PIERRE CARTIER

Équivalence linéaire des idéaux de polynômes

Séminaire N. Bourbaki, 1966, exp. nº 283, p. 93-103

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1964-1966__9__93_0>

Séminaire BOURBAKI
17e année, 1964/65, n° 283

Février 1965

ÉQUIVALENCE LINÉAIRE DES IDÉAUX DE POLYNÔMES

par Pierre CARTIER

1. Introduction.

Nous rappellerons d'abord quelques points de la théorie classique de l'équivalence linéaire des cycles en géométrie algébrique. Toutes les variétés considérées dans cette introduction sont des variétés algébriques définies sur un corps algébriquement clos fixé une fois pour toutes. Si X est une telle variété, on appelle cycle positif de dimension d sur X toute combinaison linéaire formelle $a_1.V_1 + \dots + a_h.V_h$, où $a_1, \dots, a_h$ sont des entiers positifs, et $V_1, \dots, V_h$ des sous-variétés irréductibles de dimension d de X. On note par ailleurs $\underset{\sim}{P}^r$ l'espace projectif type de dimension r. Soient alors Z et Z' deux cycles positifs de dimension d sur X ; on dit que Z et Z' sont linéairement équivalents s'il existe un cycle positif Y de dimension d sur X, et un cycle positif F de dimension $d+1$ sur $X \times \underset{\sim}{P}^1$ tels que l'on ait

$$(1) \qquad Z + Y = \mathrm{pr}_X(F.(X \times \{0\})) , \qquad Z' + Y = \mathrm{pr}_X(F.(X \times \{1\})) .$$

Par ailleurs, si V est une sous-variété irréductible de dimension d de l'espace projectif $\underset{\sim}{P}^r$, il existe un entier e tel que "presque toute" variété linéaire de dimension $r-d$ de $\underset{\sim}{P}^r$ ait exactement e points en commun avec V ; on dit que e est le degré de V. Le degré d'un cycle positif

$$Z = a_1.V_1 + \dots + a_h.V_h$$

est par définition l'entier $a_1.e_1 + \dots + a_h.e_h$ où e_i est le degré de V_i. CHOW a montré comment on peut paramétrer l'ensemble des cycles de dimension d et de degré e au moyen des points de certaines variétés projectives ; ces "variétés de Chow" ne sont pas en général irréductibles, mais on montre facilement qu'elles sont connexes ; on utilise pour cela le fait que deux cycles positifs de dimension d dans $\underset{\sim}{P}^r$ sont linéairement équivalents si et seulement s'ils ont même degré.

GROTHENDIECK a montré de manière convaincante qu'il fallait dans de nombreuses questions remplacer la considération des variétés et des cycles par celle des schémas ; un sous-schéma de l'espace projectif $\underset{\sim}{P}^r$ est essentiellement un idéal homogène de polynômes à $r+1$ variables. GROTHENDIECK a aussi construit [1] pour tout polynôme P à coefficients rationnels un schéma projectif $\mathcal{H}^P$ qui paramètre en un sens convenable l'ensemble des sous-schémas de $\underset{\sim}{P}^r$ ayant P pour polynôme de Hilbert. Ces "schémas de Hilbert" remplacent de manière fort avantageuse les variétés de Chow, et GROTHENDIECK avait posé la question de savoir s'ils sont connexes. C'est ce qu'a établi HARTSHORNE [2] par une étude soignée de l'équivalence linéaire des sous-schémas de $\underset{\sim}{P}^r$. Dans un but de simplification, nous exposerons les résultats de HARTSHORNE dans le langage équivalent des idéaux.

2. Polynômes de Hilbert.

Les résultats suivants sont classiques et sont exposés, par exemple, dans le traité de SAMUEL-ZARISKI ([3], vol. II, pages 231 à 237).

On note K un corps commutatif infini, r un entier $\geqslant 1$, S l'algèbre $K[X_0 , \ldots , X_r]$ des polynômes en des indéterminées $X_0 , \ldots , X_r$ à coefficients dans K , et S_n l'ensemble des polynômes homogènes de degré $n \geqslant 0$. Nous ne considérerons que des idéaux homogènes de S ; si $\mathfrak{a}$ est un tel idéal, on pose

$$\mathfrak{a}_n = \mathfrak{a} \cap S_n ,$$

d'où

$$\mathfrak{a} = \sum_{n \geqslant 0} \mathfrak{a}_n ;$$

on dit que deux idéaux $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont équivalents (notation $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}$) s'il existe un entier n_0 tel que $\mathfrak{a}_n = \mathfrak{b}_n$ pour tout entier $n \geqslant n_0$; un idéal équivalent à S est dit impropre.

