Jean-Pierre Bourguignon

Premières formes de Chern des variétés kählériennes compactes

Séminaire N. Bourbaki, 1979, exp. n° 507, p. 1-21

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1977-1978__20__1_0>

PREMIÈRES FORMES DE CHERN DES VARIÉTÉS KÄHLÉRIENNES COMPACTES

[d'après E. CALABI, T. AUBIN et S. T. YAU]

par Jean-Pierre BOURGUIGNON

§ 1. Introduction. Formulation du problème

a) Introduction

Soit M une variété complexe compacte de dimension m. Une métrique hermitienne g sur M est dite kählérienne si la forme extérieure ω de type $(1,1)$ associée par g à la structure complexe est fermée ; nous dirons alors que ω est la forme de Kähler de la métrique kählérienne. En coordonnées locales complexes (z^α), si $g = \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} g_{\alpha\bar\beta}\, dz^\alpha \otimes d\bar z^\beta$, alors $\omega = i \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} g_{\alpha\bar\beta}\, dz^\alpha \wedge d\bar z^\beta$ (en particulier il est équivalent de se donner g ou ω).

Nous supposons qu'une telle métrique existe sur M (c'est bien sûr le cas si M est algébrique projective).

Le tenseur de courbure de Riemann R de la métrique kählérienne g est un 4-tenseur. Sa trace par rapport à la métrique est la courbure de Ricci Ric_ω qui est une 2-forme hermitienne. La forme de Ricci γ_ω, qui est la forme de type $(1,1)$ associée à Ric_ω, est fermée d'après la deuxième identité de Bianchi. D'après S. S. Chern ([12]), $(1/2\pi)\gamma_\omega$ est une première forme de Chern de M, autrement dit si $[\gamma_\omega]$ désigne la classe de cohomologie définie par γ_ω, nous avons

$$[\gamma_\omega] = 2\pi\, c_1(M) \tag{1}$$

où $c_1(M)$ désigne la première classe de Chern réelle du fibré holomorphe tangent à M.

Ayant besoin, pour étudier la structure des variétés kählériennes à première classe de Chern nulle, de métriques à courbure adaptée (voir §§ 2 et 3 pour des cas typiques), E. CALABI s'est intéressé, au début des années cinquante, aux propriétés de l'application $\gamma : \omega \longmapsto \gamma_\omega$ en particulier lorsque la classe de Kähler $[\omega]$ est fixée (pour étudier une question de S. BOCHNER). Il formula alors dans [9] et [10] la conjecture suivante :

CONJECTURE I.- Soit (M,ω) une variété kählérienne compacte et $\tilde{\gamma}$ une forme fermée de type $(1,1)$ telle que $[\tilde{\gamma}] = 2\pi\, c_1(M)$. Il existe une et une seule forme de Kähler $\tilde{\omega}$ dans la même classe que ω telle que $\gamma_{\tilde{\omega}} = \tilde{\gamma}$.

En particulier cela signifie que toute première forme de Chern est, à une constante près, la forme de Ricci d'une métrique kählérienne.

Deux autres conjectures d'inégale difficulté ont aussi un grand intérêt :

CONJECTURE II^+ (resp. II^-).- Soit M une variété complexe compacte admettant une première forme de Chern définie positive (resp. négative). Il existe une unique forme de Kähler ω telle que $\gamma_\omega = \omega$ (resp. $-\omega$). Une telle métrique est dite d'Einstein-Kähler.

Remarques.- i) Une métrique riemannienne g est dite d'Einstein si sa courbure de Ricci Ric_g vérifie $Ric_g = kg$ (k est forcément une constante). Par homothétie sur la métrique, $|k|$ peut être fixé arbitrairement ; seul le signe de k importe.

ii) La conjecture I contient un théorème d'existence de métriques d'Einstein-Kähler lorsque $c_1(M) = 0$. Au contraire de la conjecture $II^{\pm}$, où $c_1(M)$ fixe la classe de Kähler-Einstein, il n'y a unicité qu'à classe de Kähler fixée.

Présentées ainsi, ces conjectures peuvent paraître optimistes, puisqu'elles affirment que les restrictions cohomologiques déjà connues sont les seules qui existent.

Ces conjectures ont des corollaires fort intéressants (et quelquefois inattendus) en géométrie analytique et riemannienne, corollaires que nous examinons aux paragraphes 2 et 3.

En 1955, E. CALABI a résolu dans [10] la conjecture I, lorsque la forme $\tilde{\gamma}$ est voisine d'une forme associée à la courbure de Ricci d'une métrique kählérienne (cela a été précisé par T. OCHIAI en 1974). Il a aussi prouvé l'unicité des solutions pour les conjectures I et II^- .

Bien que ces conjectures aient suscité un vif intérêt parmi les géomètres différentiels, c'est seulement en 1967 que T. AUBIN a établi (cf. [3]) la conjecture I dans le cas où la métrique kählérienne de départ a une courbure bisectionnelle positive ou nulle (c'est une hypothèse forte : S. KOBAYASHI et T. OCHIAI conjecturent dans [18] que CP^m est la seule variété complexe à courbure bisectionnelle positive).

Début 1976, T. AUBIN a résolu la conjecture II^- (cf. [4]) et fin 1976 S. T. YAU la conjecture I (cf. [29] et [30]). Dans [30] S. T. YAU prouve indépendamment la conjecture II^- et considère le cas plus délicat où la métrique peut être dégénérée.

La conjecture II^+ ne peut être vraie en général : S. T. YAU nous a indiqué qu'il ressort de [28] que les variétés obtenues en éclatant un ou deux points sur CP^2 ont une forme de Chern positive, mais n'ont aucune métrique d'Einstein-Kähler.

b) Formulation du problème

Nous notons $d = d' + d''$ la décomposition de la différentielle extérieure en parties de bidegré $(1,0)$ et $(0,1)$.

Nous allons beaucoup utiliser l'opérateur $id'd''$ qui est un opérateur réel (il applique les fonctions réelles sur les 2-formes de type $(1,1)$ réelles).

Si $\tilde{\gamma}$ est une forme C^∞ fermée de type $(1,1)$ telle que $[\tilde{\gamma}] = 2\pi\, c_1(M)$, d'après (1) et [6] page 36, il existe une fonction C^∞ réelle f telle que

$$\tilde{\gamma} = \gamma_\omega - id'd''f \quad . \tag{2}$$

La fonction f est une donnée du problème. Nous normalisons f par la condition $\int_M e^f \omega^m = \int_M \omega^m$.

