MICHEL DUFLO

Représentations de carré intégrable des groupes semi-simples réels

Séminaire N. Bourbaki, 1979, exp. nº 508, p. 22-40

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1977-1978__20__22_0>

REPRÉSENTATIONS DE CARRÉ INTÉGRABLE DES GROUPES SEMI-SIMPLES RÉELS

par Michel DUFLO

Résumé. On décrit les principaux résultats relatifs aux représentations de carré intégrable des groupes de Lie semi-simples réels connexes : paramétrisation d'Harish-Chandra, conjecture de Blattner, réalisation de Kostant-Langlands, réalisation de Parthasarathy, réalisation d'Enright-Varadarajan.

Introduction. Soit G un groupe localement compact unimodulaire sur lequel on a choisi une mesure de Haar dg . Une représentation unitaire irréductible π dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est dite de carré intégrable si elle est isomorphe à une sous-représentation de la représentation régulière gauche dans $L_2(G)$. C'est le cas si et seulement si elle possède un coefficient de carré intégrable. Si π est de carré intégrable, ses coefficients sont tous de carré intégrable, et il existe une constante $d_\pi > 0$ (qui dépend du choix de la mesure de Haar) telle que $\int_G |(x , \pi(g)y)|^2 \, dg = d_\pi^{-1} \|x\|^2 \|y\|^2$ pour tout x et y dans $\mathcal{H}$. Le nombre d_π est appelé le degré formel de π . Pour tout ceci, voir par exemple [9], § 24. L'ensemble des classes de représentations de carré intégrable de G est appelé par Harish-Chandra la série discrète de G . Le groupe $SL(2,\mathbb{R})$, par exemple, a une série discrète non vide qui a été découverte et décrite par V. Bargmann [5].

Pour un groupe semi-simple réel, il est particulièrement important de connaître la série discrète. En effet, soit G un groupe de Lie semi-simple réel connexe de centre fini. Harish-Chandra a montré que toutes les représentations unitaires irréductibles de G qui interviennent dans la décomposition de la représentation régulière gauche dans $L_2(G)$ sont obtenues par des procédés élémentaires à partir des représentations de carré intégrable de certains sous-groupes semi-simples de G [14]. Ces mêmes représentations sont à la base de la classification de Langlands des classes d'équivalence (au sens de Naimark) de représentations complètement irréductibles de G dans un Banach [25].

Dans tout cet exposé, sauf mention du contraire, G désigne un groupe de Lie semi-simple connexe de centre fini, K un sous-groupe compact maximal de G et T

un tore maximal dans K . Harish-Chandra a montré que G a une série discrète si et seulement si T est un sous-groupe de Cartan de G , que dans ce cas elle est paramétrée par certains caractères de T , et calculé le degré formel ([13] paru en 1966, où est utilisée toute la machine construite par l'auteur dans ses précédents articles). La théorie d'Harish-Chandra fait l'objet du livre de G. Warner [43] et de celui de V. S. Varadarajan [39]. On en trouvera un résumé dans [38].

Récemment, deux problèmes très naturels sur la série discrète ont reçu des solutions satisfaisantes et complètes, à la suite d'articles parus de 1970 à 1976. Le premier est de réaliser explicitement la série discrète. Trois réalisations particulièrement intéressantes sont connues : la réalisation de Kostant-Langlands dans des espaces de formes harmoniques de carré intégrable sur G/T , conjecturée dans [23] et [24], démontrée dans [31] et [35] ; la réalisation de Parthasarathy dans des espaces de spineurs harmoniques de carré intégrable sur G/K [27], [28], [19] et [4] ; la réalisation d'Enright-Varadarajan dans un quotient de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie de G [12], [33] et [42]. Le deuxième problème est d'étudier la restriction à K d'une représentation de carré intégrable de G , et plus précisément de calculer avec quelle multiplicité une représentation irréductible de K intervient dans cette restriction. La réponse est donnée par la conjecture de Blattner, démontrée dans [16], [34], et dans [11] par une méthode différente. Une forme faible, mais suffisante dans beaucoup d'applications, de la conjecture de Blattner indique qu'il existe une représentation particulière de K , le K-type minimal, qui intervient avec multiplicité un, et il se trouve que l'existence de ce K-type minimal caractérise la série discrète [33]. Les deux problèmes sont en pratique très liés, la démonstration des théorèmes de réalisation nécessitant une certaine connaissance des K-types, et réciproquement. Tous ces théorèmes ont été démontrés d'abord pour presque toutes les séries discrètes, celles correspondant aux valeurs assez régulières du paramètre. Pour passer au cas général, on utilise souvent un "principe de translation (du paramètre)" consistant à faire le produit tensoriel avec une représentation de dimension finie, et dont l'idée revient dans ce cas à G. Zuckerman (cf. [45]).

L'article d'Atiyah et Schmid [4] donne une nouvelle démonstration des théorèmes d'Harish-Chandra, de la conjecture faible de Blattner, et de la réalisation de Parthasarathy, de sorte que la théorie de la série discrète va devenir plus accessible. Afin d'écrire un petit bout de démonstration, j'indique dans le chapitre II comment Atiyah et Schmid démontrent l'existence de la série discrète comme conséquence du "théorème de l'indice L_2 " d'Atiyah [2]. Dans le chapitre I, j'énonce les théorèmes mentionnés ci-dessus.

La série discrète a été étudiée de manière intensive, en particulier aux Etats Unis et au Japon, et d'autres questions importantes ont reçu des réponses plus ou moins complètes et plus ou moins simples. Je ne ferai qu'en évoquer trois : le calcul du caractère des représentations de carré intégrable [17], [40] ; le comportement asymptotique des coefficients (en particulier ces coefficients sont-ils intégrables ?) [37], [16] et [26] ; comment réaliser une représentation de carré intégrable comme quotient ou sous-quotient d'une représentation de la série principale [22], [36].

CHAPITRE I : ÉNONCÉ DES PRINCIPAUX THÉORÈMES

1. Le théorème du rang

THÉORÈME 1 (Harish-Chandra).- Le groupe G a une série discrète non vide si et seulement si T est un sous-groupe de Cartan de G.

2. Notations

Dans toute la suite, on suppose que T est un sous-groupe de Cartan de G. Nous noterons $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{t}$ les algèbres de Lie de G , K et T . Si $\mathfrak{a}$ est une algèbre de Lie réelle, nous noterons $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ sa complexifiée, $S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ l'algèbre symétrique de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$, $U(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{a}^*$ le dual de $\mathfrak{a}$. L'algèbre $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ est sous-algèbre de Cartan à la fois de $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ et de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Nous noterons Δ l'ensemble des racines de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ et Δ_c l'ensemble des racines de $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$. On a $\Delta_c \subset \Delta \subset i\mathfrak{t}^*$. Nous noterons $W_{\mathbb{C}}$ le groupe de Weyl de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, W celui de $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$. On choisit un système de racines positives Δ_c^+ pour Δ_c , on note $C \subset i\mathfrak{t}^*$ la chambre de Weyl correspondante et ρ_c la demi-somme des éléments de Δ_c^+ . On note Λ l'ensemble des éléments de $i\mathfrak{t}^*$ qui sont différentielles d'un caractère de T . Si $\mu \in i\mathfrak{t}^*$ est un poids dominant pour Δ_c^+ , on note τ_μ la représentation irréductible de $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ de poids dominant μ , et V_μ l'espace de Hilbert de τ_μ . Si de plus $\mu \in \Lambda \cap C$, on note encore τ_μ la représentation unitaire de K dans V_μ .

