiées pour $\rho$ , ou bien $s(\pi_v) = s(\rho_v)$ , ou bien $v$ est inerte dans $E$ et $s(\rho_v)^3 = -s(\rho_v)^3$ ; mais dans ce dernier cas, les éléments de $u(s(\rho_v))$ sont d'ordre $6$ , ce que leur appartenance à un groupe $\mathfrak{A}_4$ exclut. Ceci montre que $s(\pi_v) = s(\rho_v)$ pour les places non ramifiées pour $\rho$ , et le théorème 1 de 3.3 achève la démonstration.

5.9. Langlands démontre également la conjecture de Langlands pour les représentations de type octaédral du groupe de Galois $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ , dont la composante à l'infini est la représentation $\pi(1, \mathrm{sgn})$ de $GL_2(\mathbb{R})$ (cf. [1], § 1). D'autre part, on sait établir la correspondance 3.1 pour certains corps locaux de caractéristique résiduelle $2$ , à partir des résultats de [1] (voir Tunnell dans [2]).

## 6. Sur les démonstrations

Pour chaque place $w$ du corps de nombres algébriques $E$ , on note $\mathcal{D}(G(E_w))$ l'espace des fonctions-tests sur $G(E_w)$ : fonctions à support compact, indéfiniment dérivables aux places archimédiennes, et localement constantes aux places non archimédiennes. On note encore $G$ le groupe $GL_2$ sur le corps de nombres algébriques $F$ , $E$ une extension cyclique de degré premier $\ell$ de $F$ , et $\Gamma = \mathrm{Gal}(E/F)$ .

6.1. Soit $v$ une place de $F$ non décomposée dans $E$ . On a défini en 4.3 une application $N_\sigma$ sur $G(E_v)$ , relativement à un générateur $\sigma$ de $\Gamma$ .

PROPOSITION ([1], lemme 4.2).– a) Pour toute fonction-test $\varphi$ sur $G(E_v)$ , il y a une fonction-test $f$ sur $G(F_v)$ telle que l'on ait

(6.1) $$\int_{G_x(F_v)\backslash G(F_v)} f(u^{-1}xu)du = \int_{G_x(F_v)\backslash G(E_v)} \varphi(w^{-1}zw)dw$$ pour tout élément $x$ régulier de $G(F_v)$ et tout $z \in G(E_v)$ tels que $x = N_\sigma z$ ,

(6.2) $$\int_{G_x(F_v)\backslash G(F_v)} f(u^{-1}xu)du = 0$$ pour tout élément régulier $x$ de $G(F_v)$ tel qu'il n'y ait aucun $z \in G(E_v)$ pour lequel $N_\sigma z = x$ .

b) Pour toute fonction-test $f$ sur $G(F_v)$ satisfaisant (6.2), il y a une fonction-test $\varphi$ sur $G(E_v)$ satisfaisant à (6.1).

La démonstration nécessite la connaissance du comportement des intégrales orbitales au voisinage des points du centre ; elle utilise des résultats d'Harish-Chandra et D. Shelstad aux places archimédiennes, de J. Shalika aux autres places, précisés par Langlands.

On écrit que $\varphi \in \mathcal{D}(G(E_v))$ et $f \in \mathcal{D}(G(F_v))$ sont liées par (6.1) et (6.2) par le symbole

(6.3) $$\varphi \underset{\sigma}{\leadsto} f \ .$$

6.2. Prenons maintenant une place $v$ de $F$ inerte dans $E$ . L'application norme $N_{E_v/F_v}$ se prolonge au sous-groupe diagonal de $GL_2(E_v)$ , où sa restriction aux éléments à coefficients dans $F_v^\times$ est l'élévation à la puissance $\ell$ . Il en résulte qu'on définit un homomorphisme de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_2(E_v)$ dans l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_2(F_v)$ par le diagramme suivant :

$$(6.4)\qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{H}_2(E_v) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{C}[\mathbb{Z}^2]^{\mathfrak{S}_2} \\ \vdots & & \downarrow \ell \\ \mathcal{H}_2(F_v) & \longrightarrow & \mathbb{C}[\mathbb{Z}^2]^{\mathfrak{S}_2} \end{array} .$$

On en déduit une application de l'ensemble des caractères de $\mathcal{H}_2(F_v)$ dans l'ensemble des caractères de $\mathcal{H}_2(E_v)$ , qui, lue sur les classes de conjugaison semi-simples de $GL(2,\mathbb{C})$ , est l'élévation à la puissance $\ell$ .

