FRANÇOIS LATOUR

Double suspension d'une sphère d'homologie

Séminaire N. Bourbaki, 1979, exp. n° 515, p. 169-186
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1977-1978__20__169_0>

Séminaire BOURBAKI 515-01
30e année, 1977/78, n° 515 Février 1978

DOUBLE SUSPENSION D'UNE SPHÈRE D'HOMOLOGIE

[d'après R. EDWARDS]

par François LATOUR

§ 1. Introduction

Pour tout espace topologique X, on appelle suspension de X et on note ΣX le quotient du cylindre $[0,1] \times X$ obtenu en écrasant $\{0\} \times X$ (resp. $\{1\} \times X$) en un point appelé pôle sud (resp. pôle nord). La suspension p-ième de X, définie par $\Sigma^p X = \Sigma(\Sigma^{p-1} X)$, s'identifie au joint $S^{p-1} * X$, quotient de $S^{p-1} \times [0,1] \times X$ obtenu en identifiant en un point $\{y\} \times \{0\} \times X$ pour y dans S^{p-1} et $S^{p-1} \times \{1\} \times \{x\}$ pour x dans X (exemple $\Sigma^p S^n$ est homéomorphe à S^{p+n}).

Si V^n est une variété topologique compacte de dimension n et si ΣV est une variété, la considération de l'homologie locale en un pôle montre que $\tilde{H}_*(V^n) \simeq H_*(R^n, R^n - \{0\})$ et donc que V^n est une sphère d'homologie (i.e. variété topologique ayant même homologie (entière) que la sphère de même dimension). De plus si $n \geq 2$, l'homogénéité de la variété ΣV au voisinage d'un pôle, permet de modifier l'homotopie conique à zéro d'un lacet de V de sorte que le pôle ne soit plus atteint durant l'homotopie et assure donc que V est 1-connexe, donc que V est une sphère d'homotopie. Si V^n est une sphère d'homotopie de dimension $n \geq 4$, on sait que ΣV^n est homéomorphe à S^{n+1} (conjecture de Poincaré si $n \geq 5$ et argument de Siebenmann pour $n = 4$).

Pour que la double suspension d'une variété compacte V^n soit une variété, un raisonnement d'homologie locale montre qu'il est nécessaire que V soit une sphère d'homologie. Se pose alors le

Problème de la double suspension

Pour toute sphère d'homologie V^n de dimension n, $\Sigma^2 V^n$ est-elle homéomorphe à S^{n+2} ?

Ce problème a été posé par Milnor en 1961 parmi les cinq plus importants problèmes de la topologie. La solution de la conjecture de Poincaré en dimension ≥ 5 ramène le problème à montrer que $\Sigma^2 V^n$ est une variété topologique car $\Sigma^2 V^n$ est 1-connexe et a l'homologie de S^{n+2}.

Il existe en toute dimension ≥ 3 des sphères d'homologie non simplement connexe, par exemple en dimension 3 la sphère de Poincaré $P^3 = SO_3 / A_5$, le groupe alterné A_5 étant considéré comme le groupe des isométries directes de icosaèdre régulier, c'est aussi le bord de W^4, plombage de Kervaire-Milnor, variété parallélisable de signature 8 .

Une première conséquence de la solution affirmative du problème de la double suspension est d'exhiber des triangulations de S^n ou de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 5)$ qui ne sont pas des triangulations de variétés PL ; en effet, si V^n $(n \geq 3)$ est une sphère d'homologie PL non simplement connexe, $\Sigma^2 V^n$ a une triangulation telle que le link de chaque point du cercle de suspension est équivalent à ΣV qui n'est même pas homéomorphe à S^{n+1} .

En 1969, Siebenmann [10] a montré que la double suspension de toute sphère d'homotopie de dimension n est homéomorphe à S^{n+2} et a montré que s'il existe une sphère d'homologie X^3 bord d'une variété parallélisable de signature 8 et dont la double suspension est homéomorphe à S^5 , alors toute variété topologique orientable de dimension 5 est triangulable comme complexe simplicial (pas forcément comme variété PL).

En 1975, R. Edwards a donné des exemples de sphères d'homologie de dimension 3 dont la double suspension est homéomorphe à S^5 et a résolu le problème de la double suspension en dimension ≥ 4 en utilisant le fait que toute sphère d'homologie de dimension ≥ 4 borde une variété contractile.

En 1976, R. Edwards et J. Cannon ont, indépendamment, ramené le problème de la double suspension à un problème d'approximation par homéomorphismes (voir plus loin). R. Edwards a résolu le problème de la triple suspension. Matumoto et Galewski-Stern ont montré que toute variété topologique de dimension ≥ 5 est triangulable comme complexe simplicial s'il existe une sphère d'homologie X^3 bordant une variété parallélisable de signature 8 , dont le double pour la somme connexe borde une variété acyclique et dont la double suspension est homéomorphe à S^5 .

En février 1977, J. Cannon [1] a découvert le role de la propriété de disjonction des disques et a montré un cas particulier du théorème d'approximation suffisant pour résoudre le problème de la double suspension.

En juillet 1977, Edwards [3] a démontré le théorème d'approximation en toute généralité. C'est sa démonstration que nous suivons ici.

§ 2. Problème d'approximation par homéomorphismes

Dans la suite, tous les espaces seront au moins métrisables séparables. Soit (M,d) un espace métrique dont les boules fermées sont compactes (par exemple M variété topologique). Soit $f : M \to M'$ une application continue surjective et propre (c'est-à-dire fermée et $f^{-1}(y)$ compact pour tout y de M' ou de façon équivalente l'image réciproque de tout compact est compacte).

On définit la singularité de f, $\Sigma f = \{x \in M / f^{-1}fx \neq \{x\}\}$, f est ouverte au voisinage de tout point de $M - \Sigma f$ car f est surjective et fermée, donc f induit un homéomorphisme de $M - \Sigma f$ sur $M' - f\Sigma f$. Posons $\Sigma_a f = \{x \in M / \operatorname{diam} f^{-1}fx \geq a\}$, comme f est propre, $\Sigma_a f$ est fermé, donc $\Sigma_a f$ est σ-compact (réunion dénombrable de compacts) donc aussi Σf et $f\Sigma f$.

On dit que $f : M \to M'$ est <u>approximable par homéomorphismes</u> si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un homéomorphisme $g : M \to M'$ avec

$$d'(f(x),g(x)) < \varepsilon \qquad \forall\, x \in M .$$

On dit qu'un <u>homéomorphisme</u> h <u>de</u> M <u>est un</u> ε-<u>rétrécissement pour</u> f <u>si</u>

$$d'(f.h(x),f(x)) < \varepsilon \qquad \forall\, x \in M$$

$$\operatorname{diam}(hf^{-1}y) < \varepsilon \qquad \forall\, y \in M' .$$

<u>Critère de rétrécissement de Bing</u>

<u>Avec les hypothèses précédentes, pour que f soit approximable par homéomorphismes, il suffit que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des ε-rétrécissements pour f.</u>

Pour une démonstration voir [8], disons simplement que pour montrer la suffisance, on construit à partir des rétrécissements une application $k : M \to M$ telle que $\{k^{-1}(x) / x \in M\} = \{f^{-1}(y) / y \in M'\}$ et que $f.k^{-1} : M \to M'$ est un homéomorphisme approximant f.

COROLLAIRE.- <u>Soit $f : M \to M'$ comme précédemment tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $f' : M' \to M''$ surjection propre avec $\operatorname{diam}(f'^{-1}(z)) < \varepsilon$, pour tout z de M'' et $f' \circ f$ admettant des ε-rétrécissements, alors f est approximable par homéomorphismes.</u>

On dit que $X \subset M$ est <u>cellulaire</u> si $X = \bigcap_j B_j$ où $B_j \subset \mathring{B}_{j-1}$ est une suite de voisinages de X dans M tous homéomorphes à la boule D^n.