D'autre part si $\tilde{\omega}$ est une forme de Kähler définissant la même classe que ω , il existe une fonction C^∞ réelle φ telle que

$$\tilde{\omega} = \omega + id'd''\varphi \quad . \tag{3}$$

Un calcul classique de courbure en coordonnées complexes (z^α) donne (cf.[6] page 67)

$$\gamma_\omega = -id'd'' \log \det (g_{\alpha\bar{\beta}}) \tag{4}$$

où $(g_{\alpha\bar{\beta}})$ est l'expression locale de la métrique g .

Cette formule (4) explique la relation (1) puisque la première classe de Chern du fibré tangent peut être définie ainsi à partir de n'importe quelle densité de poids un, l'annulation de $c_1(M)$ signifiant que le groupe structural du fibré peut être réduit de $U(m)$ à $SU(m)$.

Pour résoudre la conjecture I, le noyau de $id'd''$ étant formé des combinaisons de fonctions holomorphes et antiholomorphes, il faut et il suffit que $\tilde{g}$ vérifie localement l'équation $\log \det(\tilde{g}_{\alpha\bar{\beta}}) - \log \det(g_{\alpha\bar{\beta}}) = f + C$ où C est une constante.

Donc globalement, ω et f étant donnés, il faut et il suffit que nous trouvions une fonction réelle φ telle que la forme $\omega + id'd''\varphi$ soit définie positive et vérifie l'équation

$$(*) \qquad (\omega + id'd''\varphi)^m = e^f \omega^m$$

(la constante a disparu car ω et $\tilde{\omega}$ étant dans la même classe, $\int_M \omega^m = \int_M \tilde{\omega}^m$).

Ainsi exprimée la conjecture I se ramène à trouver, dans une classe de Kähler donnée, une métrique ayant un élément de volume donné, ce qui la rend plus plausible.

La résolution de l'équation $(*)$ est due à S. T. YAU et est expliquée au § 4. C'est une équation du type de Monge-Ampère [1], non-linéaire elliptique.

Pour la conjecture $II^{\pm}$ la classe de Kähler d'une métrique de Kähler-Einstein est nécessairement proportionnelle à $c_1(M)$. Nous prenons comme forme de Kähler de départ la forme de Chern définie positive qui est supposée exister (ou son opposé pour la conjecture II^-). Il est alors facile de voir que l'équation de la conjecture $II^{\pm}$ est

$$(**^{\pm}) \qquad e^{\pm\varphi} (\omega + id'd''\varphi)^m = e^f \omega^m .$$

[1] Dans les notations de Monge u , p , q , r , s , t , la "vraie" équation de Monge-Ampère est $rt - s^2 = F(u)$ où F est une fonction donnée.

§ 2. Conséquences en géométrie analytique

Les preuves de ces conjectures, en particulier de la conjecture II^-, permettent d'utiliser une métrique adaptée à la situation complexe.

Nous commençons par le corollaire qui a motivé originellement E. CALABI.

COROLLAIRE 1 ([10])[1].- Soit M une variété complexe compacte à première classe de Chern nulle d'irrégularité q. Il existe un revêtement $\widetilde{M}$ de M produit de la variété d'Albanèse de $\widetilde{M}$ de dimension $\widetilde{q} \geq q$ et d'une variété kählérienne N simplement connexe à première classe de Chern nulle.

COROLLAIRE 2 ([6] page 76).- Soit (M, ω) une variété kählérienne compacte connexe. Si M a une première et une seconde formes de Chern négatives ou nulles, alors M est revêtue par un tore et en particulier toutes ses classes de Chern réelles sont nulles.

Preuve. Il est connu depuis [12] que $(c_2 \cup [\omega]^{m-2})[M]$ s'exprime par l'intégrale d'un polynôme en la courbure. Plus précisément si $R = U + S + W$ est la décomposition de 4-tenseur de courbure en composantes irréductibles sous l'action de $O(2m)$ (cf. [1] et [24]), nous avons

$$4\pi^2 \left(c_2 \cup \frac{[\omega]^{m-2}}{(m-2)!}\right)[M] = \int_M (|U|^2 - |S|^2 + |W|^2) \frac{\omega^m}{m!}$$

(le polynôme en la courbure qui apparaît en dimension complexe m n'est rien d'autre que l'intégrand de Gauss-Bonnet en dimension réelle 4).

Mais d'après les conjectures I et II^-, il existe sur M une métrique d'Einstein-Kähler, donc $S = 0$.

Comme par ailleurs $c_2(M)$ est négative ou nulle, $(c_2 \cup [\omega]^{m-2})[M] \leq 0$. Il faut donc que $\int_M (|U|^2 + |W|^2)\omega^m$ soit nul, i.e. que la métrique soit plate. Il est alors classique que M est revêtue par un tore. ∎

Ce résultat est nouveau pour les variétés algébriques générales (comparer au problème 19 de [14]) ; il était seulement connu par un calcul direct pour les intersections complètes. Il souligne (si c'était encore nécessaire) le rôle très particulier du fibré tangent parmi les fibrés analytiques sur une variété kählérienne.

[1] Pour une autre preuve, voir F.A. BOGOMOLOV, Izvestia Math. of the U.S.S.R 38(1974) et aussi pour les variétés de Hodge, Y. MATSUSHIMA, J.Diff. Geom. 3(1969), 477-489.

COROLLAIRE 3 ([29]).- Soit M une surface kählérienne compacte connexe à fibré canonique ample. Alors $3\,c_2(M) \geq c_1^2(M)$, l'égalité n'ayant lieu que si M est revêtue de façon biholomorphe par la boule de $\mathbb{C}^2$.

Preuve. D'après [24], nous avons

$$4\pi^2\,(3c_2(M)-c_1^2(M))[M] = \int_M \left(|U|^2 - |W^+|^2 + 3|W^-|^2 - |S|^2\right)\frac{\omega^2}{2!}$$

où $W = W^+ + W^-$ est la décomposition en composantes irréductibles de W sous $SO(4)$. La métrique étant kählérienne, $|U|^2 = |W^+|^2$ (cf. [24]).

Comme, d'après la conjecture II^-, il existe une métrique d'Einstein-Kähler sur M , i.e. telle que $S = 0$, l'inégalité suit.

De plus s'il y a égalité, R se réduit à $U + W^+$ et donc (M, ω) est à courbure holomorphe constante. Cette constante est forcément négative puisque γ_ω est négative, d'où la fin du corollaire, le revêtement universel riemannien de M étant le dual du plan projectif complexe. ∎

Y. MIYAOKA (cf. [27]) a établi cette inégalité plus généralement pour les surfaces de type général, mais semble ne rien pouvoir dire sur le cas d'égalité.

Il est à noter qu'en 1952 H. GUGGENHEIMER avait déjà établi l'inégalité pour les métriques d'Einstein-Kähler dans [13].