PROPOSITION 2 ([1], § 3,4).- a) <u>Si</u> $f \in \mathcal{H}_2(F_v)$ <u>est image de</u> $\varphi \in \mathcal{H}_2(E_v)$ <u>par</u> (6.4), <u>alors</u> $\varphi \underset{\sigma}{\rightsquigarrow} f$ , <u>pour tout générateur</u> $\sigma$ <u>du groupe</u> $\Gamma$ ;

b) <u>si</u> $\pi \in \mathcal{A}_2(F_v)$ <u>est une représentation non ramifiée, alors la représentation non ramifiée</u> $\Pi \in \mathcal{A}_2(E_v)$ <u>de</u> $s(\Pi) = s(\pi)^{\ell}$ <u>est un relèvement de</u> $\pi$ .

Le a) nécessite beaucoup de combinatoire sur l'arbre de $GL_2(F_v)$ .

6.3. Soit $v$ une place de $F$ décomposée dans $E$ . Alors $E_v$ est un produit de $\ell$ copies de $F_v$ et $G(E_v)$ un produit de $\ell$ copies de $G(F_v)$ , copies permutées transitivement par $\Gamma$ . Les représentations admissibles irréductibles de $G(E_v)$ s'écrivent comme produits tensoriels de $\ell$ représentations admissibles irréductibles de $G(F_v)$ , et l'invariance sous l'action de $\Gamma$ signifie que ces $\ell$ représentations sont équivalentes.

Le choix d'un générateur $\sigma$ de $\Gamma$ définit une norme $N_\sigma : z \mapsto z^{\sigma^{\ell-1}} \cdots z^{\sigma} z$ sur $G(E_v)$ ; si $z = (z_w)_{w|v}$ , alors, pour toute place $w|v$ , $N_\sigma z$ est conjugué dans $G(E_v)$ à l'élément $z_{\sigma^{\ell-1}(w)} \cdots z_{\sigma(w)} z_w$ de $G(F_v)$ .

PROPOSITION 3 ([1] § 6).- a) <u>Soit</u> $\varphi = \bigotimes_{w|v} \varphi_w$ <u>une fonction-test décomposable sur</u> $G(E_v)$ ; <u>alors, pour toute place</u> $w|v$ , <u>la fonction-test sur</u> $G(F_v)$ <u>donnée par le produit de convolution</u> $f = \varphi_{\sigma^{\ell-1}(w)} * \cdots * \varphi_{\sigma(w)} * \varphi_w$ <u>vérifie</u>

$$(6.5)\qquad \int_{G_x(F_v)\backslash G(F_v)} f(u^{-1}xu)\,du = \int_{G_x(F_v)\backslash G(E_v)} \varphi(w^{-\sigma} zw)\,dw \ , \ \underline{\text{pour tout}}$$

<u>élément régulier</u> $x$ <u>de</u> $G(F_v)$ <u>et tout</u> $z \in G(E_v)$ <u>tels que</u> $N_\sigma z = x$ .

b) <u>Pour</u> $\pi \in \mathcal{A}_2(F_v)$ , <u>l'opérateur</u> $\Pi'(\sigma)$ <u>sur le produit tensoriel de</u> $\ell$ <u>copies de l'espace de</u> $\pi$ , <u>indexées par les places</u> $w|v$ , <u>donné par</u>

$$\Pi'(\sigma) : \bigotimes_{w|v} v_w \longmapsto \bigotimes_{w|v} v_{\sigma^{-1}w}$$

<u>étend la représentation</u> $\Pi = \bigotimes_{w|v} \pi$ <u>au produit semi-direct</u> $G(E_v) \rtimes \Gamma$ , <u>et cette extension a un caractère donné par une fonction localement sommable qui satisfait à</u>

$$\text{Tr}\ \Pi(z)\ \Pi'(\sigma) = \text{Tr}\ \pi(x) \tag{6.6}$$

<u>pour tout élément régulier</u> $x$ <u>de</u> $G(F_v)$ <u>et tout</u> $z \in G(E_v)$ <u>tels que</u> $N_\sigma z = x$ .

Lorsque les fonctions-tests $\varphi$ et $f$ sont comme en a), on écrit encore

$$\varphi \underset{\sigma}{\rightsquigarrow} f . \tag{6.7}$$

6.4. Soit $v$ une place de $F$ qui ne se décompose pas dans $E$ . Le § 5 de [1] donne, par des démonstrations locales, le théorème 2 de 4.3 sauf lorsque $E$ est quadratique et $\Pi = \pi(\theta, {}^\sigma\theta)$ pour un quasicaractère régulier $\theta$ de $E_v^*$ , puis le théorème du relèvement local (théorème 3 de 4.3) sauf lorsque $\pi$ est supercuspidale, ou $\Pi$ supercuspidale, ou $\Pi = \pi(\theta, {}^\sigma\theta)$ comme précédemment. Les cas restants seront traités après le relèvement parabolique (global).