On note $(\, , \,)$ la forme de Killing de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Elle définit sur $i\mathfrak{t}$, et donc sur $i\mathfrak{t}^*$, un produit scalaire. Un élément λ de $i\mathfrak{t}^*$ est dit régulier si

$(\lambda,\alpha) \neq 0$ pour tout $\alpha \in \Delta$. Si P est un système de racines positives pour Δ , on note ρ la demi-somme des éléments de P et C_P la chambre de Weyl correspondante dans $i\mathfrak{t}^*$. L'ensemble $\Lambda + \rho$ ne dépend pas du choix de P ; on le note $\widetilde{\Lambda}$. On note $\widetilde{\Lambda}'$ l'ensemble des éléments réguliers de $\widetilde{\Lambda}$.

Un élément g de G est dit régulier si $\mathrm{Ad}\, g$ est semi-simple et si 1 est valeur propre de $\mathrm{Ad}\, g$ avec la multiplicité $\dim \mathfrak{t}$. On note G' l'ensemble des éléments réguliers. C'est un ouvert dense de G .

On pose $q = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{k})$. C'est un entier.

3. Caractères

THÉORÈME 2 (Harish-Chandra).- Soit π une représentation unitaire irréductible de G . Si $\varphi \in C_c^\infty(G)$, l'opérateur $\pi(\varphi) = \int_G \varphi(g)\pi(g)\, dg$ est traçable, et l'application $\varphi \mapsto \operatorname{tr} \pi(\varphi)$ est une distribution sur G . Cette distribution est une fonction localement sommable sur G , invariante par automorphismes intérieurs, analytique sur G' .

Nous noterons Θ_π cette fonction. C'est par définition le caractère de π . Il ne dépend que de la classe d'équivalence de π .

Remarquons que le théorème 2 est valable pour tous les groupes semi-simples. La démonstration d'Harish-Chandra est exposée dans [39]. Une nouvelle démonstration du théorème 2 se trouve dans [3].

4. Paramétrisation de la série discrète

THÉORÈME 3 (Harish-Chandra).- 1) Pour tout $\lambda \in \widetilde{\Lambda}'$, il existe une classe d'équivalence et une seule de représentations de carré intégrable, notée π_λ , telle que l'on ait

$$(*) \qquad \Theta_{\pi_\lambda}(t) = (-1)^q \frac{\sum_{w \in W} \det(w)\, t^{w\lambda}}{\prod_{\substack{\alpha \in \Delta \\ (\lambda,\alpha) > 0}} t^{\alpha/2} - t^{-\alpha/2}} \qquad \text{pour tout } t \in G' \cap T .$$

2) Toute classe d'équivalence de représentations de carré intégrable de G est égale à π_λ pour un certain $\lambda \in \widetilde{\Lambda}'$.

3) Soient λ , $\lambda' \in \widetilde{\Lambda}'$. On a $\pi_\lambda = \pi_{\lambda'}$ si et seulement si $\lambda' \in W\lambda$.

Remarques.- 1) Le second membre de $(*)$ est bien défini sur $G' \cap T$ bien que numérateur et dénominateur le soient en général seulement sur un revêtement d'ordre 2 .

2) Tout élément de $\widetilde{\Lambda}'$ est conjugué sous l'action de W d'un unique élément de $\widetilde{\Lambda}' \cap C$. La série discrète est donc paramétrée par $\widetilde{\Lambda}' \cap C$.

3) Si par exemple G est compact et si $\lambda \in \widetilde{\Lambda}' \cap C$, on a $\pi_\lambda = \tau_{\lambda-\rho_c}$ et $(*)$ est la formule de Weyl.

4) La formule $(*)$ ne donne Θ_{π_λ} que sur les éléments de G' conjugués d'éléments de T . Pour Θ_{π_λ} sur le reste de G' il n'y pas en général de formule simple. Voir par exemple [17] et [40].

Pour calculer le degré formel des représentations π_λ , il faut choisir la mesure de Haar dg . Harish-Chandra procède de la manière suivante. On note θ l'involution de Cartan de $\mathfrak{g}$ dont l'ensemble des points fixes est $\mathfrak{k}$, et l'on munit $\mathfrak{g}$ de la structure euclidienne $\|X\|^2 = -(X,\theta X)$. On choisit une décomposition d'Iwasawa $G = KNA$. On munit K de la mesure normalisée dk , et A et N des mesures standard dA et dN qui sont définies par la structure euclidienne de leurs algèbres de Lie. On pose $dg = dk\, dN\, dA$.

THÉORÈME 4 (Harish-Chandra) [1].- Soit $\lambda \in \widetilde{\Lambda}'$. Le degré formel de π_λ est égal à

$$\frac{1}{(2\pi)^q\, 2^{\nu/2} \prod_{\alpha \in \Delta_c^+} (\alpha,\rho_c)} \prod_{\substack{\alpha \in \Delta \\ (\alpha,\lambda)>0}} (\alpha,\lambda) \quad ,$$

où $\nu = \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{k} - \operatorname{rang} \mathfrak{g}/\mathfrak{k}$.

Soit $Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ le centre de $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$. Si π est une représentation unitaire irréductible de G , on sait que tout $z \in Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ opère de manière scalaire dans l'espace des vecteurs différentiables de π . Notons $\chi(z)$ ce scalaire. Alors χ est un caractère de $Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, appelé le caractère infinitésimal de π . D'autre part, Harish-Chandra a défini un isomorphisme de $Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ sur l'ensemble $S(\mathfrak{t}_{\mathbb{C}})^{W_{\mathbb{C}}}$ des éléments de $S(\mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$ invariants sous l'action de $W_{\mathbb{C}}$. En composant cet isomorphisme avec l'évaluation en un point $\lambda \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^*$, on obtient un caractère χ_λ de $Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ (la défi-

---

[1] Dans [4] une autre normalisation de la mesure de Haar sur G donne le degré formel $\prod_{\substack{\alpha \in \Delta \\ (\alpha,\lambda)>0}} \frac{(\alpha,\lambda)}{(\alpha,\rho)}$ où $\rho = \frac{1}{2} \sum_{(\alpha,\lambda)>0} \alpha$.

nition de χ_λ est rappelée au § 5 ci-dessous) et l'on a $\chi_\lambda = \chi_{\lambda'}$ si et seulement si $\lambda' \in W_c\lambda$.