On définit par ailleurs des polynômes à coefficients rationnels en une indéterminée T par les formules :

$$((T , k)) = (T + 1)(T + 2) \ldots (T + k)/k! \tag{2}$$

$$g_{m,k}(T) = ((T - 1 , k + 1)) - ((T - m - 1 , k + 1)) \tag{3}$$

où m et k sont des entiers avec $k \geqslant 0$. On prouve sans difficulté les relations :

$$((T , k)) = ((T - 1 , k)) + ((T , k - 1)) \tag{4}$$

$$g_{m,k}(T + 1) = g_{m,k-1}(T + 1) + g_{m,k}(T) \tag{5}$$

pour $k \geqslant 1$. On dit qu'un polynôme $P(T)$ à coefficients rationnels est un polynôme numérique s'il existe un entier n_0 tel que $P(n)$ soit entier pour tout entier $n \geqslant n_0$; c'est le cas pour $((T , k))$ et $g_{m,k}(T)$. Si $P(T)$ est un polynôme numérique de degré $d \geqslant 1$ et de terme dominant $m.T^d/d!$, le polynôme numérique $Q(T) = P(T) - P(T - 1)$ est de degré $d - 1$ et de terme dominant

$m.T^{d-1}/(d-1)!$; par récurrence sur d , ceci montre que m est un entier. Comme le terme dominant de $g_{m,k}(T)$ est $m.T^k/k!$, on voit par récurrence sur r que tout polynôme numérique de degré $\leqslant r$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$P(T) = \sum_{k=0}^{r} g_{m_k,k}(T) \qquad (m_o , \dots , m_r \text{ entiers}) \tag{6}$$

Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de S . D'après HILBERT, il existe un entier n_o et un polynôme numérique $\chi_{\mathfrak{a}}(T)$ tels que $\chi_{\mathfrak{a}}(n) = [S_n/\mathfrak{a}_n : K]$ pour tout $n \geqslant n_o$. Si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont deux idéaux, on voit immédiatement que l'on a :

$$\chi_{\mathfrak{a}} + \chi_{\mathfrak{b}} = \chi_{\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}} + \chi_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}} \ ; \tag{7}$$

si l'on a $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ et $\chi_{\mathfrak{a}} = \chi_{\mathfrak{b}}$, on a nécessairement $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}$. Donnons quelques exemples :

$$\chi_0(T) = ((T , r)) \tag{8}$$

$$\chi_{(F)}(T) = g_{d,r-1}(T+1) \tag{9}$$

si (F) est l'idéal principal engendré par un polynôme non nul $F \in S_d$.

Supposons $\mathfrak{a}$ non impropre ; le polynôme $\chi_{\mathfrak{a}}(T)$ est alors non nul de degré $d \leqslant r$; on dit que d est la <u>dimension</u> de $\mathfrak{a}$, et l'on prouve que la dimension de $\mathfrak{a}$ est la plus grande des dimensions des idéaux premiers contenant $\mathfrak{a}$; l'entier e tel que le terme dominant de $\chi_{\mathfrak{a}}(T)$ soit égal à $e.T^d/d!$ s'appelle le <u>degré</u> de l'idéal $\mathfrak{a}$. Lorsque $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$, on a $\chi_{\mathfrak{a}}(n) \geqslant \chi_{\mathfrak{b}}(n)$ pour tout entier n assez grand, d'où résulte que la dimension de $\mathfrak{a}$ majore celle de $\mathfrak{b}$. On convient aussi qu'un idéal impropre est de dimension -1 . Si le corps K est algébriquement clos, et si $\mathfrak{a}$ est l'idéal premier définissant une sous-variété irréductible V de $\underset{\sim}{P}^r$, la dimension et le degré de $\mathfrak{a}$ sont respectivement égaux à ceux de V .