On dit que l'espace X <u>est cellulique</u> s'il existe un plongement de X dans une variété topologique sans bord M dont l'image est cellulaire ; d'une façon équivalente [6], X est cellulique si, pour un plongement (et donc pour tous) $X \hookrightarrow Y$ où Y est un ANR (rétracte absolu de voisinages), on a la propriété suivante :

$\forall\, U$ voisinage de X dans Y, $\exists\, V$ voisinage de X dans U tel que l'inclusion $V \hookrightarrow U$ est homotope à une application constante.

Tout ANR contractile est cellulique.

On dit que $f : M \longrightarrow Q$ est un <u>quotient cellulique</u> si f est surjective propre et pour tout y de Q, $f^{-1}(y)$ est cellulique.

Dans la catégorie des ANR localement compacts, on a la caractérisation [6] des quotients celluliques comme étant les équivalences d'homotopie propres héréditaires : pour tout ouvert U de Q, $f|_{f^{-1}U} : f^{-1}U \longrightarrow U$ est une équivalence d'homotopie propre.

De plus les quotients celluliques sont stables par limite uniforme.

Siebenmann a démontré [11] que tout quotient cellulique $f : M \longrightarrow Q$ est approximable par homéomorphismes si M et Q sont des variétés topologiques sans bord de dimension ≥ 5.

Les variétés topologiques de dimension ≥ 5 possèdent, par position générale [5], la propriété suivante :

On dit que M <u>possède la propriété de disjonction des disques</u> (P.D.D.) si, pour tout $\varepsilon > 0$ et toutes applications $f : D^2 \longrightarrow M$, $g : D^2 \longrightarrow M$, il existe $f' : D^2 \longrightarrow M$, $g' : D^2 \longrightarrow M$ respectivement ε-homotopes à f et g avec $f'(D^2) \cap g'(D^2) = \emptyset$.
(ε-homotopie signifie l'existence d'une homotopie f_t entre f et f' avec $d(f_t(x), f(x)) < \varepsilon \quad \forall\, x \in D^2 \quad \forall\, t \in [0,1]$.)

<u>Théorème d'approximation d'Edwards</u>

<u>Soit $f : M \longrightarrow Q$ un quotient cellulique où M est une variété topologique sans bord de dimension ≥ 5 et où Q est un ANR vérifiant la PDD ; alors f est approximable par homéomorphismes.</u>

§ 3. <u>Voir le problème de la double suspension comme un problème d'approximation</u>

Commençons par une description utile des suspensions p-ième d'un espace compact.

Il existe un foncteur covariant noté $\hat{}$ de la catégorie des espaces avec action de $\mathbb{Z}^p$ avec quotient compact et applications équivariantes dans la catégorie des espaces compacts tel que $\hat{X}$ contient X et $\hat{X} - X$ est homéomorphe à S^{p-1}.

On construit $\hat{X}$ de la façon suivante : on identifie $\mathbb{R}^p$ avec $\operatorname{Int} D^p$ par l'homéomorphisme $\rho(x) = \dfrac{x}{1 + \|x\|}$; soit K un compact de X tel que

$X = \bigcup_{g \in \mathbb{Z}^p} g\mathring{K}$, soient $z \in S^{p-1}$ et V un voisinage de z dans D^p , on pose

$$V_X(z) = \Big(\bigcup_{g \in \mathbb{Z}^p \cap \rho^{-1}V} g\mathring{K} \Big) \cup (V \cap S^{p-1}) \subset \hat{X} = X \cup S^{p-1} .$$

Les $V_X(z)$ et les ouverts de X forment une base de voisinage d'une topologie sur $\hat{X}$ qui ne dépend pas du choix de K .

Il est clair que, si Y est compact et si $Y \times \mathbb{R}^p$ a l'action naturelle de $\mathbb{Z}^p$,

$$(Y \times \mathbb{R}^p)\hat{} = \Sigma^p Y .$$

Soit V^n une sphère d'homologie, écrivons $V^n = V_o \bigcup_{\partial V_o = S^{n-1}} D^n$, V_o est un disque d'homologie donc est stablement parallélisable. Soient $c_o : V_o \longrightarrow D^n$ l'application qui écrase le complément d'un collier de $\partial V_o = S^{n-1}$ dans V_o et $c : V \longrightarrow S^n$ l'application qui s'en déduit.

Si $n \geq 3$, $p \geq 1$ et $p + n \geq 5$, on peut faire la chirurgie [5] sur la variété topologique stablement parallélisée $V_o \times I^p$ sans toucher le bord pour obtenir une variété topologique W_o^{n+p} contractile ayant même bord de $V_o \times I^p$, il existe donc une équivalence d'homotopie

$$g_o : W_o \longrightarrow D^n \times I^p$$

telle que

$$g_o|\partial W_o : V_o \times \partial I^p \cup S^{n-1} \times I^p \longrightarrow D^n \times \partial I^p \cup S^{n-1} \times I^p \quad \text{soit} \quad c_o \times \mathrm{Id} \cup \mathrm{Id} \times \mathrm{Id} .$$

Le théorème du h-cobordisme assure que si W_o et W'_o sont deux telles variétés, il existe un homéomorphisme de W_o sur W'_o étendant l'identité sur le bord $\partial W_o = \partial(V_o \times I^p) = \partial W'_o$.

L'application g_o s'étend par l'identité en une équivalence d'homotopie

$$g : W = W_o \bigcup_{S^{n-1} \times I^p} D^n \times I^p \longrightarrow S^n \times I^p$$

et $g|_{\partial W} : V \times \partial I^p \longrightarrow S^n \times \partial I^p$ est $c \times \mathrm{Id}$.

Soit q le revêtement universel $\mathbb{R}^p \longrightarrow T^p = S^1 \times \ldots \times S^1 = \mathbb{R}^p/\mathbb{Z}^p$.

Soit $\bar{W}$ le quotient de W obtenu en identifiant $(x,y) \in V \times \partial I^p$ avec $(x,y') \in V \times \partial I^p$ si $q(y) = q(y')$; l'application g définit une application

$$\bar{g} : \bar{W} \longrightarrow S^n \times q(I^p) = S^n \times T^p .$$

Soit U obtenu à partir de $W \times \mathbb{Z}^p$ en identifiant les bords $V \times \partial I^p \times \alpha$ $(\alpha \in \mathbb{Z}^p)$ de la même façon qu'on identifie les bords de $I^p \times \mathbb{Z}^p$ pour obtenir $\mathbb{R}^p$; on a un revêtement $\pi : U \longrightarrow \bar{W}$ or U est simplement connexe comme W puisque V est connexe, donc π est universel ; de plus, on a une application $G : U \longrightarrow S^n \times \mathbb{R}^p$ recouvrant $\bar{g}$ et G est une équivalence d'homologie puisque $V \hookrightarrow W$ est une équivalence d'homologie, les applications G et $\bar{g}$ sont donc des équivalences d'homotopie, donc [5] il existe un homéomorphisme $h : \bar{W} \longrightarrow S^n \times T^p$ homotope à $\bar{g}$

et qui induit des homéomorphismes

$$H : U \longrightarrow S^n \times \mathbb{R}^p \quad \text{et} \quad \hat{H} : \hat{U} \longrightarrow (S^n \times \mathbb{R}^p)\hat{} = S^{n+p} .$$

Cas où $p = 1$ et $n \geq 4$

On considère un collier $V \times [-\varepsilon,\varepsilon]$ autour de $V^n = \partial(W \times 0) \cap \partial(W \times 1) \subset U$ et soient K_+ et K_- les deux composantes de $U - V \times]-\varepsilon,\varepsilon[$, K_+ est homéomorphe à la réunion des images de $W \times j$ $(j \geq 1)$ dans U et K_- à celle des images de $W \times j$ $(j \leq 0)$; soient $\hat{K}_+$ et $\hat{K}_-$ les adhérences de K_+ et K_- dans $\hat{U}$, ce sont les compactifiés d'Alexandroff de K_+ et K_- et le raisonnement indiqué plus bas utilisant l'unicité de W_o montre que $\hat{K}_+$ et $\hat{K}_-$ sont contractiles. On obtient un quotient cellulique $f : S^{n+1} \longrightarrow \Sigma^1 V^n$ en identifiant S^{n+1} à $\hat{U}$ par $\hat{H}^{-1}$ puis en écrasant $\hat{K}_+$ sur le pôle nord et $\hat{K}_-$ sur le pôle sud.