Le corollaire suivant résoud une conjecture faite par F. SEVERI dans [26]. F. HIRZEBRUCH et K. KODAIRA avaient presque terminé la preuve de cette conjecture et du corollaire 5 dans [16] : seul un cas précis leur échappait.

COROLLAIRE 4 ([29]).- Toute surface complexe qui a le type d'homotopie de $\mathbb{C}P^2$ lui est biholomorphiquement équivalente.

Preuve. Soit M une telle surface. La caractéristique d'Euler est un invariant d'homotopie ainsi que la signature (au signe près), d'où

$$c_2(M) = 3 \quad , \qquad \frac{1}{3}(c_1^2(M) - 2c_2(M)) = \pm 1 \ .$$

Par suite $c_1^2(M) > 0$ ce qui implique que M est algébrique d'après un théorème de Kodaira (cf. [19], page 1375).

Soit $\mathcal{O}$ le faisceau structural de M . Comme $H^1(M, \mathbb{Z}) = 0$, $H^1(M, \mathcal{O}^*) \simeq H^2(M, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, autrement dit tous les fibrés en droites sont multiples d'un fibré particulier. La variété M étant algébrique, le fibré canonique est un multiple d'un fibré en droites positif. F. HIRZEBRUCH et K. KODAIRA ont prouvé dans [16] que $c_1^2(M) = 9$. De plus si le fibré canonique est négatif (donc si $c_1(M) > 0$), ils ont montré que M est biholomorphiquement équivalente à CP^2 .

Dans le cas où le fibré canonique est positif, nous appliquons le Corollaire 3 et nous aboutissons à une contradiction puisque M est simplement connexe. ∎

COROLLAIRE 5 ([29]).- Toute variété kählérienne homéomorphe à CP^m lui est biholomorphiquement équivalente.

COROLLAIRE 6 ([29]).- Soient M et N deux surfaces complexes et $f : M \to N$ une équivalence d'homotopie préservant l'orientation. Si N est compacte et revêtue par la boule de C^2 , M et N sont biholomorphiquement équivalentes.

§ 3. Conséquences en géométrie riemannienne

La résolution des conjectures donne beaucoup de nouveaux exemples de métriques riemanniennes ayant des propriétés particulières (courbure, holonomie). Auparavant seuls les espaces homogènes étaient à notre disposition.

a) Hypersurfaces de CP^{m+1}

COROLLAIRE 7 ([29]).- Toute hypersurface compacte M de degré $m+2$ de CP^{m+1} (pour $m \geq 2$) a une métrique à courbure de Ricci nulle qui n'est pas plate [1]. Son groupe d'holonomie est alors $SU(m)$.

Preuve. D'après [15], page 159, $c_1(M)$ est nul. D'après la conjecture I, il existe une métrique à courbure de Ricci nulle sur M . Mais, M étant simplement connexe, la métrique ne peut être plate.

Le groupe d'holonomie d'une métrique kählérienne est contenu dans $U(m)$. L'annulation de la courbure de Ricci est précisément la condition à satisfaire pour qu'il soit contenu dans $SU(m)$, d'après un théorème de A. LICHNÉROWICZ (cf. page 261 de "Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie" Ed. Cremonese). ∎

Auparavant nous n'avions aucun exemple de variété compacte à courbure de Ricci nulle non plate (a fortiori à groupe d'holonomie $SU(m)$). Il y avait des exemples

[1] Ce n'est bien sûr pas la métrique plongée !

locaux, d'ailleurs dus à E. CALABI (cf. [11]).

COROLLAIRE 8 ([29]).- Toute hypersurface compacte de degré au moins $m+3$ dans CP^{m+1} (pour $m \geq 2$) a une métrique à courbure de Ricci négative d'Einstein-Kähler, mais n'a aucune métrique à courbure sectionnelle négative ou nulle.

Ce sont les premières familles de variétés riemanniennes compactes d'Einstein qui ne sont pas localement homogènes (voir [11] pour des exemples sur des variétés ouvertes mais complètes).

D'après un théorème de S. BOCHNER (cf. [7]) sur une variété compacte simplement connexe $\mathrm{Ric}_g \leq 0$ implique que le groupe des isométries est fini (dans le cas en question il n'y a en fait même pas de famille à un paramètre d'isométries locales).

b) Les surfaces K3

Parmi les variétés complexes à première classe de Chern entière nulle, les surfaces K3 (ce sont celles dont le premier nombre de Betti est nul) sont particulièrement intéressantes.

En effet, elles sont toutes difféomorphes à une quartique de CP^3 (par exemple à la surface d'équation homogène $z_1^4 + z_2^4 + z_3^4 + z_4^4 = 0$). Beaucoup d'entre elles peuvent être obtenues de la façon suivante : sur un tore complexe de dimension deux, l'involution $\tau : (z_1, z_2) \longmapsto (-z_1, -z_2)$ a 16 points fixes ; le quotient de l'espace obtenu par éclatement de ces points fixes par l'involution qui y est induite par τ est une surface K3 . L'espace des déformations de leur structure complexe est de dimension 20 , une base de l'homologie entière étant fixée.

D'après la conjecture I, il existe sur ces surfaces des métriques à courbure de Ricci nulle, donc à courbure scalaire nulle. Ces métriques se trouvent en quelque sorte être extrémales pour la courbure scalaire : en effet d'après un théorème de A. LICHNÉROWICZ (cf. [20]) toute variété spinorielle dont le $\hat{A}$-genre est non nul n'admet aucune métrique à courbure scalaire positive. C'est le cas des surfaces K3 : ayant une seconde classe de Stiefel-Whitney nulle (puisque leur première classe de Chern entière est nulle) ce sont des variétés spinorielles et leur $\hat{A}$-genre est non nul puisque c'est une fraction de leur signature.

Par ailleurs, N. HITCHIN a montré dans [17] que toute métrique à courbure scalaire nulle sur une surface K3 est automatiquement quaternionienne kählérienne, i.e. telle qu'il existe trois champs d'endomorphismes parallèles se multipliant comme la base canonique des quaternions imaginaires (se souvenir de ce que $SU(2) = Sp(1)$). Ces champs d'endomorphismes correspondent via la métrique aux formes harmoniques qui sont positives pour la forme d'intersection ; pour les surfaces K3 il y en a justement trois. Une telle métrique est donc kählérienne par rapport à une famille de structures complexes paramétrée par une sphère S^2 .

C'est le premier exemple de structure quaternionienne sur une variété compacte en dehors des tores complexes. Notons que l'espace projectif quaternionien $\mathbb{H}P^n$ ne possède pas une telle structure (en effet $H^2(\mathbb{H}P^n) = 0$).