3. Equivalence linéaire des idéaux.

La définition de l'équivalence linéaire pour les idéaux est calquée sur celle des cycles,; il faut donc définir d'abord la notion de famille à un paramètre d'idéaux. Introduisons pour cela une nouvelle indéterminée U et le corps $L = K(U)$ des fractions rationnelles en U à coefficients dans K ; on note A. l'anneau de polynômes $K[U]$. Pour tout sous-anneau B de L , on pose

$$S^B = B[X_o , \dots , X_r]$$

et l'on note S_n^B l'ensemble des éléments homogènes de degré n de S^B .

Soient $\mathfrak{A}$ un idéal (homogène) de S^L et u un élément de K ; on pose $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \cap S^A$, et l'on définit un homomorphisme φ_u de l'anneau S^A sur l'anneau S par $\varphi_u(P) = P(u, X_0, \ldots, X_r)$; l'idéal $\varphi_u(\mathfrak{B})$ de S sera noté $\mathfrak{A}(u)$. Nous allons montrer que l'idéal $\mathfrak{A}$ de S^L et l'idéal $\mathfrak{A}(u)$ de S ont même polynôme de Hilbert. En effet, choisissons un entier $n \geqslant 0$; les monômes de degré n en $X_0, \ldots, X_r$ forment une base de l'espace L-vectoriel S_n^L et aussi une base du A-module libre S_n^A ; l'ensemble $\mathfrak{B}_n$ des éléments homogènes de degré n de $\mathfrak{B}$ est l'intersection de S_n^A avec le sous-espace L-vectoriel $\mathfrak{A}_n = \mathfrak{A} \cap S_n^L$ de S_n^L ; comme l'anneau A est principal, le A-module $\mathfrak{B}_n$ est libre et a un rang égal au rang d_n de $\mathfrak{A}_n$ sur L ; on a

$$\mathfrak{A}(u)_n = \varphi_u(\mathfrak{B}_n)$$

et il est immédiat que le noyau de la restriction de φ_u à $\mathfrak{B}_n$ est égal à

$$u.S_n^A \cap \mathfrak{A}_n = u.\mathfrak{B}_n ,$$

ce qui montre que l'espace K-vectoriel $\mathfrak{A}(u)_n$ est de rang d_n . On a donc

$$[\mathfrak{A}_n : L] = [\mathfrak{A}(u)_n : K]$$

pour tout $n \geqslant 0$, d'où notre assertion.

Ceci étant convenu, on dira que deux idéaux $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ de S sont linéairement équivalents s'il existe des idéaux $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_h$ de S^L et des éléments $u_1, \ldots, u_h, v_1, \ldots, v_h$ de K tels que

$$(10) \quad \mathfrak{a} = \mathfrak{A}_1(u_1) , \qquad \mathfrak{A}_i(v_i) = \mathfrak{A}_{i+1}(u_i) \text{ pour } 1 \leqslant i < h , \qquad \mathfrak{A}_h(v_h) = \mathfrak{b} .$$

Il est immédiat que l'on définit là une relation d'équivalence dans l'ensemble des idéaux de S ; la remarque précédente montre immédiatement que deux idéaux linéairement équivalents ont même polynôme de Hilbert.

4. Enoncé des résultats.

Les rappels et définitions qui précèdent nous permettent d'énoncer les principaux résultats de HARTSHORNE ; les démonstrations seront données plus loin.

THÉORÈME 1. - *Soit $P(T)$ un polynôme à coefficients rationnels. Pour qu'il existe un idéal $\mathfrak{a}$ de S avec $P = \chi_{\mathfrak{a}}$, il faut et il suffit qu'il existe des entiers $m_0 \geqslant m_1 \geqslant m_2 \geqslant \cdots \geqslant m_r \geqslant 0$ avec*

$$P(T) = \sum_{k=0}^{r} g_{m_k,k}(T) .$$

Lorsque l'idéal $\mathfrak{a}$ est premier et définit une sous-variété V sans points singuliers de l'espace projectif $\underline{P}^r$, le polynôme de Hilbert $\chi_{\mathfrak{a}}$ s'exprime au moyen des classes de Chern de V et de la classe d'équivalence linéaire des sections hyperplanes de V en conformité avec la formule de Riemann-Roch-Hirzebruch. Le théorème 1 implique alors certaines inégalités ; par exemple, si V est une courbe de genre g et de degré m dans $\underline{P}^r$, on a $g \leqslant (m-1)(m-2)/2$ (résultat bien connu pour les courbes planes). Dans le cas général, ces inégalités fournissent des conditions nécessaires pour qu'un diviseur soit ample ; la question mériterait un examen approfondi (*).