Cas où $p = 2$ et $n \geq 3$

Pour $r \in \mathbb{Q} - \{0\}$, soit R_r^ε la demi-droite fermée de $\mathbb{R}^2$ enveloppe convexe de $\mathbb{Z}^2 \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ y = rx$ et $\varepsilon x > 0\}$ où $\varepsilon = \pm 1$, soient $R_o^+ = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0\}$, $R_o^- = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 / x \leq -1\}$ et $R_\infty^\varepsilon = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 / \varepsilon y \geq 1\}$, on obtient ainsi une suite dénombrable $\{R_j\}$ de demi-droites de $\mathbb{R}^2$ dont la réunion contient $\mathbb{Z}^2$.

Soient H_j des voisinages tubulaires de $V \times R_j \subset V \times \mathbb{R}^2$ d'épaisseur bornée et tous disjoints ; soit $\hat{H}_j$ l'adhérence de H_j dans $\widehat{V \times \mathbb{R}^2} = \Sigma^2 V$, il est clair que $\hat{H}_j$ est le compactifié d'Alexandroff de H_j , $\hat{H}_j = H_j \cup \{x_j\}$ avec $x_j \in S^1 = \Sigma^2 V - (V \times \mathbb{R}^2)$ et que le quotient $\Sigma^2 V / \{\hat{H}_j = x_j\}$ est homéomorphe à $\Sigma^2 V$.

Pour chaque $\alpha \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\alpha \in R_j$, soit I_α^2 un petit carré centré en α dans $\mathbb{R}^2$ tel que $V \times I_\alpha^2 \subset \mathring{H}_j$. On modifie $V \times \mathbb{R}^2$ en remplaçant chanque $V \times I_\alpha^2$ par un exemplaire W_α de W grâce à l'identification manifeste $\partial W = V \times \partial I^2 = V \times \partial I_\alpha^2$. Il est clair que l'espace U' ainsi obtenu possède une action de $\mathbb{Z}^2$ et est un homéomorphe à U par un homéomorphisme équivariant.

Soient K_j l'image dans U de la modification de $H_j \subset V^2 \times \mathbb{R}^2$ et $\hat{K}_j$ l'adhérence de K_j dans $\hat{U}$, on a $\hat{K}_j = K_j \cup \{x_j\}$ et un homéomorphisme

$$\hat{U} / \{\hat{K}_j = x_j\} = \Sigma^2 V / \{\hat{H}_j = x_j\} \simeq \Sigma^2 V .$$

Comme $\hat{U}$ est homéomorphe à S^{n+2} , on obtient une surjection propre $f : S^{n+2} \longrightarrow \Sigma^2 V$ dont les contre-images de point non triviales sont homéomorphes aux $\hat{K}_j$.

Or tous les $\hat{K}_j$ sont homéomorphes au compactifié de la chaîne $K = W \times 0 \cup W \times 1 \cup \ldots$ où on identifie la partie $V \times 1 \times I$ de $V \times \partial I^2 \subset \partial(W \times j)$

avec la partie $V \times 0 \times I$ de $\partial(W \times (j+1))$. D'après l'unicité de W_o , on a un homéomorphisme de $W \times 0 \cup W \times 1$ sur $W \times 1$ qui est l'identité sur la partie $V \times 2 \times I$ de $\partial(W \times 0 \cup W \times 1)$ (qu'on a identifié avec $\partial(V \times [0,2] \times I)$ et qui est homotope à l'identité de $W \times 0 \cup W \times 1$ parmi les applications qui sont l'identité sur $V \times 2 \times I$. On a donc un homéomorphisme de K fixe sur $W \times 2 \cup W \times 3 \cup \ldots$ homotope à 1_K et d'image $W \times 1 \cup W \times 2 \cup \ldots$; par répétition, on obtient une contraction de $\hat{K}$ et donc $f : S^{n+2} \longrightarrow \Sigma^2 V$ est un quotient cellulique.

<u>Lemme</u> 1.- <u>Soit</u> V^n <u>une variété compacte connexe</u>, <u>si</u> $p \geq 2$ <u>et</u> $p+n \geq 5$, $\Sigma^p V^n$ <u>possède la PDD</u>.

<u>Démonstration</u>

Soient $f : I^2 \longrightarrow \Sigma^p V^n$ et Q_j la suite de quadrillage de I^2 de maille $1/2^j$ et $\varepsilon > 0$; comme $\Sigma^p V^n - S^{p-1}$ est dense et localement connexe par arcs, on peut construire par récurrence une suite $f_j : I^2 \longrightarrow \Sigma^p V$ telle que

f_j est $\varepsilon/2^j$ - homotope à f_{j-1} ;

$f_j(S^{p-1})$ est contenu dans les carrés ouverts de Q_j .

Il est clair que $f' = \lim f_j$ est ε-homotope à f et que $f'^{-1}(S^{p-1})$ est de dimension ≤ 0 .

Soient f et $g : D^2 \longrightarrow \Sigma^p V$ telles que $A = f^{-1}(S^{p-1})$ et $B = g^{-1}(S^{p-1})$ sont de dimension ≤ 0 . Soient A_o et B_o deux sous-ensembles denses de S^{p-1} disjoints et de dimension 0 $(p \geq 2)$. Sur $f^{-1}(S^{p-1} \times cV^n)$, écrivons $f = (f_1, f_2)$ de même $g = (g_1, g_2)$ sur $g^{-1}(S^{p-1} \times cV^n)$; on peut ε-homotoper f_1 au voisinage de A en f'_1 avec $f'_1(A) \subset A_o$ et g_1 au voisinage de B en $g'_1(B) \subset A_o$; on obtient f' et $g' : D^2 \longrightarrow \Sigma^p V$ ε-homotopes à f et g telles que $f'(D^2) \cap S^{p-1} \subset A_o$ et $g'(D^2) \cap S^{p-1} \subset B_o$, l'intersection $f'(D^2) \cap g'(D^2)$ est donc dans la variété topologique $\Sigma^p V^n - S^{p-1}$ et comme $p+n \geq 5$ par position générale, on peut rendre f' et g' d'images disjointes.

On peut donc utiliser le théorème d'approximation pour montrer

<u>Théorème de la double suspension</u> (Cannon, Edwards)

<u>La double suspension de toute sphère d'homologie de dimension</u> n <u>est homéomorphe à</u> S^{n+2} .

§ 4. Machine à rétrécir

A partir de maintenant, les variétés topologiques seront sans bord sauf mention du contraire.

Dans ce paragraphe, on démontre un cas très particulier du théorème d'approximation dont on déduira finalement le résultat général.

Commençons par quelques définitions, en particulier la notion de dimension de plongement d'un σ-compact dans une variété topologique qui, pour les problèmes de mise en position générale, remplace la notion de dimension d'un polyèdre dans une variété PL .

On dit que $X \subset Y$ est LCC^k (localement k-co-connexe) si, pour tout y de Y et tout voisinage U de y dans Y, il existe un voisinage V de y dans U tel que toute application $S^j \longrightarrow V - X$ pour $j \leq k$ est homotope à zéro dans $U - X$. Si $Y - X$ est dense dans Y, alors $X \subset Y$ est LCC^k si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, toute application $f : K \longrightarrow Y$ où K est un polyèdre de dimension $\leq k$ est ε-homotope à $f' : K \longrightarrow Y$ avec $f'(K) \cap X = \emptyset$.