En remarquant que la preuve de la conjecture I peut se faire avec paramètres, par déformation de la classe de Kähler ou de la structure complexe, nous pouvons construire des déformations de métriques d'Einstein-Kähler à courbure de Ricci nulle. Ce sont les premiers exemples de déformations de métriques d'Einstein en dehors des métriques plates. D'autres exemples doivent pouvoir être obtenus par déformation de la structure complexe des hypersurfaces des espaces projectifs de degré élevé (voir Corollaire 8).

§ 4. Résolution des équations

a) Unicité

En suivant E. CALABI ([10]), nous prouvons en même temps l'unicité des solutions de classe au moins C^2 pour les conjectures I et II^- . Au b) nous prouverons l'existence de solutions dans des espaces de Hölder $C^{k,\alpha}$, $3 \leq k$, $0 < \alpha < 1$.

En ce qui concerne la conjecture II^- , nous remarquons d'abord que la classe de Kähler d'une métrique d'Einstein-Kähler est fixée à homothétie près par la première classe de Chern. Nous pouvons donc supposer comme dans la conjecture I que la classe de Kähler est fixée.

Nous sommes donc ramenés à prouver l'unicité des solutions de la famille d'équations

$$e^{\lambda\varphi}\,\omega^m = (\omega + id'd''\varphi)^m$$

où $0 \leq \lambda$.

En nous plaçant par exemple dans une base où g et le hessien de φ sont simultanément diagonaux, l'équation peut se réécrire

$$(e^{\lambda\varphi} - 1) = \sum_{\alpha=1}^{m} H_{\alpha\bar\alpha}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^\alpha \partial \bar z^\alpha}$$

où $(H_{\alpha\bar{\alpha}}) = \left(\prod_{\beta=1}^{\alpha}\left(1 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^\beta \partial \bar{z}^\beta}\right)\right)$ est une matrice diagonale positive.

Si $\lambda = 0$, φ , dont le hessien est nul, est constante.

Si $0 < \lambda$, en un maximum p_0 de φ (il en existe puisque M est compacte) $\varphi(p_0) \leq 0$ et en un minimum p_1 de φ , $0 \leq \varphi(p_1)$, d'où $\varphi = 0$.

b) Existence

Dans [30], S. T. YAU résoud les équations (*) et (**$^-$) par la méthode de continuité. T. AUBIN utilise dans [4] (comme il l'avait fait déjà dans [3]) la méthode directe du calcul des variations dite de l'équation d'Euler.

La méthode de continuité consiste à joindre par un chemin l'équation à résoudre à une équation dont nous savons déjà qu'elle a une solution et à montrer que le long du chemin aucune obstruction à résoudre n'apparaît.

En fait si la méthode de continuité est moins technique à exposer (essentiellement à cause de l'utilisation des estimées de Schauder pour les solutions d'une équation elliptique (cf. [22] page 153) dans les espaces de fonctions holdériennes), les difficultés apparaissent et se contournent sensiblement de la même façon dans les deux méthodes.

Nous fixons f dans l'espace de Hölder $C^{k+1,\alpha}(M)$ $(3 \leq k$, $0 < \alpha < 1)$ telle que $\int_M e^f\omega^m = \int_M \omega^m$ (cette dernière condition n'est qu'une normalisation).

Nous nous intéressons pour t dans $[0,1]$ à la famille d'équations

$$(*_t) \qquad (\omega + id'd''\varphi)^m = e^{tf}\left(\int_M e^f\omega^m \Big/ \int_M e^{tf}\omega^m\right)\omega^m .$$

Nous posons $\Omega = \{\varphi \mid \varphi \in C^{k+2,\alpha}(M) , \int_M \varphi\omega^m = 0 \text{ et } \omega + id'd''\varphi > 0\}$.

Nous considérons le sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $[0,1]$ formé des nombres t pour lesquels il existe une solution de $(*_t)$ dans Ω .

Notre but est bien sûr de prouver que 1 appartient à $\mathcal{A}$. Nous savons déjà que 0 y est. Nous montrons que $\mathcal{A}$ est ouvert et fermé.

Remarquons d'abord que $\mathcal{A}$ est ouvert par application du théorème des fonctions implicites à l'application $\mathcal{C} : \varphi \longmapsto \mathcal{C}(\varphi) = (\omega + id'd''\varphi)^m / \omega^m$ de Ω dans l'hyperplan affine $\mathcal{H} = \{f \mid f \in C^{k,\alpha}(M) , \int_M f\,\omega^m = \int_M \omega^m\}$. En effet, la différentielle de $\mathcal{C}$ au point φ est donnée par $T_\varphi\mathcal{C} = -\mathcal{C}(\varphi)\tilde{\Delta}$ où $\tilde{\Delta}$ est le laplacien de la métrique kählérienne $\tilde{\omega} = \omega + id'd''\varphi$. Or les conditions intégrales nous assurent précisément de l'existence et de l'unicité d'une solution faible de l'équation $-\mathcal{C}(\varphi)\tilde{\Delta}\Phi = F$. Les estimées de Schauder (attention ! les coefficients sont seulement $C^{k,\alpha}$) nous assurent de plus que la solution Φ est $C^{k+2,\alpha}$.

Remarque.- Dans le cas des équations $(**_t^+)$ et $(**_t^-)$ le cadre précédemment décrit est encore valable. La différentielle de l'application correspondante est encore inversible dans le cas de $(**_t^-)$ puisqu'elle se ramène à $\tilde{\Delta} + 1$ (pour nous le laplacien est un opérateur positif). Par contre dans le cas de $(**^+)$, où la différentielle se ramène à $\tilde{\Delta} - 1$, apparaît un problème de bifurcation de valeurs propres ce qui explique déjà pourquoi la situation de la conjecture $(**^+)$ est plus compliquée (d'autres raisons apparaîtront plus tard).

Pour montrer que $\mathcal{A}$ est fermé, nous prenons t_∞ dans $[0,1]$, limite d'une suite (t_n) de points de $\mathcal{A}$. Si nous pouvons montrer que la suite $(\|\varphi_n\|_{C^{k+2,\alpha}})$, où φ_n désigne la solution de l'équation $(*_{t_n})$, est bornée et que $\omega + id'd''\varphi_n$ est borné inférieurement par une métrique kählérienne fixe, nous pouvons extraire de (φ_n) une sous-suite convergente dans $C^{k+1,\alpha}(M)$, dont la limite sera par régularité une solution de $(*_{t_\infty})$ dans $C^{k+2,\alpha}(M)$.