THÉORÈME 2. - Pour que deux idéaux homogènes de polynômes soient linéairement équivalents, il faut et il suffit qu'ils aient même polynôme de Hilbert.

On a montré au n° 3 la nécessité de la condition précédente. Soient par ailleurs $\overline{K}$ une clôture algébrique de K et $P(T)$ un polynôme à coefficients rationnels ; l'ensemble $\mathcal{H}^P(\overline{K})$ des points géométriques du schéma de Hilbert $\mathcal{H}^P$ à valeurs dans $\overline{K}$ est en correspondance bijective avec l'ensemble des classes d'idéaux de $S^{\overline{K}}$ ayant P pour polynôme de Hilbert. Le théorème 2 montre que deux points de $\mathcal{H}^P(\overline{K})$ peuvent être joints par une chaîne formée de courbes algébriques ; comme un schéma projectif a mêmes composantes connexes que le schéma réduit associé, il en résulte que $\mathcal{H}^P$ est connexe. On déduit facilement de là que le schéma de Hilbert "absolu" défini sur l'anneau des entiers est lui aussi connexe.

5. Caractère numérique d'un idéal.

Pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de S et tout entier i avec $0 \leqslant i \leqslant r$, on notera $R_i\mathfrak{a}$ l'ensemble des polynômes de la forme $f = \sum_{m \geqslant 0} f_m$ avec $f_m \in S_m$ tels que l'idéal $(\mathfrak{a} : f_m)$ soit de dimension $\leqslant i$.

PROPOSITION 1.

(a) On a $\mathfrak{a} \subset R_0\mathfrak{a} \subset R_1\mathfrak{a} \subset \cdots \subset R_r\mathfrak{a} = S$.

(b) L'ensemble $R_i\mathfrak{a}$ est un idéal. De plus, pour tout idéal $\mathfrak{b}$ contenant $\mathfrak{a}$, on a $\mathfrak{b} \subset R_i\mathfrak{a}$ si et seulement si le polynôme $\chi_{\mathfrak{a}} - \chi_{\mathfrak{b}}$ est de degré $\leqslant i$.

(c) Supposons $\mathfrak{a}$ de la forme $\bigcap_{\alpha \in I} \mathfrak{p}_\alpha$, l'ensemble I étant fini et les idéaux $\mathfrak{p}_\alpha$ premiers. Soit I_i l'ensemble des $\alpha \in I$ tels que $\mathfrak{p}_\alpha$ soit de dimension $> i$. On a alors

---

(*) Le théorème 1 semble avoir été démontré par MACAULAY dans son petit livre bien connu : The algebraic theory of modular systems. - Cambridge, at the University Press, 1916 [Reprinted by Stechert-Hafner, 1964] (Cambridge Tracts in Mathematics and mathematical Physics, 19).

$$R_i\,\mathfrak{a} = \bigcap_{\alpha\in I_i} \mathfrak{p}_\alpha$$

On note $\mathfrak{F}_i$ l'ensemble des idéaux $\mathfrak{b}$ contenant $\mathfrak{a}$ tels que le polynôme $\chi_\mathfrak{a} - \chi_\mathfrak{b}$ soit de degré $\leqslant i$. Comme l'anneau S est noethérien, il existe des idéaux $\mathfrak{b}(1)$, ... , $\mathfrak{b}(s)$ appartenant à $\mathfrak{F}_i$ tels que l'idéal

$$\mathfrak{c} = \sum_{j=1}^{s} \mathfrak{b}(j)$$

contienne tout idéal appartenant à $\mathfrak{F}_i$. Pour tout entier n assez grand $(n \geqslant n_o)$, le rang du K-espace vectoriel $\mathfrak{c}_n/\mathfrak{a}_n$ est égal à $\chi_\mathfrak{a}(n) - \chi_\mathfrak{c}(n)$ et le rang du K-espace vectoriel $\mathfrak{b}(j)_n/\mathfrak{a}_n$ est égal à $\chi_\mathfrak{a}(n) - \chi_{\mathfrak{b}(j)}(n)$; comme on a

$$\mathfrak{c}_n = \sum_j \mathfrak{b}(j)_n \ ,$$

on en déduit les inégalités :