Il résulte par exemple de (*) que si $\lambda \in \widetilde{\Lambda}'$, le caractère infinitésimal de π_λ est χ_λ. Il y a donc $|W_c|/|W|$ classes de représentations de carré intégrable de G ayant χ_λ pour caractère infinitésimal (on note $|X|$ le cardinal d'un ensemble X). Plus précisément, l'ensemble des éléments réguliers de C est réunion disjointe des C_P où P parcourt l'ensemble des systèmes de racines positives pour Δ tels que $P \cap \Delta_c = \Delta_c^+$ (il y a $|W_c|/|W|$ tels P). Si $\lambda \in \widetilde{\Lambda}'$, il y a un et un seul λ' dans chaque $\widetilde{\Lambda}' \cap C_P$ tel que $\pi_{\lambda'}$ ait χ_λ pour caractère infinitésimal. On voit que la série discrète est réunion de $|W_c|/|W|$ séries disjointes paramétrées par les $\widetilde{\Lambda}' \cap C_P$. Par exemple, la série discrète de SL(2,R) se partage en "série discrète holomorphe" et "série discrète anti-holomorphe".

5. Restriction à K

Dans ce paragraphe, on fixe $\lambda \in \widetilde{\Lambda}' \cap C$. On note P le système de racines positives pour Δ tel que $\lambda \in C_P$, on note ρ la demi-somme des éléments de P , et on pose $\rho_n = \rho - \rho_c$, $P_n = P \setminus \Delta_c^+$. On pose

$$(**) \qquad \mu_\lambda = \lambda - \rho_c + \rho_n .$$

On remarquera que $\mu_\lambda \in \Lambda \cap C$, et donc que c'est le poids dominant d'une représentation irréductible de K . En effet μ_λ appartient à Λ car $\lambda \in \widetilde{\Lambda}$. D'autre part comme λ est régulier et poids dominant pour Δ_c^+ , $\lambda - \rho_c$ est un poids dominant pour Δ_c^+ . Enfin $\rho_n \in C$.

Si $\mu \in it^*$, on note $Q(\mu)$ le nombre de manières distinctes de l'écrire sous la forme $\mu = \sum_{\beta \in P_n} n_\beta \beta$, où les n_β sont des entiers ≥ 0 .

Si π est une représentation de G (ou de $\mathfrak{g}$) et $\mu \in it^*$ un poids dominant pour Δ_c^+ , nous noterons $m_\pi(\mu)$ la multiplicité de τ_μ dans π .

Si π est une représentation unitaire irréductible, Harish-Chandra a montré que $m_\pi(\mu) < \infty$ pour tout μ . Nous poserons $m_{\pi_\lambda}(\mu) = m_\lambda(\mu)$.

THÉORÈME 5.- Soit $\mu \in \Lambda \cap C$. On a

$$(***) \qquad m_\lambda(\mu) = \sum_{w \in W} \det(w)\, Q(w(\mu + \rho_c) - (\mu_\lambda + \rho_c)) .$$

La formule (***) est connue sous le nom de conjecture de Blattner. Elle est démontrée par Hecht et Schmid [15] (+ [34] pour les groupes non linéaires). Des cas particuliers ont été auparavant démontrés (cf. par exemple [30], [19] et [32]). Une démonstration totalement différente de (***) est due à Enright [11]. Le théorème suivant est plus faible que le théorème 5, mais bien moins difficile à démontrer (voir par exemple [42] ou [4]).

THÉORÈME 6.- 1) On a $m_\lambda(\mu_\lambda) = 1$.

2) Soit $\mu \in \Lambda \cap C$. Si $m_\lambda(\mu) \neq 0$, on a $\mu = \mu_\lambda + \sum_{\alpha \in P} n_\alpha \alpha$ avec des entiers $n_\alpha \geq 0$.

Ce théorème a une réciproque. Rappelons que si π est une représentation unitaire irréductible de G dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, l'ensemble $\mathcal{H}_f$ des vecteurs K-finis de $\mathcal{H}$ est contenu dans l'ensemble des vecteurs différentiables, et qu'il est stable et irréductible sous l'action de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. De plus, le $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-module $\mathcal{H}_f$ détermine la classe d'équivalence de π (cf. [10], vol. I, chap. 4, § 5).

THÉORÈME 7 (Schmid [33]).- Soit V un $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-module simple. On suppose que $m_V(\mu_\lambda) > 0$ et que $m_V(\mu) = 0$ pour tout μ de la forme $\mu_\lambda - \sum_{\alpha \in P} n_\alpha \alpha$, où les n_α sont des entiers ≥ 0 non tous nuls. Alors V est isomorphe au $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-module des vecteurs K-finis de π_λ .

Les théorèmes 6 et 7 sont très importants. Ils interviennent dans la démonstration des différentes réalisations des séries discrètes (celles qui sont décrites ci-dessous, ou encore celle de Hotta [18] (cf. [42])), et dans le calcul de divers groupes de cohomologie à valeur dans l'espace de π_λ (cf. [7] et [35]).

D. Vogan dans [41] a obtenu (par une méthode différente) un théorème voisin du théorème 7. Soit V un $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-module et soit $\mu \in i\mathfrak{t}^*$ un poids dominant pour Δ_c^+ . Vogan dit que μ est un $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$-type minimal de V si $m_V(\mu) > 0$, et si pour tout $\mu' \in i\mathfrak{t}^*$ poids dominant pour Δ_c^+ , la relation $m_V(\mu') \neq 0$ entraîne $\|\mu' + 2\rho_c\| \geq \|\mu + 2\rho_c\|$. On définit de même les K-types minimaux des représentations de G . Il résulte du théorème 6 (et c'est ce qui justifie l'introduction du terme $2\rho_c$ dans la définition du K-type minimal) que μ_λ est l'unique K-type minimal de π_λ , et qu'il intervient avec multiplicité 1 [1]. On a la réciproque

[1] D. Vogan montre plus généralement que dans tout $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-module irréductible et formé de vecteurs $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$-finis, les $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$-types minimaux interviennent avec multiplicité 1 .

suivante.

THÉORÈME 8 (Vogan [41]).- Soit V un $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-module simple admettant τ_{μ_λ} comme $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$-type minimal. Alors V est isomorphe au $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-module des vecteurs K-finis de π_λ .

Soit $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^K$ l'ensemble des points fixes de K dans $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$. Soit $\mathcal{H}_{\mu_\lambda}$ la composante isotypique de type μ_λ dans l'espace de π_λ . Comme $m_\lambda(\mu_\lambda) = 1$, les éléments de $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^K$ opèrent scalairement dans $\mathcal{H}_{\mu_\lambda}$, ce qui définit un caractère de $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^K$. Notons le θ_λ . On sait que θ_λ caractérise π_λ dans le sens suivant : soit V un $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-module simple tel que $m_V(\mu_\lambda) > 0$, et tel que tout élément $u \in U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^K$ opère dans la composante isotypique de V de type μ_λ par la multiplication par $\theta_\lambda(u)$. Alors V est isomorphe au $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-module des vecteurs K-finis de π_λ (cf. [10], 9.1.12). Il est donc intéressant de calculer θ_λ . Ce calcul a été fait par Enright-Varadarajan [12] et Wallach [42] comme conséquence de la réalisation d'Enright-Varadarajan (voir plus bas) et, de manière différente, par Vogan [41] (le théorème 8 est un corollaire de ce calcul). On pose $\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in P} \mathfrak{g}_\alpha$, où pour tout $\alpha \in \Delta$, $\mathfrak{g}_\alpha$ désigne le sous-espace radiciel correspondant de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Si $u \in U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^K$, il existe un unique $u_o \in U(\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}) = S(\mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$ tel que $u - u_o \in \mathfrak{n}U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$. (Si $u \in Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, on a $\chi_\lambda(u) = u_o(\lambda + \rho)$ par définition de χ_λ .)