Pour nous, " estimer $\|\varphi\|_{C^{k+2,\alpha}}$ " consiste à le borner en fonction de f , M et de la métrique kählérienne initiale ω .

Nous présentons la preuve de S. T. YAU (cf. [30]) en plusieurs lemmes par ordre croissant de difficulté. Ces lemmes ne sont qu'un commentaire sur son texte.

La propriété suivante s'avère cruciale : sur une variété kählérienne les laplaciens riemannien et complexe coïncident, en particulier il existe des cartes complexes où le laplacien ne fait intervenir que les coefficients de la métrique (et pas ses dérivées).

Lemme 1.- Soit φ la solution de $(*)$ dans $C^{k+2,\alpha}(M)$. D'une estimée de $\|\varphi\|_{C^3}$ se déduit une estimée de $\|\varphi\|_{C^{k+2,\alpha}}$ $(3 \leq k \ , \ 0 < \alpha < 1)$.

Preuve. Elle repose essentiellement sur les estimées de Schauder pour une équation elliptique à coefficients $C^{k,\alpha}$ (cf. [22] page 153).

En effet, si $\|\varphi\|_{C^3}$ est estimée, il en est de même de $\|\varphi\|_{C^{2,\alpha}}$. Les dérivées $\frac{\partial\varphi}{\partial z^\alpha}$ (ou $\frac{\partial\varphi}{\partial \bar z^\alpha}$) sont solutions d'une équation (*') linéarisée de (*) avec second membre $\frac{\partial}{\partial z^\alpha} e^f$ (ou $\frac{\partial}{\partial \bar z^\alpha} e^f$), qui est elliptique à coefficients au moins $C^{0,\alpha}$ (cf. propriété mentionnée plus haut). D'après les estimées de Schauder nous avons

$$\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial z^\alpha}\right\|_{C^{2,\alpha}} \leq C_o\left(\left\|\frac{\partial}{\partial z^\alpha} e^f\right\|_{C^{0,\alpha}} + \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial z^\alpha}\right\|_{C^{0,\alpha}}\right)$$

où C_o dépend de la norme $C^{0,\alpha}$ des coefficients.

Cela nous assure que φ est estimée en norme $C^{3,\alpha}$ et que les coefficients de l'équation linéarisée sont estimés dans $C^{1,\alpha}$, d'où une estimée de $\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial z^\alpha}\right\|_{C^{3,\alpha}}$ et ainsi de suite. ■

<u>Lemme</u> 2.- <u>D'une estimée de</u> $\|\varphi\|_{C^2}$ <u>se déduit une estimée de</u> $\|\varphi\|_{C^3}$.

<u>Preuve</u>. Elle remonte à E. CALABI ([11]) ; sa difficulté est surtout technique. Elle consiste à estimer $\tilde\Delta(|DDD\ \varphi|^2_{\tilde\omega})$ où D désigne la dérivation covariante de Levi-Civita de g et $|\ \ |_{\tilde\omega}$ la norme par rapport à $\tilde\omega$ (ce qui justifie la débauche d'indices des pages 410 à 414 de [3] ou 31 à 36 de [30]), puis à appliquer le principe du maximum. ■

Les estimées uniformes de φ , $D\varphi$ et $\Delta\varphi$ constituent la partie réellement difficile de la preuve donnée par S. T. YAU.

<u>Remarque</u>.- Avant de nous embarquer pour un survol de ces estimées pour l'équation (*), voyons comment T. AUBIN obtient dans [4] une estimée uniforme de la solution φ de l'équation ($**^-$).

En un maximum p_o de φ , le hessien de φ est négatif ; donc $e^{f(p_o)} \leq e^{-\varphi(p_o)}$, d'où $\varphi \leq -\inf_M f$. De même en examinant un minimum de φ , nous trouvons que $\varphi \geq -\sup_M f$.

Nous voyons que ces estimées sont inopérantes pour les équations (*) et ($**^+$).

Revenons à la preuve de S. T. YAU.

Lemme 3. $\Delta\varphi \leq m$, $\sup\limits_M \varphi \leq C_1$, $\int_M |\varphi| \leq C_2$.

Preuve. Pour la première inégalité, il suffit de prendre la trace de la métrique associée à la forme de Kähler $\tilde{\omega} = \omega + id'd''\varphi$ par rapport à g . Pour la seconde, elle suit de l'égalité $\varphi(p) = \int_M G(p,q)\Delta\varphi(q)dq$ (où $G(p,q)$ est le noyau de Green de Δ qui est d'intégrale bornée sur M , cf.[25]), égalité valide puisque $\int \varphi\omega^m = 0$, et de l'inégalité précédente. La borne L^1 suit facilement de la deuxième inégalité et de la relation $|\varphi| \leq (C_3 - \varphi) + C_3$ où C_3 est pris assez grand. ■

Dans les lemmes qui suivent, un paramètre est introduit sous forme d'exposant d'une exponentielle de φ pour dominer les termes en courbure. Cette idée apparaît déjà dans les travaux de A.V. POGORELOV [1] sur l'équation de Monge-Ampère (comparer [31]).

Lemme 4.- Soit c une constante positive. Il existe des fonctions A , B et C ($C > 0$ si c est assez grand) ne dépendant que de f , M et ω telles que

$$-\tilde{\Delta}(e^{-c\varphi}(m - \Delta\varphi)) \geq e^{-c\varphi}(A - B(m - \Delta\varphi) + C(m - \Delta\varphi)^{\frac{m}{m-1}}) .$$

Preuve. Elle se fait en quatre étapes. Il faut d'abord évaluer $\tilde{\Delta}(\Delta\varphi)$ en intervertissant les symboles de dérivation pour faire apparaître des expressions quadratiques en $DDD\varphi$ et en éliminant les dérivées quatrièmes par l'équation (∗) dérivée deux fois. Ensuite, il faut minorer $-\tilde{\Delta}(e^{-c\varphi}(m - \Delta\varphi))$ par application de l'inégalité de Schwarz. Les termes cubiques peuvent alors être dominés par ceux qui apparaissent dans le développement de $\tilde{\Delta}(\Delta\varphi)$. Pour finir, l'expression $(m - \Delta\varphi)^{\frac{m}{m-1}}$ est obtenue par majoration de $\sum\limits_{\alpha=1}^{m} (1 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^{\alpha}})^{-1}$ par

$$\left[\sum_{\alpha=1}^{m} (1 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^\alpha\partial \bar{z}^{\alpha}}) \Big/ \prod_{\alpha=1}^{m} (1 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^\alpha\partial \bar{z}^{\alpha}})\right]^{1/m-1} = \left[(m - \Delta\varphi)e^{-f}\right]^{1/m-1} . ■$$

Lemme 5.

$$0 \leq m - \Delta\varphi \leq C_3 e^{c(\sup\limits_M \varphi - \inf\limits_M \varphi)} .$$

Preuve. On se place en un maximum p_0 de $e^{-c\varphi}(m - \Delta\varphi)$. Alors $-\tilde{\Delta}(e^{-c\varphi}(m - \Delta\varphi))(p_0) \leq 0$, d'où $(m - \Delta\varphi)(p_0)$ est borné d'après le Lemme 4 (la

[1] On peut aussi consulter le livre de A.V. POGORELOV, "Monge-Ampère equation of elliptic type", Nordhoff, Groningen (1964).

fonction $x \longmapsto A - Bx + Cx^{\frac{m}{m-1}}$ avec $C > 0$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$).