$$0 \leqslant \chi_\mathfrak{a}(n) - \chi_\mathfrak{c}(n) \leqslant \sum_{j=1}^{s} [\chi_\mathfrak{a}(n) - \chi_{\mathfrak{b}(j)}(n)] \qquad (n \geqslant n_o) \ , \tag{11}$$

et comme chacun des polynômes $\chi_\mathfrak{a} - \chi_{\mathfrak{b}(j)}$ est de degré $\leqslant i$, il en est de même de $\chi_\mathfrak{a} - \chi_\mathfrak{c}$. On a donc $\mathfrak{c} \in \mathfrak{F}_i$; si $\mathfrak{b}$ est un idéal tel que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \subset \mathfrak{c}$, on a les inégalités :

$$0 \leqslant \chi_\mathfrak{a}(n) - \chi_\mathfrak{b}(n) \leqslant \chi_\mathfrak{a}(n) - \chi_\mathfrak{c}(n) \ , \tag{12}$$

pour tout n assez grand, d'où résulte immédiatement $\mathfrak{b} \in \mathfrak{F}_i$. Soit enfin f dans S_m et soit $\mathfrak{b}$ l'idéal $\mathfrak{a} + (f)$; on a une suite exacte :

$$0 \to S_{n-m}/(\mathfrak{a} : f)_{n-m} \xrightarrow{\varphi} S_n/\mathfrak{a}_n \to S_n/\mathfrak{b}_n \to 0 \qquad (n \geqslant m) \tag{13}$$

où φ est défini à partir de la multiplication par f . On en déduit :

$$\chi_{(\mathfrak{a}:f)}(n - m) = \chi_\mathfrak{a}(n) - \chi_\mathfrak{b}(n) \tag{14}$$

pour n assez grand ; on a alors les équivalences :

$f \in \mathfrak{c} \iff \mathfrak{b} \subset \mathfrak{c} \iff \chi_\mathfrak{a} - \chi_\mathfrak{b}$ de degré $\leqslant i \iff \chi_{(\mathfrak{a}:f)}$ de degré $\leqslant i \iff f \in R_i\mathfrak{a}$

d'où

$$\mathfrak{c} = R_i\,\mathfrak{a} \ .$$

L'assertion (b) résulte de là et (a) est triviale.

Pour prouver (c), considérons un polynôme homogène f et notons H l'ensemble des $\alpha \in I$ tels que $f \notin \mathfrak{p}_\alpha$; on a alors $(\mathfrak{a} : f) = \bigcap_{\alpha\in H} \mathfrak{p}_\alpha$

et par conséquent, $(\alpha : f)$ est de dimension $\leqslant i$ si, et seulement si, chacun des idéaux premiers p_α pour $\alpha \in H$ est de dimension $\leqslant i$, c'est-à-dire si $H \cap I_i = \emptyset$, ce qui équivaut encore à $f \in p_\alpha$ pour $\alpha \in I_i$.

C. Q. F. D.

Le polynôme $P = \chi_\alpha - \chi_{R_i \alpha}$ est de degré $\leqslant i$, et $P(n)$ est un entier positif pour tout n assez grand ; il en résulte que le terme de degré i dans P est de la forme $n_i(\alpha).T^i/i!$, où $n_i(\alpha)$ est un entier positif. La suite

$$n_*(\alpha) = (n_r(\alpha) \ , \ \dots \ , \ n_0(\alpha))$$

s'appelle le caractère numérique de l'idéal α ; dans la suite de cet exposé, on notera $m_* \prec n_*$ la relation d'ordre lexicographique dans l'ensemble des suites de $r + 1$ entiers positifs.

Nous allons montrer que l'on a :

$$n_i(\mathfrak{A}(u)) \geqslant n_i(\mathfrak{A}) \qquad (0 \leqslant i \leqslant r) \tag{15}$$

pour tout idéal $\mathfrak{A}$ de S^L et tout élément u de K . Posons pour simplifier $\mathfrak{B} = R_i \mathfrak{A}$; on a $\mathfrak{A}(u) \subset \mathfrak{B}(u)$ et le polynôme $\chi_{\mathfrak{A}(u)} - \chi_{\mathfrak{B}(u)}$ est égal à $\chi_{\mathfrak{A}} - \chi_{\mathfrak{B}}$ d'après le n° 3, donc est de degré $\leqslant i$ d'après la proposition 1. On en déduit

$$\mathfrak{B}(u) \subset R_i[\mathfrak{A}(u)] = \mathfrak{b}$$

par la proposition 1. Pour tout n assez grand, on a alors :

$$\chi_{\mathfrak{A}(u)}(n) - \chi_{\mathfrak{b}}(n) \geqslant \chi_{\mathfrak{A}(u)}(n) - \chi_{\mathfrak{B}(u)}(n) = \chi_{\mathfrak{A}}(n) - \chi_{\mathfrak{B}}(n)$$

d'où immédiatement (15).