On dit que $L \subset M$ où M est une variété topologique, est un polyèdre localement apprivoisé s'il existe une triangulation $K \xrightarrow{\alpha} L$ de L telle que, pour tout x de L, il existe une carte locale de M en x : $U \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^m$ avec $\varphi.\alpha$ linéaire par morceaux.

Soit X un σ-compact de la variété topologique M de dimension m, on dit que

$$\dim \mathrm{pl}\, X \leq k$$

(dimension de plongement de X) si pour tout polyèdre localement apprivoisé $L^\ell \subset M$ avec $\dim L = \ell \leq m - k - 1$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une ε-isotopie h_t de M à support dans un ε-voisinage de $L \cap X$ telle que $h_0 = 1_M$ et

$$h_1(L) \cap X = \emptyset .$$

Si $X' \subset X$, on a $\dim \mathrm{pl}\, X' \leq \dim \mathrm{pl}\, X$; on a la relation $\dim X \leq \dim \mathrm{pl}\, X$ où $\dim X$ est la dimension de recouvrement de X [4]. Si $m \geq 5$ et $\dim X \leq m - 3$, il y a équivalence entre $\dim X = \dim \mathrm{pl}\, X$ et X est LCC^1 dans M [2] (si $\dim X = k \leq m - 3$ et X est LCC^1 alors X est LCC^{m-k-1} et le résultat se montre en modifiant par engouffrement la petite homotopie de disjonction de L avec X en une isotopie ambiante).

Il existe un espace universel pour les sous-espaces de $\dim \mathrm{pl} \leq k$ de la variété M généralisant l'espace de Nöbeling [4] :

Soit $N^k(\mathbb{R}^m) = \{x \in \mathbb{R}^m$ qui ont au plus k coordonnées rationnelles$\}$, $\mathbb{R}^m - N^k(\mathbb{R}^m) = \{x \in \mathbb{R}^m$ qui ont au moins $k+1$ coordonnées rationnelles$\}$ est une réunion dénombrable d'hyperplans de dimension $m - k - 1$.

Soit $\{\varphi_\alpha : \mathbb{R}^m \longrightarrow M\}$ un atlas dénombrable et localement fini de M, on pose $N^k(M) = M - \bigcup_\alpha \varphi_\alpha(\mathbb{R}^m - N^k(\mathbb{R}^m))$; $M - N^k(M)$ est une réunion dénombrable de polyèdres localement apprivoisés B_j et B_j est une réunion disjointe de disques D^{m-k-1}.

PROPOSITION 1 [2].- Soit M une variété topologique ; $N^k(M)$ est de $\dim \mathrm{pl} \leq k$ et pour tout σ-compact $X \subset M$, il y a équivalence entre :

1) $\dim \mathrm{pl}\, X \leq k$;

2) <u>pour tout</u> $\varepsilon > 0$, <u>il existe une</u> ε-<u>isotopie</u> h_t <u>de</u> M <u>avec</u> $h_1(X) \subset N^k(M)$.

<u>Lemme de rétrécissement dénombrable</u>

<u>Soit</u> $f : M^m \to Q$ <u>un quotient cellulique où</u> M <u>est une variété topologique de dimension</u> ≥ 5 <u>tel que les</u> $f^{-1}(y)$ <u>non triviaux forment une suite</u> Y_j <u>de sous-espaces de dimension de plongement</u> $\leq m - 3$ <u>et</u> $\operatorname{diam} Y_j \xrightarrow[j \to \infty]{} 0$ <u>localement.</u> <u>Alors</u> f <u>est approximable par homéomorphismes.</u>

On dit que $\operatorname{diam} Y_j \to 0$ localement si, pour tout ensemble A relativement compact, la sous-suite des Y_j contenues dans A a des diamètres tendant vers zéro.

La démonstration de ce lemme va occuper le reste du paragraphe. Comme Y_j est cellulique, que $\operatorname{codim} \mathrm{pl}\, Y_j \geq 3$ et $m \geq 5$, on montre par engouffrement [7] et [9] que Y_j est cellulaire et donc individuellement chaque Y_j est rétrécissable, la difficulté est de rétrécir simultanément le nombre localement fini de Y_j de diamètre $\geq \varepsilon$ sans étirer les autres Y_j au-dessus de ε . Le lemme de rétrécissement dénombrable découle visiblement du critère de Bing et du lemme suivant

<u>Lemme</u> 2.- <u>Dans la situation précédente</u>, <u>pour tout</u> i <u>et tout</u> $\varepsilon > 0$, <u>il existe dans l'</u>ε-<u>voisinage de</u> Y_i <u>un voisinage ouvert</u> U <u>de</u> Y_i <u>saturé</u> (i.e. $Y_j \subset U$ dès que $Y_j \cap U \neq \emptyset$) <u>et un homéomorphisme</u> $h : M \to M$ <u>à support contenu dans</u> U <u>tel que</u>

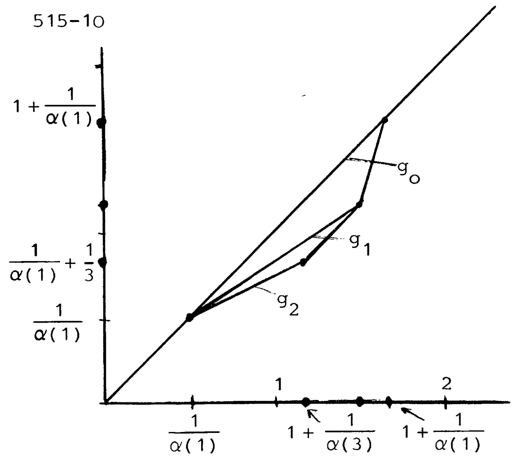
$$\operatorname{diam}(h(Y_j)) < \varepsilon \qquad\qquad \forall\, Y_j \subset U .$$

<u>Plan de la machine à rétrécir</u>

Soient $Y \subset M^m$ un compact cellulique de codimension de plongement ≥ 3 (donc cellulaire puisque $m \geq 5$) et U un voisinage ouvert de Y dans M . On peut trouver une carte $\varphi : \mathbb{R}^m \to M$ dont l'image est dans U telle que $Y \subset \varphi(\mathring{B}^m)$ et $\varphi(0) \notin Y$; par position générale, on peut modifier un peu φ de sorte que la projection radiale Y' de $\varphi^{-1} Y$ sur ∂B vérifie $\dim \mathrm{pl}\, Y' \leq \dim \mathrm{pl}\, Y$ et donc $X = \varphi(\text{cône sur } Y')$ a une $\dim \mathrm{pl} \leq 1 + \dim \mathrm{pl}\, Y$. A partir de dorénavant on simplifie l'écriture en identifiant $\mathbb{R}^m$ et son image $\varphi(\mathbb{R}^m)$.

Soit O_q une suite de voisinages fermés de Y' dans ∂B^m , $O_{q+1} \subset \operatorname{Int} O_q$ et $Y' = \bigcap O_q$. Soit $N_q = \text{Cône}((1 + \frac{1}{q})O_q) \cup \frac{1}{q} B^m$ où tA est l'image par l'homothétie de rapport t de l'ensemble $A \subset \mathbb{R}^m$, N_q est une suite de voisinages fermés de X avec $N_{q+1} \subset \operatorname{Int} N_q$ et $X = \bigcap N_q$.