Par suite $e^{-\alpha\varphi}(m - \Delta\varphi) \leq e^{-\alpha\varphi(p_o)}(m - \Delta\varphi(p_o)) \leq C_3\, e^{-c \inf_M \varphi}$, d'où l'inégalité du lemme par multiplication par $e^{\alpha\varphi}$. ∎

La partie vraiment difficile consiste à trouver une estimée de $\inf_M \varphi$. Le cas $m = 2$ est justiciable d'une preuve spéciale à cause de la relation $\sum_{\alpha=1,2} \frac{1}{1+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\alpha}} = \frac{2-\Delta\varphi}{e^f}$. Pour le cas général, S. T. YAU introduit un autre paramètre (entier cette fois) N qui doit être encore plus grand que c . Il y a deux astuces intéressantes aux Lemmes 6 et 8, en particulier celle du Lemme 8 qui est de nature géométrique.

<u>Lemme</u> 6. $\int_M |D\, e^{-(N/2)\varphi}|^2\, \omega^m \leq C_4 \int_M e^{-N\varphi}\, \omega^m$.

<u>Preuve</u>. D'un calcul analogue à celui du Lemme 3 appliqué à la fonction $e^{-N\varphi}(m - \Delta\varphi)$ et des majorations déjà connues, il vient

$$-e^f(\tilde{\Delta}(e^{-N\varphi}(m - \Delta\varphi))) \geq -C_4\, e^{-N\varphi} + C_5\, \Delta(e^{-N\varphi}) + N^2\, e^{-N\varphi}|D\varphi|^2 \;.$$

L'intégration sur M par rapport à l'élément de volume ω^m fait disparaître d'un seul coup les <u>deux</u> termes en laplacien, car $e^f\omega^m = \tilde{\omega}^m$, d'où l'inégalité. ∎

<u>Lemme</u> 7.- <u>Il y a une estimée de</u> $\int_M e^{-N\varphi}\omega^m$.

<u>Preuve</u>. Du Lemme 6 il déduit que la norme H^1 de $e^{-(N/2)\varphi}$ est bornée par sa norme L^2 . Si $\int_M e^{-N\varphi}\omega^m$ n'est pas borné, après normalisation il peut trouver une famille de fonctions $e^{-(N/2)\tilde{\varphi}}$ de la boule unité de $L^2(M)$ qui converge dans $L^2(M)$ vers une fonction presque partout nulle, d'où une contradiction. ∎

<u>Lemme</u> 8.- <u>Il y a une estimée de</u> $\inf_M \varphi$.

<u>Preuve</u>. Des Lemmes 1 et 5, il déduit que $m - e^{c(\sup_M \varphi - \inf_M \varphi)} \leq \Delta\varphi \leq m$. Par une estimée de Schauder il déduit que $\sup_M |D\varphi| \leq C_6(e^{-c \inf_M \varphi} + 1)$ (cf. [22] page 156).

Posons $y = -\inf_M \varphi$ par commodité. Deux cas sont possibles :

– ou $r = (y/2)(C_6(e^{cy}+1))^{-1}$ est supérieur au rayon d'injectivité r_0 de M, ce qui implique que $\inf_M \varphi$ est borné par une fonction du rayon d'injectivité (examiner la fonction d'une variable réelle $y \longmapsto (y/2)C_6(e^{cy}+1)^{-1})$;

– ou $r \leq r_0$ et si p_1 est un point de M où φ atteint son minimum absolu, la boule de centre p_1 de rayon r est une vraie boule (i.e. l'application exponentielle en p_1 restreinte à cette boule est un difféomorphisme sur son image). Il est alors connu que le volume de cette boule B_r est borné inférieurement par $C_7 r^{2m}$. De plus sur cette boule d'après l'estimée sur $\sup_M |D\varphi|$ nous savons que $\varphi \leq -y/2$. Par suite $\int_{B_r} e^{-N\varphi}\,\omega^m \geq C_7\, e^{(N/2)y}\, r^{2m}$.

Comme $\int_M e^{-N\varphi}\,\omega^m$ est borné, d'après le lemme 7, il en est de même de $C_8\, e^{(N/2)y}\, y^{2m}(e^{cy}+1)^{-2m}$. En prenant N assez grand, cela borne aussi $y = -\inf_M \varphi$. ∎

Nous avons obtenu une borne uniforme pour φ, pour $|D\varphi|$ d'après le Lemme 7 et pour $\Delta\varphi$ d'après le Lemme 5.

D'autre part, comme $0 < (1 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\alpha}) < m - \Delta\varphi < C_9$ et que le produit $\prod_{\alpha=1}^{m} (1 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\alpha})$ vaut e^f, il existe une constante C_{10} telle que $C_{10}\omega < \tilde{\omega} = \omega + id'd''\varphi$. Le résumé de la preuve se termine là !

§ 5. Questions ouvertes et connexes

a) Le cas des variétés ouvertes présente aussi de l'intérêt. Les techniques sont différentes parce que la théorie de de Rham ne s'applique pas de la même façon : on part d'estimées au bord et on essaye de les étendre à l'intérieur. L'équation pour trouver des métriques d'Einstein-Kähler à courbure de Ricci négative est strictement de Monge-Ampère

$$(id'd''\varphi)^m = e^f \omega^m .$$

Voir [23] pour les résultats connus, qui ont été complétés par S. T. YAU et S. Y. CHENG dans [31].

b) La conjecture II^- devrait permettre d'étudier plus précisément l'espace des déformations des structures complexes des variétés à fibré canonique ample.

c) D'autres inégalités entre nombres de Chern des variétés kählériennes compactes devraient être déduits des résultats mentionnés. En particulier, il est nécessaire de mieux comprendre le Corollaire 2 comme cas limite d'inégalités entre nombres de Chern. S. T. YAU annonce des résultats dans cette direction dans [29] pour les variétés à fibré canonique ample, ainsi : $2(m+1)(-1)^m c_2(M) c_1^{m-2}(M) \geq m(-1)^m c_1^m(M)$ (de démonstration simple par la méthode de [24]).[1]

d) Pour les surfaces K3 il reste à étudier l'espace des déformations des structures d'Einstein. Il serait en particulier souhaitable d'avoir une preuve constructive de l'existence de telles métriques. Par ailleurs ces métriques peuvent être considérées d'après un théorème de Y. MATSUSHIMA (cf. [21]) comme des solutions des équations du champ de Yang-Mills pour le SU(2)-fibré principal associé au fibré tangent d'une surface K3 (voir [2] pour le cas des SU(2)-fibrés sur la sphère S^4).