6. Stabilisation des idéaux.

Les constructions qui suivent sont analogues à celles utilisées par BOREL pour construire des points fixes d'un groupe linéaire résoluble opérant dans une variété projective.

Etant donnés un idéal α de S et un entier j avec $0 \leqslant j \leqslant r$, nous noterons $s_j \alpha$ l'ensemble des polynômes de la forme $\sum X_j^p . f_p$ où f_p est un polynôme à coefficients dans K en les indéterminées X_i pour $i \neq j$, tel que $X_j^p f_p$ appartienne à l'idéal $\alpha + (X_j^{p+1})$.

PROPOSITION 2. - Pour tout idéal α de S , l'ensemble $s_j \alpha$ est un idéal de S linéairement équivalent à α , et l'on a

$$n_*(s_j \alpha) \succ n_*(\alpha) \ .$$

Notons σ_j l'automorphisme de la L-algèbre S^L défini par $\sigma_j(X_j) = UX_j$ et $\sigma_j(X_i) = X_i$ pour $i \neq j$; on note α^L l'idéal de S^L engendré par α et l'on pose $\mathfrak{A} = \sigma_j(\alpha^L)$. Nous allons prouver les relations :

$$\alpha = \mathfrak{A}(1) \ , \qquad s_j\,\alpha = \mathfrak{A}(0) \tag{16}$$

qui montrent que α et $s_j\,\alpha$ sont linéairement équivalents ; de plus, on voit facilement que l'on a

$$R_i(\alpha^L) = (R_i\ \alpha)^L \ ,$$

d'où

$$n_i(\alpha^L) = n_i(\alpha) \ ;$$

puisque σ_j est un automorphisme de S^L , on a

$$n_i(\mathfrak{A}) = n_i(\alpha^L) \ ,$$

et l'on a

$$n_i(\mathfrak{A}(0)) \geqslant n_i(\mathfrak{A}) \quad \text{d'après (15) ;}$$

en appliquant (16), on a donc

$$n_i(s_j\,\alpha) \geqslant n_i(\alpha) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant i \leqslant r$$

et <u>a fortiori</u>

$$n_*(s_j\,\alpha) \succ n_*(\alpha) \ .$$

Posons

$$B = K[U\ ,\ U^{-1}] \quad \text{et} \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{A} \cap S^A \ .$$

En considérant une base du K-espace vectoriel S contenant une base du K-espace vectoriel α , on montre que l'idéal α^B de S^B engendré par α est égal à $\alpha^L \cap S^B$; comme on a $\sigma_j(S^B) = S^B$, on en déduit :

$$\mathfrak{B} = \sigma_j(\alpha^L) \cap S^A = \sigma_j(\alpha^L) \cap \sigma_j(S^B) \cap S^A = \sigma_j(\alpha^B) \cap S^A \ .$$

Or tout élément de S^B s'écrit de manière unique sous la forme :

$$f = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{d=0}^{+\infty} U^m X_j^d f_{m,d} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} U^m f_m \tag{17}$$

et appartient à α^B si et seulement si l'on a $f_m \in \alpha$ pour tout m ; l'idéal $\mathfrak{B} = \sigma_j(\alpha^B) \cap S^A$ de S^A se compose donc des éléments

$$\sigma_j(f) = \sum_m \sum_{d \geqslant 0} U^{m+d} X_j^d f_{m,d}$$

tels que $f_m \in \alpha$ pour tout m et $f_{-p,d} = 0$ pour $0 \leqslant d < p$. Si les homomorphismes φ_0 et φ_1 de S^A sur S sont définis comme au n° 3, on trouve

$$\varphi_1(\sigma_j(f)) = f \quad \text{et} \quad \varphi_0(\sigma_j(f)) = \sum_{p \geqslant 0} X_j^p \, f_{-p,p}$$

d'où immédiatement (16).