Soient $p \geq 2$ et α une suite croissante $p \leq \alpha(1) < \alpha(2) < \ldots < \alpha(p)$. On va construire un homéomorphisme $h_\alpha : M \to M$ de support dans $N_{\alpha(1)}$ de la façon suivante :



Soit g_{p-1} la fonction linéaire par morceaux croissante de $[0,2]$ sur lui-même dont le graphe a au plus $p+1$ points anguleux aux points de coordonnées respectives :

$$\begin{array}{lllll} {}^1/\alpha(1) & 1+\frac{1}{\alpha(p)} & 1+\frac{1}{\alpha(p-1)} & ,\dots & 1+\frac{1}{\alpha(1)} \\ {}^1/\alpha(1) & \frac{1}{\alpha(1)}+\frac{1}{p} & \frac{1}{\alpha(1)}+\frac{2}{p} & & \frac{1}{\alpha(1)}+1 . \end{array}$$

Soit g_{p-2} obtenue en supprimant le point $(1+\frac{1}{\alpha(p)}, \frac{1}{\alpha(1)}+\frac{1}{p})$ et g_{p-i} obtenue à partir de g_{p-i+1} en supprimant le point $(1+\frac{1}{\alpha(p-i+2)}, \frac{1}{\alpha(1)}+\frac{i-1}{p})$ de sorte que $g_o = \mathrm{Id}$. Soit $K(t,s)$, $0 \leq t \leq 2$, $0 \leq s \leq p-1$ l'homotopie entre g_o et g_{p-1} qui, sur le segment $s \in [k-1, k]$, est l'homotopie linéaire entre g_{k-1} et g_k.

Si $s \in [k-2, k]$ et t et $t' \in [0, 1+\frac{1}{\alpha(k)}]$ avec $t \leq t'$, on a

$$0 \leq K(t',s) - K(t,s) \leq t' - t + \frac{2}{p}$$

puisque $K(t,s)$ est de pente ≤ 1 dans $[0, 1+\frac{1}{\alpha(k+2)}]$.

Si s, $s' \in [k-2, k]$ et $t \in [0,2]$, on a $|K(t,s) - K(t,s')| < \frac{2}{p}$, donc si t, $t' \in [0, 1+\frac{1}{\alpha(k)}]$, s, $s' \in [k-2, k]$, on a

$$|t' - t - (K(t',s') - K(t,s))| < \frac{4}{p} .$$

Cette inégalité est encore vérifiée, si on permet $s \in [k, p-1]$ et $t \in [1+\frac{1}{\alpha(k+2)}, 1+\frac{1}{\alpha(k)}]$, car alors $K(t,s) = K(t,k)$.

Soit $\varphi : \partial B^m \longrightarrow [0, p-1]$ telle que $\varphi(\partial B^m - O_{\alpha(1)}) = 0$ et $\varphi(O_{\alpha(k)} - \mathrm{Int}\, O_{\alpha(k+1)}) = [k-1, k]$. On définit $h_\alpha : M \to M$ comme étant l'identité hors de $2B^m$, envoyant 0 sur 0 et

$$h_\alpha(tx) = K(t, \varphi(x)).x \qquad \text{si } x \in \partial B^m \text{ et } t \in]0,2] .$$

h_α est radiale, pousse vers l'origine, il est clair que $h_\alpha(X) \subset \frac{2}{p} B^m$ et si x, $y \in N_{\alpha(k-1)} - \mathrm{Int}\, N_{\alpha(k+1)}$, on a $d(h_\alpha(x), h_\alpha(y)) < d(x,y) + \frac{4}{p}$ où d est la distance euclidienne de $2B^m$ en effet, $x = tu$, $y = t'u'$, $s = \varphi(u)$, $s' = \varphi(u')$, $x' = h_\alpha(x) = K(t,s)u$, $y' = K(t',s')u'$ et si $t \leq t'$ en posant $x'' = (t - t' + K(t',s'))u$, on a $d(x,x'') = d(y,y')$ donc $d(x'',y') \leq d(x,y)$, or

$$d(x',x'') = |t' - t - (K(t',s') - K(t,s))| < \frac{4}{p} \quad \text{d'après la construction de } K$$

donc l'homéomorphisme h_α n'augmente pas trop le diamètre euclidien des connexes qui ne rencontrent qu'une seule des $\mathrm{Fr}\ N_{\alpha(i)}$.

La métrique euclidienne et la métrique induite par M étant équivalentes, le résultat précédent se traduit par

Lemme de la machine

Etant donné Y , X , N_q comme précédemment, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ et $p \geq 2$ tels que, pour toute machine à rétrécir à p-étages construite sur le plan précédent, on a

$$\operatorname{diam} h_\alpha(X) < \varepsilon$$

et pour tout connexe C de M de diamètre $< \delta$ et ne rencontrant au plus qu'une seule $\mathrm{Fr}\ N_{\alpha(i)}$

$$\operatorname{diam} h_\alpha(C) < \varepsilon \ .$$

Construction de la machine à rétrécir lorsque $m \geq 2y + 2$, $y = \sup_j \dim \mathrm{pl}\ Y_j$

On appelle Y_0 le Y_j à rétrécir et on se donne $\varepsilon > 0$, on choisit U_0 ε-voisinage saturé de Y_0 tel que $Y_j \subset U_0$ et $j \neq 0$ implique $\operatorname{diam} Y_j < \varepsilon$; on ne considère plus que les Y_j qui sont dans U_0 . La condition $m \geq 2y + 2$ assure qu'on peut construire le cône X_0 de sorte que $X_0 \cap Y_j = \emptyset$ pour $j > 0$; soient N_q la suite de voisinages de X comme précédemment et soient δ et p donnés par le lemme de la machine.

Il existe j_1 tel que $\operatorname{diam} Y_j < \delta$ si $j \geq j_1$ puisque $Y_j \subset U_0$, on choisit $\alpha(1) \geq p$ de sorte que $Y_j \cap N_{\alpha(1)} = \emptyset$ pour $j < j_1$ et que $\beta_1 = \operatorname{dist}(\mathrm{Fr}\ N_{\alpha(1)}, X_0) < \delta$.

Il existe j_2 tel que $\operatorname{diam} Y_j < \delta_1 \leq \frac{1}{2}\beta_1$ si $j \geq j_2$ et on choisit $\alpha(2) > \alpha(1)$ de sorte que $N_{\alpha(2)}$ est dans le δ_1-voisinage de X_0 et $Y_j \cap N_{\alpha(2)} = \emptyset$ pour $j < j_2$, alors $\operatorname{dist}(\mathrm{Fr}\ N_{\alpha(1)}, \mathrm{Fr}\ N_{\alpha(2)}) > \delta_1$ donc aucun Y_j ne peut couper à la fois $\mathrm{Fr}\ N_{\alpha(1)}$ et $\mathrm{Fr}\ N_{\alpha(2)}$; en continuant ainsi, on obtient une machine à rétrécir bien positionnée par rapport aux Y_j qui produit le rétrécissement cherché.

Le cas général utilise l'énoncé

LR_k : Dans la situation du lemme 2 et pour tout fermé K de M avec $\dim \mathrm{pl}\ K \leq k$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe dans l'ε-voisinage de Y_i un voisinage ouvert saturé U de Y_i et un homéomorphisme h de M à support dans U tel que

$$\operatorname{diam}(h(Y_j)) < \varepsilon \qquad \text{dès que } h(Y_j) \cap U \cap K \neq \emptyset \ .$$

Démonstration du lemme en utilisant LR_{m-2}

Soit $\varepsilon > 0$, on choisit U_0 voisinage saturé de Y_0 contenu dans l'ε-voisinage de Y_o et tel que diam $Y_j < \varepsilon$ si $Y_j \subset U_o$ et $j \neq 0$, on ne considère plus que les Y_j contenus dans U_o ; on construit le cône X_o avec dim pl $X_o \leq m-2$ et la suite de voisinages N_q comme précédemment et soient $\delta > 0$, $p \geq 2$ donnés par le lemme de la machine.