6.5. Soient $\omega$ un caractère de $\mathbb{A}_F^\times$ trivial sur $F^\times$ , $\omega_{E/F}$ son relèvement à $\mathbb{A}_E^\times$ qui est trivial sur $E^\times$ , et $\omega^E$ la restriction de $\omega$ aux normes de $\mathbb{A}_E^\times$ . On observe que $F^\times N_{E/F}(\mathbb{A}_E^\times)$ est d'indice $\ell$ dans $\mathbb{A}_F^\times$ . Sur les groupes d'adèles, on choisit la mesure de Tamagawa (cf. Langlands, § 6, dans [1]). On définit pour $\varphi' \in \mathcal{D}(G(\mathbb{A}_E))$ et $f' \in \mathcal{D}(G(\mathbb{A}_F))$ , leur projection $\varphi(z) = \int_{\mathbb{A}_E^\times} \varphi'(tz)\ \omega_{E/F}(t)dt$ et

$f(x) = \int_{N_{E/F}(A_E^\times)} f'(sx)\ \omega^E(s)ds$ , et on écrit alors

$$\varphi \underset{\sigma,\,\omega}{\rightsquigarrow} f , \tag{6.8}$$

si $\varphi'$ et $f'$ sont décomposables avec $\varphi'_v \underset{\sigma}{\rightsquigarrow} f'_v$ pour toute place $v$ de $F$ .

On considère la représentation de $G(\mathbb{A}_F)$ dans l'espace de Hilbert des fonctions sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)$ , qui se transforment sous $N_{E/F}\mathbb{A}_E^\times$ par $\omega^E$ et qui sont de carré intégrable modulo ce sous-groupe ; on appelle $r$ sa restriction au spectre discret (voir Gelbart-Jacquet dans [2]). On a de même la représentation de $G(\mathbb{A}_E)$ dans l'espace de Hilbert des fonctions sur $G(E)\backslash G(\mathbb{A}_E)$ qui se transforment sous $\mathbb{A}_E^\times$ par $\omega_{E/F}$ et qui sont de carré intégrable modulo ce sous-groupe ; soit $R$ sa restriction au spectre discret.

Aux § 7 et 8 de [1], Langlands écrit la formule des traces pour l'opérateur

$R(\varphi)\ R'(\sigma)$ , pour $\varphi$ comme ci-dessus et $(R'(\sigma)g)(z) = g(z^\sigma)$ , comme somme de 7 termes invariants par $\sigma$-conjugaison sur $\varphi$ .

THÉORÈME 6 ([1], th. 9.1).- <u>Pour</u> $\varphi \underset{\sigma\,,\,\omega}{\rightsquigarrow} f$ , <u>alors</u>

a) <u>si</u> E <u>n'est pas quadratique sur</u> F , $\mathrm{Tr}\ R(\varphi)\ R'(\sigma) = \frac{1}{\ell}\ \mathrm{Tr}\ r(f)$ ;

b) <u>si</u> E <u>est quadratique sur</u> F , $\mathrm{Tr}\ R(\varphi)\ R'(\sigma) + \frac{1}{2}\ \mathrm{Tr}\ \mathrm{Tr}\ S(\varphi)\ S'(\sigma) = \frac{1}{2}\ \mathrm{Tr}\ r(f)$ , <u>où</u> S <u>est la somme</u> $\Sigma\,\pi(\theta, {}^\sigma\theta)$ <u>sur les caractères réguliers de</u> $C_E$ <u>tels que</u> ${}^\sigma\theta\,\theta = \omega_{E/F}$ , <u>à conjugaison près par</u> $\sigma$ .

En jouant sur la liberté dont il dispose sur $\varphi$ et $f$ , Langlands démontre alors successivement les théorèmes du relèvement parabolique, puis du relèvement local, puis le théorème 4 de 4.4. (Voir une esquisse de la preuve dans [2].)

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. P. LANGLANDS - Base change for GL(2) , the theory of Saito-Shintani with applications, Notes, I.A.S., Princeton, 1975.