THÉORÈME 9.- Soit $u \in U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^K$. On a $\theta_\lambda(u) = u_o(\lambda + \rho)$.

6. Réalisation de Parthasarathy

C'est la réalisation qui donne le plus facilement des renseignements sur la restriction à K des séries discrètes (cf. [19], et [4]).

On note $\mathfrak{p}$ l'orthogonal de $\mathfrak{k}$ dans $\mathfrak{g}$, de sorte que $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ est la décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}$. La forme de Killing est définie positive sur $\mathfrak{p}$, et la représentation adjointe définit une représentation unitaire de K (resp. $\mathfrak{k}$) dans $\mathfrak{p}$. On note $\mathrm{Cliff}(\mathfrak{p}_{\mathbb{C}})$ l'algèbre de Clifford de $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$, c'est-à-dire l'algèbre associative unitaire engendrée par $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ avec les relations $X^2 = -(X,X)$ pour tout $X \in \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$. Comme la dimension de $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ est paire, l'algèbre $\mathrm{Cliff}(\mathfrak{p}_{\mathbb{C}})$ est simple. On choisit un idéal à gauche minimal S . Si $X \in \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$, on note $c(X)$ la multiplication à gauche par X dans S . D'autre part, il existe un unique isomorphisme j de $\mathfrak{so}(\mathfrak{p}_{\mathbb{C}})$ dans $\mathrm{Cliff}(\mathfrak{p}_{\mathbb{C}})$ tel que $Y(X) = [j(Y),X]$ pour tout $Y \in \mathfrak{so}(\mathfrak{p}_{\mathbb{C}})$ et tout $X \in \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$. La multiplication à gauche par $j(Y)$ dans S définit la représentation spinorielle de $\mathfrak{so}(\mathfrak{p}_{\mathbb{C}})$ dans S . L'espace S est somme de deux sous-espaces irréductibles, S^+ et S^- (le choix de S^+ est expliqué plus bas) de dimension 2^{q-1} . Pour tout $X \in \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ la multiplication $c(X)$ échange S^+ et S^- . On choisit sur S^+ et S^- des structures hilbertiennes qui en font des $\mathfrak{so}(\mathfrak{p})$ modules unitaires, et tels que pour tout $X \in \mathfrak{p}$ de longueur 1 , l'adjoint de $c(X) : S^+ \to S^-$ soit égal à $-c(X) : S^- \to S^+$. En composant avec l'application $\mathfrak{k} \to \mathfrak{so}(\mathfrak{p})$, S^+ et S^- deviennent des $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$-modules (pour tout ceci voir [28]).

Soient λ , P , P_n et ρ_n comme dans le paragraphe 5. On choisit S^+ de telle sorte que ρ_n soit un poids de S^+ . Les poids de S^+ (resp. S^-) sont les $\rho_n - \sum \beta_i$ où les β_i sont des éléments distincts de P_n en nombre pair (resp. impair). Ces poids sont de multiplicité 1 .

Posons $\mu = \lambda - \rho_c$. C'est un poids dominant pour Δ_c^+ . La représentation de $\mathfrak{k}$ dans $V_\mu \otimes S^\pm$ se relève en une représentation unitaire de K . On note $E^\pm$ le fibré vectoriel de base G/K et de fibre $V_\mu \otimes S^\pm$ défini par cette représentation. Notons $C^\infty(E^\pm)$, $C_c^\infty(E^\pm)$, $L_2(E^\pm)$ les espaces de sections C^∞ , C^∞ à support compact, ou de carré intégrable (pour la mesure G invariante sur G/K et la structure hermitienne des fibres). L'espace $C^\infty(E^\pm)$ s'identifie à l'espace des fonctions φ , C^∞ sur G à valeurs dans $V_\mu \otimes S^\pm$ qui vérifient $\varphi(gk) = k^{-1}\varphi(g)$ pour tout $g \in G$ et tout $k \in K$. On définit les <u>opérateurs de Dirac</u> $D^+ : C^\infty(E^+) \to C^\infty(E^-)$ $D^- : C^\infty(E^-) \to C^\infty(E^+)$ par la formule

$$D^\pm(\varphi) = \sum_{i=1}^{2q} c(X_i)X_i\varphi \qquad \text{pour } \varphi \in C^\infty(E^\pm) .$$

On a noté X_i une base orthonormée de $\mathfrak{p}$, et identifié un élément $X \in \mathfrak{g}$ avec le champ de vecteurs invariant à gauche qu'il définit.

Les opérateurs D^+ et D^- sont des opérateurs différentiels d'ordre 1 elliptiques, et formellement adjoints l'un de l'autre (i.e. $D^+ \oplus D^-$ est symétrique sur $C_c^\infty(E^+ \oplus E^-)$). De plus, on a la formule de Parthasarathy :

$$(***)\qquad D^-D^+ = -\Omega + (\lambda,\lambda) - (\rho,\rho)$$
$$D^+D^- = -\Omega + (\lambda,\lambda) - (\rho,\rho) ,$$

où Ω est l'opérateur de Casimir, agissant respectivement dans $C^\infty(E^+)$ et $C^\infty(E^-)$.

On note $\mathcal{H}_\lambda^\pm$ l'ensemble des $\varphi \in C^\infty(E^\pm) \cap L_2(E^\pm)$ vérifiant $D^\pm\varphi = 0$. Comme $D^\pm$ est elliptique, c'est un sous-espace fermé de $L_2(E^\pm)$. On peut montrer que $D^+ \oplus D^-$, défini sur $C_c^\infty(E^+ \oplus E^-)$ est essentiellement self-adjoint. La formule (***) entraîne que $\mathcal{H}_\lambda^\pm$ est égal au sous-espace propre correspondant à la valeur propre $(\lambda,\lambda) - (\rho,\rho)$ de Ω dans $L_2(E^\pm)$. Le groupe G opère unitairement par translations à gauche dans $\mathcal{H}_\lambda^+$ et $\mathcal{H}_\lambda^-$. (Pour tout ceci voir [28], [44].)

THÉORÈME 10.- On a $\mathcal{H}_\lambda^- = 0$. La représentation de G dans $\mathcal{H}_\lambda^+$ est irréductible et appartient à la classe π_λ .

Lorsque G/K a une structure complexe G invariante, le théorème 10 est démontré par les λ "assez réguliers" par Narasimhan et Okamoto [27]. Sans hypothèse sur G , le théorème 10 a été démontré pour les λ "assez réguliers" par Parthasarathy [28], et dans le cas général par Schmid ([33] et [4]).