Il reste aussi à comprendre la géométrie riemannienne de telles métriques (cf. [8]).

e) Parmi les groupes d'holonomie figurant dans la liste de M. BERGER (cf. [5]), les seuls pour lesquels nous manquons encore d'exemple, même local, sont $Sp(n)$ $(n>2)$ en dimension $4n$ comme sous-groupe de $SU(2n)$, $Spin(7)$ en dimension 8 qui contient $SU(4)$ et G_2 en dimension 7 . Il se peut que ces groupes d'holonomie apparaissent pour des métriques d'Einstein-Kähler de variétés algébriques spéciales ou de variétés qui s'en déduisent par des constructions géométriques.

[1] voir aussi B.Y.CHEN, K. OGIUE, Some characterizations of complex space forms in terms of Chern classes, Quart. J. of Math. Oxford, 26, 104 (1975), 459-464.

§ 6. Annexe

Après la préparation de ce texte, T. AUBIN a proposé une extension à la dimension m de l'argument donné par S. T. YAU en dimension 2 pour obtenir plus simplement une estimée C^0 de la solution φ (il est fait allusion à cet argument avant le Lemme 6).

Nous donnons ici une version simplifiée de cette estimée (qui inclut aussi une simplification due à J. KAZDAN du cas de dimension 2).

La proposition suivante se substitue donc aux Lemmes 6, 7 et 8 du § 4. La démonstration est alors complète car de l'estimée C^0 de φ se déduit par le Lemme 5 une estimée C^0 de $\Delta\varphi$, puis de cette estimée, comme à la fin du § 4, une estimée uniforme de Hess φ . Comme φ et Hess φ sont uniformément estimées, $D\varphi$ l'est aussi et $\|\varphi\|_{C^2}$ est estimée.

PROPOSITION.- <u>Il y a une estimée de</u> $\|\varphi\|_{C^0}$.

<u>Preuve</u>. Nous décomposons la preuve en une série de lemmes :

<u>Lemme</u> A.- <u>Il existe des constantes</u> C_1 <u>et</u> C_2 <u>telles que</u>

$$\Delta\varphi < m \ , \qquad \sup_M \varphi < C_1 \qquad , \qquad \int_M |\varphi| \ \omega^m < C_2 \ .$$

<u>Preuve</u>. C'est le Lemme 3. ∎

Comme nous avons estimé $\sup\limits_M \varphi$, il est commode de remplacer la solution φ par la solution ψ définie par $\psi = \varphi - C_1 - 1$ de telle sorte que $\psi < -1$.

<u>Lemme</u> B.- <u>Il existe une constante</u> C_3 <u>telle que pour tout</u> $p > 1$,

$$\int_M (-\psi)^{p-2} \ |d\psi|^2 \omega^m < C_3 \int_M \frac{(-\psi)^{p-1}}{p-1} \ \omega^m \ .$$

<u>Preuve</u>. Considérons l'intégrale

$$-\int_M \frac{(-\psi)^{p-1}}{p-1} \ (\omega^m - (\omega + id'd''\psi)^m) \ .$$

Nous remarquons d'abord que $\omega^m - \tilde{\omega}^m = - id'd''\psi \wedge \sum\limits_{k=0}^{m-1} \omega^k \wedge \tilde{\omega}^{m-k-1}$ (où nous notons comme d'habitude $\tilde{\omega} = \omega + id'd''\psi$) est une forme exacte, à savoir

$$-d(id''\psi \wedge \sum_{k=0}^{m-1} \omega^k \wedge \tilde{\omega}^{m-k-1}) \ .$$

Par application du théorème de Stokes à l'intégrale, nous obtenons

$$-\int_M (-\psi)^{p-2} d(-\psi) \wedge id''\psi \wedge \sum_{k=0}^{m-1} \omega^k \wedge \tilde{\omega}^{m-k-1} \ .$$

En fait seule la partie $d'\psi$ de $d\psi$ contribue, car la forme avec laquelle nous faisons le produit extérieur est de type $(m-1, m)$, autrement dit l'intégrale vaut $\int_M (-\psi)^{p-2}\, id'\psi \wedge d''\psi \wedge \sum_{k=0}^{m-1} \omega^k \wedge \tilde{\omega}^{m-k-1}$.

Dans chaque terme de la somme, toutes les 2-formes intervenant sont positives (c'est vrai pour $id'\psi \wedge d''\psi$ parce que ψ est réelle). Il en est de même de leurs puissances. On peut donc minorer cette intégrale par une quelconque des intégrales obtenues par développement. Nous écrivons par exemple

$$-\int_M \frac{(-\psi)^{p-1}}{p-1}\,(\omega^m - (\omega + id'd''\psi)^m) \geq \int_M (-\psi)^{p-2}\, id'\psi \wedge d''\psi \wedge \omega^{m-1} \quad .$$

Le membre de droite est, à une constante dépendant des normalisations près, $\int_M (-\psi)^{p-2} |d\psi|^2 \omega^m$.

A ce point remarquons que nous venons de reprouver l'unicité de la solution, puisque si $\omega = \tilde{\omega}$, alors ψ doit être une constante.

L'inégalité annoncée suit alors facilement puisque $\omega^m - \tilde{\omega}^m = (1 - e^f)\omega^m$ où nous rappelons que f est une donnée sur M . ■

<u>Lemme</u> C.- <u>Il existe une constante</u> C_4 <u>telle que pour tout</u> $p \geq 1$,

$$\|\psi\|^p_{p\frac{m}{m-1}} \leq C_4\, p\, \|\psi\|^p_p \quad .$$

<u>Preuve</u>. Remarquons que pour $p \geq 1$, $(-\psi)^{p-2}|d\psi|^2 = 4\,p^{-2}|d(-\psi)^{p/2}|^2$; l'inégalité du Lemme B peut s'écrire :

$$\int_M |d(-\psi)^{p/2}|^2\, \omega^m \leq (p^2/4)\; C_3 \int_M \frac{(-\psi)^{p-1}}{p-1}\, \omega^m \quad .$$

Pour $p > 1$, en ajoutant $\int_M ((-\psi)^{p/2})^2\, \omega^m$ aux deux membres et en utilisant que, comme $-\psi \geq 1$, $\int_M (-\psi)^{p-1}\,\omega^m \leq \int_M (-\psi)^p\, \omega^m$ nous obtenons pour une constante C_5 ne dépendant pas de $p >> 1$

$$\|(-\psi)^{p/2}\|^2_{H^1_2} \leq C_5\, p\, \|\psi\|^p_p \quad .$$

Pour $p = 1$, il faut passer à la limite dans l'inégalité du Lemme B et utiliser que $\log(-\psi)$ est majoré par $(-\psi)$ pour avoir une inégalité analogue.