Soit j_1 tel que diam $Y_j < \delta$ pour $j > j_1$; pour $j \leq j_1$, on choisit des voisinages saturés disjoints U_j de Y_j avec $U_j \subset U_o$ et diam $U_j < \varepsilon$, LR_{m-2} assure l'existence d'un homéomorphisme h_j à support dans U_j tel que

$$h_j(Y_k) \cap U_j \cap X_o \neq \emptyset \Longrightarrow \text{diam } h_j(Y_k) < \delta .$$

Soient h^1 la composée des homéomorphismes à support disjoints h_j et $Y^1 = h^1(Y_k)$; on a

$$Y_j^1 \cap X_o \neq \emptyset \Longrightarrow \text{diam } Y_j^1 < \delta \qquad \forall j > 0$$

$$\text{diam } Y_j^1 < \varepsilon \qquad \forall j > 0 .$$

Il y a un nombre fini de Y_j^1 de diamètre $\geq \delta$ et ils sont disjoints de X_o, on peut donc choisir $\alpha(1) \geq p$ tel que

$$Y_j^1 \cap N_{\alpha(1)} \neq \emptyset \Longrightarrow \text{diam } Y_j^1 < \delta \quad \text{pour } j > 0$$

et

$$\delta_1 = \text{dist}(\text{Fr } N_{\alpha(1)}, X_o) < \delta .$$

En rétrécissant comme précédemment au voisinage du nombre fini de Y_j^1 de diamètre $\geq \delta_1$, on trouve un homéomorphisme h^2 tel qu'en posant $Y_k^2 = h^2(Y_k^1)$, on ait

$$Y_k^2 \cap X_o \neq \emptyset \Longrightarrow \text{diam } Y_k^2 < \delta_1 \qquad \forall \ k > 0 ,$$

donc aucun des Y_j^2 ne coupe à la fois Fr $N_{\alpha(1)}$ et X_o. On peut choisir $\alpha(2) > \alpha(1)$ tels que

$$Y_j^2 \cap \text{Fr } N_{\alpha(1)} \neq \emptyset \Longrightarrow Y_2^j \cap N_{\alpha(2)} = \emptyset$$

donc aucun des Y_j^2 ne coupe à la fois Fr $N_{\alpha(1)}$ et Fr $N_{\alpha(2)}$; en continuant le procédé, on construit une machine à rétrécir bien positionnée par rapport aux Y_j^p qui construit le rétrécissement cherché.

L'énoncé LR_k se démontre par récurrence (le début de la récurrence s'établit comme dans le cas $m \geq 2y+2$). Par position générale, on construit le cône X_o tel que $K \cap X_o \subset Z_o \subset Z$ où Z est un sous-cône de X avec dim pl $Z \leq k+m-2-m+1 = k-1$ et où Z_o est un tronc de cône ne contenant pas le sommet. On utilise LR_{k-1} pour construire comme précédemment une machine à rétrécir d'âme Z qui fournit un homéomorphisme h à support dans U_o tel que

$$h(X_o) \subset Z - Z_o \quad \text{donc} \quad h(Y_o) \cap K = \emptyset$$

et

$$h(Y_j) \cap U_o \cap K \neq \emptyset \Longrightarrow \text{diam } Y_j < \varepsilon \qquad \text{pour } j > 0 .$$

§ 5. Quelques cas particuliers

1) Cas où Codim pl $\Sigma f \geq 3$ et $\dim f\Sigma f = 0$

PROPOSITION 2.- *Soit $f : M \longrightarrow Q$ un quotient cellulique où M est une variété topologique de dimension ≥ 5 telle que Codim pl $\Sigma f \geq 3$ et $\dim f\Sigma f = 0$. Alors f est approximable par homéomorphismes.*

Remarque.- On peut comme pour les autres propositions de ce paragraphe montrer que f est majorant-approximable par homéomorphismes c'est-à-dire que pour toute majorante $\varepsilon : Q \longrightarrow]0,\infty[$ continue, il existe un homéomorphisme $g : M \longrightarrow Q$ tel que

$$d'(f(x),g(x)) < \varepsilon(f(x)) \qquad \forall\, x \in M .$$

Démonstration

La méthode est de construire pour chaque $\varepsilon > 0$ une suite Y_j d'espaces cellulliques compacts disjoints de M avec codim pl $Y_j \geq 3$, $\operatorname{diam} f\, Y_j < \varepsilon$, $\operatorname{diam} Y_j \longrightarrow 0$ localement et $\Sigma f \subset \bigcup_j Y_j$.

En posant alors $Q' = M/\{Y_j\}$ et $f' : Q \longrightarrow Q'$ l'application de passage au quotient, on a $\operatorname{diam}(f'^{-1}z) < \varepsilon$ et $f'.f : M \longrightarrow Q'$ est un quotient cellulique vérifiant le lemme de rétrécissement dénombrable, f est donc approximable par le corollaire du critère de Bing.

On construit d'abord une famille particulière de voisinages de $\Sigma_{1/k} f$: il existe un ensemble dénombrable d'indices $J = J_1 \cup J_2 \cup \ldots$ (réunion disjointe) et pour $j \in J_1 \cup \ldots \cup J_i$, il existe des variétés compactes connexes à bord N_i^j disjointes formant une famille localement finie telle que

1) $N_i = \bigcup_j N_i^j$ est un voisinage de $\Sigma_{1/i} f$ et pour tout j, il existe $x_i^j \in \Sigma_{1/i} f$ tel que $N_i^j \subset V_{1/i-1}(x_i^j)$ et $\operatorname{diam} f(N_i^j) < \varepsilon$,

2) Si $j \in J_1 \cup \ldots \cup J_{i-1}$, N_i^j est inclus dans $\operatorname{Int} N_{i-1}^j$ et l'inclusion est homotope à zéro,

3) $\operatorname{diam} N_i^j < 1/i$ si $j \in J_i$.

La construction de N_i^j se fait par récurrence, supposons-la réalisée pour $k < i$. Comme $f^{-1}(y)$ est cellulaire, il admet des voisinages variétés PL et la condition $\dim f\Sigma f = 0$ permet de construire une famille dénombrable localement finie X_i^j, $j \in K_i$, de variétés compactes connexes à bord vérifiant la condition 1, la condition 2 étant remplacée par :

2') chaque X_i^j voisinage d'un point de $\Sigma_{1/i-1} f$ est contenue et est nulle homotope dans un N_{i-1}^k,

et la condition 3) étant vérifiée pour les X_i^j ne rencontrant pas $\Sigma_{1/i-1} f$.

On définit alors N_i^j pour $j \in J_1 \cup \ldots \cup J_{i-1}$ en connexifiant les différents X_i^{ℓ} contenus dans N_{i-1}^j par des tubes assez fins qui évitent $\Sigma_{1/i}f$ (codim $\Sigma_{1/i}f \geq 3$) . Soit J_i l'ensemble d'indice des X_i^j ne coupant pas $\Sigma_{1/i-1}f$, on définit N_i^j pour $j \in J_i$ en enlevant de X_i^j des petits voisinages des intersections des tubes qu'on vient de construire avec X_i^j .

Pour $j \in J_k$, on pose $Y_j = \bigcap_{i \geq k} N_i^j$, il est clair que diam $Y_j \longrightarrow 0$ localement d'après 3) que diam $fY_j < \varepsilon$ d'après 1), que Y_j est cellulique d'après 2) et que codim pl $Y_j \geq 3$ car $Y_j - \Sigma f$ est une réunion dénombrable d'intervalles plongés de façon localement plate.

2) Cas où codim pl $\Sigma f \geq 3$

PROPOSITION 3.- *Soit $f : M \longrightarrow Q$ un quotient cellulique où M est une variété topologique de dimension ≥ 5 , Q un ANR et codim pl $\Sigma f \geq 3$. Alors f est approximable par homéomorphismes.*

Démonstration

Il existe une filtration de Q par des σ-compacts

$$Q = P^q \supset P^{q-1} \supset \ldots \supset P^2 \supset P^1 \supset P^0$$

telle que $\dim P^j \leq j$ et $\dim P^j - P^{j-1} \leq 0$. On construit P^{j-1} en prenant les frontières d'une base dénombrable de voisinages de P^j .