7. Réalisation de Kostant et Langlands et méthode des orbites

Comme dans la réalisation de Parthasarathy, il s'agit encore de faire opérer G dans des espaces de solutions de carré intégrable d'équations aux dérivées partielles elliptiques. Bien que peut-être plus compliquée que celle de Parthasarathy, la réalisation de Kostant et Langlands est intéressante parce qu'elle est un cas particulier d'une construction s'appliquant à tous les groupes de Lie, et généralisant à la fois la théorie de Kirillov [21] et le théorème de Borel-Weil-Bott (cf. par exemple [43], chap. 2, § 5).

Dans le début de ce paragraphe, nous noterons G un groupe de Lie connexe quelconque. Soit ω une orbite de G dans $\mathfrak{g}^*$ pour la représentation contragrédiente de la représentation adjointe. La "méthode des orbites" consiste en gros à associer à ω , si possible, une ou plusieurs représentations unitaires de G (voir [21] et [23] par exemple). Un des procédés utilise les polarisations. Décrivons le dans un cas particulier suffisant pour la construction de la série discrète des groupes semi-simples. Soit $f \in \omega$. Nous supposerons que le centralisateur

$G(f)$ de f dans G est connexe et que f admet une "polarisation complexe", c'est-à-dire une sous-algèbre $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ telle que $f([\mathfrak{b},\mathfrak{b}]) = 0$, et $\mathfrak{b} + \bar{\mathfrak{b}} = \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ (ce qui entraîne $\mathfrak{b} \cap \bar{\mathfrak{b}} = \mathfrak{g}(f)_{\mathbb{C}}$ où $\mathfrak{g}(f)$ est l'algèbre de Lie de $G(f)$). On pose $\rho_{\mathfrak{b}}(X) = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{b}}(X)$ pour tout $X \in \mathfrak{b}$. On suppose que la restriction de $if + \rho_{\mathfrak{b}}$ à $\mathfrak{g}(f)$ est la différentielle d'un caractère (nécessairement unitaire) de $G(f)$ et que l'image de $G(f)$ dans $\operatorname{End}(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f))$ est compacte. On remarquera que ces conditions ne dépendent que de ω et non du choix de f ou de $\mathfrak{b}$. Fixons f et $\mathfrak{b}$ comme ci-dessus. Ces données définissent une structure holomorphe G-invariante sur $G/G(f)$ (l'espace tangent à l'origine est $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{b}$) et un fibré en droites hermitien et holomorphe de base $G/G(f)$. Notons $F_{\mathfrak{b}}$ ce fibré : l'espace des sections holomorphes de $F_{\mathfrak{b}}$ au-dessus d'un ouvert U de $G/G(f)$ s'identifie à l'espace des fonctions φ C^{∞} dans l'image réciproque de U dans G qui vérifient $X\varphi = (-if(X) - \rho_{\mathfrak{b}}(X))\varphi$ pour tout $X \in \mathfrak{b}$. Nous noterons $\Omega^{0,j}(F_{\mathfrak{b}})$ l'espace des $(0,j)$ formes sur $G/G(f)$, à coefficients C^{∞} , à valeurs dans $F_{\mathfrak{b}}$, de sorte que l'on a un complexe elliptique

$$0 \longrightarrow C^{\infty}(F_{\mathfrak{b}}) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{0,1}(F_{\mathfrak{b}}) \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots \quad \Omega^{0,j}(F_{\mathfrak{b}}) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{0,j+1}(F_{\mathfrak{b}}) \to \cdots$$

On choisit une mesure G-invariante sur $G/G(f)$ et une structure hermitienne $G(f)$ invariante sur $\mathfrak{b}/\mathfrak{g}(f)_{\mathbb{C}}$. Ces données permettent de définir une structure préhilbertienne sur les espaces $\Omega_c^{0,j}(F_{\mathfrak{b}})$ des formes à support compact, et l'adjoint formel $\bar{\partial}^* : \Omega^{0,j}(F_{\mathfrak{b}}) \to \Omega^{0,j-1}(F_{\mathfrak{b}})$. Notons $L_2^j(F_{\mathfrak{b}})$ l'espace complété de $\Omega_c^{0,j}(F_{\mathfrak{b}})$ et posons $\square = \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}$. On note $\mathcal{H}^j(F_{\mathfrak{b}})$ le sous-espace de $L_2^j(F_{\mathfrak{b}})$ formé des éléments annulés (au sens des distributions) par $\square$. D'après [1], cet espace est égal à l'espace des éléments de $L_2^j(F_{\mathfrak{b}})$ qui sont annulés (au sens des distributions) par $\bar{\partial}$ et $\bar{\partial}^*$. Notons que puisque $\square$ est elliptique, on a $\mathcal{H}^j(F_{\mathfrak{b}}) \subset \Omega^{0,j}(F_{\mathfrak{b}})$.

Par translations à gauche, le groupe G opère unitairement dans $\mathcal{H}^j(F_{\mathfrak{b}})$.

L'application $(X,Y) \longrightarrow if([X,Y])$ induit sur $\mathfrak{b}/\mathfrak{g}(f)_{\mathbb{C}}$ une forme sesquilinéaire non dégénérée. Notons $(\dim \mathfrak{b}/\mathfrak{g}(f)_{\mathbb{C}} - n_{\mathfrak{b}}, n_{\mathfrak{b}})$ sa signature ($n_{\mathfrak{b}}$ est le "nombre de carrés négatifs").

<u>Principe</u>.- 1) On a $\mathcal{H}^j(F_{\mathfrak{b}}) \neq 0$ si et seulement si $j = n_{\mathfrak{b}}$.

2) La représentation de G dans $\mathcal{H}^{n_{\mathfrak{b}}}(F_{\mathfrak{b}})$ est irréductible et sa classe

d'équivalence ne dépend pas des choix faits (et en particulier ne dépend pas de $\mathfrak{b}$).

Ce principe est par exemple vérifié pour le groupe d'Heisenberg (cf. [8], [20] ou [29]).

Revenons aux notations du § 2, et soit $\lambda \in \widetilde{\Lambda}'$. Notons f l'élément de $\mathfrak{g}^*$ tel que $if(X) = \lambda(X)$ si $X \in \mathfrak{t}$ et qui s'annule sur l'orthogonal de $\mathfrak{t}$ dans $\mathfrak{g}$ pour la forme de Killing. On a alors $T = G(f)$, et les polarisations complexes sont les sous-algèbres de Borel de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ contenant $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$. Soit $\mathfrak{b}$ une telle sous-algèbre. Si P est le système de racines positives tel que $\mathfrak{b} = \mathfrak{t} \oplus \sum_{\alpha \in P} \mathfrak{g}_{\alpha}$, la restriction de $\rho_{\mathfrak{b}}$ à $\mathfrak{t}$ est égale à la demi-somme des éléments de P , de sorte que, puisque $\lambda \in \widetilde{\Lambda}$, $if + \rho_{\mathfrak{b}}$ est la différentielle d'un caractère de T . On peut donc construire comme ci-dessus les espaces $\mathcal{H}^j(F_{\mathfrak{b}})$. Dans ce cas, cette construction a été proposée par Langlands [24].