C. Q. F. D.

Disons qu'un idéal de S est monomial s'il admet une base d'espace vectoriel sur K formée de monômes. La proposition 2 montre immédiatement que, pour tout idéal α, l'idéal $b = s_0 \, s_1 \ldots s_r \, \alpha$ est un idéal monomial linéairement équivalent à α, tel que $n_*(b) \succ n_*(\alpha)$.

De manière analogue, soient j et k deux entiers compris entre 0 et r. Définissons l'automorphisme $\tau_{j,k}$ de S^L qui induit l'identité sur L, transforme X_k en $X_k + U^{-1} X_j$ et X_i en X_i pour $i \neq k$. On note $t_{jk}\,\alpha$ l'idéal $(\tau_{jk}(\alpha^L))(0)$ de S ; on montre facilement que l'idéal $t_{jk}\,\alpha$ est linéairement équivalent à α, avec $n_*(t_{jk}\,\alpha) \succ n_*(\alpha)$, et que $t_{jk}\,\alpha$ est monomial si α l'est.

Nous dirons qu'un idéal monomial est balancé s'il est engendré par des monômes en $X_1, \ldots, X_r$ et, si avec tout monôme M, il contient les monômes obtenus en remplaçant dans M une indéterminée X_k par X_j avec $1 \leqslant j < k \leqslant r$. En appliquant des opérations t_{jk} dans un ordre convenable à un idéal monomial b, on obtient un idéal monomial balancé c, linéairement équivalent à b avec $n_*(c) \succ n_*(b)$.

7. Eventails.

Géométriquement, un drapeau D dans $\underset{\sim}{P}^r$ est une suite croissante de sous-variétés linéaires $V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_{r-1} \subset V_r$, avec V_j de dimension j ; un éventail E est un ensemble fini de sous-variétés linéaires dans $\underset{\sim}{P}^r$, tel que toute variété de dimension i appartenant à E coupe V_{r-1} selon V_{i-1} $(1 \leqslant i < r)$.

Par analogie, on appellera éventail (de classe p avec $1 \leqslant p \leqslant r$), un idéal α de S qui est intersection d'un nombre fini d'idéaux premiers de la forme

$$p_k^\alpha = (X_1, \ldots, X_{s-1}, X_s - a_s^\alpha X_0, \ldots, X_k - a_k^\alpha X_0) \tag{18}$$

pour $1 \leqslant k \leqslant r$, et $1 \leqslant \alpha \leqslant t_k$, l'entier s étant le plus petit des entiers k et p, et les a_k^α étant des éléments de K. On supposera qu'il n'y a aucune relation d'inclusion entre les idéaux p_k^α ; on a alors

$$n_i(\alpha) = t_{r-i} \quad \text{et} \quad n_r(\alpha) = 0 .$$

Les principales propriétés des éventails sont contenues dans les lemmes techniques suivants ; faute de place, la démonstration en sera omise ; disons seulement que l'on peut notablement simplifier les démonstrations de HARTSHORNE.

LEMME 1.

(a) Deux éventails $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ de classe r avec $n_*(\mathfrak{a}) = n_*(\mathfrak{b})$ sont linéairement équivalents.

(b) Si $\mathfrak{a}$ est un éventail de classe r, on a

$$\chi_{\mathfrak{a}} = \sum_{k=0}^{r} g_{m_k,k}$$

avec $m_k = n_k + n_{k+1} + \dots + n_r$.

Il résulte immédiatement de ce lemme que deux éventails de classe r sont linéairement équivalents si et seulement s'ils ont même polynôme de Hilbert.

LEMME 2. - Tout éventail $\mathfrak{a}$ de classe $p \leqslant r$ est linéairement équivalent à un idéal $\mathfrak{b}$, qui est un éventail de classe $p+1$, ou bien qui vérifie $n_*(\mathfrak{b}) \underset{\neq}{\geq} n_*(\mathfrak{a})$.

L'idée de la démonstration est d'introduire l'idéal $\mathfrak{A}$ de S^L construit comme $\mathfrak{a}$, mais en remplaçant a_p^{α} par Ua_p^{α} dans la définition de p_p^{α} ; on a alors $\mathfrak{a} = \mathfrak{A}(1)$, et l'on pose $\mathfrak{b} = \mathfrak{A}(0)$.