Supposons par récurrence que $\Sigma f \cap f^{-1}P^{j-1} = \emptyset$ et soit $\varepsilon > 0$; soient $P_1^j \subset P_2^j \subset \ldots \subset P^j = \bigcup P_k^j$ une filtration de P^j par des compacts.

On va construire une suite convergente d'approximations f_k de f telles que $\Sigma f_k \cap f_k^{-1} P_k^j = \emptyset$, la limite $f' = \lim f_k$ sera alors un quotient cellulique mais il faut imposer un contrôle pour assurer que codim pl $\Sigma f' \geq 3$ et que $\Sigma f' \cap f'^{-1} P^j = \emptyset$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g_1"'] & & Q \\ & M_1 \arrow[ur, "g_2"'] & \end{tikzcd}$$

Pour construire f_1 , on considère la factorisation où $M_1 = M/\{f^{-1}y \mid y \in P_1^j\}$, il est clair que g_1 et g_2 sont des quotients celluliques, $g_1\Sigma g_1 \subset P_1^j - P^{j-1}$ considéré par g_2^{-1} comme dans M_1 donc $g_1\Sigma g_1$ est de dimension 0 et comme codim pl $\Sigma g_1 \geq 3$, g_1 est $\varepsilon/4$-approximable par un homéomorphisme g_1' . Soit $f_1' = g_2 g_1' : M \longrightarrow Q$, c'est un quotient cellulaire injectif au-dessus de $P_1^j \cup P^{j-1}$; de plus, $\Sigma f_1 = g_1'^{-1}(g_1(\Sigma f - f^{-1}P_1^j))$ et $g_1'^{-1}g_1$ est un homéomorphisme sur $M - f^{-1}P_1^j$ qui est un voisinage ouvert de $\Sigma f - f^{-1}P_1^j$ donc codim pl $\Sigma f_1 \geq 3$, comme codim pl$(\Sigma f - f^{-1}P_1^j)$. On peut donc trouver une petite isotopie α_t de M telle que $\alpha_1(B_1) \cap \Sigma f_1' = \emptyset$ (où B_k est la filtration de $M - N^{m-3}(M)$) et on pose $f_1 = f_1'.\alpha_1$.

En raisonnant de la même façon avec une approximation majorante sur la variété $M - (B_1 \cup f_1^{-1} P_1^j)$ et par récurrence, on construit une suite f_k de quotients cellulaires $f_k : M \longrightarrow Q$ telle que

1) $d'(f_k(x), f_{k-1}(x)) \leq \varepsilon_k(x) = \mathrm{Min}(\frac{\varepsilon}{2^k}, \frac{1}{3^k} \mathrm{dist}(f_{k-1}(x), f_{k-1} B_{k-1} \cup P_{k-1}^j)$,

donc en particulier $f_k(x) = f_{k-1}(x)$ au-dessus de $f_{k-1} B_{k-1} \cup P_{k-1}^j$.

2) $\Sigma f_k \cap (B_k \cup f_k^{-1}(P_k^j \cup P^{j-1})) = \emptyset$ et codim pl $\Sigma f_k \geq 3$.

Soit f' le quotient cellulique $\lim\limits_k f_k$ la majorante 1) assure que $\Sigma f' \cap (f'^{-1} P^j \cup M - N^{m-3}(M)) = \emptyset$ et donc codim pl $\Sigma f' \geq 3$.

3) <u>Cas où $\overline{f\Sigma f}$ est LCC^1 dans</u> Q

PROPOSITION 4.- <u>Soit</u> $f : M \longrightarrow Q$ <u>un quotient cellulique où</u> M <u>est une variété topologique de</u> dim ≥ 5, Q <u>un ANR, et</u> $\overline{f\Sigma f}$ <u>est LCC^1 dans</u> Q <u>et est de dimension</u> $<$ dim Q, <u>alors</u> f <u>est approximable par homéomorphismes</u>.

<u>Démonstration</u>

On se ramène au cas où codim pl $\Sigma f \geq 3$ en construisant une suite d'homéomorphismes α_j de M telle que $\alpha_j(B_j) \cap \Sigma f = \emptyset$ et que $f_j = f \circ \alpha_j$ est une approximation convergente de f ; on a $f_j \Sigma f_j = f\Sigma f$ mais $f' = \lim f_j$ a la propriété $\Sigma f' \subset N^{m-3}(M)$ donc codim pl $\Sigma f' \geq 3$.

Il suffit de construire $\alpha_1 : M \longrightarrow M$, la construction des autres α_j étant similaire.

Soient $u_o : B_1 \hookrightarrow M$ et $v_o = fu_o : B_1 \longrightarrow Q$ comme $\overline{f\Sigma f}$ est LCC^1 dans Q et que $Q - \overline{f\Sigma f}$ est ouvert dense et que dim $B_1 = 2$, il existe une ε-homotopie v_t telle que $v_1(B_1) \subset Q - \overline{f\Sigma f}$. Comme $f : M - f^{-1}\overline{f\Sigma f} \longrightarrow Q - \overline{f\Sigma f}$ est un homéomorphisme, il existe $u_1 : B_1 \longrightarrow M_o = M - f^{-1}\overline{f\Sigma f}$ avec $v_1 = fu_1$. On peut [2] approximer u_1 dans la variété M_o en un plongement LCC^1 u_2 ε-homotope à u_1 et $v_2 = fu_2$ est ε-homotope à v_1. Comme f est une équivalence d'homotopie héréditaire, il existe une homotopie u_t entre les deux plongements LCC^1 u_o et u_2 tels que $f.u_t$ est une 2ε-homotopie entre v_o et v_2. Par position générale, si dim $M \geq 6$ ou par engouffrement radial si dim $M = 5$, il existe une isotopie α_t de M telle que $\alpha_o = \mathrm{Id}$, $\alpha_1(B_1) \subset M_o$ et $d'(f\alpha_t(x), f(x)) < 2\varepsilon$ $\forall x \in M$.

§ 6. <u>Utilisation de la PDD et fin de la démonstration</u>

<u>Lemme</u> 3.- <u>Soit</u> Q <u>un espace métrique complet possédant la PDD, pour tout</u> $\varepsilon > 0$ <u>et toute application</u> $f : D^2 \longrightarrow Q$, <u>il existe un plongement</u> $f' : D^2 \longrightarrow Q$ ε-<u>homotope à</u> f.

<u>Preuve</u>. Soient $\{B_j\}$ et $\{B'_j\}$ deux suites de disques plongés de façon PL dans D^2 telles que

$B_j \cap B'_j = \emptyset$, $\forall\, x, y \in D^2$, $x \neq y$ $\exists\, j$ avec $x \in B_j$ et $y \in B'_j$.

Supposons construite une suite $f_o = f$, $f_1, \dots, f_{i-1} : D^2 \to Q$ telle que

1) pour $j \leq k \leq i-1$ $\quad f_k(B_j) \cap f_k(B'_j) = \emptyset$

2) pour $k \leq i-1$ $\quad f_k$ est ε_k homotope à f_{k-1} où

$$\varepsilon_k < \frac{1}{2}\,\mathrm{Min}(\varepsilon_{k-1}, \mathrm{dist}(f_{k-1}(B_j), f_{k-1}(B'_j)), j \leq k-1) .$$

On peut trouver $g : B_i \to Q$ et $g' : B'_i \to Q$ avec $g(B_i) \cap g(B'_i) = \emptyset$ et ε_i-homotopes à $f_{i-1}|B_i$ et $f_{i-1}|B'_i$ respectivement avec $\varepsilon_i < \frac{1}{2}\,\mathrm{Min}(\varepsilon_{i-1}, \mathrm{dist}(f_{i-1}(B_j), f_{i-1}(B'_j), j \leq i-1)$; ces homotopies se prolongent à D^2 et on obtient $f_i : D^2 \to Q$ ε_i-homotope à f_{i-1} , $f_i(B_i) \cap f_i(B'_i) = \emptyset$ par construction, $f_i(B_j) \cap f_i(B'_j) = \emptyset$ pour $j < i$ d'après le choix de ε_i ; il est clair que $\{f_i\}$ converge vers f' ε-homotope à f et que f' est injective.