THÉORÈME 11 (Schmid [31] et [35]).- On a $\mathcal{H}^j(F_{\mathfrak{b}}) \neq 0$ si et seulement si $j = n_{\mathfrak{b}}$. La représentation de G dans $\mathcal{H}^{n_{\mathfrak{b}}}(F_{\mathfrak{b}})$ est irréductible et appartient à la classe π_{λ} .

Dans [35], G est supposé linéaire, mais cela n'est pas nécessaire (cf. [34] et [45]).

8. Réalisation d'Enright-Varadarajan

Soient $\lambda \in \widetilde{\Lambda}' \cap C$ et P comme dans le paragraphe 5. Enright et Varadarajan construisent un $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-module simple dont la restriction à $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ a les propriétés du théorème 6, et donc, d'après le théorème 7 ou 8 est isomorphe au module des éléments K-finis de π_{λ} . Cette construction est intéressante, car elle est relativement simple. Elle permet par exemple la démonstration des théorèmes 5 (cf. [11]) et 9. Elle permet aussi d'entreprendre la classification des représentations quasi-simples irréductibles de G dans un espace de Banach sans faire la théorie de la série discrète (cf. [41]).

Introduisons quelques notations. Si $\mu \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^*$, nous noterons V^{μ} le module de Verma pour $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ de plus haut poids μ relativement à Δ_c^+ . Si $w \in W$, on pose $w.\mu = w(\mu + \rho_c) - \rho_c$. On note w_0 l'élément de plus grande longueur de W . Supposons que μ soit un poids dominant pour Δ_c^+ . Pour tout $w \in W$, V^{μ} contient un et un seul sous-module isomorphe à $V^{w.\mu}$. On conviendra que V^{μ} contient $V^{w.\mu}$.

Le module V^{μ} contient un unique sous-module maximal, égal à $\sum_{\substack{w\in W\\ w\neq 1}} V^{w.\mu}$, et le quotient $V^{\mu}/\sum_{\substack{w\in W\\ w\neq 1}} V^{w.\mu}$ est isomorphe à V_{μ} (voir par exemple [10], chap. 7).

Nous noterons $\mathcal{V}^{\mu}$ le module de Verma pour $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ de plus haut poids μ relativement au système de racine $-w_o P$.

On fixe un poids dominant ν pour Δ_c^+ . Il existe (à un isomorphisme près) un et un seul module M pour $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, contenant V^{ν} , engendré par V^{ν} , et ayant les deux propriétés suivantes :

1) Posons $\mathfrak{n}_c^- = \sum_{\alpha\in -\Delta_c^+} \mathfrak{g}_{\alpha}$. Si $m \in M$, et $u \in U(\mathfrak{n}_c^-)$, la relation $um = 0$ entraîne $u = 0$ ou $m = 0$.

2) Le sous-module de M engendré par $V^{w_o.\nu}$ est isomorphe à $\mathcal{V}^{w_o.\nu}$. [Pour construire M , on part de $U = U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \otimes_{U(\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})} V^{\nu}$. Ce module contient $U' = U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \otimes_{U(\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})} V^{w_o.\nu}$. D'autre part, le $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$-module engendré par les vecteurs dominants de $\mathcal{V}^{w_o.\nu}$ est isomorphe à $V^{w_o.\nu}$, de sorte qu'il y a une surjection canonique $U' \longrightarrow \mathcal{V}^{w_o.\nu}$. Notons I le noyau de cette application. C'est aussi un sous-module de U . On note J l'ensemble des $w \in U$ tels qu'il existe $u \in U(\mathfrak{n}_c^-)$, $u \neq 0$ tel que $uw \in I$. C'est un sous-$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-module de U . Alors $M = U/J$.]

Pour tout $w \in W$, on note M_w le sous-module de M engendré par $V^{w.\nu}$. On pose $\mathcal{W}_{P,\nu} = M/\sum_{\substack{w\in W\\ w\neq 1}} M_w$.

PROPOSITION 1.- Considéré comme $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$-module, $\mathcal{W}_{P,\nu}$ est somme directe de $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$-modules irréductibles de dimension finie. La multiplicité de τ_{ν} dans $\mathcal{W}_{P,\nu}$ est 1 , et la composante isotypique de type τ_{ν} engendre $\mathcal{W}_{P,\nu}$ comme $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-module. Si μ est le poids dominant d'une représentation irréductible de $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ qui intervient dans $\mathcal{W}_{P,\nu}$, on a $\mu = \nu + \sum_{\alpha\in P} n_{\alpha}\alpha$, où les n_{α} sont des entiers ≥ 0 .

Il résulte de la proposition 1 que $\mathcal{W}_{P,\nu}$ a un unique quotient simple, que nous noterons $D_{P,\nu}$.

THÉORÈME 12 ([12], [33] et [42]).- Le module D_{P,μ_λ} est isomorphe au module des vecteurs K-finis de π_λ .

CHAPITRE II : THÉORÈME DE L'INDICE L_2 ET SÉRIE DISCRÈTE

Atiyah et Schmid [4] donnent dans une nouvelle démonstration des théorèmes 1, 3, 4, 6 et 10. Les démonstrations antérieures du théorème 10 utilisaient le théorème de Plancherel pour G (dû à Harish-Chandra) et le théorème 3 pour faire l'analyse spectrale des espaces $\mathcal{H}_\lambda^+$ et $\mathcal{H}_\lambda^-$. Dans [4] au contraire, il est montré directement que $\mathcal{H}_\lambda^+$ contient une représentation de carré intégrable de G . La démonstration utilise en particulier le théorème de l'indice L_2 d'Atiyah [2], et la formule de Plancherel "abstraite" pour G . Ci-dessous je montre comment Atiyah et Schmid [4] prouvent le théorème d'existence d'Harish-Chandra (i.e. la moitié du théorème 1).

1. Le théorème de l'indice L_2 (Atiyah [2])

Soit X une variété C^∞ paracompacte, munie d'une mesure C^∞ , E et F des fibrés vectoriels hermitiens de base X , et $D : C^\infty(E) \to C^\infty(F)$ un opérateur différentiel elliptique. On note $\mathcal{H}(D)$ le sous-espace de $L_2(E)$ formé des éléments annulés par D (au sens des distributions). Comme D est elliptique, $\mathcal{H}(D)$ est contenu dans $C^\infty(E)$, et la projection orthogonale de $L_2(E)$ sur $\mathcal{H}(D)$ est donnée par un noyau $p(x,y)$ C^∞ sur $X \times X$. Notons $D^* : C^\infty(F) \to C^\infty(E)$ l'adjoint formel. On définit de même $\mathcal{H}(D^*)$ et $p^*(x,y)$.

On suppose donné un groupe Γ d'automorphismes de toute la situation et agissant discrètement et sans points fixes dans X . On suppose que l'espace $\widetilde{X} = \Gamma\backslash X$ est compact. Par passage au quotient, on obtient sur $\widetilde{X}$ les fibrés $\widetilde{E}$, $\widetilde{F}$, l'opérateur elliptique $\widetilde{D} : C^\infty(\widetilde{E}) \longrightarrow C^\infty(\widetilde{F})$. Comme $\widetilde{X}$ est compact, $\widetilde{D}$ a un indice.