LEMME 3. - Soit P un polynôme à coefficients rationnels. L'ensemble des suites n_* de $r+1$ entiers positifs pour lesquelles il existe un éventail $\mathfrak{a}$ avec $n_*(\mathfrak{a}) = n_*$ et $\chi_{\mathfrak{a}} = P$ est fini.

Avant d'énoncer le lemme 4, nous choisirons une famille $(a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant r,\, j\geqslant 1}$ d'éléments tous distincts de K, ce qui est possible car le corps K est supposé infini. Pour toute suite $\underset{\sim}{s} = (s_1, \dots, s_r)$ d'entiers positifs, nous poserons :

$$M_{\underset{\sim}{s}} = \prod_{i=1}^{r} X_i^{s_i}, \qquad Q_{\underset{\sim}{s}} = \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{s_i} (X_i - a_{ij} X_0). \tag{19}$$

LEMME 4. - Soient $\mathfrak{b}$ un idéal monomial balancé engendré par les monômes $M_{\underset{\sim}{s}(1)}, \dots, M_{\underset{\sim}{s}(m)}$ et $\mathfrak{c}$ l'idéal engendré par $Q_{\underset{\sim}{s}(1)}, \dots, Q_{\underset{\sim}{s}(m)}$. Alors $\mathfrak{c}$ est un éventail, et l'on a $s_0(R_i\, \mathfrak{c}) = R_i\, \mathfrak{b}$ pour $0 \leqslant i \leqslant r$.

La dernière assertion du lemme 4 entraîne évidemment $n_*(\mathfrak{b}) = n_*(\mathfrak{c})$ puisque les idéaux $R_i\, \mathfrak{b}$ et $R_i\, \mathfrak{c}$ sont linéairement équivalents (prop. 2), donc ont même polynôme de Hilbert.

8. Démonstration des théorèmes 1 et 2.

Soit P un polynôme à coefficients rationnels et soit $\mathfrak{a}$ un idéal ayant P pour polynôme de Hilbert. On a noté à la fin du n° 6 qu'il existait un idéal monomial balancé $\mathfrak{b}$ linéairement équivalent à $\mathfrak{a}$, avec $n_*(\mathfrak{b}) \succ n_*(\mathfrak{a})$; la construction du lemme 4 fournit un éventail $\mathfrak{c}$ linéairement équivalent à $\mathfrak{b}$ tel que $n_*(\mathfrak{c}) = n_*(\mathfrak{b})$. D'autre part, l'ensemble des suites n_* pour lesquelles il existe un éventail $\mathfrak{a}'$ avec $n_*(\mathfrak{a}') = n_*$ et $\chi_{\mathfrak{a}'} = P$ est fini (lemme 3) ; parmi les éventails linéairement équivalents à $\mathfrak{a}$ (on sait déjà qu'il en existe), on peut donc en choisir un, soit $\mathfrak{d}$, dont la classe est maxima, et avec $n_*(\mathfrak{d}) \succ n_*(\mathfrak{d}')$ pour tous les éventails $\mathfrak{d}'$ de même classe et de même polynôme de Hilbert que lui. Le lemme 2 montre alors que l'éventail $\mathfrak{d}$ est de classe r ; comme P est le polynôme de Hilbert de $\mathfrak{d}$, le lemme 1, (b) entraîne le théorème 1.

On a donc prouvé que tout idéal $\mathfrak{a}$ avec $\chi_{\mathfrak{a}} = P$ est linéairement équivalent à un éventail $\mathfrak{d}$ de classe r, avec $\chi_{\mathfrak{d}} = P$; comme deux éventails de classe r ayant même polynôme de Hilbert sont linéairement équivalents, on a prouvé que deux idéaux ayant même polynôme de Hilbert sont linéairement équivalents. Le théorème 2 est prouvé.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GROTHENDIECK (Alexander). - Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique, IV : Les schémas de Hilbert, Séminaire Bourbaki, t. 13, 1960/61, n° 221, 28 p.

[2] HARTSHORNE (R.). - Connectedness of the Hilbert scheme, Princeton Thesis, 1963 (non publié).

[3] ZARISKI (O.) and SAMUEL (P.). - Commutative algebra, Vol. 1 and 2. - Princeton, D. Van Nostrand Comp., 1958-1960 (The University Series in higher Mathematics).