COROLLAIRE 1.- Avec les hypothèses précédentes, dans l'espace des applications de D^2 dans Q avec la topologie compacte ouverte, il existe un ensemble dénombrable dense formé de plongements.

COROLLAIRE 2.- Soient Q un ANR possédant la PDD, $X \subset Q$, LCC^1 dans Q avec $Q - X$ dense. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $f : D^2 \to Q$, il existe un plongement f' ε-homotope à f avec $f'(D^2)$ LCC^1 dans Q et disjoint de X .

Démonstration

Soit $\{h_j\}$ une suite d'applications de D^2 dans Q dense dans $\mathcal{C}(D^2,Q)$. Dans la construction précédente, on impose en plus que $f_i(D^2) \cap X = \emptyset$ et $f_i(D^2) \cap h'_i(D^2) = \emptyset$ où h'_i est ε_i-homotope à h_i et où on impose en plus $\varepsilon_i < \frac{1}{2}\,\mathrm{Min}(\mathrm{dist}(f_{i-1}(D^2), h'_{i-1}(D^2)), \mathrm{dist}(f_{i-1}(D^2), X))$; alors $f' = \lim f_i$ est un plongement d'image Y disjoint de X et des $h'_j(D^2)$ et $\{h'_j\}$ est dense ; il en résulte que Y est LCC^1 dans Q : en effet, pour tout y de Q et tout voisinage U de y , il existe un voisinage V de y dans U tel que l'inclusion $V \hookrightarrow U$ est homotope à une constante puisque Q est ANR. Toute application $\alpha : S' \to V - Y$ se prolonge en $\beta : D^2 \to U$ qui est approximable par un h'_j ; comme Q est ANR, pour tout $\eta > 0$, β est alors η-homotope à un h'_j et $h'_j(D^2) \subset U - Y$.

Démonstration du théorème d'approximation

Soient $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ deux sous-ensembles dénombrables denses de $C(D^2,Q)$ formés de plongements, les images des plongements de $\mathfrak{A}$ étant disjointes des images de tous les plongements de $\mathfrak{B}$. Soient A et B la réunion des images des éléments de $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ respectivement, A et B sont des σ-compacts disjoints de dimension 2.

En raisonnant comme pour la prop. 3, pour la paire (Q,A) , on trouve une filtration par des σ-compacts P_o^j avec en plus $\dim(P_o^j \cap A) \leq \dim A - (q - j)$, donc $P_o^{q-3} \cap A = \emptyset$, posons $P^j = P_o^j \cup B$ pour $j \geq 2$. On obtient une filtration $Q = P^q \supset P^{q-1} \supset \ldots \supset P^2$ telle que

1) $\dim P^j \leq j$, $\dim(P^j - P^{j-1}) \leq 0$ et $\dim(Q - P^j) \leq q - j - 1$.

2) Tout σ-compact de P^{q-3} est LCC^1 dans Q (on adapte la démonstration du corollaire 2 puisque $P^{q-3} \cap A = \emptyset$.

3) Tout σ-compact de $Q - P^2$ est LCC^1 dans Q (car $(Q - P^2) \cap B = \emptyset$).

On utilise cette filtration pour se ramener au cas où codim pl $\Sigma f \geq 3$.

<u>La première étape</u> est d'approximer f en f' avec $\Sigma f' \cap f'^{-1}P^2 = \emptyset$, on raisonne comme dans la prop. 3 avec une famille croissante de compacts P_k^2 recouvrant P^2 et à chaque pas élémentaire, on va utiliser la prop. 4 et non le cas de dimension 0. Il suffit d'indiquer le premier pas.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g_1"'] & & Q \\ & M_1 \arrow[ur, "g_2"'] & \end{tikzcd}$$

Soient $M_1 = M/\{f^{-1}(y) \,/\, y \in P_1^2\}$ et la factorisation on a $\Sigma g_1 = \Sigma f \cap f^{-1}P_1^2$, donc $g_1 \Sigma g_1 \subset P_1^2 \subset M_1$, où on a identifié $g_1(f_1^{-1}P_1^2)$ avec P_1^2 grâce à g_2 , donc $\overline{g_1\Sigma g_1} \subset P_1^2$ et est de dimension ≤ 2 et $\overline{g_1\Sigma g_1}$ est LCC^1 dans M_1 , en effet, $g_2(\overline{g_1\Sigma g_1})$ est LCC^1 dans Q puisque compact contenu dans P^{q-3} et $\overline{g_1\Sigma g_1} \subset M_1 - \Sigma g_2$, or g_2 est une équivalence d'homotopie héréditaire et est ouverte au voisinage de tout point de $M_1 - \Sigma g_2$, donc g_2^{-1} transporte les compacts de $Q - g_2\Sigma g_2$, LCC^1 dans Q en compacts de $M_1 - \Sigma g_2$, LCC^1 dans M_1 . La prop. 4 permet d'approximer g_1 par un homéomorphisme et f par f_1 injective au-dessus de P_1^2 .

On est donc ramené à étudier $f : M \to Q$ avec $f\Sigma f \subset Q - P^2$, donc $f\Sigma f$ est LCC^1 dans Q , on va approximer f par f' possédant les mêmes propriétés mais en plus codim pl $\Sigma f' \geq 3$.

La méthode est analogue à celle de la prop. 4, si ce n'est qu'il faut garder le contrôle de $\Sigma f \cap f^{-1}P^2 = \emptyset$ et qu'on raisonne avec $f\Sigma f$ au lieu de $\overline{f\Sigma f}$, on utilise le corollaire 2 pour construire directement dans Q une ε-homotopie entre $v_o = f.u_o : B_1 \to Q$ et $v_1 : B_1 \to Q - f\Sigma f$ plongement LCC^1 dans Q , $u_1 = f^{-1}v_1 : B_1 \to M - \Sigma f$ est alors un plongement LCC^1 dans M d'après la remarque de la première étape et on raisonne comme dans la prop. 4.

A la fin de cette étape, on arrive à codim pl $\Sigma f \geq 3$ et on applique la prop. 3.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. CANNON - Shrinking cell like decompositions of manifolds Codimension three, Preprint.

[2] R. EDWARDS - Demension theory I. Geometric topology, Lecture Notes in Math., 438 (1975), Springer-Verlag

[3] R. EDWARDS - Approximating certain cell like maps by homeomorphisms, Preprint.

[4] W. HUREWICZ and H. WALLMAN - Dimension theory, Princeton Maths. series, vol. 4, 1941, Princeton Univ. Press.

[5] R. KIRBY and L. SIEBENMANN - Foundational Essays on topological manifolds, smoothings and triangulations, Princeton Univ. Press. 1977.

[6] R. LACHER - Cell-like mappings and their generalizations, Bull. Amer. Math. Soc., 83 (1977), 495-553.

[7] D. MAC-MILLAN - A criterion for cellularity in a manifold, Ann. of Math., 79(1964), 327-327.

[8] A. MARIN and Y. VISETTI - A general proof of Bing's shrinkability criterion, Proc. Amer. Math. Soc., 53 (1975), 501-507.

[9] L. SIEBENMANN - On detecting euclidean spaces homotopically among topological topological manifolds, Inventionnes Math., 6 (1968), 245-261.

[10] L. SIEBENMANN - Are non-triangulable manifolds triangulable ? Topology of Manifolds, Markham Chicago, (1970), 77-84.

[11] L. SIEBENMANN - Approximating cellular maps by homeomorphisms, Topology 11 (1972), 271-294.