On a $\operatorname{tr} p(\gamma x, \gamma x) = \operatorname{tr} p(x,x)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. On pose

$$\dim_\Gamma \mathcal{H}(D) = \int_{\widetilde{X}} \operatorname{tr} p(x,x)\, dx .$$

De la même manière, on définit $\dim \mathcal{H}(D^*)$ et l'on pose

$$\operatorname{Indice}_\Gamma D = \dim_\Gamma \mathcal{H}(D) - \dim_\Gamma \mathcal{H}(D^*) .$$

Le théorème de l'indice L_2 est l'égalité :

(*) $$\text{Indice}_\Gamma D = \text{Indice}\ \widetilde{D}\ .$$

Nous allons appliquer (*) à l'opérateur de Dirac sur G/K . Soient donc G , λ , D^+ comme dans le chapitre I , § 6 , et supposons G linéaire. Il est démontré dans [6] qu'il existe un sous-groupe discret Γ de G sans torsion et tel que $\Gamma\backslash G$ soit compact. L'indice de l'opérateur $\widetilde{D}^+$ sur $\widetilde{X} = \Gamma\backslash G/K$ est calculable, et joint à (*), on obtient la formule :

(**) $$\text{Indice}_\Gamma D^+ = c\ \text{vol}(\Gamma\backslash G/K) \prod_{\alpha\in P} (\lambda,\alpha)$$

où c est une constante > 0 (dépendant du choix de la mesure de Haar sur G). La formule (**) entraîne en particulier que $\mathcal{H}_\lambda^+$ est non nul.

2. Formule de Plancherel

Soit $\hat{G}$ l'ensemble des classes de représentations unitaires irréductibles de G . Comme G est unimodulaire et de type I, on a la décomposition

$$L_2(G) = \int_{\hat{G}} \mathcal{H}_\pi \otimes \mathcal{H}'_\pi\, d\mu(\pi)$$

où, pour tout $\pi \in \hat{G}$, $\mathcal{H}_\pi$ est l'espace de π , $\mathcal{H}'_\pi$ l'espace dual et $d\mu$ la mesure de Plancherel. Sur l'algèbre de Von Neumann $\mathcal{A}$ des opérateurs dans $L_2(G)$ qui commutent aux translations à gauche, il y a une trace canonique, notée t_G . La mesure de Plancherel $d\mu$ est telle que pour tout $A \in \mathcal{A}^+$, $A = \int_{\hat{G}} 1 \otimes A_\pi\, d\mu(\pi)$ (avec $A \in \text{End}(\mathcal{H}'_\pi)$), on ait $t_G(A) = \int_{\hat{G}} \text{tr}\,(A_\pi)\, d\mu(\pi)$. (Voir par exemple [9], 18.8.1.)

L'espace $L_2(E^\pm)$ s'identifie naturellement à l'espace des éléments K-invariants de $L_2(G) \otimes V_\mu \otimes S^\pm$ (où K agit par translations à droite dans $L_2(G)$). On a donc

$$L_2(E^\pm) = \int_{\hat{G}} \mathcal{H}_\pi \otimes W_\pi^\pm\, d\mu(\pi)$$

où l'on a noté $W_\pi^\pm$ l'ensemble des éléments K-invariants de $\mathcal{H}'_\pi \otimes V_\mu \otimes S^\pm$. Dans l'algèbre de Von Neumann $\mathcal{B}$ des opérateurs de $L_2(E^\pm)$ qui commutent à l'action de G , il y a une trace naturelle (notée encore t_G) telle que pour tout $B \in \mathcal{B}^+$, $B = \int 1 \otimes B_\pi$ (avec $B_\pi \in \text{End}(W_\pi^\pm)$), on ait $t_G(B) = \int_{\hat{G}} \text{tr}(B_\pi)\, d\mu(\pi)$.

Soit d'autre part $\mathcal{C}$ l'algèbre des opérateurs de $L_2(E^\pm)$ commutant à l'action de Γ . Il existe une trace t_Γ sur $\mathcal{C}$ telle que $t_\Gamma(p) = \dim_\Gamma \mathcal{H}(D^\pm)$ si p est la projection orthogonale sur $\mathcal{H}(D^\pm)$. On a évidement $\mathfrak{D} \subset \mathcal{C}$, et l'on montre que la restriction de t_Γ à $\mathfrak{D}$ est égale à $\mathrm{vol}(\Gamma\backslash G/K)t_G$.

Ecrivons $\mathcal{H}(D^{\pm}) = \int_{\hat{G}} \mathcal{H}_\pi \otimes U_\pi^{\pm}\, d\mu(\pi)$ (ce qui définit $U_\pi^{\pm}$ pour presque tout π). Comme $D^{+*} = D^-$, on a :

$$\mathrm{Indice}_\Gamma\, D^+ = \mathrm{vol}(\Gamma\backslash G/K) \int_{\hat{G}} (\dim U_\pi^+ - \dim U_\pi^-)\, d\mu(\pi) .$$

En comparant avec (**), on obtient :

$$(***) \qquad \int_{\hat{G}} (\dim U_\pi^+ - \dim U_\pi^-)\, d\mu(\pi) = c \prod_{\alpha\in P} (\alpha,\lambda) .$$

On remarquera que dans (***) le groupe Γ a disparu !

3. Fin de la démonstration

Il résulte de la formule de Parthasarathy (chap. I, § 6) que, pour presque tout π , on a $U_\pi^{\pm} = W_\pi^{\pm}$ si $\pi(\Omega) = (\lambda,\lambda) - (\rho,\rho)$, et $U_\pi^{\pm} = 0$ sinon. Notons $\hat{G}_\lambda$ l'ensemble des $\pi \in \hat{G}$ tels que $\pi(\Omega) = (\lambda,\lambda) - (\rho,\rho)$. On a

$$(****) \qquad \int_{\hat{G}_\lambda} (\dim W_\pi^+ - \dim W_\pi^-)\, d\mu(\pi) = c \prod_{\alpha\in P} (\alpha,\lambda) .$$

Un argument astucieux mais pas très difficile montre que si $\dim W_\pi^+ \neq \dim W_\pi^-$, le caractère infinitésimal de π est égal à χ_λ . C'est un résultat d'Harish-Chandra qu'il existe seulement un nombre fini d'éléments de $\hat{G}$ dont le caractère infinitésimal soit égal à χ_λ . Dans (****), l'intégrale est en fait une somme finie. Si $\pi \in \hat{G}$, on a $\mu(\{\pi\}) \neq 0$ si et seulement si π est de carré intégrable et dans ce cas, on a $\mu(\{\pi\}) = d_\pi$ (le degré formel). On a donc :

$$(*****) \qquad \sum (\dim W_\pi^+ - \dim W_\pi^-)\, d_\pi = c \prod_{\alpha\in P} (\lambda,\alpha) ,$$

où la somme porte sur l'ensemble (fini) des représentations de carré intégrable de G dont le caractère infinitésimal est égal à χ_λ . La formule (*****) montre que cet ensemble est non vide, C.Q.F.D.