[2] Automorphic forms, Representations, and L-functions, A.M.S. Summer Institute 1977, Corvallis, à paraître.
[contient notamment : Automorphic L-functions (A. BOREL), Number theoretic back-ground (J. TATE), Decomposition of representations into tensor products (D. FLATH), General properties of representations (P. CARTIER), Forms on GL(2) from the analytic point of view (S. GELBART-H. JACQUET), Base change for GL(2) (R. KOTTWITZ, P. GÉRARDIN, J.-P. LABESSE).]

Le relèvement des formes modulaires a été étudié notamment par :

[3] K. DOI, H. NAGANUMA - On the algebraic curves uniformized by arithmetical automorphic functions, Ann. of Math., 86 (1967), 449-460.

[4] K. DOI, H. NAGANUMA - On the functional equation of certain Dirichletseries, Inventiones Math., 9 (1964), 1-14.

[5] G. SHIMURA - Arithmetic theory of automorphic functions, Iwanami Shoten Pub. and Princeton Univ. Press, 1971.

Voir aussi les articles de M. COHEN, S. KUDLA, et D. ZAGIER dans

[6] Modular functions of one variable V , VI, à paraître aux Lecture Notes in Math., (vol. 601 et ? ), Springer-Verlag.

La formule des traces tordue, et la formulation du relèvement en termes de représentations apparaissent dans [7] et [8], l'idée du relèvement local vient peut-être de [9] :

[7] H. SAITO - Automorphic forms and algebraic extensions of number fields, L. N. n° 8, Tokyo, 1975.

[8] T. SHINTANI - On liftings of holomorphic automorphic forms, U.S.-Japan Seminar on number Theory, Ann Arbor, Mich., 1975.

[9] T. SHINTANI - Two remarks on irreducible characters of finite general linear groups, J. Math. Soc. Jap., 28 (1976), 396-414.

L'ouvrage de base sur GL(2) est [10], résumé en [11], et expliqué en [12] :

[10] H. JACQUET, R. P. LANGLANDS - Automorphic forms on GL(2) , Lecture Notes in Math., vol. 114, Springer-Verlag, 1970.

[11] A. ROBERT - Formes automorphes sur GL(2) (Travaux de H. Jacquet et R. P. Langlands), Sém. Bourbaki, exposé 415, Lecture Notes in Math., vol. 317, Springer-Verlag, 1973.

[12] S. GELBART - Automorphic forms on adèle groups, Ann. of Math. St. 83, Princeton Univ. Press, 1975.

Voir aussi le premier article de P. DELIGNE dans [13], le second étant consacré aux facteurs $\varepsilon$ et aux représentations des groupes de Weil :

[13] Modular functions of one variable II, Lecture Notes in Math., vol. 349, Springer-Verlag, 1973.

Le principe de fonctorialité de Langlands se trouve dans [14] et aussi dans [2] et [15] :

[14] R.P. LANGLANDS - Problems in the theory of automorphics forms, in Lecture Notes in Math., vol. 170, Springer-Verlag, 18-86, 1970.

[15] A. BOREL - Formes automorphes et séries de Dirichlet (d'après R.P. Langlands), Lecture Notes in Math., Sém. Bourbaki, exposé 466, vol. 567, Springer-Verlag, 1977.

Les références suivantes, plus l'article de Gelbart dans [6], étudient des cas particuliers du principe de fonctorialité :

[16] S. GELBART, H. JACQUET - A relation between automorphic forms on GL(2) and GL(3), Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1976, 3348-3350.

[17] H. JACQUET - Automorphic forms on GL(2) , II, Lecture Notes in Math., vol.278, Springer-Verlag, 1972.

[18] H. JACQUET, I.I. PIATETSKII-SHAPIRO, J. SHALIKA - Construction of cusp-forms for GL(3) , L.N. n° 16, Univ. of Maryland, 1975.

[19] H. JACQUET, J. SHALIKA - Comparaison des formes automorphes du groupe linéaire, C.R.Acad. Sci. Paris, 284 (1977), 741-744.

[20] J.-P. LABESSE, R.P. LANGLANDS - L-indistinguishability for SL(2) , Preprint I.A.S., Princeton, 1977.

Autres références :

[21] W. CASSELMAN - On somes results of Atkin and Lehner, Math. Ann., 201(1973),301-334.

[22] J. CASSELS, A. FROHLICH - Algebraic number theory, Acad. Press., 1967.

[23] R. GODEMENT, H. JACQUET - Zeta functions a simple algebras, Lecture Notes in Math., vol. 260, Springer-Verlag,1970.

[24] I. SATAKE - Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over $\mathfrak{p}$-adic fields, Pub. Math. I.H.E.S., 18(1963), 5-69.

[25] J.-P. SERRE - Représentations linéaires des groupes finis, Hermann, Paris, 1967.