D'après les inégalités de Sobolev, il existe une constante C_6 telle que

$$\|(-\psi)^{p/2}\|^2_{\frac{2m}{m-1}} \leq C_6\, \|(-\psi)^{p/2}\|^2_{H^1_2} \quad ,$$

d'où le lemme en remarquant que

$$\|(-\psi)^{p/2}\|^2_{\frac{2m}{m-1}} = \|\psi\|^p_{\frac{pm}{m-1}} \quad . ■$$

Lemme D.- Il existe une constante C_7 telle que pour tout p de la suite $((m/m-1)^r)_{r\in\mathbb{N}}$,

$$\|\psi\|_p^p \leq (C_7)^p \left(C_4\, p \left(\frac{m}{m-1}\right)^{m-1}\right)^{-m} .$$

Preuve. Pour $r = 0$ et $r = 1$, l'inégalité suit des Lemmes A et C. Il suffit donc de prouver que si elle est vraie pour $p = (m/m-1)^r$, elle est vraie pour $p = (m/m-1)^{r+1}$, ce qui se vérifie directement à partir du Lemme C. ■

Preuve de la Proposition.- Comme ψ est continue, $\|\psi\|_{C^0} = \|\psi\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \|\psi\|_n$.

D'après le Lemme D, $(\|\psi\|_n)$, qui est une suite croissante, contient une sous-suite bornée, donc est elle-même bornée, d'où la Proposition. ■

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. APTE - Sur certaines classes caractéristiques des variétés kählériennes compactes, C.R.Acad.Sci. Paris, 240 (1955), 149-151.

[2] M. ATIYAH, N. HITCHIN, I.M. SINGER - Deformations of instantons, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 74 (1977), 2662-2663.

[3] T. AUBIN - Métriques riemanniennes et courbure, J. Diff. Geom., 4 (1970), 383-424.

[4] T. AUBIN - Equations du type de Monge-Ampère sur les variétés kählériennes compactes, C.R. Acad. Sci. Paris, 283 (1976), 119-121.

[5] M. BERGER - Sur les groupes d'holonomie homogène des variétés à connexion affine et des variétés riemanniennes, Bull. Soc. France, 83 (1955), 279-330.

[6] M. BERGER, A. LASCOUX - Variétés kählériennes compactes, Lecture Notes in Math vol. 154, Springer, 1970.

[7] S. BOCHNER - Vector fields and Ricci curvature, Bull. A. M. S., 52 (1946), 776-797.

[8] J.-P. BOURGUIGNON - Sur les géodésiques fermées des variétés quaternioniennes de dimension 4 , Math. Ann., 221 (1976), 153-165.

[9] E. CALABI - The space of Kähler metrics, Proc. Internat. Congress Math. Amsterdam, vol. 2 (1954), 206-207.

[10] E. CALABI - On Kähler manifolds with vanishing canonical class, Algebraic Geometry and Topology, A Symposium in honor of S. Lefschetz, Princeton Univ. Press, (1955), 78-89.

[11] E. CALABI - Improper affine hyperspheres and a generalization of a theorem of K. Jörgens, Mich. Math. J., 5 (1958), 105-126.

[12] S. S. CHERN - Characteristic classes of Hermitian manifolds, Ann. of Math., 47 (1946), 85-121.

[13] H. GUGGENHEIMER - Über vierdimensionale Einsteinraüme, Experientia 8, (1952), 420-421.

[14] F. HIRZEBRUCH - Some problems on differentiable and complex manifolds, Ann. Math., 60 (1954), 210-236.

[15] F. HIRZEBRUCH - Topological methods in algebraic geometry, Grundlehren der math. Wiss., Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1966.

[16] F. HIRZEBRUCH, K. KODAIRA - On the complex projective spaces, J. Math. Pures appl., 36 (1957), 201-216.

[17] N. HITCHIN - Compact four-dimensional Einstein manifolds, J. Diff. Geom., 9(1974), 435-441.

[18] S. KOBAYASHI, T. OCHIAI - On compact Kähler manifolds with positive holomorphic bisectional curvature, Proc. Symp. Pure Maths. A.M.S., XXVII, Part 2, Stanford, (1975), 113-123.

[19] K. KODAIRA - Collected works, Princeton Univ. Press, Princeton, vol. III, 1975.

[20] A. LICHNEROWICZ - Spineurs harmoniques, note aux C.R. Acad. Sci. Paris, 257 (1963), 7-9.

[21] Y. MATSUSHIMA - Remarks on Kähler-Einstein manifolds, Nagoya Math. J., 46 (1972), 161-173.

[22] C. MORREY - Multiple integrals in the calculus of variations, Grundlehren der mathematischen Wiss., Springer, 1966.

[23] L. NIRENBERG - Monge-Ampère equations and some associated problems in geometry, Proc. Int. Cong. Vancouver, Tome II (1974), 275-279.

[24] A. POLOMBO - Nombres caractéristiques d'une surface kählérienne, Note aux C.R. Acad. Sci. Paris, 283 (1976), 1025-1028.

[25] G. de RHAM - Variétés différentiables, Paris, Hermann, 1960.

[26] F. SEVERI - Some remarks on the topological characterization of algebraic surfaces, in Studies presented to R. von Mises (1954), Academic Press, New York, 54-61.

[27] A. VAN DE VEN - Some recent results on surfaces of general type, Séminaire Bourbaki, Exposé 500, fév. 1977, Lecture Notes in Math., n° 677 , Springer, 155-166.

[28] S.T. YAU - On the curvature of compact Hermitian manifolds, Inventiones Math., 25 (1974), 213-239.

[29] S.T. YAU - On Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 74 (1977), 1798-1799.

[30] S.T. YAU - On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation I, Preprint, 1977.

[31] S.T. YAU, S.Y. CHENG - On the regularity of the Monge-Ampère equation $\det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}\right) = F(x,u)$, Comm. Pure Appl. Math., XXX (1977), 47-68.