A. Borel et P. Deligne ont remarqué que l'on ne sait pas si un sous-groupe Γ comme ci-dessus existe lorsque G n'est pas linéaire. Le cas général s'obtient par réduction au cas linéaire (Atiyah-Schmid, à paraître dans Inventiones Math.).

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. ANDREOTTI et E. VESENTINI - Carleman estimates for the Laplace-Beltrami equations on complex manifolds, I.H.E.S. Pub. Math., 25 (1965), 313-362.

[2] M. F. ATIYAH - Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras, Astérisque 32/33 (1976), 43-72.

[3] M. F. ATIYAH et W. SCHMID - A new proof of the regularity theorem for invariant eigendistributions on semisimple Lie groups, à paraître

[4] M. F. ATIYAH et W. SCHMID - A geometric construction of the discrete series for semisimple Lie groups, Inv. Math., 42 (1977), 1-62.

[5] V. BARGMANN - Irreducible unitary representations of the Lorentz group, Ann. of Math., 48 (1947), 568-640.

[6] A. BOREL - Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces, Topology, 2 (1963), 111-122.

[7] A. BOREL et N. WALLACH - Seminar notes on the cohomology of discret subgroups of semi-simple groups, à paraître.

[8] J. CARMONA - Fibrés vectoriels holomorphes sur une variété hermitienne, Math. Ann., 205 (1973), 89-112.

[9] J. DIXMIER - Les C^*-algèbres et leurs représentations, Gauthier-Villars, Paris 1964.

[10] J. DIXMIER - Algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars, Paris, 1974.

[11] T. J. ENRIGHT - Blattner type multiplicity formulas for the fundamental series of a real semisimple Lie algebra, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., XI(1978),fasc.4.

[12] T. J. ENRIGHT et V. S. VARADARAJAN - On a infinitésimal characterization of the discrete series, Ann. of Math., 102 (1975), 1-15.

[13] HARISH-CHANDRA - Discrete series for semi-simple Lie groups I, II, Acta Math., 113 (1965), 241-318 ; 116 (1966), 1-111.

[14] HARISH-CHANDRA - Harmonic analysis on semi-simple Lie groups, Bull. Amer. Math. Soc., 76 (1970), 529-551.

[15] H. HECHT et W. SCHMID - A proof of Blattner's conjecture, Inventiones Math., 31 (1975), 129-154.

[16] H. HECHT et W. SCHMID - On integrable representations of a semi-simple Lie group, Math. Annalen, 220(1976), 147-150.

[17] T. HIRAÏ - The characters of the discrete series for semisimple Lie groups, à paraître.

[18] R. HOTTA - On realization of discrete series for semisimple Lie groups, Proc. Japan Acad., 46 (1970), 993-996.

[19] R. HOTTA et R. PARTHASARATHY - Multiplicity formulae for discrete series, Inventiones Math., 26 (1974), 133-178.

[20] N. E. HURT - Proof of an analogue of a conjecture of Langlands for the "Heisenberg-Weyl" group, Bull. London Math. Soc., 4 (1972), 127-129.

[21] A. A. KIRILLOV - Unitary representation of nilpotent Lie groups, Russ. Math. Surveys, 17 (1962), 53-104.

[22] A. W. KNAPP et N. WALLACH - Szëgo kernels associated with discrete series, Inventiones Math., (1976), 163-200.

[23] B. KOSTANT - Orbits, symplectic structures, and représentation theory, Proc. U.S.-Japan Seminar Diff. Geometry, Kyoto, Japan 1965.

[24] R. P. LANGLANDS - Dimension of spaces of automorphic forms, Proc. Symposia in Pure Math., IX (1966), 253-257.

[25] R. P. LANGLANDS - On the classification of irreducible representations of real algebraic groups, à paraître.

[26] D. MILIČIČ - Asymptotic behaviour of matrix coefficients of the discret series, Duke Math. Journal, 44 (1977), 59-88.

[27] M. S. NARASIMHAN et K. OKAMOTO - An analogue of the Borel-Weil-Bott theorem for hermitian symmetric pairs of non compact type, Ann. of Math., 91 (1970), 486-511.

[28] R. PARTHASARATHY - Dirac operator and the discrete series, Ann. of Math., 96 (1972), 1-30.

[29] I. SATAKE - Unitary representations of a semi-direct product of Lie groups on $\bar{\partial}$-cohomology spaces, Math. Annalen, 190 (1971), 177-202.

[30] W. SCHMID - Homogeneous complex manifolds and representations of semisimple Lie groups, Thesis, Berkeley, 1967.

[31] W. SCHMID - On a conjecture of Langlands, Ann. of Math., 93(1971), 1-42

[32] W. SCHMID - On the characters of discrete series (the hermitian-symmetric case) Inventiones Math., 30 (1975), 47-144.

[33] W. SCHMID - Some properties of square integrable representations of semisimple Lie groups, Ann. of Math., 102 (1975), 535-564.

[34] W. SCHMID - Two character identities for semisimple Lie groups, Lecture Notes in Math., n° 587, 1977, Springer, 196-225.

[35] W. SCHMID - L^2-cohomology and the discrete series, Ann. of Math., 103 (1976), 375-394.

[36] M. W. SILVA - The Embeddings of the discrete series in the principal series for semisimple Lie group of real rank one, Thesis, Rutgers Univ., 1977.

[37] P. C. TROMBI et V. S. VARADARAJAN - Asymptotic behaviour of eigenfunctions on a semisimple Lie group ; The discrète spectrum, Acta Math., 129 (1972), 237-280.

[38] V. S. VARADARAJAN - The theory of characters and the discrete series for semi-simple Lie groups, Proc. Symposia in Pure Math., 26 (1973), 45-99.

[39] V. S. VARADARAJAN - Harmonic analysis on real reductive groups, Lecture Notes in Math., n° 576, 1977, 1-521.

[40] J. A. VARGAS - A character formula for the discrete series of a semisimple Lie group, Thesis, Columbia Univ., 1977.

[41] D. VOGAN - Lie algebra cohomology and the representations of semisimple Lie groups, Thesis, M.I.T., 1976.

[42] N. WALLACH - On the Enright-Varadarajan modules : a construction of the discrete series, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., 9 (1976), 81-102.

[43] G. WARNER - Harmonic analysis on semisimple Lie groups, I et II, Springer Verlag, Berlin, 1972.

[44] J. A. WOLF - Essential self-adjointness for the Dirac operator and its square, Indiana Univ. Math., 22 (1973), 611-640.

[45] G. ZUCKERMAN - Tensor product of finite and infinite dimensional representations of semisimple Lie groups, à paraître dans Annals of Math.

Après la rédaction de cet exposé, j'ai reçu deux articles contenant aussi une démonstration du théorème d'existence des séries discrètes :

D. L. DEGEORGE et N. R. WALLACH - Limit formulas for multiplicities in $L^2(\Gamma\backslash G)$.

M. FLENSTED-JENSEN - On a fundamental series of representations related to an affine symmetric space.